

Perturbações cosmológicas

- ⊗ História térmica do universo
- ⊗ Por quê perturbar?
- ⊗ Teoria relativística de perturbações cosmológicas
- ⊗ Gauges
- ⊗ Perturbações hidrodinâmicas
- ⊗ Formação de estrutura e a instabilidade gravitacional

4.2 Perturbações cosmológicas: motivação

Radiação cósmica de fundo

Observamos um background (fundo) de fótons primordiais, com um espectro de corpo negro com temperatura 3.726 °K. Mas a única informação útil que podemos retirar desse background é a densidade de energia dos fótons:

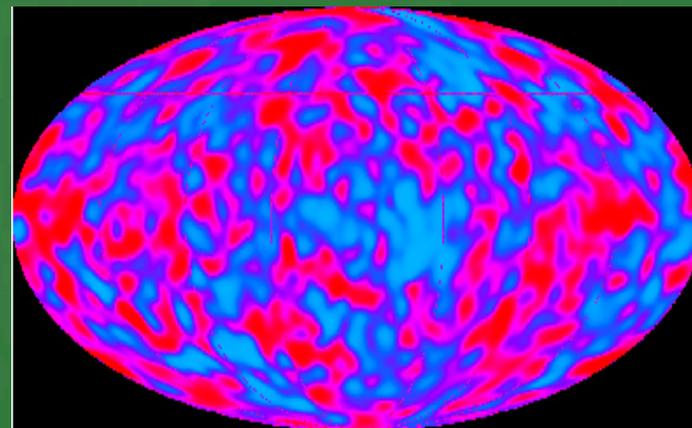
$$\rho_\gamma = \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\vec{p}) f(\vec{p}) d^3 p = \frac{g\pi^2}{30} T_\gamma^4$$

$$(\hbar = c = k_B = 1)$$

Bose-Einstein

o que vem a dar, usando $T_\gamma = 2.726 \text{ °K} \sim 10^{-4} \text{ eV}$, o valor usado acima, que em unidades naturais é $\rho_\gamma = 2,1 \cdot 10^{-51} \text{ GeV}^4$.

Mas quando observamos a RCF com mais cuidado, vemos que ela tem minúsculas inhomogeneidades, regiões com temperatura ligeiramente maiores e menores do que a média. [O padrão dessas perturbações] contém informações sobre: **geometria, taxa de expansão, matéria bariônica, matéria escura, parâmetro de desaceleração, espectro primordial das perturbações etc...**



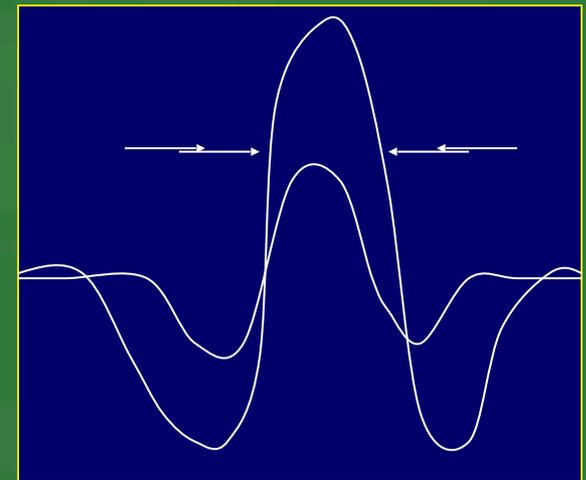
Estrutura em largas escalas (galáxias, aglomerados etc.):

O universo observado hoje é bastante homogêneo e isotrópico, mas somente em escalas extremamente grandes (bem acima de 100 Mpc). Em escalas pequenas, o universo é evidentemente bastante inhomogêneo.

Para compreender como as galáxias têm a distribuição observada, é necessário estudar o processo de **colapso gravitacional** das primeiras estruturas. Essa história de formação de estruturas depende de vários parâmetros cosmológicos: a densidade de matéria aglomerativa, a taxa de expansão, o parâmetro de desaceleração e as condições iniciais impressas nos fluidos que compõe o universo.

A formação de uma estrutura se dá do seguinte modo: uma região que é levemente mais densa que a média dos seus arredores exerce uma atração mais forte, que puxa mais matéria para perto de si.

A matéria que migra das cercanias em direção ao centro da região mais densa deixa um vazio para trás, que se torna cada vez menos denso, na mesma medida em que a região mais densa cresce.



Perturbações cosmológicas relativísticas

- A métrica do background é a métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-d\eta^2 + d\vec{x}^2 \right]$$

$$g_{ab}^0 = a^2 \eta_{ab}$$

Daqui para frente, tomamos $K=0$

- Uma perturbação completamente genérica em torno dessa métrica é representada por:

$$g_{ab} = g_{ab}^0(\eta) + \delta g_{ab}(\vec{x}, \eta)$$

$$= a^2(\eta) \left[\eta_{ab} + \psi_{ab}(\vec{x}, \eta) \right]$$

tempo conforme:
 $a(\eta) d\eta = dt$

Onde entende-se que as perturbações são **pequenas** comparadas ao background, ou seja: $\psi_{ab} \ll 1$.

- As perturbações evidentemente não respeitam as mesmas simetrias que o background (elas dependem de posição e direção); mas podem ser **classificadas segundo essas simetrias**. A estrutura das simetrias de FRW pode ser usado para **decompor** as perturbações da métrica em componentes independentes. Essas componentes se acoplam a setores independentes da teoria, que podem ser resolvidos separadamente em teoria de perturbações.

⊗ Note que o background FRW tem uma estrutura 3+1: de um lado, o tempo; de outro, as componentes espaciais, que são todas equivalentes. Isso significa que as matrizes 4x4 podem ser resolvidas em blocos:

$$\Psi_{ab} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \text{Escalar} & \circ & \text{Vetor} & \\ \circ \text{Vetor} & \circ & \text{Tensor } 3 \times 3 & \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

Ou seja, podemos separar o (4,4) em (1,1), (1,3) e (3,3)

A parte vetorial contém termos que podem ser obtidos através das derivadas espaciais de um escalar; o mesmo vale para o tensor 3x3. Para separar **completamente** as partes escalar, vetorial e tensorial, fazemos uma decomposição à la Helmholtz, em que temos 1-escalares, 3-escalares, 3-vetores e um 3-tensor puro:

$$\Psi_{ab} = \begin{pmatrix} S & B_{,i} \\ B_{,i} & T\delta_{ij} + E_{,ij} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & V_i \\ V_i & U_{[i,j]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}$$

$$V^i{}_{,i} = U^i{}_{,i} = 0 \quad \text{Graus de liberdade :}$$

$$h^i{}_i = h^i{}_{j,i} = 0 \quad 4(\text{escalar}) + 4(\text{vetor}) + 2(\text{tensor}) = 10$$

⊗ A parte **escalar** das perturbações é a mais importante de todas: é ela que se acopla às **perturbações de densidade e de pressão**, e portanto são perturbações escalares que são as grandes responsáveis pela **formação de estruturas** e pela **radiação cósmica de fundo**.

⊗ As **perturbações vetoriais** se acoplam a campos de spin 1 que têm uma distribuição anisotrópica no espaço. São elas as responsáveis pelos campos magnéticos que existem no espaço intergaláctico. Como essas perturbações decaem rapidamente, esses efeitos são geralmente irrisórios.

⊗ As **perturbações tensoriais** são simplesmente as **ondas gravitacionais**. Essas perturbações da métrica correspondem ao setor de helicidade 2 da teoria, e portanto não se acoplam a nenhuma fonte de matéria. Ondas gravitacionais não têm o menor efeito sobre a formação de estruturas massivas, mas podem afetar a radiação cósmica de fundo medida na terra ao deformar as geodésicas onde os raios de luz se propagam.

⊗ Nosso foco estará direcionado sobre as perturbações escalares, por serem elas as grandes responsáveis pelas estruturas que observamos hoje. Temos então, guardando apenas a parte escalar das perturbações, numa notação mais padronizada, a métrica:

$$g_{ab} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -1 - 2\Phi & B_{,i} \\ B_{,i} & (1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij} \end{pmatrix}$$

⊗ Antes de substituir essa métrica nas expressões para as curvaturas, temos que resolver um detalhe comum às teorias de gauge: a invariância de gauge.

A fixação do gauge

⊗ A relatividade geral é uma teoria **invariante por transformações generalizadas de coordenadas**, ou seja, temos total liberdade para redefinir as réguas e relógios, assim como as trajetórias dos observadores do sistema de coordenadas. Uma transformação de coordenadas infinitesimal pode ser expressa como:

$$x^a \rightarrow \tilde{x}^a = x^a + \xi^a$$

Onde ξ^a é uma **translação infinitesimal**.

Sob uma transformação de coordenadas, os objetos que vivem na variedade (vetores e tensores do espaço-tempo) se transformam segundo a **derivada de Lie**:

$$Q \rightarrow \tilde{Q} = Q - L_\xi Q$$

No caso da métrica, essa transformação se reduz a:

$$g_{ab} \rightarrow \tilde{g}_{ab} = g_{ab} - g_{ab,c} \xi^c - g_{ac} \xi^c{}_{,b} - g_{bc} \xi^c{}_{,a} + O(\xi^2)$$

Evidentemente, consideraremos apenas transformações de coordenadas tais que a **métrica do background permaneça a mesma**. Portanto, o parâmetro de gauge ξ^a pode ser considerado um termo perturbativo, que redefine apenas as perturbações. Guardando apenas os termos em primeira ordem nas perturbações temos:

$$g_{ab} = g_{ab}^0 + \delta g_{ab}^0 \Rightarrow \delta \tilde{g}_{ab} = \delta g_{ab} - g_{ab,c}^0 \xi^c - g_{ac}^0 \xi^c{}_{,b} - g_{bc}^0 \xi^c{}_{,a}$$

✿ Em princípio, ξ^μ é um vetor **qualquer**. Se quisermos estudar perturbações genéricas da métrica, devemos considerar todos os 4 graus de liberdade desse vetor.

✿ Entretanto, não estamos interessados em perturbações gerais: queremos estudar perturbações **escalares**, as associadas com as inhomogeneidades de energia e pressão. Portanto, temos de considerar o **subconjunto dos ξ^μ que preserva o caráter escalar das perturbações**:

$$a^2(\eta) \begin{pmatrix} -1 - 2\Phi & B_{,i} \\ B_{,i} & (1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij} \end{pmatrix} \rightarrow a^2(\eta) \begin{pmatrix} -1 - 2\tilde{\Phi} & \tilde{B}_{,i} \\ \tilde{B}_{,i} & (1 - 2\tilde{\Psi})\delta_{ij} + 2\tilde{E}_{,ij} \end{pmatrix}$$

Assim como na discussão acima da separação de um tensor em partes, o 4-vetor ξ^μ pode ser decomposto em um 1-escalar, um 3-escalar e um 3-vetor. Como o 3-vetor não preserva a “escalaridade” das perturbações, nós o descartamos, restando:

$$\xi^a = (\xi^0, \xi^{,i}) \begin{cases} \xi^0 \\ \xi^{,i} \end{cases} \text{ escalares}$$

Substituindo ξ^μ na expressão da transformação da métrica obtemos, após um pouquinho de álgebra, que as componentes se transformam do seguinte modo:

$$\Phi \rightarrow \tilde{\Phi} = \Phi - \frac{1}{a} (a\xi^0)$$

$$\Psi \rightarrow \tilde{\Psi} = \Psi + \frac{a'}{a} \xi^0$$

$$B \rightarrow \tilde{B} = B + \xi^0 - \xi'$$

$$E \rightarrow \tilde{E} = E - \xi$$

Chegamos então à seguinte conclusão: temos 4 graus de liberdade – 2 vínculos = 2.

Ou seja, podemos usar as duas funções escalares, ξ^0 e ξ , que podemos fixar com total liberdade. **As escolhas dos vínculos que essas funções têm que obedecer significa fixar o gauge.**

Podemos escolhê-las, por exemplo, de tal modo a fazer $\mathbf{E}=\mathbf{B}=\mathbf{0}$. Esse caso é conhecido como **gauge longitudinal**, ou **gauge conforme-newtoniano**:

$$g_{ab}^L = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -1 - 2\Phi^L & 0 \\ 0 & (1 - 2\Psi^L)\delta_{ij} \end{pmatrix}$$

Outra escolha comum é o **gauge sincrônico**, no qual as componentes 0-a são zero, ou seja, $\Phi=\mathbf{B}=\mathbf{0}$. Temos:

$$g_{ab}^S = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & (1 - 2\Psi^S)\delta_{ij} + 2E^S_{,ij} \end{pmatrix}$$

• Exercício: mostre que o gauge sincrônico não é completamente determinado, ou seja, é possível encontrar uma transformação de coordenadas cujo único efeito é redefinir as perturbações da métrica Ψ^s e E^s .

Perturbações hidrodinâmicas (radiação, poeira)

✿ Já passamos pela parte mais difícil, que são as perturbações da métrica. Para escrever as equações de Einstein basta agora encontrar o modo de perturbar a matéria, ou seja, precisamos determinar o tensor de energia e momento perturbado.

Se tivermos uma teoria de campos (por exemplo, um campo escalar), é trivial: basta perturbar o campo, $\phi(\eta) \rightarrow \phi(\eta) + \delta\phi(\mathbf{x}, \eta)$.

Porém, para estudar cosmologia, algumas formas de matéria não necessitam ser descritas microscopicamente, como uma teoria de campos: basta alguma teoria efetiva macroscópica que descreva a hidrodinâmica desses fluidos.

Temos então:

$$T^a_b = (\rho + p)u^a u_b + p\delta^a_b$$

Podemos perturbar a matéria introduzindo flutuações na densidade de energia, pressão e velocidade do fluido:

$$\rho = \rho_0(\eta) + \delta\rho \quad , \quad p = p_0 + \delta p \quad , \quad u^a = (-1, \delta u^i)$$

O que nos dá:

$$\delta T^a_b = \begin{pmatrix} -\delta\rho & -(\rho_0 + p_0)\delta u_j \\ (\rho_0 + p_0)\delta u_i & -\delta p\delta^i_j \end{pmatrix}$$

Não consideramos stress anisotrópico nem cisalhamento (anisotropic shear)

✿ Agora basta escrever as equações de Einstein para as perturbações, ou seja: obter o tensor de Einstein perturbado, usando a métrica no gauge escolhido (longitudinal), e igualá-lo às perturbações no tensor de energia e momento acima.

Após um pouco de álgebra tensorial (ou, para as últimas gerações, após alguns segundos manipulando algum software algébrico) obtemos:

$$0-0 \quad -k^2\Phi - 3\frac{a'}{a}\left(\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi\right) = 4\pi G a^2 \delta\rho$$

$$0-i \quad k^2\left(\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi\right) = 4\pi G a^2 \delta u_i$$

$$i=j \quad \Phi'' + 3\frac{a\dot{a}'}{aa'}\left(\Phi'' + 2\frac{a'}{a}\Phi'\right) + \left(2\frac{a\dot{a}'}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p$$

$$i \neq j \quad \nabla^2(\Phi - \Psi) = 0$$

Limite newtoniano
(a=1)
Eq. de Poisson:
 $\nabla^2\Psi = 4\pi\mathbf{G} \rho$

$$\theta = ik^j \delta u_j$$

Em modos de Fourier:

$$f(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} f_k$$

$$\partial_j \rightarrow ik_j \quad \nabla^2 \rightarrow -k^2$$

!!!
(Só se não há stress anisotrópico)

⊛ No caso de fluidos perfeitos (e processos adiabáticos), temos uma grande simplificação:

$$p = w(\rho)\rho \quad \Rightarrow \quad \delta p = \left(w + \rho \frac{dw}{d\rho} \right) \delta\rho = c_s^2 \delta\rho$$

Para matéria fria (poeira) e matéria relativística (radiação), a simplificação é ainda maior:

$$p_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta p_m = 0$$

$$p_r = \frac{1}{3} \rho_r \quad \Rightarrow \quad \delta p_r = \frac{1}{3} \delta\rho_r$$

⊛ Substituindo essas expressões nas equações de Einstein, podemos eliminar a densidade de energia $\delta\rho$ e chegamos a uma equação para o “potencial newtoniano” Φ :

$$\Phi'' + 3 \frac{a'}{a} (1 + c_s^2) \Phi' + c_s^2 k^2 \Phi + \left[2 \frac{a''}{a} + (3c_s^2 - 1) \frac{a'^2}{a^2} \right] \Phi = 0$$

A densidade de energia está relacionada ao potencial newtoniano por:

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = - \frac{2}{3 \frac{a'^2}{a^2}} \left[k^2 \Phi + 3 \frac{a'}{a} \Phi' + 3 \frac{a'^2}{a^2} \Phi \right]$$

Instabilidade gravitacional: a formação das primeiras estruturas

• Obtivemos equações que descrevem os modos de Fourier do potencial gravitacional relativístico e da perturbação de densidade. Podemos agora **resolver** essas equações para obter a história da **formação das primeiras estruturas**.

Se tivermos apenas matéria fria (poeira) ou apenas matéria relativística (radiação), é **muito fácil** resolver a equação para Φ . Vamos aos dois casos:

Radiação

$$p_r = \frac{1}{3} \rho_r \quad \Rightarrow \quad w_r = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad c_s^2(r) = \frac{1}{3}$$

Na era da radiação, temos que o fator de escala:

$$\left. \begin{aligned} a(t) &\propto t^{2/3(1+w)} \propto t^{1/2} \\ d\eta &= \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow \eta \propto t^{1/2} \end{aligned} \right\} a(\eta) = a_o \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^1, \quad \frac{a'}{a} = \frac{1}{\eta}$$

e portanto a equação para o potencial gravitacional é:

$$\Phi_k'' + \frac{4}{\eta} \Phi_k' + \frac{k^2}{3} \Phi_k = 0$$

Essa equação tem uma solução elementar:

$$\omega_k^2 = \frac{k^2}{3}$$

$$\Phi_k = \frac{1}{\eta^3} \left[c_1(k) (\omega_k \eta \cos \omega_k \eta - \sin \omega_k \eta) + c_2(k) (\omega_k \eta \sin \omega_k \eta + \cos \omega_k \eta) \right]$$

Temos portanto **dois limites**:

• **Ultra-violeta (UV):** $\omega_k \eta \gg 1$

$$\Phi_k \propto \frac{1}{\eta^2}, \quad \frac{\delta \rho_k}{\rho_0} \propto \text{const.}$$

• **Infra-vermelho (IR):** $\omega_k \eta \ll 1$

$$\Phi_k \propto \text{const.}, \quad \frac{\delta \rho_k}{\rho_0} \propto \text{const.}$$

Portanto, **o contraste de densidade $\delta\rho/\rho$ permanece constante durante a era da radiação !**

Em outras palavras, **não há formação de estruturas durante a era da radiação.**

Poeira (matéria fria)

$$p_r = 0 \quad \Rightarrow \quad w_r = 0 \quad \Rightarrow \quad c_s^2(r) = 0$$

Na era da matéria, temos o fator de escala:

$$\left. \begin{array}{l} a(t) \propto t^{2/3(1+w)} \propto t^{2/3} \\ d\eta = \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow \eta \propto t^{1/3} \end{array} \right\} a(\eta) = a_o \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^2, \quad \frac{a'}{a} = \frac{2}{\eta}$$

e portanto a equação para o potencial gravitacional é:

$$\Phi_k'' + \frac{3}{\eta} \Phi_k' = 0$$

MODO CRESCENTE!

(Note que o termo de gradiente (k^2) foi embora, devido a $c_s^2=0$ p/ poeira.)

A solução dessa equação é trivial:

$$\Phi_k = c_3(k) + c_4(k)\eta^{-2} \quad \begin{cases} IR, k\eta \ll 1: & \delta\rho / \rho \propto const. \\ UV, k\eta \gg 1: & \delta\rho / \rho \propto \eta^2 \propto a \end{cases}$$

Vamos ver a que correspondem fisicamente esses limites IR e UV.

O número de onda k é relacionado ao comprimento de onda por:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_c} \Rightarrow \lambda_{fis} = a(\eta)\lambda_c = a \frac{2\pi}{k}$$

Podemos então escrever, usando a relação entre tempo conforme e tempo comóvel:

$$k\eta \approx k \frac{1}{a'/a} = \frac{k}{aH} \approx \frac{H^{-1}}{\lambda_{fis}} \Rightarrow \begin{cases} k\eta \gg 1: & \lambda_{fis} \ll H^{-1} \\ k\eta \ll 1: & \lambda_{fis} \gg H^{-1} \end{cases}$$

Resumindo:

- Durante a era da radiação, o contraste de densidade $\delta\rho/\rho$ **permanece constante**.
- Durante a era da matéria, o contraste de densidade $\delta\rho/\rho$ **permanece constante** em escalas maiores que o horizonte ($\lambda \gg H^{-1}$) e **crece** $\sim a(t)$ em escalas menores que o horizonte ($\lambda \ll H^{-1}$).

Conclusões:

- **Perturbações em escalas maiores que o horizonte sempre permanecem constantes;**
- **Na era da radiação o contraste de densidade é constante.** Ou seja, não há formação de estruturas durante a era da radiação: mesmo flutuações em escalas pequenas (sub-horizonte) são incapazes de vencer a pressão dos fótons e aumentar a aglomeração.
- A formação de estruturas (em escalas sub-horizonte!) **só começa** quando a **era da radiação termina** e a **era da matéria começa.**