

Perturbações Cosmológicas

Um pouco além do Princípio Cosmológico.

Alessandro Marins
alessandro.marins@usp.br

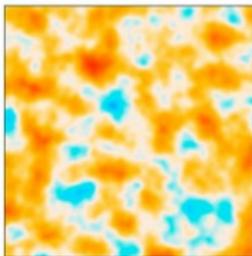
Departamento de Física Matemática
Universidade de São Paulo

Julho/2019

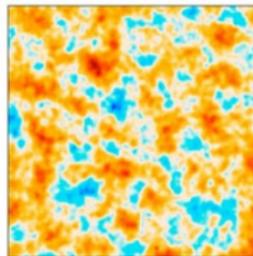
Motivação: Entender as imagens



COBE



WMAP

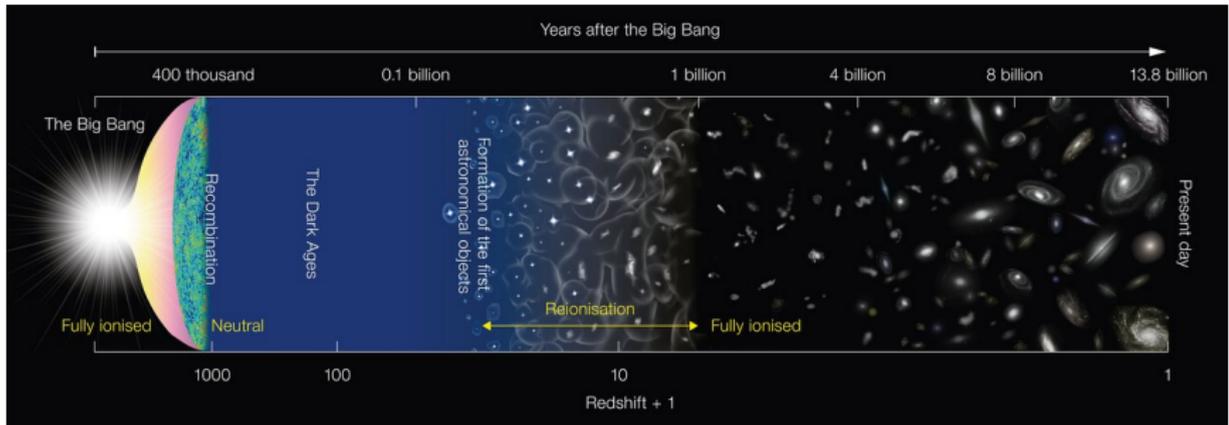


Planck

Introdução

- ▶ Medidas como as do PLANCK demonstram que o Universo não possui temperatura que satisfaça exatamente o Princípio Cosmológico (homogeneidade e isotropia);
- ▶ Universo homogêneo e isotrópico não pode dar origem a estruturas tais como: galáxias, aglomerados e filamentos, que dependendo da escala observada não são distribuídos de maneira nem homogêneas, nem isotrópicas;
- ▶ É preciso que exista inhomogeneidades na distribuição de matéria para que estas estruturas se formem.

Introdução

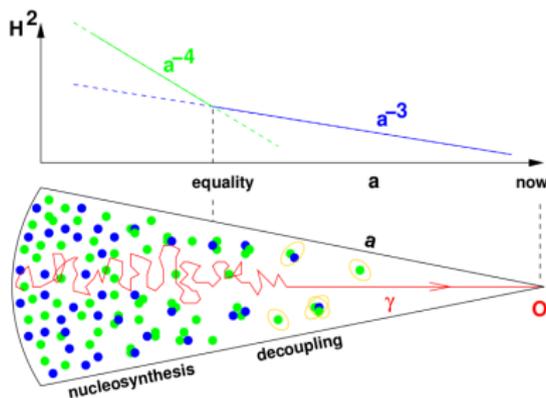


- ▶ A ideia de um Universo em expansão leva a ideia de um Universo com um início;
- ▶ o Universo está se expandindo, então esperamos que a matéria, no passado, fosse mais quente e densa do que é hoje;

Introdução

- ▶ Como a temperatura do Universo no tempo evolui segundo $T(t) = T_0/a(t) = T_0(1+z)$, com $a_0 = 1$, um Universo cada vez mais jovem é um Universo cada vez mais quente;
- ▶ e em um dado período era quente o suficiente para não permitir que elétrons estivesse ligado em átomo ($> 6 \cdot 10^4 \text{K}$). Voltando ainda mais, que os núcleos de hidrogênio se formassem ($> 10^9 \text{K}$);
- ▶ isto porquê a radiação é tão energética e o livre caminho médio dos fótons é tão curto, que eles não permitem que núcleos sejam formados.

Introdução



- Precisamos de uma descrição mais refinada a ponto de conseguirmos descrever tanto a distribuição de matéria e as estruturas que vemos hoje no Universo, quanto as flutuações nas temperaturas da radiação cósmica de fundo (CMB);

Introdução

- ▶ Para conseguirmos descrever tais questões, faremos uma perturbação de primeira ordem no tensor métrico, que gerará correções nas equações relativísticas,
- ▶ e também correções nas fontes de deformação do espaço, que no caso são as densidades de energia dos fluidos.

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} G_{\mu\nu} = \bar{G}_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu}, \\ T_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}, \end{cases}$$

$$\rho_i = \bar{\rho}_i + \delta\rho_i,$$

com $i = b, c, \nu, \gamma$.

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} G_{\mu\nu} = \bar{G}_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu}, \\ T_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}, \end{cases}$$

$$\rho_i = \bar{\rho}_i + \delta\rho_i,$$

com $i = b, c, \nu, \gamma$.

Definimos ainda

$$\delta_i = \frac{\delta\rho_i}{\bar{\rho}_i} = \frac{\delta\rho_i}{\rho_i}$$

Assumiremos que o "background" é um Universo FLRW-flat, por conveniência. Assim, $\bar{g}_{\mu\nu} = a(\eta)^2 \eta_{\mu\nu}$, em que η é o tempo comóvel ($dt = a^2 d\eta$) e $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski, $(-, +, +, +)$. E ainda, $\delta g_{\mu\nu} \doteq a(\eta)^2 h_{\mu\nu}$.

Definindo $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\bar{\mu}} \eta^{\nu\bar{\nu}} h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$, é possível mostrarmos que

$$g^{\mu\nu} = a^{-2} (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})$$

Por definição, $h_{\mu\nu}$ tem que ser simétrico uma vez que queremos que $g_{\mu\nu}$ também o seja.

A forma mais geral de representar $h_{\mu\nu}$ é

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2A & -B_i \\ -B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{pmatrix},$$

e portanto,

A forma mais geral de representar $h_{\mu\nu}$ é

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2A & -B_i \\ -B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{pmatrix},$$

e portanto,

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -(1 + 2A) & -B_i \\ -B_i & (1 - 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{pmatrix}.$$

A forma mais geral de representar $h_{\mu\nu}$ é

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2A & -B_i \\ -B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{pmatrix},$$

e portanto,

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -(1 + 2A) & -B_i \\ -B_i & (1 - 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{pmatrix}.$$

O elemento de linha, segundo essa métrica, é:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \\ &= a^2 \left(-(1 + 2A)d\eta^2 - 2B_i d\eta dx^i + ((1 - 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}) dx^i dx^j \right) \end{aligned}$$

$$ds^2 = a^2 \left(-(1 + 2A)d\eta^2 - 2B_i d\eta dx^i + ((1 - 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}) dx^i dx^j \right)$$

Por conveniencia, chamarei $A = \Psi$, $D = \Phi$, $B_i = \omega_i$ e $E_{ij} = h_{ij}$.

$$ds^2 = a^2 \left(-(1 + 2A)d\eta^2 - 2B_i d\eta dx^i + ((1 - 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}) dx^i dx^j \right)$$

Por conveniencia, chamarei $A = \Psi$, $D = \Phi$, $B_i = \omega_i$ e $E_{ij} = h_{ij}$.

$$ds^2 = a^2 \left(-(1 + 2\Psi)d\eta^2 - 2\omega_i d\eta dx^i + ((1 - 2\Phi)\delta_{ij} + 2h_{ij}) dx^i dx^j \right)$$

A discussão a cerca do espaço-tempo perturbado requer uma correspondência pontual entre o espaço background e o espaço perturbado. Dado um sistema de coordenadas no background, há muitos sistemas de coordenadas , todos muito próximos uns dos outros, no espaço-tempo perturbado que mantêm válida a métrica perturbada. A escolha entre esses "sistema perturbados" é denominado de **escolha de gauge**.

A discussão a cerca do espaço-tempo perturbado requer uma correspondência pontual entre o espaço background e o espaço perturbado. Dado um sistema de coordenadas no background, há muitos sistemas de coordenadas , todos muito próximos uns dos outros, no espaço-tempo perturbado que mantêm válida a métrica perturbada. A escolha entre esses "sistema perturbados" é denominado de **escolha de gauge**.

Trasf. de gauge = transformação de coordenadas entre sistemas de coordenadas no espaço-tempo perturbado

Dois sistemas de coordenadas no espaço perturbado, \tilde{x}^α e \hat{x}^α , associados ao background, x^α , estão muito próximos, tal que podemos relacioná-los segundo uma transformação

$$\hat{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha + \xi^\alpha$$

com ξ^α e suas derivadas sendo no máximo de primeira ordem.

A partir do Teorema de Helmholtz, podemos decompor um vetor ω_i em uma parte irrotacional e uma parte de divergente nulo

$$\omega_i = \omega_i^S + \omega_i^V \implies \begin{cases} \nabla \times \omega^S = 0 \Rightarrow \omega^S \doteq -\nabla \omega = -\omega, i, \\ \nabla \bullet \omega^V = 0 \Rightarrow \omega^V_{,i,i} = 0, \end{cases}$$

A partir do Teorema de Helmholtz, podemos decompor um vetor ω_i em uma parte irrotacional e uma parte de divergente nulo

$$\omega_i = \omega_i^S + \omega_i^V \implies \begin{cases} \nabla \times \omega^S = 0 \Rightarrow \omega^S \doteq -\nabla\omega = -\omega_{,i}, \\ \nabla \bullet \omega^V = 0 \Rightarrow \omega^V_{,i,i} = 0, \end{cases}$$

Então,

$$\omega_i = -\omega_{,i} + \omega_i^V$$

A uma decomposição equivalente para 3-tensores do tipo 2 como h_{ij}

$$h_{ij} = h_{ij}^S + h_{ij}^V + h_{ij}^T \implies \begin{cases} h_{ij}^S = (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) h \\ h_{ij}^V = -\frac{1}{2} (h_{i,j} + h_{j,i}), \text{ com } \delta^{ij} h_{i,j} = 0, \\ \delta^{ik} h_{ij,k}^T = 0. \end{cases}$$

A uma decomposição equivalente para 3-tensores do tipo 2 como h_{ij}

$$h_{ij} = h_{ij}^S + h_{ij}^V + h_{ij}^T \implies \begin{cases} h_{ij}^S = (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) h \\ h_{ij}^V = -\frac{1}{2} (h_{i,j} + h_{j,i}), \text{ com } \delta^{ij} h_{i,j} = 0, \\ \delta^{ik} h_{ij,k}^T = 0. \end{cases}$$

Com isso, podemos dividir o tensor métrico em três partes: Uma só com partes que se transformam como escalares, outra que só se transformam como vetores e outro que só se transformam como tensores,

A uma decomposição equivalente para 3-tensores do tipo 2 como h_{ij}

$$h_{ij} = h_{ij}^S + h_{ij}^V + h_{ij}^T \implies \begin{cases} h_{ij}^S = (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) h \\ h_{ij}^V = -\frac{1}{2} (h_{i,j} + h_{j,i}), \text{ com } \delta^{ij} h_{i,j} = 0, \\ \delta^{ik} h_{ij,k}^T = 0. \end{cases}$$

Com isso, podemos dividir o tensor métrico em três partes: Uma só com partes que se transformam como escalares, outra que só se transformam como vetores e outro que só se transformam como tensores,

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^S + g_{\mu\nu}^V + g_{\mu\nu}^T.$$

Tipo de perturbações

- S:** São induzidas por inhomogeneidades na densidade de energia;
São importantes por exibirem instabilidade gravitacional e
poderem levar a formação de estruturas no Universo;

Tipo de perturbações

- S:** São induzidas por inhomogeneidades na densidade de energia;
São importantes por exibirem instabilidade gravitacional e
poderem levar a formação de estruturas no Universo;
- V:** Estão relacionadas a movimentos rotacionais do fluido;
Decaem rapidamente em um universo em expansão;

Tipo de perturbações

- S:** São induzidas por inhomogeneidades na densidade de energia;
São importantes por exibirem instabilidade gravitacional e poderem levar a formação de estruturas no Universo;
- V:** Estão relacionadas a movimentos rotacionais do fluido;
Decaem rapidamente em um universo em expansão;
- T:** Não possui análogo na teoria gravitacional newtoniana;
Descreve ondas gravitacionais;
Na teoria linear as ondas gravitacionais não induzem qualquer perturbação em um fluido perfeito;
Terão importância cosmológica desde que sejam fortes o suficiente tal que tenham efeito observável sobre a anisotropia da CMB.

Perturbações escalares no gauge Newtoniano

Isto nos leva a termos ao tensor métrico perturbado no **gauge Newtoniano** como

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -(1 + 2\Psi) & 0 \\ 0 & (1 + \Phi)\delta_{ij} \end{pmatrix},$$

Perturbações escalares no gauge Newtoniano

Isto nos leva a termos ao tensor métrico perturbado no **gauge Newtoniano** como

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -(1 + 2\Psi) & 0 \\ 0 & (1 + \Phi)\delta_{ij} \end{pmatrix},$$

e o elemento de linha

$$ds^2 = a^2(\eta) \left(-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \right)$$

Se $a = 1$, teríamos o caso de um campo gravitacional fraco.

Ψ corresponde ao potencial gravitacional

Φ a perturbação da curvatura espacial.

Perturbações escalares no gauge Newtoniano

Isto nos leva a termos ao tensor métrico perturbado no **gauge Newtoniano** como

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -(1 + 2\Psi) & 0 \\ 0 & (1 + \Phi)\delta_{ij} \end{pmatrix},$$

e o elemento de linha

$$ds^2 = a^2(\eta) \left(-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \right)$$

Se $a = 1$, teríamos o caso de um campo gravitacional fraco.

Ψ corresponde ao potencial gravitacional

Φ a perturbação da curvatura espacial.

Com este tensor métrico, podemos calcular as equações de Einstein perturbadas.

Símbolo de Christoffel perturbado

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} &= \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}), \\ R_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\gamma}^{\gamma} - \Gamma_{\mu\gamma}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\nu}^{\gamma}, \\ R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \\ G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.\end{aligned}$$

Símbolo de Christoffel perturbado

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} &= \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}), \\ R_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\gamma}^{\gamma} - \Gamma_{\mu\gamma}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^{\gamma}, \\ R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \\ G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{00}^0 = \mathcal{H} + \Psi', \\ \Gamma_{0k}^0 = \Psi_{,k}, \\ \Gamma_{00}^k = \Psi_{,k}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{0j}^i = (\mathcal{H} + \Phi') \delta_j^i, \\ \Gamma_{ij}^0 = \mathcal{H} \delta_{ij} - (2\mathcal{H}(\Psi - \Phi) - \Phi') \delta_{ij}, \\ \Gamma_{jk}^i = (\Phi_j \delta_k^i + \Phi_{,k} \delta_j^i) - \Phi_{,i} \delta_{kj}. \end{array} \right.$$

Tensor de Ricci e escalar de Ricci perturbados

$$R_{00} = \nabla^2 \Psi + 3\mathcal{H}(\Psi' - \Phi') - 3(\mathcal{H}' + \Phi'),$$

$$R_{0i} = 2(2\mathcal{H}\Psi - \Phi')_{,i},$$

$$R_{ij} = -(\Psi + \Phi)_{,ij} + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\delta_{ij} \\ + (\Phi'' - \nabla^2\Phi - \mathcal{H}(\Phi' - 5\Psi') - 2(\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}^2))(\Psi - \Phi\delta_{ij}),$$

$$R_0^0 = a^{-2}(3\mathcal{H}' + 3\Phi'' - \nabla^2\Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' - \Phi') - 6\mathcal{H}\Psi),$$

$$R_i^0 = 2a^{-2}(\mathcal{H}\Psi_{,i} - \Phi'_{,i}),$$

$$R_0^i = -R_i^0,$$

$$R_j^i = a^2 \left((\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\delta_j^i - (\Phi + \Psi)_{,j}{}^i \right) \\ + a^2 \left((\Phi'' - \nabla^2\Phi - \mathcal{H}(\Psi' - 5\Phi'))\delta_j^i - (2\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}^2)\Psi\delta_{ij} \right)$$

$$R_k^k = a^{-2}(6(\mathcal{H} + \mathcal{H}^2) + 6\Phi'' - 2\nabla^2(2\Phi + \Psi) - 6\mathcal{H}(\Psi' - 3\Phi')) \\ - a^{-2}(12(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')\Psi).$$

Tensor de Einstein perturbado

$$G^0_0 = a^{-2} (6\mathcal{H}^2\Psi - 3\mathcal{H}^2 + 2\nabla^2\Phi - 6\mathcal{H}\Psi'),$$

$$G^0_i = -2a^{-2} (\Phi' - \mathcal{H}\Psi)_{,i},$$

$$G^i_0 = -G^0_i,$$

$$G^i_j = a^{-2} \left(-(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) - 2\Phi'' + \nabla^2(\Psi + \Phi) - \mathcal{H}(2\Psi' - 4\Phi') \right) \delta_{ij} \\ + a^{-2} \left((4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) \Psi \right) \delta_{ij} - a^{-2} (\Phi + \Psi)_{,j}{}^i.$$

Mas temos também o lado direito da equação de Einstein que fornece as fontes de deformação do espaço-tempo.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

Mas temos também o lado direito da equação de Einstein que fornece as fontes de deformação do espaço-tempo.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

Em um cenário relativístico geral, uma componente com uma função distribuição de probabilidade $f_i(t)$

$$T_{(i)\nu}^{\mu}(t, \vec{x}) = g_i \int \frac{dP_1 dP_2 dP_3}{(2\pi)^3 \sqrt{\det\|g\|}} \frac{P^\mu P_\nu}{P^0} f(t, \vec{x}, \vec{p}).$$

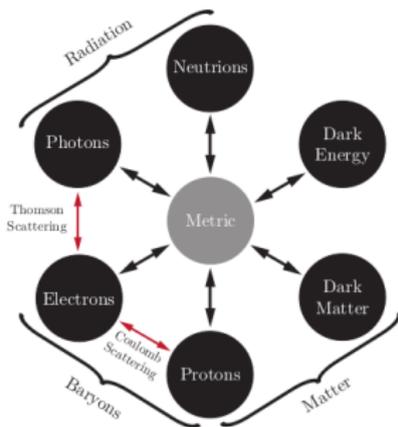
Mas temos também o lado direito da equação de Einstein que fornece as fontes de deformação do espaço-tempo.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

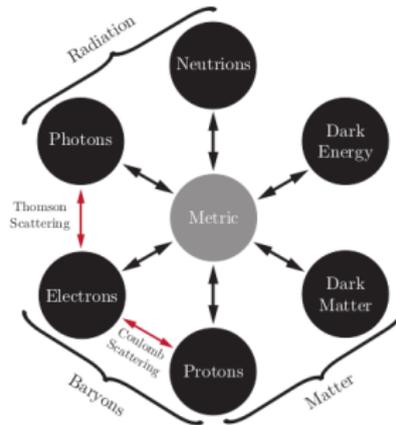
Em um cenário relativístico geral, uma componente com uma função distribuição de probabilidade $f_i(t)$

$$T_{(i)\nu}^{\mu}(t, \vec{x}) = g_i \int \frac{dP_1 dP_2 dP_3}{(2\pi)^3 \sqrt{\det\|g\|}} \frac{P^\mu P_\nu}{P^0} f(t, \vec{x}, \vec{p}).$$

Aqui eu já assumo um caso em que a função distribuição de probabilidade de uma dada componente pode depender não somente do tempo, como também de \vec{x} e de \vec{p} . Veremos mais a frente o porquê disso.



No background $T^{\mu\nu}$ descreve um fluido ideal, uma vez que não há interações entre as componentes, o que faz com que a função de distribuição de probabilidades seja conservada no espaço de fase.



No background $T^{\mu\nu}$ descreve um fluido ideal, uma vez que não há interações entre as componentes, o que faz com que a função de distribuição de probabilidades seja conservada no espaço de fase.

Agora, na época que estamos analisando, há interações e portanto a função de distribuição não é conservada no espaço de fase e o tensor energia-momento não é mais o do caso de fluido ideal.

Em princípio, uma função distribuição deve ser da forma $f_i(x^\mu, P^\nu)$, mas uma vez que $p^2 = g_{ij}P^iP^j$ e $P^\mu P_\mu = -m^2$, podemos descrevê-lo como

$$f = f(t, \vec{x}(t), \vec{p}(t)) = f(t, \hat{x}, x^i, \hat{p}, p^j)$$

$$P^\mu = \left(\sqrt{p^2 + m^2} (1 - \Psi), \frac{1 - \Phi}{a} p \hat{p}^i \right).$$

Ou seja, para um fóton,

$$P^\mu = \left(1 - \Psi, \frac{1 - \Phi}{a} \hat{p}^i \right) p. \quad (1)$$

Equações de Boltzmann

Uma vez que f_i não se conserva no espaço de fase

$$\frac{df_i}{dt} = P^0 \frac{df_i}{d\eta} = \sum_{j=1}^N C[f_i, f_j] \doteq C[f_i]$$

C é conhecido como termo de colisão e contém a informação das interações entre espécies.

Equações de Boltzmann

Uma vez que f_i não se conserva no espaço de fase

$$\frac{df_i}{dt} = P^0 \frac{df_i}{d\eta} = \sum_{j=1}^N C[f_i, f_j] \doteq C[f_i]$$

C é conhecido como termo de colisão e contém a informação das interações entre espécies.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{d\hat{p}^i}{dt} = C[f],$$

Equações de Boltzmann

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{d\hat{p}^i}{dt} \\ &\simeq \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt}\end{aligned}$$

A $d\hat{p}/dt \neq 0$ somente se existirem potenciais Ψ e Φ , ou seja, é um termo no mínimo de 1^o ordem, e $\partial f/\partial \hat{p}^i$ também é no mínimo de 1^o ordem. Logo, o termo é no mínimo de 2^a ordem. Por isso descartamos.

Equação de Boltzmann para os fótons

$$\begin{aligned}
 \frac{dx^i}{dt} &= \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{1}{\left\| \frac{dt}{d\lambda} \right\|} = \frac{P^i}{P^0} = \frac{(1 - \Phi) p \hat{p}^i / a}{(1 - \Psi) p} \\
 &= (1 - \Phi) (1 + \Psi) \frac{\hat{p}^i}{a} \approx (1 - \Phi + \Psi) \frac{\hat{p}^i}{a}.
 \end{aligned}$$

Equação de Boltzmann para os fótons

O termo dp/dt obtemos da equação da geodésica escrita em termos do quadrimomento,

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} P^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta,$$

para $\mu = 0$, que nos fornece

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{a} \hat{p}^i \Psi_{,i} - Hp - p\Phi_{,0},$$

Equação de Boltzmann para os fótons

O termo dp/dt obtemos da equação da geodésica escrita em termos do quadrimomento,

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} P^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta,$$

para $\mu = 0$, que nos fornece

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{a} \hat{p}^i \Psi_{,i} - Hp - p\Phi_{,0},$$

Agora nós precisamos da expressão das derivadas de f .

Equação de Boltzmann para os fótons

Fótons em equilíbrio termodinâmico são descritos pela função de distribuição de Bose-Einstein

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{p/T} - 1}$$
$$\frac{df_{BE}}{dt} = 0 \implies \frac{\delta E}{E} = \frac{\delta T}{T} \doteq \Theta$$

Equação de Boltzmann para os fótons

Fótons em equilíbrio termodinâmico são descritos pela função de distribuição de Bose-Einstein

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{p/T} - 1}$$

$$\frac{df_{BE}}{dt} = 0 \implies \frac{\delta E}{E} = \frac{\delta T}{T} \doteq \Theta$$

com

$$\Theta = \Theta(t, \vec{x}, \hat{p})$$

OBS: o espalhamento Compton basicamente não altera o módulo do momento próprio do fóton.

Equação de Boltzmann para os fótons

- ▶ Θ quantifica a perturbação na temperatura dos fótons;

Equação de Boltzmann para os fótons

- ▶ Θ quantifica a perturbação na temperatura dos fótons;
- ▶ Assim, temos que a informação da anisotropia e da inhomogeneidade da mesma está contida nesta quantidade;

Equação de Boltzmann para os fótons

- ▶ Θ quantifica a perturbação na temperatura dos fótons;
- ▶ Assim, temos que a informação da anisotropia e da inhomogeneidade da mesma está contida nesta quantidade;
- ▶ Então podemos supor que a correção na função de distribuição dos fótons possa ser contabilizado pela perturbação da temperatura na f_{BE} ,

$$f = \frac{1}{e^{p/T(1+\Theta)} - 1},$$

Equação de Boltzmann para os fótons

- ▶ Θ quantifica a perturbação na temperatura dos fótons;
- ▶ Assim, temos que a informação da anisotropia e da inomogeneidade da mesma está contida nesta quantidade;
- ▶ Então podemos supor que a correção na função de distribuição dos fótons possa ser contabilizado pela perturbação da temperatura na f_{BE} ,

$$f = \frac{1}{e^{p/T(1+\Theta)} - 1},$$

Numa expansão de Taylor,

$$f(t, \vec{x}, \hat{p}) \approx f_{BE}(t, p) + \left(-\frac{\partial f}{\partial E} E \right) \Theta(t, \vec{x}, \hat{p}) = f_{BE}(t, p) - p\Theta \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Equação de Boltzmann para os fótons

Podemos reescrever a df/dt como

$$\frac{df}{dt} = -p \frac{\partial f_{BE}}{\partial p} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} \right).$$

Equação de Boltzmann para os fótons

Agora precisamos da expressão da colisão entre fótons e elétrons, ou seja, devido a interação Compton.

$$e^{-}(\vec{q}) + \gamma(\vec{p}) \rightleftharpoons e^{-}(\vec{q}') + \gamma(\vec{p}').$$

Equação de Boltzmann para os fótons

Agora precisamos da expressão da colisão entre fótons e elétrons, ou seja, devido a interação Compton.

$$e^{-}(\vec{q}) + \gamma(\vec{p}) \rightleftharpoons e^{-}(\vec{q}') + \gamma(\vec{p}').$$

A expressão, nada "simples" é

$$C[f(\vec{p})] = \frac{1}{p} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}(p')} \\ \|\mathcal{M}\|^2 \times (2\pi)^4 \delta(p^\mu + q^\mu - p'^\mu - q'^\mu) \\ \{f_e(\vec{q}') f(\vec{p}') - f_e(\vec{q}) f(\vec{p})\}.$$

Equação de Boltzmann para os fótons

$$\begin{aligned}
 C[f(\vec{p})] = & \frac{1}{p} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}(p')} \\
 & \|\mathcal{M}\|^2 \times (2\pi)^4 \delta(p^\mu + q^\mu - p'^\mu - q'^\mu) \\
 & \{f_e(\vec{q}') f(\vec{p}') - f_e(\vec{q}) f(\vec{p})\}.
 \end{aligned}$$

Equação de Boltzmann para os fótons

$$\begin{aligned}
 C[f(\vec{p})] &= \frac{1}{p} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}(p')} \\
 &\quad \|\mathcal{M}\|^2 \times (2\pi)^4 \delta(p^\mu + q^\mu - p'^\mu - q'^\mu) \\
 &\quad \{f_e(\vec{q}') f(\vec{p}') - f_e(\vec{q}) f(\vec{p})\}.
 \end{aligned}$$

- ▶ $\|\mathcal{M}\|$ é chamada de amplitude de espalhamento e esta relacionada a seção de choque de Thomson, e portanto, a probabilidade de uma interação ocorrer;

Equação de Boltzmann para os fótons

$$C[f(\vec{p})] = \frac{1}{p} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}(p')} \\ \|\mathcal{M}\|^2 \times (2\pi)^4 \delta(p^\mu + q^\mu - p'^\mu - q'^\mu) \\ \{f_e(\vec{q}') f(\vec{p}') - f_e(\vec{q}) f(\vec{p})\}.$$

- ▶ $\|\mathcal{M}\|$ é chamada de amplitude de espalhamento e esta relacionada a seção de choque de Thomson, e portanto, a probabilidade de uma interação ocorrer;
- ▶ A função delta de Dirac garante a conservação do quadrimomento;

Equação de Boltzmann para os fótons

$$C[f(\vec{p})] = \frac{1}{p} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}(p')} \\ \|\mathcal{M}\|^2 \times (2\pi)^4 \delta(p^\mu + q^\mu - p'^\mu - q'^\mu) \\ \{f_e(\vec{q}') f(\vec{p}') - f_e(\vec{q}) f(\vec{p})\}.$$

- ▶ $\|\mathcal{M}\|$ é chamada de amplitude de espalhamento e esta relacionada a seção de choque de Thomson, e portanto, a probabilidade de uma interação ocorrer;
- ▶ A função delta de Dirac garante a conservação do quadrimomento;
- ▶ Essa expressão não contabiliza efeitos como bloqueio de Pauli e emissão estimulada, que na teoria linear e após o período da aniquilação elétron-pósitron podem ser descartados.

Equação de Boltzmann para os fótons

Se assumirmos que

- ▶ No período os elétrons são basicamente não-relativísticos ($E_e(\vec{q}) \approx m_e + q^2/2m_e$).

Equação de Boltzmann para os fótons

Se assumirmos que

- ▶ No período os elétrons são basicamente não-relativísticos ($E_e(\vec{q}) \approx m_e + q^2/2m_e$).
- ▶ O fato do espalhamento Compton **não relativístico** transferir pouca energia, e com isto, o módulo do momento próprio é basicamente constante ($p \approx p'$).

Equação de Boltzmann para os fótons

Se assumirmos que

- ▶ No período os elétrons são basicamente não-relativísticos ($E_e(\vec{q}) \approx m_e + q^2/2m_e$).
- ▶ O fato do espalhamento Compton **não relativístico** transferir pouca energia, e com isto, o módulo do momento próprio é basicamente constante ($p \approx p'$).
- ▶ Obviamente, $q \gg p, p'$.

Equação de Boltzmann para os fótons

Se assumirmos que

- ▶ No período os elétrons são basicamente não-relativísticos ($E_e(\vec{q}) \approx m_e + q^2/2m_e$).
- ▶ O fato do espalhamento Compton **não relativístico** transferir pouca energia, e com isto, o módulo do momento próprio é basicamente constante ($p \approx p'$).
- ▶ Obviamente, $q \gg p, p'$.
- ▶ E, por agora, também que $\|\mathcal{M}\|$ não dependa nem do ângulo de espalhamento, nem da polarização do fóton. Logo, $\|\mathcal{M}\| = 8\pi\sigma_T m_e^2$, onde σ_T é a seção de choque de Thomson.

Equação de Boltzmann para os fótons

Se assumirmos que

- ▶ No período os elétrons são basicamente não-relativísticos ($E_e(\vec{q}) \approx m_e + q^2/2m_e$).
- ▶ O fato do espalhamento Compton **não relativístico** transferir pouca energia, e com isto, o módulo do momento próprio é basicamente constante ($p \approx p'$).
- ▶ Obviamente, $q \gg p, p'$.
- ▶ E, por agora, também que $\|\mathcal{M}\|$ não dependa nem do ângulo de espalhamento, nem da polarização do fóton. Logo, $\|\mathcal{M}\| = 8\pi\sigma_T m_e^2$, onde σ_T é a seção de choque de Thomson.

Podemos mostrar que

$$C[f(\vec{p})] = -n_e\sigma_T \frac{\partial f_{BE}}{\partial p} \{ \Theta_0(t, \vec{x}) - \Theta(t, \vec{x}, \hat{p}) + \hat{p} \cdot \vec{v}_b \}.$$

Equação de Boltzmann para os fótons

$$C[f(\vec{p})] = -n_e \sigma_T \frac{\partial f_{BE}}{\partial p} \{ \Theta_0(t, \vec{x}) - \Theta(t, \vec{x}, \hat{p}) + \hat{p} \cdot \vec{v}_b \}.$$

com a média angular

$$\Theta_0(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Theta(t, \vec{x}, \hat{p}'),$$

Equação de Boltzmann para os fótons

$$C[f(\vec{p})] = -n_e \sigma_T \frac{\partial f_{BE}}{\partial p} \{ \Theta_0(t, \vec{x}) - \Theta(t, \vec{x}, \hat{p}) + \hat{p} \cdot \vec{v}_b \}.$$

com a média angular

$$\Theta_0(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Theta(t, \vec{x}, \hat{p}'),$$

e o campo de velocidade é escrito como $\vec{v}_p = \vec{v}_e = \vec{v}_b$, ou seja, o campo de velocidade dos elétrons é basicamente o campo de velocidade dos prótons e portanto dos bárions, pois, o forte acoplamento devido ao espalhamento Coulomb entre eles os faz se comportar como um único fluido.

Equação de Boltzmann para os fótons

Combinando as expressões

$$\frac{df}{dt} = -p \frac{\partial f_{BE}}{\partial p} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} \right)$$

$$C[f] = -n_e \sigma_T \frac{\partial f_{BE}}{\partial p} \{ \Theta_0(t, \vec{x}) - \Theta(t, \vec{x}, \hat{p}) + \hat{p} \cdot \vec{v}_b \}$$

Equação de Boltzmann para os fótons

Combinando as expressões

$$\frac{df}{dt} = -p \frac{\partial f_{BE}}{\partial p} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} \right)$$

$$C[f] = -n_e \sigma_T \frac{\partial f_{BE}}{\partial p} \{ \Theta_0(t, \vec{x}) - \Theta(t, \vec{x}, \hat{p}) + \hat{p} \cdot \vec{v}_b \}$$

$$a \frac{\partial \Theta}{\partial t} + ik\mu\Theta + a \frac{\partial \Phi}{\partial t} + ik\mu\Psi = n_e \sigma_T a (\Theta_0 - \Theta + \mu v_b),$$

ou,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + ik\mu\Theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + ik\mu\Psi = n_e \sigma_T a (\Theta_0 - \Theta + \mu v_b).$$

Equação de Boltzmann para os fótons

Adicionando as contribuições da polarização e do ângulo de espalhamento,

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + ik\mu\Theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + ik\mu\Psi = n_e\sigma_T a \left(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2} \mathcal{P}_2(\mu) \Pi \right), \\ \Pi \doteq \Theta_2 + (\Theta^P)_2 + (\Theta^P)_0. \end{cases}$$

Equação de Boltzmann para os fótons

Adicionando as contribuições da polarização e do ângulo de espalhamento,

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + ik\mu\Theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + ik\mu\Psi = n_e\sigma_T a \left(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2(\mu)\Pi \right), \\ \Pi \doteq \Theta_2 + (\Theta^P)_2 + (\Theta^P)_0. \end{cases}$$

Em que defino os multipolos

$$\Theta_\ell \doteq \frac{1}{(-i)^\ell} \int \frac{d\mu}{2} \Theta(\mu) \mathcal{P}_\ell(\mu),$$

em que \mathcal{P}_ℓ é o multipolo de Legendre de ordem ℓ .

Equação de Boltzmann para os neutrinos

A anisotropia na temperatura dos neutrinos será representada por \mathcal{N} e coincide com a dos fótons, exceto pelo fato de interagir somente de maneira fraca, levando ao termo da seção de choque ser basicamente nulo.

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \eta} + ik_{\mu} \mathcal{N} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + ik_{\mu} \Psi = 0.$$

Equação de Boltzmann para os bárions

Sua derivação segue de maneira muito parecida com o caso dos fótons, com as devidas adaptações. Como os elétrons interagem via espalhamento Compton com os fótons e espalhamento Coulomb com os prótons; e os prótons, basicamente, interagem somente com os elétrons, já que a amplitude de espalhamento da interação Compton depende do inverso da massa, e a massa do próton é muito maior do que a do elétron, temos que as equações de Boltzmann são esquematizadas como sendo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df_e(t, \vec{x}, \vec{q})}{dt} = \langle C_{e-p} \rangle_{QQ'q'} + \langle C_{e-\gamma} \rangle_{pp'q'}, \\ \frac{df_p(t, \vec{x}, \vec{Q})}{dt} = \langle C_{e-p} \rangle_{qq'Q'}, \end{array} \right.$$

Equação de Boltzmann para os bárions

$$\begin{cases} \frac{df_e(t, \vec{x}, \vec{q})}{dt} = \langle C_{e-p} \rangle_{QQ'q'} + \langle C_{e-\gamma} \rangle_{pp'q'}, \\ \frac{df_p(t, \vec{x}, \vec{Q})}{dt} = \langle C_{e-p} \rangle_{qq'Q'}, \end{cases}$$

em que uso a representação

$$\langle \dots \rangle_{xx'y'} = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3y'}{(2\pi)^3} (\dots).$$

e os ' representam os momentos após a interação.

Equação de Boltzmann para os bárions

Usando

$$n_i(t, \vec{x}) = g_i \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} f_i(t, \vec{x}, \vec{p})$$

$$n_i \vec{v}_i(t, \vec{x}, \vec{p}) = g_i \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} f_i(t, \vec{x}, \vec{p}) \frac{\vec{p}}{m}$$

$$n_i = \bar{n}_i(1 + \delta_i(t, \vec{x}))$$

Equação de Boltzmann para os bárions

Usando

$$n_i(t, \vec{x}) = g_i \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} f(t, \vec{x}, \vec{p})$$

$$n_i \vec{v}_i(t, \vec{x}, \vec{p}) = g_i \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} f_i(t, \vec{x}, \vec{p}) \frac{\vec{p}}{m}$$

$$n_i = \bar{n}_i(1 + \delta_i(t, \vec{x}))$$

é possível mostrarmos que

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \vec{v}_b + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} k v_b + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

$$\vec{v}_b = v_b \hat{k}.$$

Esta equação é válida tanto para bárions quanto para CDM.

Equação de Boltzmann para os bárions

Usando também as relações

$$\left\{ \begin{array}{l} m_p n_p + m_e n_e \approx m_p n_b, \\ m_p n_b = \rho_b, \\ \rho_b = \bar{\rho}_b (1 + \delta_b), \\ \bar{\rho}_b = m_p \bar{n}_b, \end{array} \right.$$

Equação de Boltzmann para os bárions

Usando também as relações

$$\left\{ \begin{array}{l} m_p n_p + m_e n_e \approx m_p n_b, \\ m_p n_b = \rho_b, \\ \rho_b = \bar{\rho}_b (1 + \delta_b), \\ \bar{\rho}_b = m_p \bar{n}_b, \end{array} \right.$$

também é possível mostrar que (no espaço de Fourier)

$$\frac{\partial v_b}{\partial t} + H v_b + \frac{1}{a} \vec{k} \cdot \nabla \Psi = \frac{-n_e \sigma_T}{a} \left(\frac{4\bar{\rho}_\gamma}{3\bar{\rho}_b} \right) (3i\Theta_1 + v_b) \equiv \frac{\dot{\tau}}{a\mathcal{R}} (3i\Theta_1 + v_b).$$

Equações de Boltzmann

De modo geral, as equações de Boltzmann em tempo comóvel e no espaço de Fourier são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta' + ik\mu\Theta + \Phi' + ik\mu\Psi = -\tau' \left(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2} \mathcal{P}_2(\mu) \Pi \right), \\ \Theta^{P'} + ik\mu\Theta^P = \tau' \left(\Theta^P - \frac{1}{2} (1 - \mathcal{P}_2(\mu)) \Pi \right) \\ \delta_c' + ikv_c = -3\Phi', \\ v_c' + \mathcal{H}v_c = -ik\Psi, \\ \delta_b' + ikv_b = -3\Phi', \\ v_b' + \mathcal{H}v_b = -ik\Psi + \frac{\tau'}{\mathcal{R}} (3i\Theta_1 + v_b), \\ \mathcal{N}' + ik\mu\mathcal{N} = -\Phi' - ik\mu\Psi. \end{array} \right.$$

com $\mu = \hat{p} \cdot \hat{k}$, ângulo entre a propagação da perturbação e do fóton.

Equações de Einstein

$$\begin{aligned}
 \rho_\gamma &= -(T_0^0)_\gamma \\
 &= 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} P^0 f(t, \vec{x}, \vec{p}) = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_\gamma(p) f(t, \vec{x}, \vec{p}) \\
 \delta\rho_\gamma &= 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_\gamma(p) \delta f = 4\Theta_0 \bar{\rho}_\gamma \\
 \delta_\gamma &= \frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} = 4\Theta_0
 \end{aligned}$$

De maneira equivalente,

$$\delta_\nu = \frac{\delta\rho_\nu}{\rho_\nu} = 4\mathcal{N}_0.$$

Equações de Einstein

A partir das expressões de $\delta\rho$ podemos expressar o termo (00) da equação de Einstein como

$$\delta G_0^0 = 2a^{-2} (k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi)) = 8\pi G\delta\rho = 8\pi G \sum_j \delta\rho_j,$$

ou, em tempo cósmico,

$$\frac{k^2}{a^2}\Phi + 3H(\dot{\Phi} - H\Psi) = 4\pi G(\rho_b\delta_b + \rho_c\delta_c + 4\rho_\gamma\Theta_\gamma + 4\rho_\nu\mathcal{N}_\nu).$$

Equações de Einstein

Na componente (ij) separamos o tensor de Einstein (no espaço de Fourier) em componentes exclusivamente diagonal e outra parte sem traço. Como queremos somente o termo sem traço, definirei o seguinte operador

$$\mathbf{D}_j^i \doteq \partial^i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_j^i \nabla^2.$$

Equações de Einstein

Na componente (ij) separamos o tensor de Einstein (no espaço de Fourier) em componentes exclusivamente diagonal e outra parte sem traço. Como queremos somente o termo sem traço, definirei o seguinte operador

$$\mathbf{D}_j^i \doteq \partial^i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_j^i \nabla^2.$$

Que quando atuando no espaço de Fourier, assume forma

$$\mathcal{D}_j^i = -k^2 \left(\hat{k}^i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta_j^i \right). \quad (2)$$

Equações de Einstein

Tomando somente o termo sem traço

$$\mathcal{D}_i^j \delta G_j^i = -\frac{2}{3} k^4 a^{-2} (\Phi + \Psi)$$

$$\mathcal{D}_i^j \delta T_j^i = \frac{8}{3} k^2 \Theta_2 \rho_\gamma^0 + \frac{8}{3} k^2 \mathcal{N}_2 \rho_\nu^0$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i^j \delta G_j^i &= 8\pi G \left(\mathcal{D}_i^j \delta T_j^i \right) \\ \therefore k^2 (\Phi + \Psi) &= -32\pi G a^2 (\Theta_2 \rho_\gamma + \mathcal{N}_2 \rho_\nu) \end{aligned}$$

Equações de Einstein

Há ainda como obter o termo diagonal do tensor de Einstein. De modo geral temos:

$$\begin{cases} k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2 (\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0}), \\ \Phi' - \mathcal{H}\Psi = \frac{4\pi G}{ik} a^2 (\rho_m v_m - 4i\rho_r \Theta_{r,1}), \\ k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi G a^2 \Theta_{r,2} \rho_r. \end{cases}$$

Não obtivemos a outra equação pois basta duas delas, uma vez que basta nos duas das três equações, já que elas não são independentes entre si, o que çeva a redundancia.

Equações de Boltzmann-Einstein

$$\Theta' + ik\mu\Theta + \Phi' + ik\mu\Psi = -\tau' \left(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2} \mathcal{P}_2(\mu) \Pi \right),$$

$$\Theta^{P'} + ik\mu\Theta^P = \tau' \left(\Theta^P - \frac{1}{2} (1 - \mathcal{P}_2(\mu)) \Pi \right)$$

$$\delta_c' + ikv_c = -3\Phi',$$

$$v_c' + \mathcal{H}v_c = -ik\Psi,$$

$$\delta_b' + ikv_b = -3\Phi',$$

$$v_b' + \mathcal{H}v_b = -ik\Psi + \frac{\tau'}{\mathcal{R}} (3i\Theta_1 + v_b),$$

$$\mathcal{N}' + ik\mu\mathcal{N} = -\Phi' - ik\mu\Psi$$

$$k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = 4\pi Ga^2 (\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0}),$$

$$k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi Ga^2 \Theta_{r,2\rho_r}.$$