6. Colchetes de Poisson

PGF 5005 - Mecânica Clássica

web.if.usp.br/controle

(Referências principais: Lichtenberg, 1992, Lowenstein, 2012)

IFUSP

2022

Motivação

- Formulação canônica para equações de Hamilton de mesma forma.
- Constantes de movimento são destacadas nesse formalismo.
- Forma compacta de cálculo.

Sistama dinâmico descrito pela Hamiltoniana

$$H(q,p,t), \quad q=(q_1,\ldots,q_n),\ p=(p_1,\ldots,p_n)$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

As variáveis q(t) e p(t) são obtidas pelas eqs. de Hamilton

A derivada temporal de qualquer função F(q, p, t) pode ser obtida de

$$\frac{d}{dt}F(q(t),p(t),t) = \frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k}\dot{p}_k + \frac{\partial F}{\partial t} = [F,H] + \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$[A,B] = \frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}$$

Definição de Colchete de Poisson

Da definição do colchete de Poisson

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}$$

obtemos as relações

$$[q_i, q_j] = 0 = [p_i, p_j] = 0, \qquad [q_i, p_j] = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Colchetes de Poisson

$$[u, v] = \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial u}{\partial p_k} \right)$$

Definição

u, v são funções de q_i, p_i

Como $$[q_i, H] = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{q}_i = [q_i, H]$$

Equações de Hamilton

Analogamente $$\dot{p}_i = [p_i, H]$$

$$z = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \rightarrow \dot{z} = [z, H]$$

Propriedades dos Cochetes

$$[u, v] = -[v, u]$$

$$[u + av, w] = [u, w] + a[v, w]$$

$$[uv, w] = u[v, w] + [u, w]v$$

Identidade de Jacobi

$$[[u, v], w] + [[w, u], v] + [[v, w], u] = 0$$

Para uma função $\chi = \chi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$

$$\frac{d\chi}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \chi}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \chi}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \chi}{\partial t} = [\chi, H] + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Se $\partial\chi/\partial t = 0$ e $[\chi, H]$ = 0 ➔ χ = constante de movimento

Exemplo χ = H
Se derivada parcial de H em relação ao tempo for nula, a derivada temporal total é nula e H é cte de movimento.

$$\dot{H} = [H, H] + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Equações de Hamilton com Colchetes de Poisson

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \{q, H(q,p)\} \\ \dot{p} &= \{p, H(q,p)\}\end{aligned}$$

$$\{f(q,p), g(q,p)\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

Para qualquer função *f(q, p)*

$$\frac{d}{dt}f(q,p) = \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p}(-\frac{\partial H}{\partial q}) = \{f, H\}$$

Para *f(q, p, t)*

$$\frac{d}{dt}f(q,p,t) = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Numa transformacão canônica de q, p para Q, P

$$Q_j(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t), P_j(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$$

Os colchetes de Poisson são canônicos e preservam a sua forma:

$$[Q_i, Q_j]_{q,p} = 0 = [P_i, P_j]_{q,p}, \qquad [Q_i, P_j]_{q,p} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}$$

De forma geral, qualquer colchete preserva sua forma
numa transformação canônica:

$$[F(\Xi, t), G(\Xi, t)]_\Xi = [F(\Xi(\xi, t), t), G(\Xi(\xi, t), t)]_\xi$$

Transformações Canônicas Simples

$$Q_k = q_k, \;\; P_k = p_k.$$

Transformação identidade

$$Q_k = q_k - a_k, \;\; P_k = p_k - b_k,$$

Mudança da origem

Exemplos de tranformação canônica

$$Q_k = p_k, \quad P_k = -q_k.$$

Troca de q, p para p, q

Verificamos que

$$[Q_k, Q_l] = [p_k, p_l] = 0,$$
$$[P_k, P_l] = [-q_k, -q_l] = [q_k, q_l] = 0,$$
$$[Q_k, P_l] = [p_k, -q_l] = [q_l, p_k] = \delta_{kl}.$$

Transformação Canônica Linear

$$Q_k = M_{kl} q_l, \quad P_k = (\tilde{M}^{-1})_{kl} p_l$$

Matriz M (nxn) e transposta reais e não singulares

$$[Q_k, Q_l] = M_{ki}[q_i, q_j]\tilde{M}_{jl} = 0,$$
$$[P_k, P_l] = \tilde{M}^{-1}_{ki}[p_i, p_j]M^{-1}_{jl} = 0,$$
$$[Q_k, P_l] = M_{ki}[p_i, p_j]M^{-1}_{jl} = M_{ki}\delta_{ij}M^{-1}_{jl} = \delta_{kl}$$

Este exemplo inclui uma transformação de escala

$$Q_k = \rho q_k, \qquad P_k = \rho^{-1} p_k$$

Colchetes para o Momento Angular

Para um sistema com a Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, t)$$

Força central

As componentes do momento angular são constantes de movimento

$$L_z = xp_y - yp_x,\ L_x = yp_z - zp_y,\ L_y = zp_x - xp_z$$

$$[H, L_x] = [H, L_y] = [H, L_z] = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{L}_x = \dot{L}_y = \dot{L}_z = 0.$$

Os colchetes de componentes diferentes não são zero:

$$[L_x, L_y] = L_z, \qquad [L_y, L_z] = L_x, \qquad [L_z, L_x] = L_y$$

Um exemplo de Transformação Canônica

$$Q_k = p_k, \quad P_k = -q_k$$

Pela definição do colchete podemos obter:

$$[Q_k, Q_l] = [p_k, p_l] = 0,$$
$$[P_k, P_l] = [-q_k, -q_l] = [q_k, q_l] = 0,$$
$$[Q_k, P_l] = [p_k, -q_l] = [q_l, p_k] = \delta_{kl}.$$

Teorema de Poisson

Identidade de Jacobi $\left[f,[g,h]\right]+\left[g,[h,f]\right]+\left[h,[f,g]\right]=0$

Sendo h a Hamiltoniana e duas ctes de movimento f(q, p), g(q, p)

$[g,h]$ = 0 $[h,f]$ = o ➔ $\left[h,[f,g]\right]$ = 0

d/dt $[f,g]$ = o ➔ $[f,g]$ Cte de movimento

Aplicação do teorema de Poisson

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad L_1 = r_2 p_3 - r_3 p_2, \quad L_2 = r_3 p_1 - r_1 p_3$$

Como $\quad \left[r_i, r_j\right] = \left[p_i, p_j\right] = 0, \quad \left[p_i, r_j\right] = \delta_{ij}$

Obtemos

$$\begin{aligned}
\left[L_1, L_2\right] &= \left[r_2 p_3 - r_3 p_2, r_3 p_1 - r_1 p_3\right] \\
&= \left[r_2 p_3, r_3 p_1\right] + \left[r_3 p_2, r_1 p_3\right] \\
&= r_2 p_1 - p_2 r_1 \\
&= -L_3.
\end{aligned}$$

L_1 e *L_2* ctes ➔ *L_3* cte de movimento

Resultado trivial,
cte obtida é conhecida

Vetor de Laplace-Runge-Lenz

Sergi Escanes Domingos
Universitat Autònoma de Barcelona

Treball de Grau em Física

2017

Laplace-Runge-Lenz vector

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{GMm}{r} \equiv \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

$$\boldsymbol{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \qquad \boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

Momentos linear e angular

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} \equiv \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - mk\hat{\boldsymbol{r}}$$

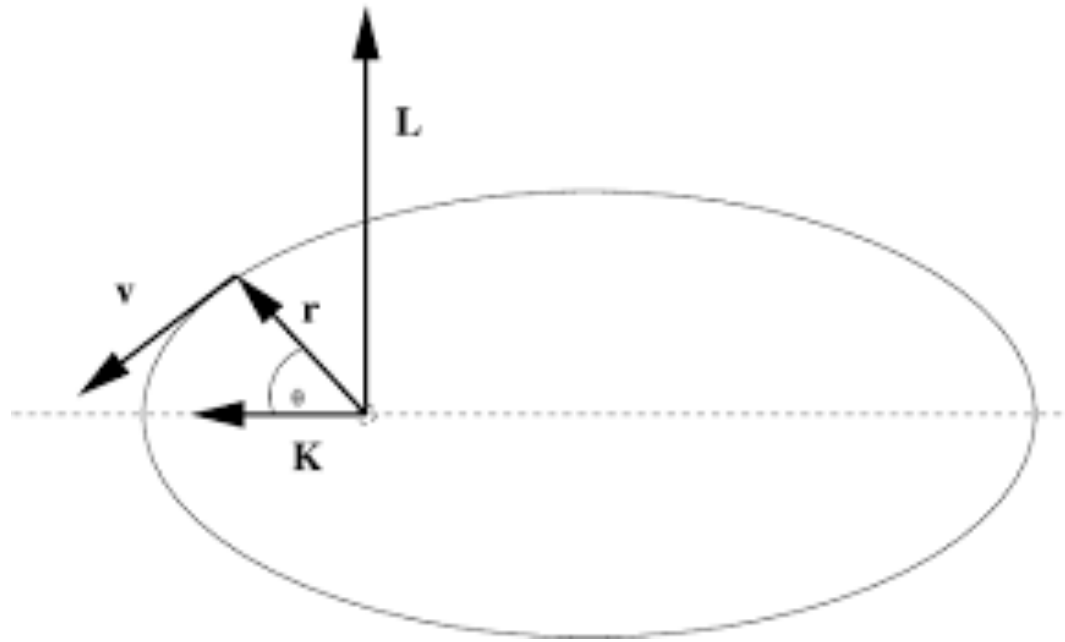
Consider the motion in the plane $x - y$ or $r - \varphi$ in polar coordinates and that $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{0}$, $L = mr^2\dot{\varphi}$. Therefore,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{A}}}{\mathrm{d}t} &= \dot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{L} + \boldsymbol{p} \times \dot{\boldsymbol{L}} - mk\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{k}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L} + \boldsymbol{0} - mk\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\
&= -\frac{kL}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{z}} - mk\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\
&= \frac{kL}{r^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}} - mk\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\
&= \frac{k}{r^2}mr^2\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} - mk\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

We can see that the Runge-Lenz vector is in the same plane as $\boldsymbol{r}$ and $\boldsymbol{p}$ due to the fact that

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot \boldsymbol{L} &= (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}) \cdot \boldsymbol{L} - \frac{mk}{r}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{L} \\
&= \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L}) - \frac{mk}{r}\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \\
&= 0 - \frac{mk}{r}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{p} = 0
\end{aligned}$$

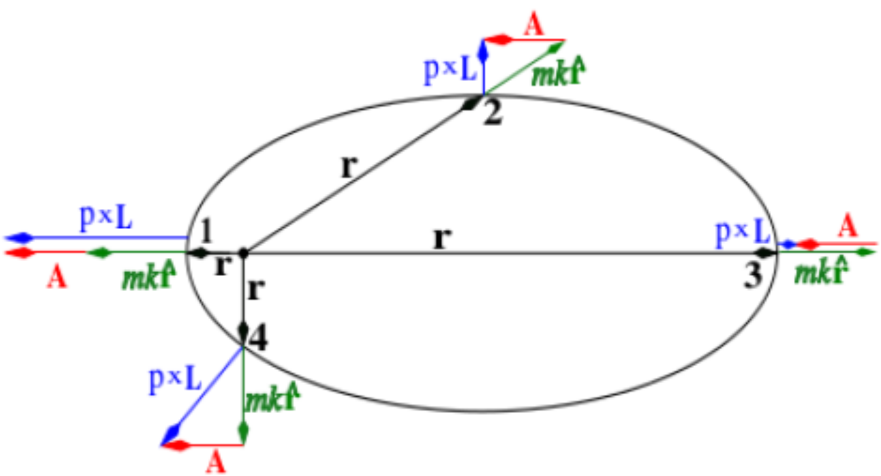
$\mathcal{A}^2 = m^2k^2 + 2mEL^2$ Amplitude é constante como *E, L*.

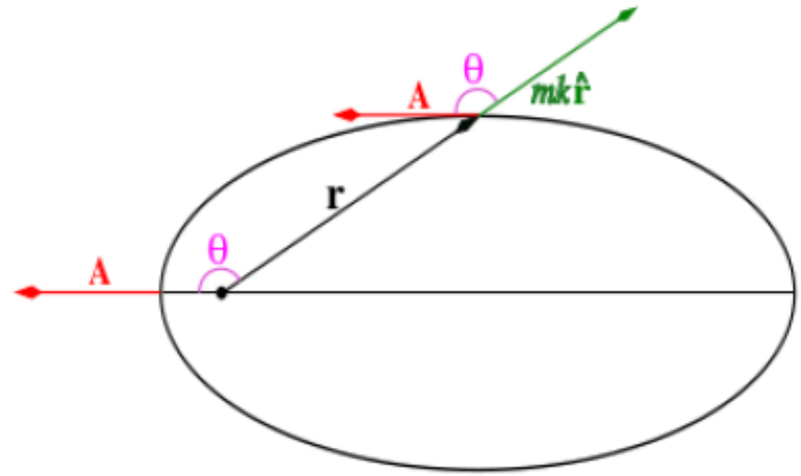


L
v
r
θ
K

Órbita Elíptica no plano x, y

Vetor de LRL em vermelho





https://www.youtube.com/watch?v=a7hj_0r3_Ws
Laplace-Runge-Lenz vector You tube

Colchetes de Poisson

$$[L_i, H] = 0$$
$$[\mathcal{A}_i, H] = 0$$
$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$$
$$[L_i, \mathcal{A}_j] = \epsilon_{ijk} \mathcal{A}_k$$
$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] = -2mH \epsilon_{ijk} L_k$$

7 ctes de movimento

ϵ_{ijk} Tensor de Levi-Civita

Teorema de Poisson: colchetes de duas constantes de movimento é uma constante de movimento.

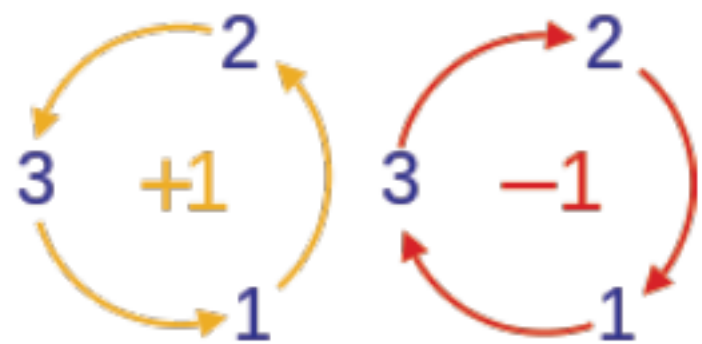
Tensor de Levi-Civita

Levi-Civita symbol - Wikipedia

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (1,2,3), (2,3,1), \text{ or } (3,1,2), \\ -1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is } (3,2,1), (1,3,2), \text{ or } (2,1,3), \\ \;\;0 & \text{if } i = j, \text{ or } j = k, \text{ or } k = i \end{cases}$$

ε = +1 para sequências anti horárias

ε = -1 para hohorárias



Exemplos

$$\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{123} = -1$$
$$\varepsilon_{312} = -\varepsilon_{213} = -(-\varepsilon_{123}) = 1$$
$$\varepsilon_{231} = -\varepsilon_{132} = -(-\varepsilon_{123}) = 1$$
$$\varepsilon_{232} = -\varepsilon_{232} = 0$$