

Anselmo Rodrigues

Propostas para Sistemas de Comunicação por
Espalhamento Espectral com Caos

Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade
de São Paulo para
obtenção do título de
Doutor em Engenharia

Área de concentração:
Engenharia de Sistemas

Orientador:

Prof. Titular:

José Roberto Castilho Piqueira

Co-Orientador:

Prof. Titular: Iberê Luiz
Caldas

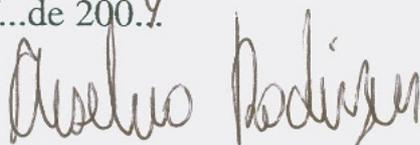
São Paulo

2004

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 07 de 04 de 2004.

Assinatura do autor



Assinatura do orientador



FICHA CATALOGRÁFICA

Rodrigues, Anselmo

Propostas para sistemas de comunicação por espalhamento espectral com caos / Anselmo Rodrigues -- São Paulo, 2004.

170 p.

Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1. Caos (Sistemas dinâmicos) 2. Dinâmica simbólica 3. Otimização não linear 4. Telecomunicações I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II.t

Anselmo Rodrigues

Propostas para Sistemas de
Comunicação por Espalhamento
Espectral com Caos

Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade
de São Paulo para a
obtenção do título de
Doutor em Engenharia

São Paulo
2004

DEDALUS - Acervo - EPEL



31500015395

PTC

Universidade de São Paulo
Biblioteca da Escola Politécnica

FT-1944

Ed. rev.

Conteúdo

Agradecimentos	11
Resumo	13
Abstract	15
1 Prefácio	17
1.1 Objetivos	18
1.2 Justificativa e Metodologia	19
2 Princípios de Comunicação com Caos	23
2.1 Introdução	23
2.2 Elementos de um sistema de comunicação	24
2.3 Fundamentos da comunicação por espalhamento espectral	27
2.3.1 O princípio da ortogonalidade e o compartilhamento do meio .	28
2.3.2 Geradores de seqüências não-caóticas	34
2.3.3 Espalhamento espectral com seqüências caóticas	35
2.4 Técnicas de modulação em comunicação com caos	36
2.4.1 Detecção coerente ou detecção por correlação	38
2.4.2 Detecção via análise de estatísticas do sinal	39
2.4.3 Detecção por sistema inverso.	39
2.4.4 Detecção coerente x detecção não coerente	40
2.5 Descrição de alguns tipos de modulação caótica	43
2.5.1 Mascaramento cáotico	43
2.5.2 Chaveamento Caótico Liga-Desliga	44
2.5.3 Modulação por chaveamento cáotico	47

2.5.4	Chaveamento caótico diferencial	50
2.5.5	Métodos por controle de Poincaré preditivo	53
2.6	Considerações sobre o desempenho na presença de ruídos	55
2.7	Conclusões	57
3	Sistemas Caóticos de Interesse em Comunicações	59
3.1	Introdução	59
3.2	Sistemas Caóticos Contínuos: O Circuito de Matsumoto	60
3.2.1	Modelagem do Circuito de Matsumoto	62
3.2.2	Reescalamento dos valores dos componentes	63
3.2.3	Pontos Fixos do Atrator	64
3.2.4	A Dinâmica do circuito de Matsumoto	67
3.3	Expoentes de Lyapunov para fluxos	71
3.4	Secções de Poincaré de sistemas caóticos contínuos	76
3.5	Sistemas caóticos discretos: O Mapa Logístico	79
3.5.1	Diagrama de Bifurcação do Mapa Logístico	80
3.6	Conclusões	85
4	Dinâmica Simbólica e Entropia Topológica em Sistemas Caóticos	87
4.1	Introdução	87
4.2	O Espaço de fase e a dinâmica simbólica	88
4.3	A entropia topológica	92
4.4	O mapa de retorno e dinâmica simbólica	93
4.4.1	Dinâmica simbólica do circuito de Matsumoto	96
4.4.2	A Função código para o circuito de Matsumoto	102
4.5	Conclusões	104
5	Sincronização de Sistemas Caóticos	107
5.1	Introdução	107
5.2	Método Carrol e Pecora de sincronização de sistemas caóticos	108
5.2.1	Variedades de Sincronização	111
5.2.2	Estabilidade dos Sistemas e os Expoentes Condicionais de Lyapunov	113
5.3	Sincronização do Circuito de Matsumoto	116

5.4	Conclusões	122
6	Controle de Sistemas Caóticos com Aplicações em Sistemas de Comunicação	125
6.1	Introdução	125
6.2	O método <i>OGY</i> de controle de sistemas caóticos	126
6.3	Nosso método de controle	130
6.3.1	Motivação	130
6.3.2	Descrição do Método	131
6.3.3	Aplicações do método	136
6.4	Conclusões	143
7	Direcionamento de trajetórias aplicados à modulação dinâmica	145
7.1	Introdução	145
7.2	Algumas considerações teóricas	146
7.3	Exemplo de aplicação do método	148
7.4	Conclusões	150
8	Espalhamento Espectral por Análise do Tempo de retorno	153
8.1	Introdução	153
8.2	Tempo de recorrência em sistemas caóticos	155
8.3	Estatísticas do tempo de retorno para o Circuito de Matsumoto	156
8.3.1	Efeito da presença de ruídos no tempo de retorno	158
8.4	Comunicação caótica por tempo de retorno	162
8.5	Considerações sobre o desempenho do método	171
8.6	Conclusões	173
9	Conclusões Finais	175

Lista de Figuras

2.1	Esquema geral de um sistema de comunicação.	26
2.2	Esquema de modulação dinâmica.	37
2.3	Esquema de modulação estática.	38
2.4	Detecção por sistema inverso	40
2.5	Esquema de detecção coerente.	42
2.6	Esquema de detecção não-coerente.	43
2.7	Diagrama em blocos do mascaramento caótico.	45
2.8	(a) Sobreposição do sinal analógico $s_a(t)$ com o sinal $s'_a(t)$ recuperado. (b) Série temporal do sinal caótico $r(t)$ composto.	45
2.9	Sobreposição do sinal digital $s_d(t)$ com o sinal $s'_d(t)$ recuperado. . . .	46
2.10	Esquema do chaveamento caótico liga-desliga (COOK).	47
2.11	Histograma dos sinais $s_i(n)$ na ausência de ruídos.	48
2.12	Histograma dos sinais $s_i(n)$ na presença de ruído de 13,4 dB.	49
2.13	Modelo em blocos de um sistema de chaveamento por deslocamento caótico.	50
2.14	(a) Histograma dos sinais $s_i(n)$ na presença de ruído. (b) Série temporal para bit 0 e bit 1.	51
2.15	Relação sinal-ruído para o método CSK coerente.	51
2.16	Diagrama de blocos do transmissor para Chaveamento Caótico Diferencial (DCSK)	52
3.1	Diagrama Elétrico do Circuito de Matsumoto.	61
3.2	Curva característica do resistor R_{NL} do circuito de Matsumoto.	63
3.3	Diagrama espacial dos pontos fixos do circuito de Matsumoto.	66
3.4	Projeção do atrator tipo <i>Rössler</i> no plano $(V_{C1}) \times (V_{C2})$ para $G = 0.5750$. 67	67

3.5	Atrator tipo dupla espiral para $G=0.5850$	68
3.6	Projeção do atrator tipo <i>Rössler</i> no plano $(V_{C1}) \times (i_L)$, para $G=0.5750$	69
3.7	Projeção do atrator tipo <i>Rössler</i> no plano $(V_{C2}) \times (i_L)$, para $G=0.5750$	69
3.8	Seqüência de duplicação de períodos para o atrator de Matsumoto (a) $G = 0.5695$. (b) $G = 0.5710$. (c) $G = 0.5720$. (d) $G = 0.5750$	70
3.9	Série temporal da tensão V_{C1} para atratores: (a) Tipo <i>Rössler</i> (b) tipo dupla espiral.	70
3.10	Divergência de dois pontos próximos, com o passar do tempo.	71
3.11	Coefficiente de Lyapunov em função do parâmetro G para o circuito de Matsumoto para a variável V_{C1}	74
3.12	Diagrama de Bifurcação para a tensão V_{C1} em função do parâmetro G , para a variável V_{C1} do circuito de Matsumoto.	75
3.13	(a) Órbita de período 4. (b) Atrator Caótico (c) Espectro de Fourier para órbita periódica (d) espectro de Fourier para o atrator caótico.	76
3.14	Transformação de um fluxo em pontos discretos no plano σ	77
3.15	Órbita de período 1 aparece como um ponto no plano σ	78
3.16	(a) Atrator para $G=0.5750$ (b) projeção da seção de Poincaré no plano $V_{C2} = 0$ e $(i_L) \times (V_{C1})$	78
3.17	Mapa de primeiro e segundo retorno para o mapa logístico.	80
3.18	Mapa de primeiro retorno para o mapa logístico.	81
3.19	Expoentes de Lyapunov para o mapa logístico.	82
3.20	Ampliação do diagrama de bifurcação do mapa logístico.	83
3.21	Aparecimento de crise no mapa logístico.	83
3.22	Dependências as condições iniciais no mapa logístico.	84
4.1	(a) Trajetória descrita por um ponto x . (b) Transformação do espaço de fase pela aplicação de f^t	88
4.2	Exemplo de divisão do espaço de fase.	90
4.3	Exemplo de itinerário no espaço de fase	91
4.4	Partição binária do mapa de retorno (Circuito de Matsumoto)	94
4.5	(a) Atrator tipo <i>Rössler</i> com a linha de partição indicada. (b) Linha de partição na projeção da secção de Poincaré.	95
4.6	Partição binária do mapa de primeiro retorno (Mapa Logístico)	96
4.7	Curva da entropia \mathcal{H}_S , em função das probabilidades p_i	97

4.8	Entropia topológica para o atrator tipo <i>Rössler</i> em função da posição da linha de partição X_P	98
4.9	Ampliação do box da figura 4.8.	99
4.10	Diagrama: relação entre as entropias	100
4.11	Entropia condicional para palavras (N=5).	101
4.12	Função código para atrator tipo <i>Rössler</i>	104
5.1	Divisão do sistema aumentado $u(V,W,Z)$	110
5.2	Série temporal do erro de sincronização	112
5.3	Série temporal do erro entre as variáveis	113
5.4	Variedade de sincronização para circuito de Matsumoto no plano $(V_{C1}^{(m)} \parallel) \times (V_{C1}^{(e)} \parallel)$. (a) estado sincronizado (b) estado não sincronizado . . .	114
5.5	Diagrama em blocos da sincronização entre dois circuitos de Matsumoto	118
5.6	Sincronismo unidirecional entre sistema mestre e escravo	119
5.7	Acoplamento unidirecional no sub-sistema escravo	120
5.8	Erro de sincronização devido a presença de ruídos.	121
5.9	Erro de sincronização devido ao descasamento dos parâmetros	121
5.10	Diferença entre as séries temporais de V_{C1} , devido ao descasamento dos parâmetros	122
6.1	a) Variedades estáveis e instáveis b) Influência de uma pequena perturbação na variedade instável,	129
6.2	Funções de codificação M_C para bit 0 e bit 1.	135
6.3	Curvas ajustadas das matrizes de codificação M_C para bit 0 e bit 1.	136
6.4	Comparação de trajetórias com diferentes alvos (caso 1).	137
6.5	Comparação de trajetórias com diferentes alvos (caso 2).	138
6.6	Aplicação do controle (a) Amplitude dos pulsos de controle (b) Série temporal controlada para $V_{C1} = -0.14$	139
6.7	Aplicação do controle (a) Amplitude dos pulsos de controle (b) Série temporal controlada para $V_{C1} = -1.725$	139
6.8	Órbitas caóticas controladas para alvo= $V_{C1}=-1.70$	140
6.9	Órbitas caóticas controladas para $V_{C1}=-1.52$	141
6.10	Relação entre as perturbações Δ_P e a ϵ vizinhança.	141
6.11	(a) Secção de Poincaré (b) atrator controlado	142

4.8	Entropia topológica para o atrator tipo <i>Rössler</i> em função da posição da linha de partição X_P	98
4.9	Ampliação do box da figura 4.8.	99
4.10	Diagrama: relação entre as entropias	100
4.11	Entropia condicional para palavras (N=5).	101
4.12	Função código para atrator tipo <i>Rössler</i>	104
5.1	Divisão do sistema aumentado $u(V,W,Z)$	110
5.2	Série temporal do erro de sincronização	112
5.3	Série temporal do erro entre as variáveis	113
5.4	Variedade de sincronização para circuito de Matsumoto no plano $(V_{C1}^{(m)} \parallel) \times (V_{C1}^{(e)} \parallel)$. (a) estado sincronizado (b) estado não sincronizado	114
5.5	Diagrama em blocos da sincronização entre dois circuitos de Matsumoto	118
5.6	Sincronismo unidirecional entre sistema mestre e escravo	119
5.7	Acoplamento unidirecional no sub-sistema escravo	120
5.8	Erro de sincronização devido a presença de ruídos.	121
5.9	Erro de sincronização devido ao descasamento dos parâmetros	121
5.10	Diferença entre as séries temporais de V_{C1} , devido ao descasamento dos parâmetros	122
6.1	a) Variedades estáveis e instáveis b) Influência de uma pequena perturbação na variedade instável,	129
6.2	Funções de codificação M_C para bit 0 e bit 1.	135
6.3	Curvas ajustadas das matrizes de codificação M_C para bit 0 e bit 1.	136
6.4	Comparação de trajetórias com diferentes alvos (caso 1).	137
6.5	Comparação de trajetórias com diferentes alvos (caso 2).	138
6.6	Aplicação do controle (a) Amplitude dos pulsos de controle (b) Série temporal controlada para $V_{C1} = -0.14$	139
6.7	Aplicação do controle (a) Amplitude dos pulsos de controle (b) Série temporal controlada para $V_{C1} = -1.725$	139
6.8	Órbitas caóticas controladas para alvo= $V_{C1}=-1.70$	140
6.9	Órbitas caóticas controladas para $V_{C1}=-1.52$	141
6.10	Relação entre as perturbações Δ_P e a ϵ vizinhança.	141
6.11	(a) Secção de Poincaré (b) atrator controlado	142

7.1	Função código $G(s, r)$ com o intervalo de exclusão.	147
7.2	Série temporal de V_{C1} para uma sequência aleatória de bits (a) sem ruído (b) com SNR de $30.7dB$	148
7.3	Série temporal de V_{C1} para uma sequência aleatória de bits (a) com SNR de $25.1dB$ (b) SNR de $27.3 dB$	149
7.4	Projeção das secções de Poincaré no plano (V_{C1}, i_L) (a) com SNR de $27.4dB$ (b) sem ruído.	150
7.5	Série temporal da mensagem <i>BRASIL</i> codificada em V_{C1}	151
8.1	Conceito de tempo de retorno.	156
8.2	Diagrama do tempo de recorrência na secção de Poincaré.	157
8.3	Histograma do tempo de retorno.	158
8.4	Comparação entre a distribuição dos tempos de retorno com ruído ($2.9 dB$.)	159
8.5	Histograma para a variável de sincronização V_{C1} sem ruído.	160
8.6	Comparação entre a distribuição da variável de sincronização V_{C1} (a) com SNR de $2.89dB$ (b) somente ruído.	161
8.7	Comparação entre a distribuição da variável de sincronização V_{C1} e ruído de $16.89 dB$	162
8.8	Comparação entre a distribuição dos tempos de retorno com ruído de $16.8 dB$	163
8.9	Histograma da distribuição do tempo de retorno para sinal V_{C1} aleatório.	164
8.10	Dependência dos tempos de retorno em função do ruído.	165
8.11	Diagrama em blocos do receptor baseado no tempo de retorno.	166
8.12	Correlação entre as variáveis $(V_{C1}^T) \times (V_{C1}^R)$, para diferentes níveis de ruído.	167
8.13	Comparação entre a distribuição dos tempos de retorno para $T_b = 500$ (a) $SNR = 18.5 dB$, (b) $SNR = 10.6 dB$	168
8.14	Comparação entre a distribuição dos tempos de retorno (a) sem ruído (b) com ruído ($SNR=16.6dB$).	169
8.15	Série temporal dos tempos de retorno para (a) $T_b = 500$ (b) $T_b = 1000$	170
8.16	Série temporal dos tempos de retorno para (a) $T_b = 1000$ e $SNR=8.67dB$ (b) $T_b = 1000$ e $SNR=7.87dB$	170

8.17	Comparação entre a distribuição dos tempos de retorno para Poincaré normal.	171
8.18	Dependência da taxa de erro de bits em função do ruído.	172

Agradecimentos

Quando, ao concluirmos uma jornada difícil, olhamos para trás, vemos que não estávamos sozinhos. Nessa minha caminhada, sempre pude contar com a ajuda de muitos amigos e pessoas, algumas podem ser que já me esqueceram, porém, eu não as esqueci.

Assim, gostaria de listar algumas dessas tão caras pessoas, tendo sempre a certeza de não ter sido justo com todas elas.

Começo pelo Professor Iberê Caldas, que quando aqui cheguei (São Paulo) não conhecendo ninguém, encontrei em sua pessoa, a âncora forte, que me animou na minha empreitada, demonstrando confiança apreço e amizade por mim.

De forma não menos importante, agradeço ao meu orientador no doutorado o Professor José Piqueira, que me aceitou de forma incondicional, acreditando que eu poderia superar as dificuldades. Com sua ajuda, compreensão e amizade, eu as superei.

Ao Dr. Murilo Baptista com quem troquei muitas informações e sugestões, e que sempre demonstrou boa vontade para comigo.

Agradeço em especial à minha esposa Marli, por seu carinho e dedicação. Aos meus filhos pelas palavras de incentivo. De forma também especial aos meus amigos Roberto Rocha e José da Matta.

Aos meus amigos do grupo de caos do Instituto de Física pelos muitos momentos agradáveis que passamos juntos.

Ao meu amigo Izair Cerutti, de Curitiba com quem sempre pude contar nos bons e maus momentos de minha vida.

Ao casal amigo Fernando e Volga, pela agradável companhia quando morávamos juntos no CRUSP e por sempre demonstrarem uma grande amizade e preocupação para comigo.

Agradeço ao Dr. Silvio Thomaz pela paciente ajuda na revisão de algumas partes

desse trabalho, além de nossa amizade pessoal.

Finalmente, agradeço o apoio financeiro do CNPQ pela bolsa de doutorado.

Resumo

Nesse trabalho, apresentamos duas técnicas de comunicação por espalhamento espectral com caos. Na primeira, o caos tem sua dinâmica modulada pela informação, sendo essa recuperada pela reconstrução do espaço de fase do sistema, via sincronização caótica. Para ocorrer a codificação na dinâmica caótica do sistema, devemos controlar o caos. Para isso, desenvolvemos um método de controle de caos, baseado na dinâmica simbólica dos sistemas caóticos. Na segunda técnica, empregamos o conceito de tempo de recorrência. Nesse método a informação é codificada em segmentos da forma de onda caótica, sendo recuperada pela análise estatística do sinal caótico recebido. Em ambos os casos, consideramos o canal sofrendo influência de ruídos.

Abstract

In this thesis, we show two communication methods based in spread spectrum with chaos. In the first approach, chaos has its dynamics modulated by the source of information. This information is recovered at the receiver. This is synchronized with transmitter, by phase space reconstruction. The codification of the information into the chaotic trajectories is done by chaos control. In the second approach, we have used the notion of return time recurrence. The source of information is coded by segments of the chaotic signal, larger than strictly necessary to accommodate it, and is recovered by statistical analysis of the chaotic signal received, which restores the return time of the transmitted trajectories. In both cases we consider the physical channel undergo the action of additive gaussian noise.

Capítulo 1

Prefácio

Uma das mais importantes características de sistemas caóticos é sua dependência em relação às condições iniciais. Isso significa que dado dois pontos muito próximos um do outro, suas trajetórias afastarão-se exponencialmente uma da outra com o passar do tempo. Esse fenômeno é um dos mais importantes fatores que diferenciam os sistemas caóticos dos não-caóticos. Essa divergência das trajetórias torna os sistemas caóticos intrinsecamente não previsíveis a longo prazo, não importando com que precisão conheçamos as posições iniciais.

Os sistemas caóticos escondem por trás de sua aparente aleatoriedade um comportamento determinístico. No caos, comportamentos e dinâmicas complexas podem se esconder em sistemas descritos por simples equações algébricas ou conjuntos de equações diferenciais. Alguns autores consideram o caos uma espécie de ruído determinista [1], devido a esse comportamento aparentemente aleatório.

O objetivo central do nosso trabalho é usar as propriedades dos sistemas caóticos que possam ser úteis no desenvolvimento de sistemas de comunicações. Existe uma estreita relação entre sistemas caóticos e a teoria da informação [2], pois sistemas caóticos podem ser vistos como fontes geradoras de informação. Associando-se um conjunto de símbolos discretos a diferentes partes do espaço de fase, através da dinâmica simbólica, os sistemas caóticos podem se tornar fontes de sinais digitais. Pelo controle apropriado das trajetórias podemos fazer com que um sistema caótico possa gerar uma desejada seqüência de símbolos, tornando possível a inserção de informação no fluxo caótico resultante [3, 4]. Isso, junto com a propriedade de sincronização caótica, em que dois sistemas semelhantes, porém partindo de condições iniciais diferentes conver-

gem suas trajetórias, permitem a construção de sistemas capazes de enviar informação, em um arranjo composto de transmissor e receptor.

A aplicação de sinais caóticos em comunicações têm, em princípio, duas vertentes principais de uso: a primeira objetiva aplicações em criptografia, através do embaralhamento do conteúdo da mensagem em uma seqüência caótica. A segunda aplicação têm como meta a transmissão de informação pela codificação ou modulação de uma portadora caótica. Isso pode ser feito de várias maneiras, o que veremos em detalhes no decorrer deste trabalho. Como os sistemas caóticos apresentam espectro de banda larga, sistemas que utilizam essa propriedade estão sendo objetos de intensa pesquisa. Essa área de pesquisa chamada de comunicação caótica por espalhamento espectral, será o principal objeto de nosso trabalho. Nessa aplicação, o objetivo é espalhar a informação em uma faixa de freqüência muito maior que a necessária para uma dada taxa de bits, visando reduzir as interferências com outras fontes de sinal, aumentar a imunidade a ruídos e também permitir o uso compartilhado do canal de comunicação entre vários usuários.

Os sistemas caóticos apresentam uma densidade espectral de potência aproximadamente uniforme, sendo a energia dos sinais espalhada sobre uma faixa ampla de freqüências, além do que sinais caóticos complexos podem ser gerados utilizando-se circuitos elétricos relativamente simples [5] daí, o seu uso potencial em comunicações.

1.1 Objetivos

Ao longo deste trabalho nosso objetivo será o estudo, análise e o desenvolvimento de técnicas de comunicação que possam utilizar os sistemas caóticos como peça básica. Dentro do universo dos sistemas não-lineares, nos concentraremos basicamente em dois tipos. Analisaremos os sistemas caóticos que podem ser descritos em termos de equações de diferenças ou mapas. O outro tipo analisado será aquele que descreve sistemas dinâmicos modelados por conjuntos de equações diferenciais ou fluxos.

Dentre os vários aspectos dos sistemas não-lineares, focaremos somente os aspectos que possam ter interesse em nossos objetivos. Um representante de cada família será estudada, dos sistemas discretos, nos concentraremos no mapa logístico. Para sistemas contínuos, o circuito elétrico de Matsumoto será nossa escolha. Em ambos

os casos procuraremos estender os resultados para sistemas análogos. Desenvolveremos duas abordagens para levar a efeito a transmissão de informação com caos. Na primeira abordagem a fonte de informação atuará como elemento modulador da dinâmica do sistema caótico. A propriedade já descrita dos sistemas caóticos apresentarem espectro de Fourier contínuo será explorada na segunda abordagem. Nesse caso, a informação não está embutida na dinâmica caótica do sistema, mas sim será função de propriedades estatísticas típicas de sistemas com caos, o que permite a recuperação da informação espalhada sobre todo o espectro do sinal caótico.

As técnicas de controle de caos e a sincronização de sistemas caóticos, também serão estudadas por serem o cerne dos métodos que iremos desenvolver e analisar. Ruídos estão sempre presentes em processos que envolvem a transmissão de sinais. Em nossas análises iremos verificar qual o efeito que ruídos, em geral aditivos, podem ter em um canal de comunicação caótico. Como existem vários métodos de comunicação com caos, tentaremos fazer uma análise comparativa das vantagens e desvantagens entre eles e as técnicas aqui desenvolvidas.

1.2 Justificativa e Metodologia

Cada dia que passa, fica mais tênue a barreira que separa as pesquisas em ciências puras das pesquisas em ciências aplicadas. Em nosso caso, estamos mais interessados na exploração da região de superposição entre ambas, a física como ciência pura e a engenharia, como ciência aplicada.

Nossa motivação ao empreender esta pesquisa é justamente explorarmos essa convergência, ao vincularmos características de comportamento de sistemas caóticos com problemas relacionados ao projeto de técnicas mais eficientes de transmitir e receber informação.

Em função da maneira como a informação é modulada, seja ela na forma de variáveis contínuas ou discretas, podemos ter vários esquemas de comunicação usando sistemas caóticos. Inicialmente o uso do caos em comunicação tinha como principal objetivo obter meios de comunicação mais seguros, em duas abordagens distintas. A primeira visava utilizar o caos para criar sistemas de criptografia. Nesse caso o caos fornece as seqüências pseudo-aleatórias necessárias para a realização da criptografia. Ocorre que esse campo de pesquisa, atualmente encontra-se em desenvolvimento tanto no sentido

de obter técnicas mais confiáveis, quanto para mostrar que sistemas de criptografia baseados em caos não são seguros o suficiente frente as novas técnicas de criptoanálise e velocidade de novos processadores e algoritmos que conseguem quebrar as chaves utilizadas, com relativa facilidade. A segunda abordagem inicialmente proposta, visava obter meios de comunicação segura mascarando-se a informação dentro da complexidade do caos. Um desses esquemas conhecido como mascaramento caótico misturava a informação, com um nível apropriado dentro da portadora caótica e esse sinal composto era transmitido, sendo retirado o sinal caótico no receptor, recuperando-se a informação enviada. Esse esquema porém, mostrou-se muito frágil e com extrema sensibilidade à presença de ruídos [6].

Atualmente, os novos esquemas de comunicação caóticos estão focados em fazer pleno uso de algumas características fundamentais de sistemas caóticos, a saber: o espectro de banda larga e o determinismo que possibilita a geração de seqüências pseudo-aleatórias com propriedades estatísticas que podem ser controladas e se aproximar do ideal para o uso em sistemas de comunicação por espalhamento espectral.

Nesta tese, descreveremos qualitativamente e quantitativamente à título de revisão, e também para podermos comparar, as várias técnicas de comunicação com caos com os métodos por nós desenvolvidos. No capítulo dedicado à comunicação por espalhamento espectral, iremos estudar em detalhes os conceitos relativos a esse método, tais como o efeito do alargamento da faixa espectral na relação sinal-ruído, o conceito de correlação entre funções, bem como a correlação entre sinais provenientes de diferentes fontes (o problema dos multicaminhos). Mostraremos ainda e principalmente como as características dos sistemas caóticos podem ser aproveitados na comunicação por espalhamento espectral.

Embora as técnicas de comunicação sejam baseadas em sistemas lineares, novos métodos de comunicação utilizando o caos têm sido constantemente propostos. Como já afirmamos, existe uma vinculação entre o comportamento caótico e a teoria da informação, um vez que muitos conceitos entre ambos são comuns. Portanto, a partir dessa relação podemos inferir que novas possibilidades podem se oferecer quando aplicadas no contexto do desenvolvimento de novas técnicas de comunicação. Em termos de objetivos podemos resumir tudo em uma só questão: existe alguma vantagem no uso do caos em sistemas de comunicação? Nossa meta é fornecer subsídios para responder à essa pergunta crucial.

Em relação à metodologia empregada no desenvolvimento do nosso trabalho, cumprimos o seguinte programa: na primeira parte faremos fundamentalmente uma análise teórica e fenomenológica, na segunda parte faremos a simulação numérica dos sistemas caóticos envolvidos. Também discutiremos ao longo desta tese os conceitos e fundamentos principais relativos às comunicações e aos sistemas caóticos que sejam de interesse para aplicações em sistemas de comunicação.

Nas simulações numéricas que faremos, consideraremos inicialmente os sistemas e comportamentos caóticos vistos como elementos isolados. Ao final do trabalho reuniremos essas partes, e simularemos um sistema completo de comunicação baseado em caos, analisando e comparando os resultados obtidos.

Capítulo 2

Princípios de Comunicação com Caos

2.1 Introdução

Nesse capítulo iremos descrever os principais pontos que tornam atraente o uso do caos em sistemas de comunicação, destacando os pontos em que aspectos positivos possam ser aproveitados, bem como os aspectos negativos que possam ser objeto de estudo visando a sua minimização.

Como já mencionado o fato de sistemas caóticos apresentarem um espectro de potência contínuo, indicando uma complexidade em sua dinâmica, podem ser utilizados na concepção de sistemas de comunicações seguros, tanto por via de espalhamento espectral, quanto pela criptografia. Nesse caso, podemos usar o caos para a geração de longas seqüências pseudo-aleatórias, uma vez que essas apresentam-se como seqüências não-periódicas, podendo ser aplicadas para o embaralhamento criptográfico ou para o espalhamento espectral da informação. Os sistemas de comunicação com caos, tanto quanto os sistemas convencionais, podem ser do tipo monousuário, quando o meio físico não é compartilhado, como podem ser do tipo multiusuário, onde existe o compartilhamento do meio físico. Neste trabalho iremos descrever como algumas técnicas de comunicação monousuário, com caos, funcionam, fazendo simulações numéricas com os modelos matemáticos desses sistemas.

Os trabalhos pioneiros que aproveitavam a idéia de usar o caos como elemento base de sistemas de comunicação, tinham por meta mascarar a informação no fluxo caótico, numa abordagem semelhante à criptografia, uma vez que a justificativa era a comunicação segura [6]. Porém, os métodos de reconstrução do espaço de fase [7, 8]

tornaram esse caminho muito vulnerável a ataques invasivos [9]. No entanto, a abordagem criptográfica tem sido novamente objeto de estudos recentes, uma vez que técnicas mais elaboradas tem sido experimentadas objetivando evitar ataques via reconstrução do espaço de fase, tornando as técnicas de criptografia caótica mais confiáveis. A outra via possível, explora a idéia do espalhamento espectral, onde a faixa de frequência alocada para a informação é muito maior que o estritamente necessário, tornando atraente o uso do caos, uma vez que podemos utilizar seqüências de formas de onda caóticas não-periódicas. Em nosso trabalho nos concentraremos nessa possibilidade, juntamente com o enfoque na codificação dinâmica, com a informação inserida diretamente na dinâmica do sistema caótico utilizando-se modulação caótica. Faremos nesse capítulo uma breve descrição de alguns fundamentos teóricos da comunicação por espalhamento espectral, que serão de interesse para o nosso trabalho.

Discutiremos ainda, alguns conceitos básicos de comunicação caótica e analisaremos, a título de comparação, alguns métodos de comunicação com caos.

2.2 Elementos de um sistema de comunicação

Ao longo desta tese contantemente iremos tratar de sistemas de comunicação referindo-nos aos elementos que formam uma unidade funcional capaz de levar uma dada informação $b(t)$ de um transmissor para um receptor. A seguir, apresentaremos uma breve descrição dos elementos constitutivos de um sistema de comunicação.

O primeiro elemento fundamental é a fonte de informação $b(t)$ que pode ser analógica ou digital. A informação contínua ou analógica pode ser voz ou vídeo por exemplo. Essa informação $b(t)$, ainda na forma original, passa por um primeiro processo de codificação sendo convertida em um formato comum aceito entre as partes transmissora e receptora. Em geral esse processo de codificação na fonte tem por objetivo principal retirar o máximo possível de redundâncias presentes nos dados gerados pela fonte de informação, para a otimização do uso da largura de banda do canal de transmissão. Nesse processo de codificação pode haver mudança no formato da informação, de analógico para digital ou vice-versa.

O funcionamento do bloco de codificação do canal está baseado na afirmação de Claude Shannon: um canal com uma largura de banda $B_w = |f_0 - f_1|$ (sendo f_0 a frequência inferior e f_1 a frequência superior) transmitindo um sinal com potência P_S

em um meio com ruído aditivo gaussiano $\eta(t)$ (densidade espectral de potência $\frac{N_0}{2}$ e variância σ_n^2) terá uma capacidade C_c de transmissão dada por:

$$C_c = \log_2\left(1 + \frac{P_S}{P_N}\right) \quad (2.1)$$

sendo que a potência média do ruído P_N é dada por:

$$P_N = \int_{f_0}^{f_1} \frac{N_0}{2} dw \quad (2.2)$$

Shannon, mostrou que adicionando-se um certo grau de redundância ao sinal que contém a informação útil, poder-se-ia reduzir a quantidade de erros na recepção a um patamar tão baixo quanto se quisesse, desde que a taxa máxima de transmissão esteja abaixo do limite dado pela equação 2.1. Portanto, a codificação de canal utilizando essa propriedade pode ser aproveitada para a detecção e correção de erros, através da adição de informação extra (redundância controlada). Em seguida, esse sinal deve assumir uma forma adequada à transmissão pelo meio físico¹, operação essa que é levada a termo pelo bloco modulador.

Em alguns sistemas a codificação do canal é combinada em um bloco único junto com o processo de modulação, procedimento que também adotaremos ao longo deste trabalho, salvo menção em contrário. Adiante, entraremos em mais detalhes sobre essa operação, quando abordaremos aspectos relativos à modulação caótica. O sinal $x(t)$ resultante da modulação sofre a adição de uma parcela de energia indesejável $\eta(t)$ chamada ruído, durante o processo de transmissão do sinal ao receptor. Em um sistema de comunicação real, o processo de adição de ruído ao sinal $x(t)$ sempre ocorre em menor ou maior grau. Do lado do sistema receptor, os processos devem ocorrer na ordem inversa ao efetuado no sistema transmissor, resultando o sinal $m(t) = x(t) + \eta(t)$ recebido ser convertido à informação original $b(t)$. Na figura 2.1 todos os elementos mostrados são vistos interligados, formando um sistema de comunicação básico, composto de transmissor e receptor.

Os processos de comunicação entre os seres humanos são inerentemente feitos na forma de sinais analógicos. Assim, embora os sistemas de comunicação digital

¹A modulação pode ser digital ou analógica, tendo por objetivo imprimir a informação na onda portadora.

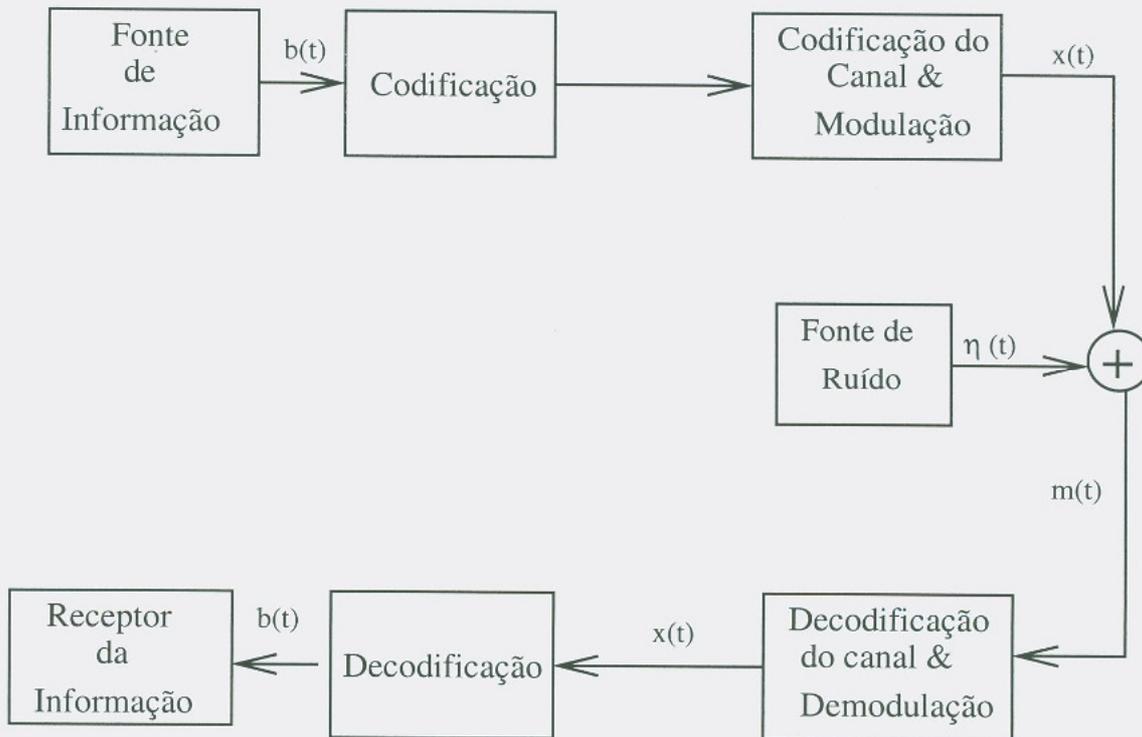


Figura 2.1: Esquema geral de um sistema de comunicação.

sejam baseados em valores discretos, a maioria dos processos na natureza, em nível macroscópico, processa-se, com as variáveis assumindo valores contínuos no tempo e no espaço.

Ocorre que, em geral, a transmissão da informação sob a forma analógica não é a maneira mais eficiente de usar a capacidade de um canal de comunicação, embora a transmissão no meio físico seja otimizada quando os sinais se apresentam na forma analógica. A comunicação digital pode ser feita mais eficiente através da codificação da fonte, cujo objetivo é a eliminação da redundância da informação, além disso os sinais digitais são por natureza ideais para o processamento por computadores e processadores digital de sinais, o que pode proporcionar sistemas com grande velocidade e complexidade, como por exemplo, a moderna telefonia celular digital.

2.3 Fundamentos da comunicação por espalhamento espectral

A comunicação por espalhamento espectral é uma técnica na qual um pseudo-ruído (PN)² de banda larga, independente da informação, é empregado como elemento codificador da informação desejada. Isso, promove o espalhamento da energia do sinal sobre uma largura de banda muito maior que a necessária para acomodar a informação [10], permitindo sistemas de comunicação que apresentam sinais com baixa densidade espectral de potência, possibilidades de múltiplos acessos, segurança quanto ao sigilo das comunicações [11], além de grande imunidade à diversas formas de interferências, como por exemplo: ruídos e sinais provenientes de multipercursos (*multipath*)³

No receptor o sinal recebido deve ser *desespalhado* fazendo-se uso do mesmo pseudo-ruído (PN) utilizado no transmissor. Para isso é necessário a sincronização⁴ entre transmissor e receptor nos casos em que se faz uso da detecção coerente ou, fazendo-se a análise das propriedades estatísticas do sinal, quando se usa o método de detecção não coerente. Quando nos referimos à sincronização entre transmissor e receptor, estamos deixando implícito que trata-se da sincronização entre sistemas caóticos.

Os sinais caóticos apresentam uma estrutura complexa, assemelhando-se a sinais de origem aleatória, o que torna difícil a sua distinção dos ruídos verdadeiros, por meio de métodos de análise linear. Por também apresentarem um rápido decaimento na correlação entre porções atrasadas de um mesmo sinal e terem espectro de banda larga, os sinais caóticos são naturalmente candidatos para a codificação de mensagens em sistemas de espalhamento espectral [12].

Em geral, os métodos de modulação utilizados em espalhamento caótico consistem na multiplicação da portadora caótica pelo sinal da informação. A decodificação é feita dividindo-se o sinal recebido pelo sinal caótico de referência. Após isso, circuitos estimadores fazem a decisão de bits, baseado em algum critério, geralmente a energia

²Um pseudo-ruído ou sequência pseudo-aleatória é uma sucessão periódica de bits (chips) de curta duração com comportamento aparentemente aleatório dentro de cada período.

³Em sistemas de comunicação por espalhamento espectral, esses sinais são também aproveitados, utilizando-se os chamados receptores *RAKE*.

⁴Nesse contexto a sincronização refere-se aos sistemas isócronos, quando todos os elementos devem compartilhar uma mesma base de tempo.

E_0 do sinal recebido, utilizada como variável de decisão.

2.3.1 O princípio da ortogonalidade e o compartilhamento do meio

Nesta seção, iremos destacar os fundamentos matemáticos da técnica de espalhamento espectral e também considerações sobre o compartilhamento do meio físico entre vários usuários.

Os conceitos mais importantes utilizados na comunicação por espalhamento espectral são a correlação cruzada entre sinais e a autocorrelação entre um sinal $x(t)$ e outra parte do mesmo sinal deslocada τ unidades no tempo, ou seja: $x(t - \tau)$.

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t - \tau)dt \quad (2.3)$$

A função de autocorrelação $R_{xx}(\tau)$ mede o grau de similaridade entre partes de um mesmo sinal $x(t)$, defasados por um intervalo de tempo τ [13]. Para as seqüências pseudo-aleatórias (PN), a função de autocorrelação $R_x(\tau)$ só não será nula, quando o tempo de correlação τ for nulo (para seqüências ideais). A função de correlação entre sinais diferentes $x(t)$ e $y(t)$, chamada de correlação cruzada, também relaciona-se com a similaridade, porém agora entre funções diferentes. Nesse caso, a equação 2.3 torna-se

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y(t - \tau)dt \quad (2.4)$$

quando as funções $x(t)$ e $y(t)$ são não-periódicas. No caso em que $x(t)$ e $y(t)$ são periódicas de período T_0 , têm-se

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)y(t - \tau)dt \quad (2.5)$$

Ao contrário da autocorrelação, a função de correlação cruzada deve ser nula para qualquer deslocamento relativo do tempo τ , para seqüências pseudo-aleatórias (PN) ideais. Para sistemas com meios compartilhados, classicamente, usa-se o princípio da ortogonalidade para fazer a separação da informação de cada usuário. O princípio da ortogonalidade diz respeito à correlação entre sinais; dois sinais são não-correlacionados se o produto escalar entre os dois sinais for nulo.

Sejam os sinais $x_i(t)$ e $x_j(t)$, se eles forem ortogonais no intervalo $[a,b]$, então pelo princípio da ortogonalidade

$$\int_a^b x_i(t)x_j(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_A^B X_i(\omega)X_j^*(\omega)d\omega = 0 \quad (2.6)$$

com $X_i(\omega)$ e $X_j^*(\omega)$ sendo as transformadas de Fourier dos sinais $x_i(t)$ e $x_j(t)$. A igualdade entre as duas integrais é garantida pelo teorema de Parseval. A integral do lado esquerdo da equação 2.6 é a correlação entre os sinais $x_i(t)$ e $x_j(t)$, no domínio do tempo. Quando os sinais são gerados por funções ortogonais, eles podem ser separados no receptor fazendo-se sua correlação com a seqüência pseudo-aleatória (PN) do usuário. Nesse caso, as outras seqüências pseudo-aleatórias que não se correlacionam com as do destinatário, parecerão ao receptor do usuário, como ruído a ser rejeitado, pois em sistemas com meios compartilhados cada usuário utiliza uma seqüência pseudo-aleatória (PN) diferente.

Existem dois tipos principais de comunicação por espalhamento espectral: os sistemas com saltos de frequência (*FH - frequency hopping*) e os sistemas de seqüência direta (*DS - direct sequence*).

Os sistemas por saltos de frequência (*FH*) [14] dividem o espectro disponível em N canais e dividem a informação por estes canais segundo uma seqüência pseudo-aleatória, que deve ser conhecida tanto pelo transmissor quanto pelo receptor. Devido ao compartilhamento dessa seqüência pseudo-aleatória, um problema chave nesse tipo de esquema é que isso requer uma sincronização rigorosa entre transmissor e receptor [15]. Por essas características, os sistemas caóticos podem ser alternativas interessantes, pela possibilidade de geração de seqüências pseudo-aleatórias com período infinito e a capacidade de sincronização entre circuitos caóticos.

No sistema chamado de seqüência direta (*DS*), o sinal de entrada é modulado em uma seqüência pseudo-aleatória, essa modulação é efetuada pela multiplicação da seqüência (PN) pela informação, que deve estar na forma bipolar (± 1), ou somada em módulo 2 quando a informação estiver na forma unipolar (0, 1). Uma maneira genérica de vermos as possibilidades da separação dos sinais, devido ao compartilhamento do meio, pode ser feito pela exploração da equação 2.6, onde são possíveis três formas de fazer a correlação entre os sinais.

- **Por divisão de tempo**⁵

Se os dois sinais $x_i(t)$ e $x_j(t)$ forem disjuntos no tempo, de tal modo que exista um intervalo τ de separação entre eles, então a integral 2.6 irá se anular. Os canais para diferentes usuários serão formados designando-se janelas de tempo diferente para cada usuário.

- **Por divisão de frequência**⁶

Se as transformadas de Fourier $X_i(\omega)$ e $X_j(\omega)$ dos sinais não se sobrepõem, a integral 2.6 também se anulará. Os diferentes canais serão formados atribuindo-se diferentes frequências a cada usuário.

- **Por divisão de código**⁷

Nessa técnica a cada canal é associado uma seqüência pseudo-aleatória ortogonal à todas as outras no conjunto, tornando nula a integral 2.6, para os outros sinais não-correlacionados. Nessa técnica, os sinais são sobrepostos no tempo e compartilham a mesma faixa de frequência. O sinal é recuperado pela única seqüência que apresentar uma correlação não nula com a seqüência de referência.

Seja um sistema de comunicação discreto binário com o sinal recebido sendo uma seqüência temporal de comprimento N , do tipo $r[k]$, com $k \in \{0, N-1\}$, definida por:

$$r[k] = \bar{e}b[k] + \eta[k] \quad (2.7)$$

$b[k] \in \{\pm 1\}$ sendo a seqüência dos símbolos contendo a informação (binária antipodal), e $\eta[k]$, um ruído branco gaussiano aditivo (*additive white noise gaussian*)⁸, com amplitude média zero, variância σ^2 , tendo \bar{e} como o valor médio da portadora, em um período T .

⁵(TDMA - Time division multiple access)

⁶(FDMA - Frequency division multiple access)

⁷(CDMA - Code division multiple access)

⁸Considera-se o ruído branco como sendo de natureza aleatória, possuindo largura de faixa infinita, amplitude média nula e autocorrelação nula fora da origem. Chama-se de gaussiano por possuir uma função de densidade de probabilidade gaussiana com média nula e variância igual à sua tensão média quadrática (rms).

Utilizando-se um detector de correlação pode-se determinar se um símbolo +1 ou -1 foi enviado em um dado instante de tempo t_m . Por hipótese, a fonte emite os símbolos ± 1 com igual probabilidade (possivelmente após uma codificação de fonte). Nesse caso, a detecção será feita por um simples detector de nível, tal que

$$y[k] \geq 0 : \text{indica que o símbolo +1 foi enviado} \quad (2.8)$$

$$y[k] < 0 : \text{indica que o símbolo -1 foi enviado} \quad (2.9)$$

onde $y[k]$ é a variável de decisão, sendo que sua estatística determina o desempenho do receptor. Mostra-se adiante, que $y[k]$ apresenta uma distribuição gaussiana, com valor médio ϵb_m e variância σ_n^2 .

Se, agora modularmos cada símbolo $b[k]$ com outro conjunto de símbolos binários (seqüência de espalhamento) $\{c[n]\}_{n=0}^{N-1}$, de modo que cada símbolo $b[k]$ a ser transmitido será dado pela nova seqüência: $b[k](c[0], c[1], c[2], \dots, c[N-1])$, que dependerá do valor do símbolo $b[k]$.

Assim, cada bit de duração T_b será codificado em uma seqüência de N_e chips de duração $t_b = \frac{T_b}{N_e}$. Como resultado, teremos um aumento na taxa de sinalização por um fator de N_e , conhecido como fator de espalhamento.

A seqüência recebida pode ser descrita como:

$$r[n] = \epsilon_c b[k] c[n] + \eta[n] \quad (2.10)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots, N_e - 1$ em que,

$$\epsilon_c = \frac{\bar{\epsilon}}{N_e} \quad (2.11)$$

Uma propriedade das seqüências de espalhamento $\{c[n]\}$ é ter um valor médio aproximadamente zero ou seja:

$$\sum_{n=0}^{N_e-1} c[n] \approx 0 \quad (2.12)$$

e uma autocorrelação dada por:

$$\sum_{n=0}^{N_e-1} c[n]c[n+i] \approx \begin{cases} N_e, & i = 0 \\ 0, & \text{para qualquer outro} \end{cases} \quad (2.13)$$

Essas são condições ideais, mas que podem ser aproximadas na prática. Tais propriedades fazem com que essas seqüências tenham a aparência de um ruído, por isto o nome de pseudo-ruídos (*PN*), seqüências pseudo-aleatórias.

O detector de correlação executa a seguinte operação para obter a variável de decisão $y[k]$

$$y[k] = \sum_{n=0}^{N_e-1} r[n]c[n] \quad (2.14)$$

ou

$$y[k] = \sum_{n=0}^{N_e-1} (\epsilon_c b[k]c[n] + \eta[n])c[n] \quad (2.15)$$

o qual fornece, baseado nas propriedades das seqüências de espalhamento:

$$y[k] = \epsilon_c b[k] + \sum_{n=0}^{N_e-1} \eta[n]c[n] \quad (2.16)$$

Portanto a variável de decisão é normal (gaussiana) com média $N_e \epsilon_c b[k] = \epsilon b$ e variância σ^2 . Comparando-se com sistemas não baseados em espalhamento, não há melhoria no canal com ruído aditivo gaussiano. Isto pode ser visto notando-se que a taxa de sinalização é aumentada por um fator N_e , mas isto também aumenta a largura de banda do sinal e, portanto, a potência de ruído por um fator de N_e .

Como veremos a seguir, a força do espalhamento espectral vem do seu efeito em sinais de banda estreita (sinais correlacionados). Esses efeitos, incluem os sinais de interferência, sinais de multipropagação ou sinais provenientes de outras fontes dentro de uma mesma área física. Agora, suponhamos que um canal tenha um agente de interferência: isto equivale adicionar uma constante real $I[n]$ ao sinal recebido

$$r[k] = \epsilon_c b[k]c[n] + I[n] + \eta[n], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_e - 1 \quad (2.17)$$

Então o detector de correlação produzirá a variável de decisão:

$$y[k] = \sum_{n=0}^{N_e-1} \left(\epsilon_c b[k] c[n] + I[n] + \eta[n] \right) c[n] \quad (2.18)$$

a qual se torna:

$$y[k] = N_e \epsilon_c b[k] + I[n] \sum_{n=0}^{N_e-1} c[n] + \sum_{n=0}^{N_e-1} \eta[n] c[n] \quad (2.19)$$

ou

$$y[k] \approx N_e \epsilon_c b[k] + 0 + \sum_{n=0}^{N_e-1} \eta[n] c[n] \quad (2.20)$$

dando, novamente uma variável de decisão com média $N_e \epsilon_c b = \epsilon b[k]$ e variância σ^2 de modo que a interferência é suprimida pela operação de *desespalhamento* (correlação). Em contraste, a variável de decisão em sistema sem espalhamento poderia ter uma média de $\epsilon b[k] + I[n]$, o que iria deixar o sistema não operacional para $|I[n]|$ suficientemente grande. Tanto em sistemas com caos, como em sistemas com espalhamento por seqüências pseudo-aleatórias, um requisito chave é que o receptor de correlação tenha uma cópia exata e sincronizada da seqüência de espalhamento usada no transmissor [15, 16].

Seja agora um canal com múltiplos caminhos, um caminho direto e outro caminho especular (refletido), o qual faz uma cópia do sinal chegar ao receptor com um atraso l e atenuação β :

$$r[n] = \begin{cases} b[k]c[n] + \beta b[k-l]c[n+l] + \eta[n] & n = 0, 1, 2, \dots, l-1 \\ \beta b[k]c[n] + \beta b[k]c[n-l], & n = l, 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2.21)$$

assumindo-se que $l < N_e$, ou seja que o retardo seja menor que a duração T do símbolo.

O caminho especular causa uma interferência em ambos os sinais; na versão atrasada $b[k-l]$ e na versão atual $b[k]$ do símbolo. Portanto na operação de correlação tem-se:

$$y[k] = N_e b[k] c[n] c[n] + \beta b[k-1] \sum_{n=0}^{l-1} c[n-1] c[n] + \dots + \beta b[k] \sum_{n=l}^{l-1} c[n-l] c[n] + \sum_{n=0}^{N_e-1} \eta[n] c[n] \quad (2.22)$$

o qual se torna:

$$y[k] \approx N_e b[k] + 0 + \dots + 0 + \sum_{n=0}^{N_e-1} \eta[n] c[n] \quad (2.23)$$

Assim, o sinal proveniente do multicaminho é suprimido na operação de desespalhamento. Se não houvesse o desespalhamento, um canal assim, poderia sofrer de interferência intersimbólica (*ISI*)⁹, resultando em perda de desempenho.

2.3.2 Geradores de seqüências não-caóticas

Um requisito chave nos sistemas de comunicação por espalhamento espectral em meios compartilhados, são as seqüências pseudo-aleatórias que codificam as informações de cada usuário. As características ideais para essas seqüências pseudo-aleatórias de espalhamento, devem ser:

1. ter uma função de autocorrelação (equação 2.3) concentrada, ou seja $R_x(\tau) = 0$ para $\tau \neq 0$
2. ter baixa correlação (equação 2.4) entre elas, e as outras seqüências, para a recuperação da informação.

Os vínculos indicados nos itens (1) e (2) acima, são satisfeitas, quando as funções que geram as seqüências de espalhamento são ortogonais.

Sistemas convencionais utilizam geradores de seqüências pseudo-aleatórias baseados em funções com variáveis de estado discretas, como registradores binários de deslocamento¹⁰, podendo gerar uma grande classe de seqüências pseudo-aleatórias binárias [16]. Essas seqüências são descritas por equações de diferenças do tipo

⁹Intersymbolic Interference

¹⁰binary shift register

$$x[k] = \sum_{i=1}^n a_i x[k-i] \pmod{2}, x[j] \in GF(2) \quad (2.24)$$

em que a_i são coeficientes polinomiais. Essas operações são realizadas no corpo finito de Galois, ou seja, $GF(2)$ para sistemas binários. Nesses algoritmos, as seqüências geradas apresentam período finito, o que em termos de segurança implica em perda de confiabilidade, porque em geral, quanto maior o período da seqüência, maior a segurança do sistema. Seja um sistema binário produzindo os símbolos b_0 e b_1 . Agrupando-se esses símbolos em unidades de comprimento n , serão possíveis gerar $N = 2^n$ diferentes seqüências, com período N . Por exemplo, adotando-se $n=10$ como sendo o número de símbolos binários, serão possíveis $2^{10} = 1024$ diferentes seqüências com 10 bits. Como necessitamos que as seqüências geradas tenham média nula, podemos conseguir isso, por um mapeamento um-a-um dos símbolos $\{0, 1\}$, nos símbolos¹¹ $\{-1, +1\}$.

2.3.3 Espalhamento espectral com seqüências caóticas

Seja o sistema caótico discreto dado por uma função do tipo:

$$x[n+1] = f(x[n]) \quad (2.25)$$

sendo $x[n] = (x_1[n], x_2[n], \dots, x_M[n])$ um vetor de estado do sistema e $f = (f_1, f_2, \dots, f_M)$ é uma função que mapeia o estado $x[n]$ no próximo estado $x[n+1]$. Assim, começando com uma dada condição inicial $x[0]$ e aplicando a função f , obteremos o conjunto sucessivo de estados dados por $x[n]$. Pode-se obter uma função de codificação, com o uso de uma função suave $g(\cdot)$, tal que a uma nova seqüência $y[n] = g(x[n])$ seja obtida.

Uma maneira de fazer o espalhamento espectral do sinal de informação $s[n]$, é multiplicar esse sinal pela seqüência caótica $y[n]$. O sinal transmitido $p[n]$ será então:

$$p[n] = y[n] * s[n] = g(x[n]) * s[n] \quad (2.26)$$

O processo de decodificação é conseguido através do processo inverso, ou seja: divide-se o sinal recebido $p[n]$ pela inversa da função de codificação. Ou seja:

¹¹Codificação anti-podal

$$q[n] = p[n] * y[n]^{-1} = s[n] \quad (2.27)$$

Esse processo de codificação é conhecido como sistemas baseados em seqüências caóticas, onde cada bit de informação $s_j[n]$ é substituído por uma forma de onda caótica com duração T maior que a duração T_b do bit.

Aqui nesse ponto, podemos afirmar que os sistemas que fazem uso de caos podem gerar seqüências aparentemente aleatórias com período infinito, de uma maneira determinística [15] e, que tenham as propriedades de autocorrelação concentrada na origem e baixa correlação cruzada [16]. Além disso, os geradores caóticos podem produzir seqüências com propriedades estatísticas reprodutíveis, em um sinal de banda larga, permitindo sistemas potencialmente mais resistentes às interferências por multipercursos [17].

2.4 Técnicas de modulação em comunicação com caos

Modulação consiste na alteração sistemática de uma forma de onda, denominada de portadora, de acordo com as características de outra forma de onda (*o sinal que contém a informação*), com o objetivo de otimizar o uso do canal. Ou seja, a modulação é feita para que a forma de onda apresente as propriedades mais adequadas ao processo de comunicação considerado [18, 19], casando o sinal ao canal de transmissão.

Existem duas abordagens quando se trata da modulação de sinais caóticos. A primeira abordagem conhecida como modulação dinâmica, substitui a portadora e o sistema de modulação, por um sistema caótico o qual é de alguma maneira, controlado em função do conteúdo da informação, conforme indicado no diagrama de blocos da figura 2.2. Devemos observar que nesse processo de modulação existe uma interação direta entre a informação e a evolução da dinâmica do sistema caótico, uma vez que o conteúdo desta influencia o comportamento futuro do sistema. Qualquer variável de estado $X(t)$, ou combinação de estados, podem formar o sinal transmitido. Esse método têm a vantagem de ser menos dispendioso em termos de energia de controle, entretanto para sistemas com frequências mais altas pode ser difícil a implementação devido à dificuldades no controle [19].

Na outra possível abordagem, não existe uma interação direta entre o conteúdo da informação e a dinâmica do sistema caótico. Na modulação estática cada seqüência

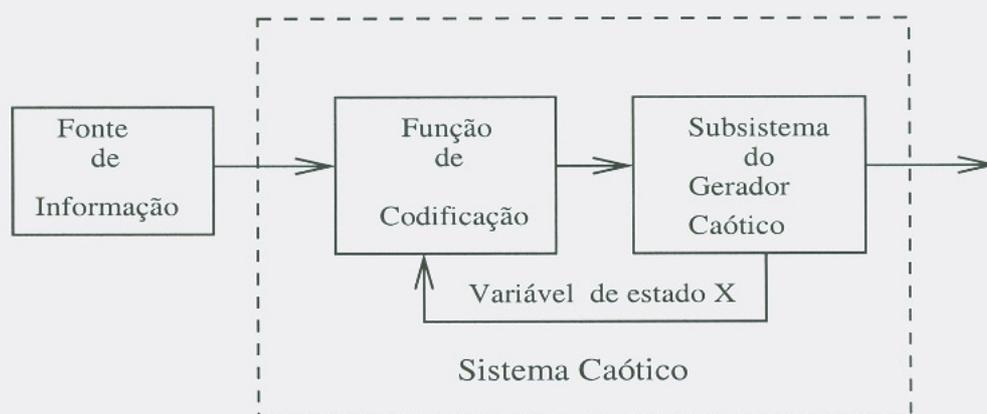


Figura 2.2: Esquema de modulação dinâmica.

discreta de símbolos é mapeada em um segmento de sinal caótico de duração $T > T_b$, produzido por um gerador de código, conforme indicado no diagrama de blocos da figura 2.3. Nesse método, pode-se utilizar o clássico esquema de translação de frequência entre os sinais, junto com o par modulador-demodulador. Como desvantagem, porém, mostra-se mais caro e complexo de implementar. Aqui, o sistema caótico tem a função principal de fornecer uma portadora de banda larga.

Vários métodos de comunicação com caos fazem uso da modulação estática. Entre estes métodos podemos citar o mascaramento caótico, adequado para transportar informações digitais ou analógicas. Outro método é o chaveamento caótico¹², e suas variantes tais como o chaveamento caótico diferencial¹³ e o chaveamento caótico liga-desliga¹⁴. Apresentaremos e exploraremos alguns destes métodos neste trabalho.

Nos métodos de modulação dinâmica, ao contrário da modulação estática, o conteúdo da informação altera a maneira como o sistema caótico evolui ao longo do tempo. Essa alteração se processa em geral, pela variação de algum parâmetro acessível do sistema caótico ou de uma variável de estado (função base). Nesses casos, podem ocorrer o efeitos de memória, quando um símbolo influi no próximo. Na figura 2.2 mostramos um diagrama em blocos da modulação dinâmica. Podemos ver que a fonte de informação através da função de codificação, modula o sistema caótico, via uma variável de estado X .

Uma outra consideração possível refere-se à maneira pela qual a informação é recu-

¹²CSK - chaos shift keying

¹³DCSK - differential chaos shift keying

¹⁴COOK - chaos on-off keying

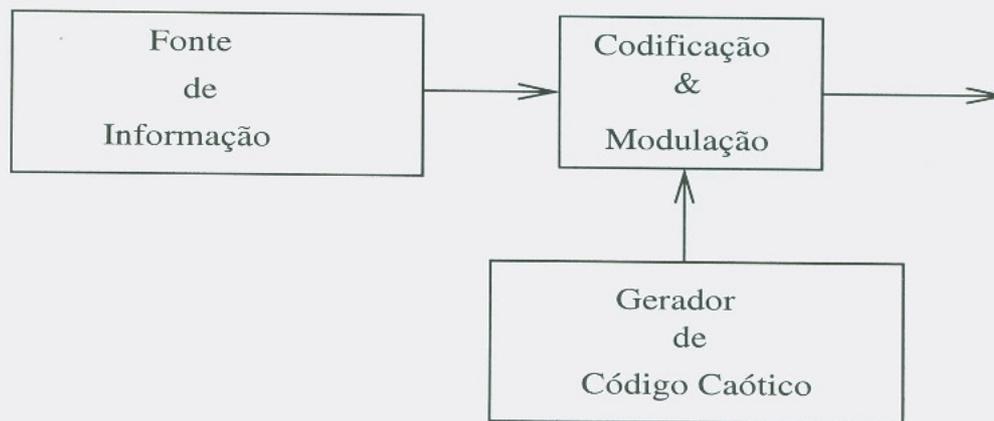


Figura 2.3: Esquema de modulação estática.

perada (problema da detecção) no receptor, uma vez que a decodificação deve reverter a codificação executada no módulo de transmissão. Para enfrentar as imperfeições inerentes aos canais físicos, esse processo deve ser robusto o suficiente, na presença de ruídos. O problema da detecção da informação, em comunicação caótica pode ser classificada em três formas:

- Detecção usando-se um sinal de referência (detecção coerente);
- Detecção via análise de estatísticas do sinal
- Detecção por inversão do sistema.

2.4.1 Detecção coerente ou detecção por correlação

Nesse tipo de detecção, uma cópia das funções base $X(t)$ utilizadas na codificação deve estar presente na decodificação, para ser correlacionada com o sinal recebido $s(t)$. As funções base de referência podem ser obtidas por sincronização de circuitos, neste caso diz-se que é um sistema com referência armazenada¹⁵, uma vez que a sincronização provê uma réplica das funções base $X(t)$. Se estas funções forem enviadas juntas com o sinal codificado $s(t)$, então, chama-se a esse método, de sistemas com referência transmitida¹⁶. Um filtro passa-faixa¹⁷ pode ser utilizado como limitador da largura de banda dos sinais que chegam ao receptor.

¹⁵SR - stored reference

¹⁶TR - Transmitted reference

¹⁷BPF *bandpass filter*

Um exemplo de esquema que envia a função de referência $x(t)$ separadamente do sinal que contém a informação é o chaveamento caótico diferencial, proposto por Kolunbam em 1998 [20]. Através da sincronização de circuitos caóticos, também, é possível a recuperação das funções base $x(t)$. Existem várias técnicas que fazem uso da sincronização entre eles temos: o deslocamento caótico, proposto por Parlitz e Kocarev [21, 22] e ainda o método de mascaramento caótico proposto por Oppenheim [23, 24], são exemplos de métodos com referência transmitida (TR). Existe ainda outra abordagem diversa, na forma de obter as funções de referência, pelo controle do caos, através da aplicação de pequenos pulsos de controle. Este caso é considerado como referência armazenada (SR).

2.4.2 Detecção via análise de estatísticas do sinal

A recuperação da informação também pode ser feita amostrando-se o sinal caótico recebido $m(t)$ e analisando-se determinadas propriedades estatísticas, onde um circuito de decisão recupera a informação. Para informação digital, pode-se por exemplo, utilizar duas fontes caóticas com diferentes propriedades estatísticas. Um exemplo, é o método por chaveamento caótico liga-desliga (COOK) [25].

2.4.3 Detecção por sistema inverso.

Este método de detecção aplica-se somente quando se utiliza a modulação dinâmica ou codificadores por convolução, pois a informação $b(t)$ é recuperada pela inversão do fluxo do sinal recebido $m(t)$ dentro do sistema. A função de codificação $G(*)$ deve ser inversível (G^{-1}) com respeito à transformação $b(t) \rightarrow m(t)$. A figura 2.4 mostra um diagrama de blocos da detecção por sistema inverso. Podemos escrever para o transmissor:

$$m(t) = G(b(t), x(m(t))) \quad (2.28)$$

e para o receptor:

$$b(t) = G^{-1}(m(t), x(m(t))) \quad (2.29)$$

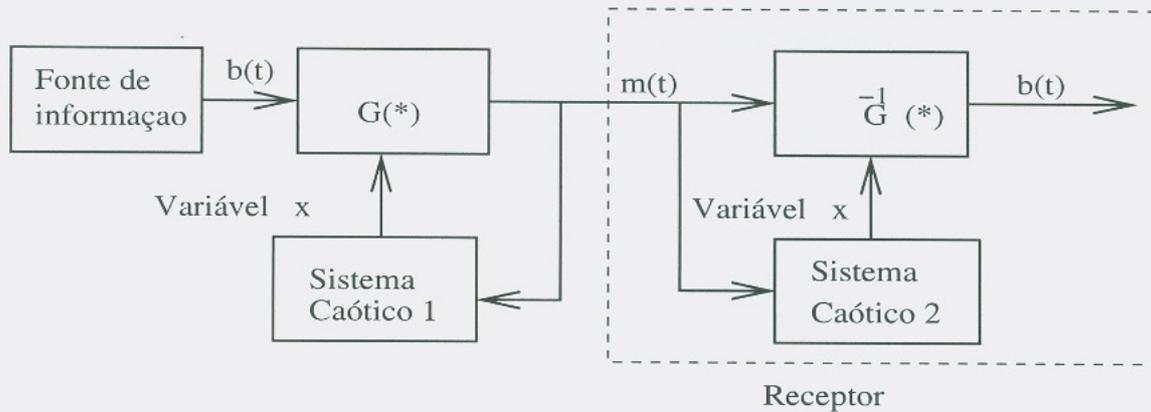


Figura 2.4: Detecção por sistema inverso

2.4.4 Detecção coerente x detecção não coerente

Neste trabalho, descrevemos sistemas de comunicação baseados em caos, tanto na forma analógica quanto na forma digital, uma vez que sistemas caóticos podem se apresentar como variáveis de estado contínuas ou discretas (fluxos e mapas). Para sistemas caóticos contínuos descritos por equações diferenciais, podemos também obter uma representação discreta, via uma transformação homeomórfica para um mapa discreto [26]. Isso pode ser feito, por exemplo, usando-se uma descrição baseada na dinâmica simbólica e nos mapas de Poincaré (mapas). Para sistemas caóticos contínuos descritos por equações diferenciais, podemos também obter uma representação discreta, via uma transformação homeomórfica para um mapa discreto [26]. Isso pode ser feito, por exemplo, usando-se uma descrição baseada na dinâmica simbólica e nos mapas de Poincaré (mapas). Para sistemas caóticos contínuos descritos por equações diferenciais, podemos também obter uma representação discreta, via uma transformação homeomórfica para um mapa discreto [26]. Isso pode ser feito, por exemplo, usando-se uma descrição baseada na dinâmica simbólica e nos mapas de Poincaré. Faremos isto com um sistema caótico contínuo como o circuito de Matsumoto, em que iremos aplicar a técnica de controle por nós desenvolvida para inserir o sinal de informação na dinâmica do atrator caótico. Para tratarmos com um sistema caótico discreto utilizaremos um representante típico, o mapa logístico, derivado do modelo de crescimento populacional.

Considerando-se que podemos ter a informação na forma analógica ou digital, descreveremos a seguir, formas de modulação e detecção compatíveis, para a inserção e

recuperação da informação misturada ao caos.

Os métodos de comunicação por espalhamento espectral podem fazer a recuperação da informação de dois modos diferentes. No primeiro modo, o sistema receptor deve produzir uma cópia exata das funções ortogonais da base, em geral obtidas por meio de sincronização de sistemas caóticos. Este método é chamado de detecção coerente [27, 17].

Sejam os sinais $g_0(t)$ e $g_1(t)$ gerados por funções de base ortogonais entre si, para um sistema que transmite informação binária. Sejam os sinais $\hat{g}_0(t)$ e $\hat{g}_1(t)$ gerados por funções base obtidas no receptor, por sincronização ou outro método de obtê-las. Aos sinais $g_0(t)$ e $g_1(t)$ é somado o ruído gaussiano $\eta(t)$ com densidade espectral de potência $N_0/2$ e a variância σ^2 , sempre presente no canal, resultando nos sinais $r_0(t)$ e $r_1(t)$. Para um sistema que transmite sinais binários teremos:

$$m(t) = \begin{cases} r_0(t) = g_0(t) + \eta(t) & \text{para bit=0} \\ r_1(t) = g_1(t) + \eta(t) & \text{para bit=1} \end{cases} \quad (2.30)$$

Quando o sinal $r_0(t)$ for enviado, efetuando-se a correlação teremos:

$$z_0 = \int_0^T g_0(t)\hat{g}_0(t)dt + \int_0^T g_0(t)\hat{g}_1(t)dt + \int_0^T \eta(t)\hat{g}_0(t)dt + \int_0^T \eta(t)\hat{g}_1(t)dt \quad (2.31)$$

e para o sinal $r_1(t)$ enviado, correlacionado, teremos:

$$z_1 = \int_0^T g_1(t)\hat{g}_1(t)dt + \int_0^T g_1(t)\hat{g}_0(t)dt + \int_0^T \eta(t)\hat{g}_0(t)dt + \int_0^T \eta(t)\hat{g}_1(t)dt \quad (2.32)$$

onde $\hat{g}_0(t)$ e $\hat{g}_1(t)$ são as funções de base do receptor e z_0 e z_1 as variáveis de decisão. Devido ao princípio da ortogonalidade, os três últimos membros das equações 2.31 e 2.32 são aproximadamente nulos (quase-ortogonalidade), pois são termos não correlacionados, ou seja:

$$\int_0^T g_0(t)\hat{g}_1(t)dt \approx \int_0^T g_1(t)\hat{g}_0(t)dt \approx \int_0^T \eta(t)\hat{g}_0(t)dt \approx \int_0^T \eta(t)\hat{g}_1(t)dt \approx 0 \quad (2.33)$$

A variável de decisão z pode assumir então, os valores:

$$z_0 = \int_0^T g_0(t) \hat{g}_0(t) dt \quad (2.34)$$

$$z_1 = \int_0^T g_1(t) \hat{g}_1(t) dt \quad (2.35)$$

que em seguida passam por um processo de decodificação adequado.

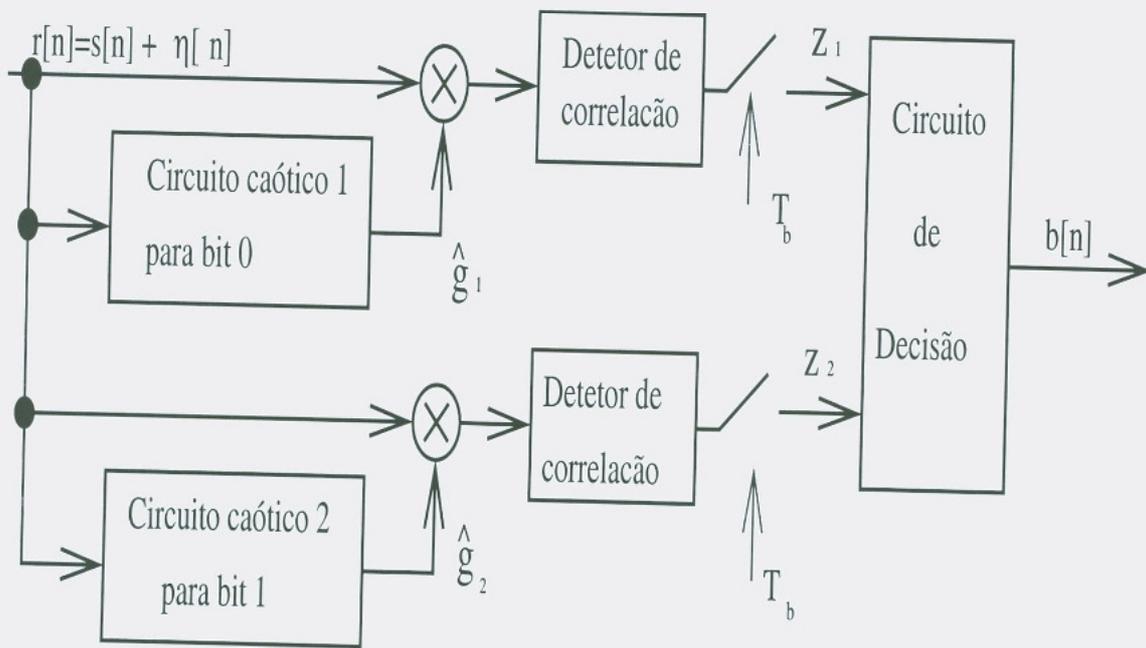


Figura 2.5: Esquema de detecção coerente.

O segundo método de recuperação da informação é a detecção não coerente, que pode ser conseguida sem que haja sincronização entre os sistemas transmissor e receptor, ou seja, não é necessário o conhecimento prévio da forma de onda caótica. Nesse caso, a informação pode ser recuperada pela estimação de propriedades estatísticas do sinal $m_i(t) = g_i(t) + \eta(t)$, com $i \in \{0, 1\}$. Entre as propriedades estatísticas que podem ser avaliadas no correlacionador, estão a energia média por símbolo \bar{E}_b ou a variância σ_b^2 da energia dos sinais. A decisão é feita pela comparação com um valor de limiar Z_d , previamente escolhido e adequado ao sistema, tal que:

$$z_0 = \int_0^T m_0^2(t) dt \quad \text{para bit=0} \quad (2.36)$$

ou

$$z_1 = \int_0^{\tau} m_1^2(t) dt \quad \text{para bit}=1 \quad (2.37)$$

Em ambos os casos, τ é o intervalo de integração que é igual à duração do bit. O valor $m^2(t)$ é a energia E_r do sinal, obtida por um detector quadrático.

Sendo Z_d o valor de limiar escolhido para um dado sistema, o circuito de decisão faria bit=0 para $z_0 < Z_d$ e bit=1 para $z_1 > Z_d$, por exemplo. A figura 2.6 mostra um diagrama em blocos de um receptor com detecção não-coerente.

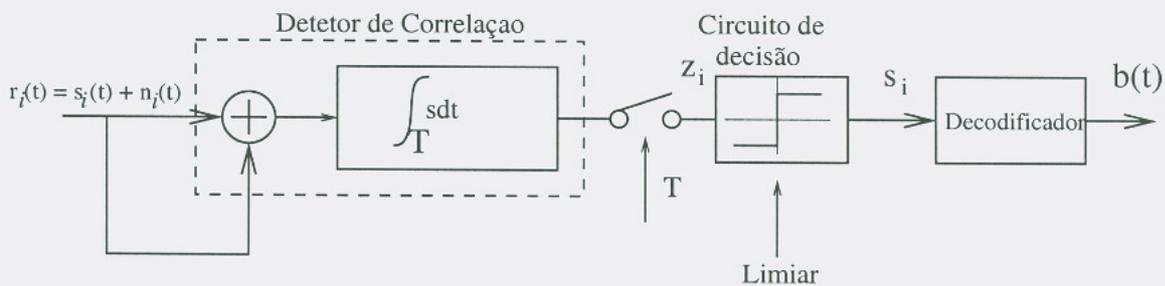


Figura 2.6: Esquema de detecção não-coerente.

2.5 Descrição de alguns tipos de modulação caótica

Nesta seção abordaremos alguns tópicos necessários à nossa exploração das diversas propostas de comunicação com caos. Embora existam muitas propostas de comunicações com caos, veremos que em geral, são derivados de alguns tipos básicos. Apresentaremos considerações sobre dois tipos básicos de detecção da informação no receptor.

Também mostraremos um aspecto fundamental na comunicação com caos, a sincronização de circuitos caóticos. Na sincronização, dois sistemas caóticos de mesma natureza, porém com condições iniciais diferentes, irão convergir os módulos de suas variáveis de estado.

2.5.1 Mascaramento caótico

Este foi um dos primeiros sistemas criados para utilizar o caos para transmitir informação. Foi proposto por Kocarev e Halle [24]. Nessa técnica, a saída $x(t)$ do

sistema caótico é adicionada ao sinal $s(t)$ que contém a informação. O resultado é o mascaramento do sinal $s(t)$ sobre a largura de banda do sinal caótico. O sinal transmitido $m(t)$ é a soma de $x(t)+s(t) + \eta(t)$ onde $\eta(t)$ é o ruído no canal, que, soma-se ao sinal composto por $x(t) + s(t)$, conforme pode ser visto na figura 2.7.

Para o sinal da informação ser recuperado é necessário fazer a subtração da componente caótica $x(t)$ do sinal $r(t)$. Para isso, transmissor e receptor devem ter seus parâmetros casados e estarem em sincronismo caótico. No receptor será gerado, após a sincronização, o fluxo caótico $\hat{x}(t)$. Supondo que o sinal $s(t)$ não altere suficientemente a dinâmica caótica do receptor, devemos ter $x(t) \approx \hat{x}(t)$. Da operação $m(t) - \hat{x}(t)$ na qual subtraímos do sinal $m(t)$ que chega, o sinal caótico $\hat{x}(t)$ gerado localmente, resulta o sinal recuperado $\hat{s}(t) + \eta(t)$. Devido ao não cancelamento do ruído $\eta(t)$, essa técnica é muito mais sensível à presença de fontes espúrias de sinais.

Apresentamos agora alguns resultados de nossas simulações numéricas. Utilizamos o circuito de Matsumoto com o parâmetro $G = 0.5750$ (atrator tipo *Rössler*). Consideramos dois tipos de sinais: um analógico $s_a(t)$ e outro digital $s_d(t)$. No caso da informação analógica, usamos um sinal senoidal $s(t) = \text{sen}(2\pi 100)t$, para informação digital usamos uma seqüência binária aleatória com duração T_b . Em ambos os casos adicionamos um ruído gaussiano $\eta(t)$ de tal modo que obtemos uma relação sinal-ruído ($SNR = 75 \text{ dB}$) em relação à potência do sinal V_{C1} do circuito caótico. Na figura 2.8 indicamos a superposição do sinal analógico $s_a(t)$ junto com o sinal $\hat{s}(t)$ recuperado no receptor. Podemos observar a distorção no sinal de entrada devida à presença do ruído $\eta(t)$. Na figura 2.9 mostramos uma seqüência de sinais digitais enviados pelo circuito transmissor, sobreposto a esta têm-se a mesma seqüência, recuperada após a sincronização no receptor.

No método do mascaramento caótico, a dinâmica caótica do circuito de Matsumoto não é alterada pela presença do sinal $s(t)$, desde que sua amplitude não seja muito grande em relação a amplitude do sinal de sincronização V_{C1} .

2.5.2 Chaveamento Caótico Liga-Desliga

Existe outra variação do método de chaveamento em que um dos geradores caóticos é substituído pela ausência de caos, conforme apresentado na figura 2.10. Esse método

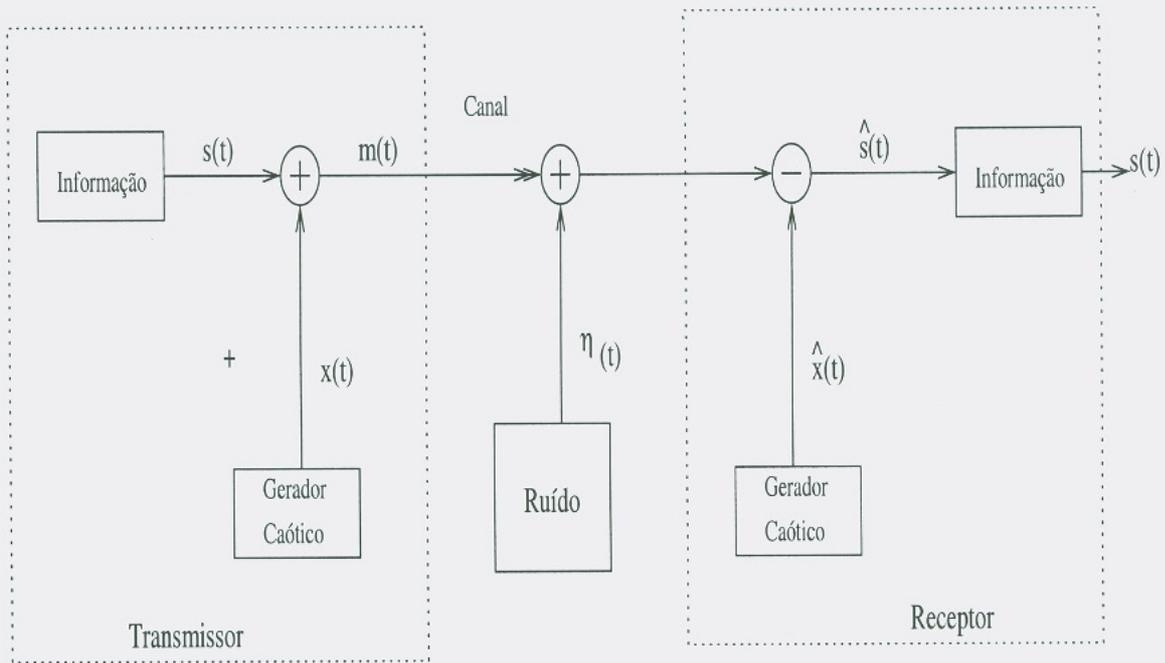


Figura 2.7: Diagrama em blocos do mascaramento caótico.

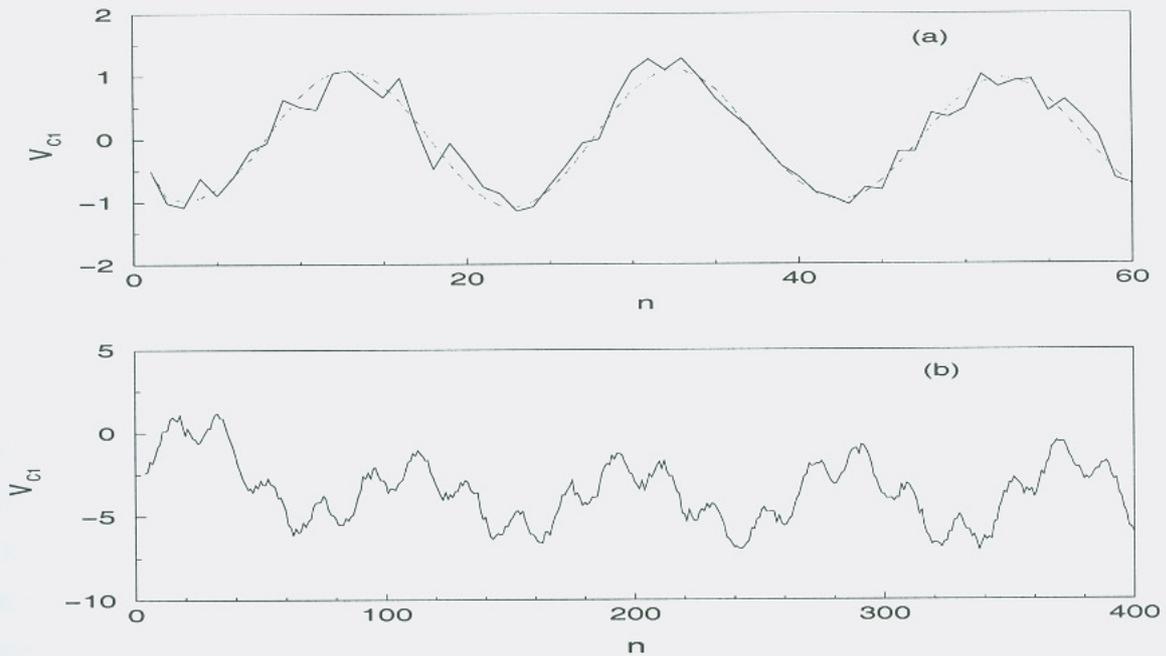


Figura 2.8: (a) Sobreposição do sinal analógico $s_a(t)$ com o sinal $s'_a(t)$ recuperado. (b) Série temporal do sinal caótico $r(t)$ composto.

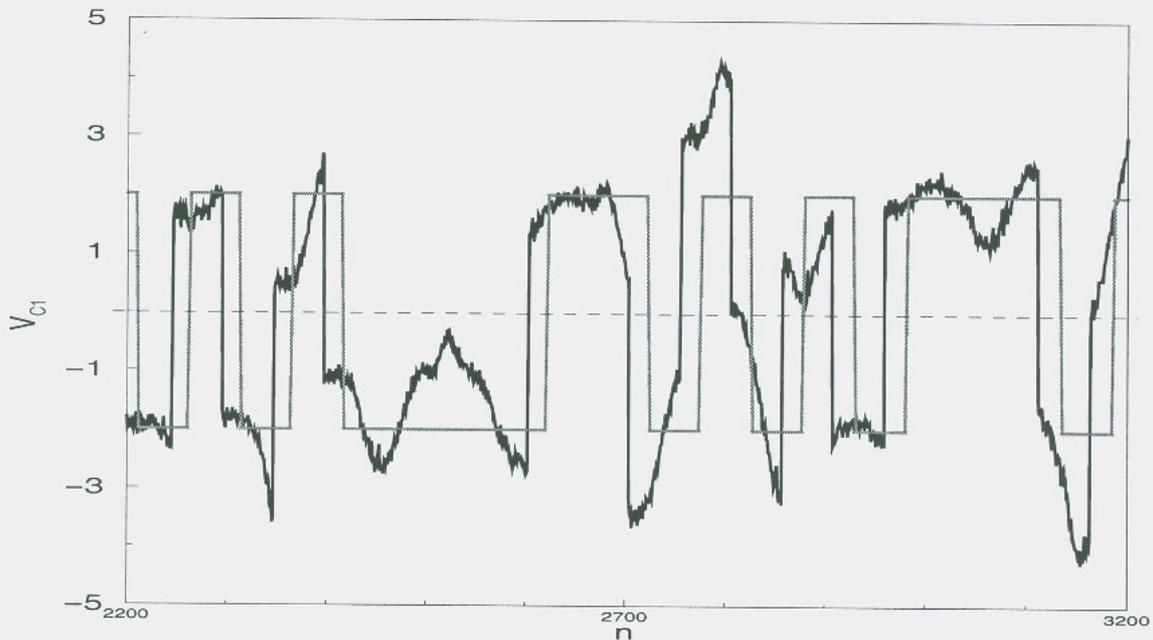


Figura 2.9: Sobreposição do sinal digital $s_d(t)$ com o sinal $s'_d(t)$ recuperado.

é chamado de chaveamento caótico liga-desliga¹⁸ [25]. Nesse método, quando se deseja enviar o bit 1, chaveia-se para o circuito caótico, enviando-se a variável de estado $x(t)$, durante a duração T_b do bit. Para se enviar o bit 0, desliga-se o circuito caótico. Quando isso acontece, o circuito receptor recebe somente o ruído $\eta(t)$, adquirido durante o percurso do sinal no canal.¹⁹ Como variável de decisão, toma-se a energia média E_b do sinal, durante o tempo T_b de duração do bit, o que pode ser feito com o uso de um detector quadrático. Supondo que ambos os símbolos sejam equiprováveis, então se obterá uma separação igual a $2E_b$ entre os elementos de sinal. Na figura 2.11 mostramos o histograma das energias E_b para um canal sem ruído. Ainda, na figura 2.12 mostramos o histograma das energias E_b para canal, para uma relação sinal-ruído de $13.4dB$, em ambos os casos utilizamos um fator de espalhamento $N_e = 100$. Em nossas simulações numéricas, usamos o método de detecção não-coerente, com as variáveis de decisão não sendo obtidas por sincronização. Como podemos observar pela análise das figuras 2.11 e 2.12, o valor da variável de decisão E_b , depende do

¹⁸Chaotic On-Off Keying (COOK)

¹⁹O ruído pode ser introduzido no sistema não somente no percurso de propagação do sinal, como também ser produzido internamente ao próprio sistema. Doravante, vamos considerar por questões de simplicidade, somente os ruídos como sendo adicionados durante o percurso do sinal no meio físico.

valor da relação sinal-ruído. O circuito de decodificação opera atribuindo um valor de limiar para a variável E_b . Assim, para a situação exposta na figura 2.12, a informação b_i será recuperada da seguinte forma: com $E_B = 2,5$ o valor de limiar da variável de decisão, têm-se:

$$bit = 0 \quad \text{para} \quad E_B < 2,5 \quad (2.38)$$

e

$$bit = 1 \quad \text{para} \quad E_B \geq 2,5 \quad (2.39)$$

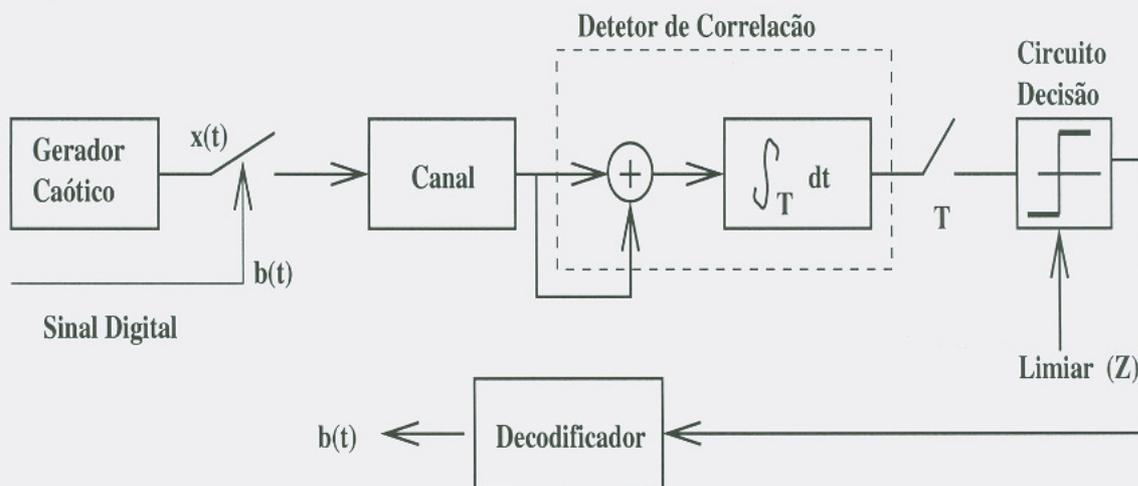


Figura 2.10: Esquema do chaveamento caótico liga-desliga (COOK).

2.5.3 Modulação por chaveamento caótico

Nesse método, proposto por Dedieu [22], existem m fontes de sinais caóticos e a informação na forma discreta comanda o chaveamento entre as m fontes caóticas. Vamos nessa seção considerar o caso onde existem somente duas fontes caóticas, portanto um sistema binário. A figura 2.13 mostra um diagrama de blocos desse esquema. Para se enviar um bit 0 escolhe-se o circuito caótico 1, para enviar um bit 1 chaveia-se para o segundo circuito caótico. Os dois sistemas caóticos podem ser diversos ou iguais, porém com parâmetros diferentes, isso seria equivalente a fazer um chaveamento entre dois diferentes tipos de atratores. O circuito de decisão para a recuperação da informação baseia-se na diferença da energia E_b transportada pelas diferentes formas de ondas caóticas. Seja z_i o sinal de observação utilizado pelo circuito de decisão



Figura 2.11: Histograma dos sinais $s_i(n)$ na ausência de ruídos.

no receptor. Para o caso de sistemas caóticos contínuos em que a duração do bit seja T_b , na presença de ruído gaussiano aditivo $\eta(t)$ e utilizando um detector quadrático, teremos:

$$z_i = \int_{T_b} r_i^2 dt = \int_{T_b} [s_i(t) + \eta(t)]^2 dt \quad (2.40)$$

$$z_i = \int_{T_b} s_i^2(t) dt + 2 \int_{T_b} s_i(t)n(t) dt + \int_{T_b} \eta^2(t) dt \quad (2.41)$$

sendo $r(t)$ o sinal caótico efetivamente recebido pelo receptor e $s_i(t)$ o sinal caótico chaveado em função da informação b_i . Os termos $\int_{T_b} s_i(t)n(t) dt$ e $\int_{T_b} \eta^2(t) dt$ são devidos à presença de ruídos e são nulos quando esses não existem. Nos sistemas de comunicações convencionais em que a informação é modulada em funções periódicas, a duração T_b do bit é um múltiplo do período da função, o valor da energia $\int_{T_b} s_i^2(t) dt$ associada à amostra z_i não apresenta flutuação entre cada intervalo T_b . Em oposição, quando a informação está codificada com funções caóticas, cada intervalo T_b de duração do bit não será exatamente periódico, uma vez que as formas de onda caóticas também não são periódicas, portanto, a integral $\int_{T_b} s_i^2(t) dt$ que representa a energia de cada bit, não terá valor constante durante a duração T_b do bit. Devido a essa não-periodicidade existirão variâncias não-nulas σ_1^2 e σ_2^2 , em torno das energias $E_b(1)$ e $E_b(2)$, correspondentes aos bits 1 e 0, respectivamente.

Nessa análise, utilizaremos o circuito de Matsumoto como elemento gerador das

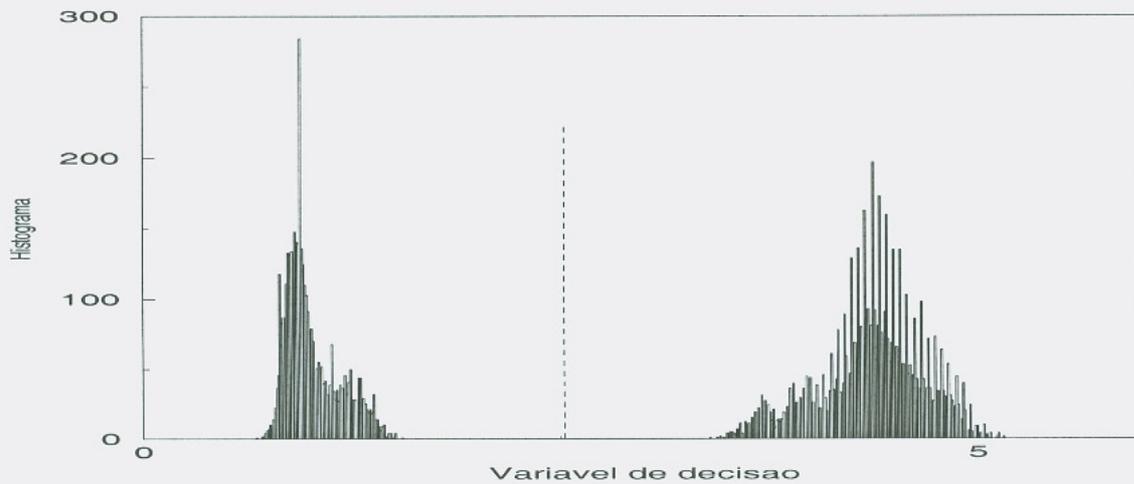


Figura 2.12: Histograma dos sinais $s_i(n)$ na presença de ruído de 13,4 dB.

seqüências caóticas. Usando-se o método de detecção coerente, haverá uma variância $\sigma_e(t)$ devida ao erro de sincronização entre a variável de estado $x_l(t)$ gerada localmente no receptor e a variável de sincronização $s(t) = x_l(t) + \eta(t)$ recebida. Então, a variância $\sigma_e^2 = |s(t) - x_l(t)|^2$ do erro de sincronização será utilizada como a variável de decisão.

A codificação utilizada no método de chaveamento caótico (CSK) é a binária anti-podal. Nesse tipo de codificação, atribui-se valores simétricos para as variáveis de estado, para a representação dos símbolos. No método anti-podal de codificação, as variáveis de estado assumem os valores $+s_i(t)$ para bit 0 e $-s_i(t)$ para bit 1. Se N_e for o fator de espalhamento, teremos que o sinal de observação z_i será:

$$z_i = \frac{1}{N_e} \sum_{i=0}^{N_e} \sigma_e^2(t) \quad (2.42)$$

O circuito de decisão atribuirá o símbolo 1 para $z_i < 0$ e símbolo 0 para $z_i > 0$.

Apresentamos alguns resultados obtidos por simulação numérica com o circuito de Matsumoto em que utilizamos a detecção coerente e um canal com ruído gaussiano aditivo $\eta(t)$. Na figura 2.14 mostramos em (a) um histograma dos valores médios dos desvios entre os tempos de retorno para os símbolos 0 e 1 e (b) as séries temporais correspondentes aos símbolos 0 e 1. Ainda em relação a esse gráfico, podemos ver a separação entre os histogramas com uma relação sinal-ruído de 29dB. No gráfico 2.15 tem-se o desempenho de erros do método CSK em relação à presença de ruídos. No

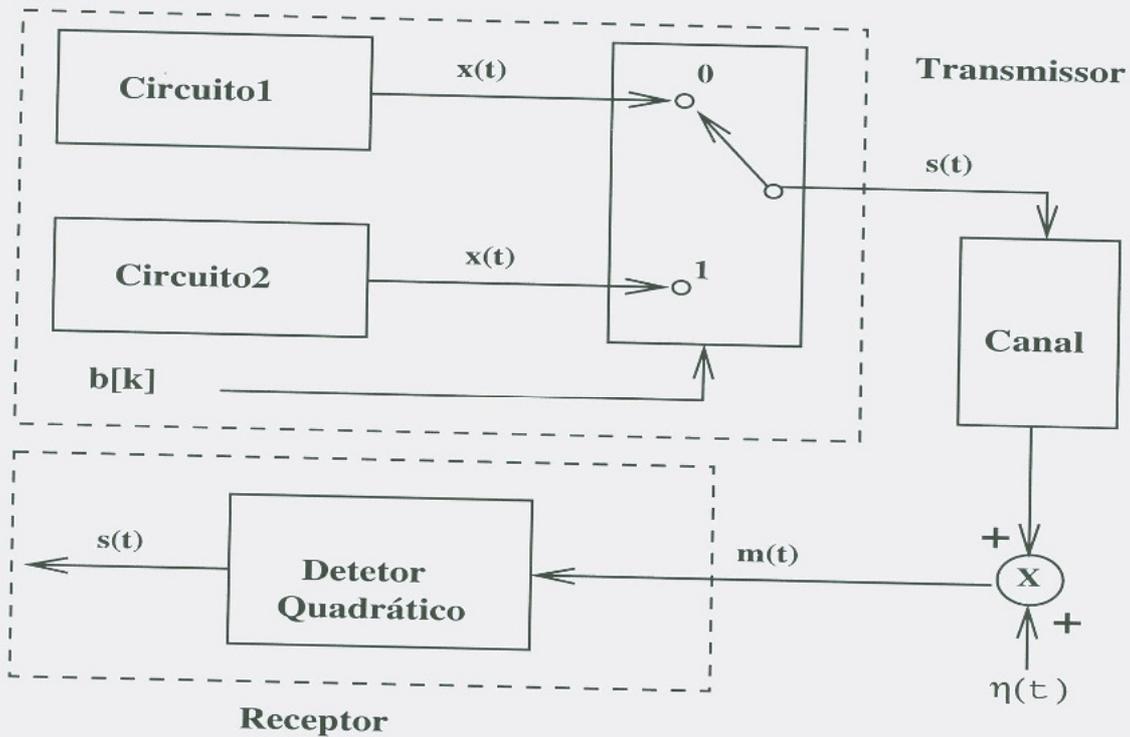


Figura 2.13: Modelo em blocos de um sistema de chaveamento por deslocamento caótico.

eixo horizontal tem-se a relação sinal-ruído (SNR) e no eixo vertical a taxa de erros relativa (BER) do sistema.

2.5.4 Chaveamento caótico diferencial

Nesse método de modulação, proposto por Gesa Kolumban [5] cada símbolo consiste de duas amostras caóticas, a primeira parte é utilizada como sinal de referência, sendo o próprio sinal caótico sem modulação e a segunda parte é função da informação à ser transmitida, ou seja, esta é uma técnica de referência transmitida (TR). A figura 2.16 apresenta um diagrama em blocos de um módulo DCSK com detecção não-coerente. Se $x(t)$ for o sinal caótico do gerador, T o tempo de duração do bit e t_k o instante de tempo em que o K -ésimo bit é transmitido e se $bit = 1$ for o símbolo a ser enviado, então o primeiro sinal de referência fornecido pelo gerador caótico será transmitido duas vezes, ou seja:

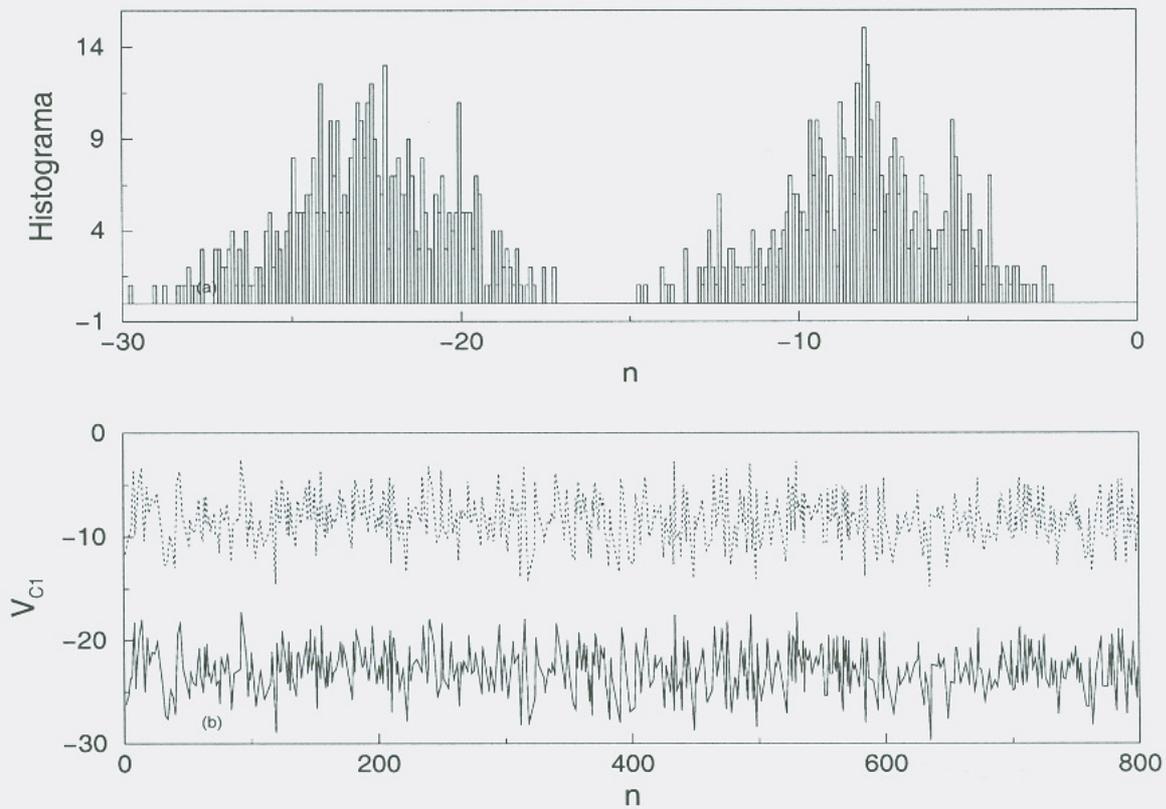


Figura 2.14: (a) Histograma dos sinais $s_i(n)$ na presença de ruído. (b) Série temporal para bit 0 e bit 1.

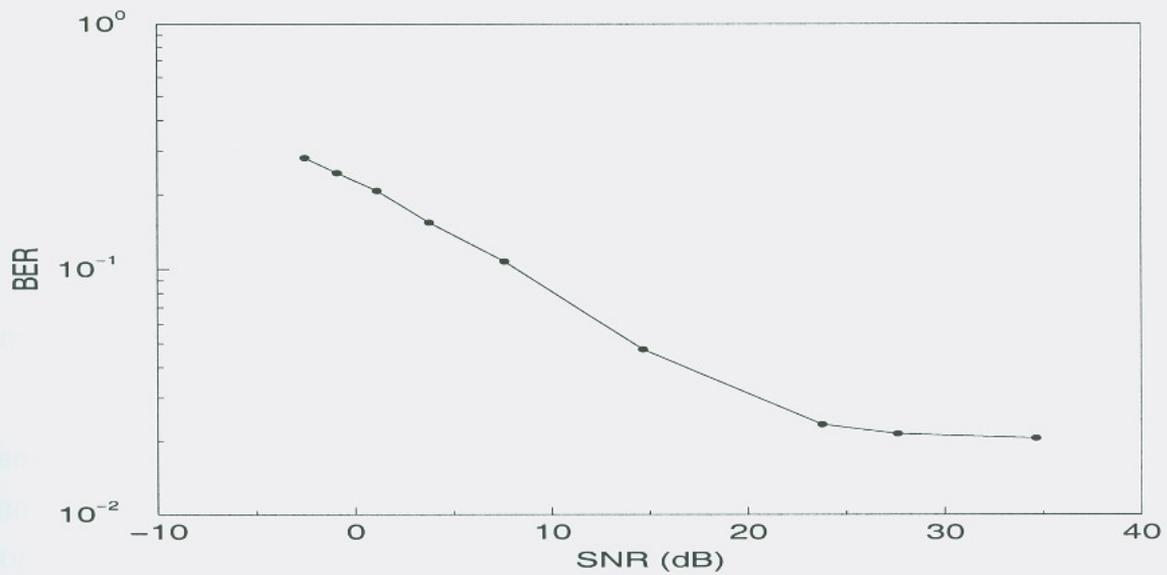


Figura 2.15: Relação sinal-ruído para o método CSK coerente.

$$x_{transmitido} = \begin{cases} x(t), & t_k \leq t < t_k + \frac{T}{2} \\ x(t - \frac{T}{2}), & t_k + \frac{T}{2} \leq t < t_k + T \end{cases} \quad (2.43)$$

Quando $bit = 0$, o procedimento consiste em enviar-se, primeiro o sinal de referência e em seguida a sua versão invertida:

$$x_{transmitido} = \begin{cases} x(t), & t_k \leq t < t_k + \frac{T}{2} \\ -x(t - \frac{T}{2}), & t_k + \frac{T}{2} \leq t < t_k + T \end{cases} \quad (2.44)$$

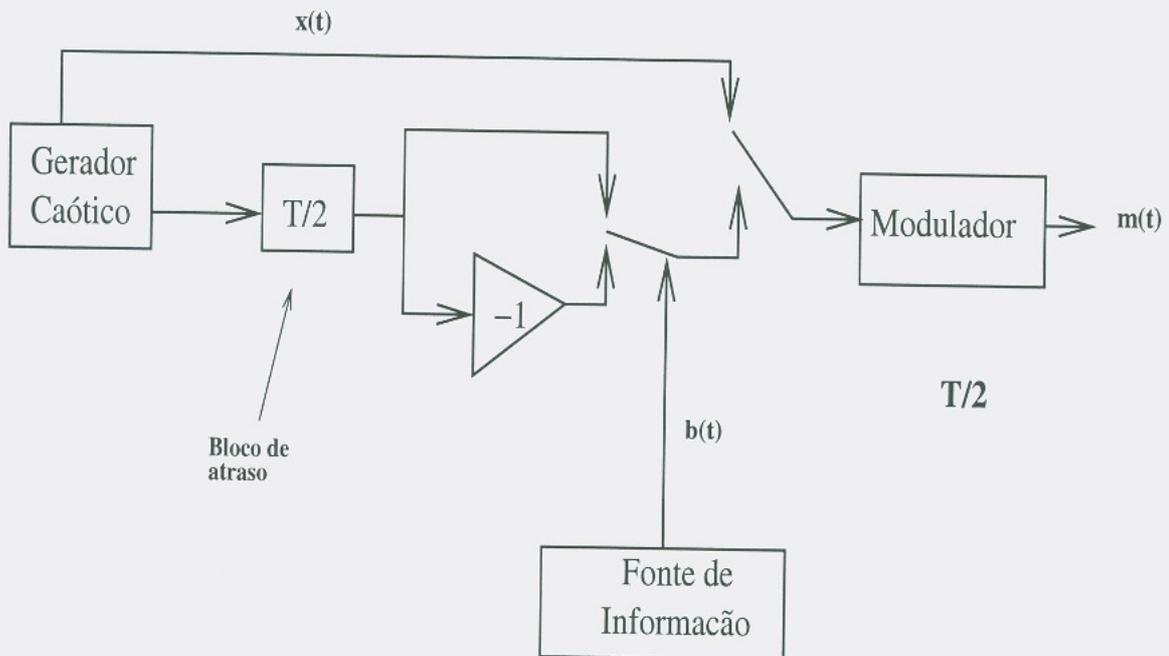


Figura 2.16: Diagrama de blocos do transmissor para Chaveamento Caótico Diferencial (DCSK)

A detecção é efetuada fazendo-se a correlação entre sucessivos segmentos do sinal recebido de duração $\frac{T}{2}$, a informação é recuperada por um circuito de decisão. O sinal recebido $m(t) = x(t) + \eta(t)$, deve sofrer um retardo de tempo $\frac{T}{2}$ para ser correlacionado com uma cópia desse mesmo sinal $m(t)$. O sinal de observação z_i ($i=0$ ou $i=1$) têm a seguinte forma:

$$z_i = \int_{T/2} r_i(t)r_i(t - T/2)dt \quad (2.45)$$

$$z_i = \int_{T/2} [s_i(t) + \eta(t)][s_i(t) + \eta(t - T/2)]dt \quad (2.46)$$

$$z_i = \int_{T/2} s_i(t)^2 dt + \int_{T/2} s_i(t)[\eta(t) + \eta(t - T/2)]dt + \int_{T/2} \eta(t)\eta(t - T/2)dt \quad (2.47)$$

Devido a propriedade da integral de correlação, na equação acima os dois últimos termos são aproximadamente nulos.

Presentemente esse esquema de comunicação com caos é o que tem apresentado o melhor desempenho considerando-se a robustez à ruídos, apresentando uma taxa de erro relativa (*BER*), de uma em mil, para relação sinal-ruído da ordem de 13.3 *dB* [20, 19].

Existem outras variações desse método. Em uma delas se faz uma modulação em frequência do sinal caótico antes de se efetuar o chaveamento. Esse método é conhecido pela sigla *FM - DCSK*²⁰ e, apresenta como principal vantagem uma melhoria no desempenho, pois a decisão de bits fica independente da relação sinal-ruído do sinal [5]. Duas outras variações de *DCSK* foram propostas por Sushchik e Tsimring [28], baseadas também na correlação entre o sinal recebido e o sinal de referência.

2.5.5 Métodos por controle de Poincaré preditivo

A idéia por trás dessa abordagem é usar a dinâmica simbólica para efetuar a modulação da informação na dinâmica do atrator caótico. Seja um sistema dinâmico caótico obtido pela iteração do mapa $F : R^N \rightarrow R^N$ e da função de saída $G : R^N \rightarrow R^N$. As trajetórias são definidas pela condição inicial da variável de estado $x[0]$. Em qualquer instante um ponto $x[k + 1]$ da trajetória será dado por:

$$x[k + 1] = F(x[k]) \quad \text{com } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.48)$$

e o sinal de saída, por:

$$s[k] = G(x[k]) \quad (2.49)$$

²⁰Frequency Modulation- Differential Chaos Shift Keying

Assim, cada condição inicial irá gerar uma seqüência de símbolos 0s e 1s (a seqüência simbólica), pela escolha de um subconjunto $\{S\} \in R^N$ e utilizando-se a definição:

$$\sigma[k] = \begin{cases} 1 & \text{se } x[k] \in \{S\} \\ 0 & \text{se } x[k] \notin \{S\} \end{cases} \quad (2.50)$$

sendo $\sigma[k]$ os bits recebidos. A equação 2.50 significa que se a seqüência binária $x[k]$ pertencer ao conjunto $\{S\}$ então $\sigma[k] = 1$ e $\sigma[k] = 0$ caso $x[k]$ não pertença ao conjunto $\{S\}$.

A informação binária será transmitida pela seqüência simbólica gerada por uma função que associe segmentos de uma forma de onda caótica a símbolos discretos (bits). Chamaremos essa função, de função de partição $G(x[0])$, que apresentaremos em detalhes, quando tratarmos da dinâmica simbólica de sistemas caóticos.

Teoricamente, dada uma seqüência binária inicial com n símbolos de comprimento poderíamos assinalar um conjunto $\{X_i[0]\}$ de condições iniciais, cada uma correspondendo à uma seqüência binária de comprimento n (palavra). Assim, para se transmitir uma certa seqüência $r[k]$ de símbolos seria fornecido ao sistema caótico a respectiva condição inicial $x[k]$. Porém, à medida que fazemos o comprimento n da seqüência binária ficar cada vez mais longo, também teríamos que aumentar cada vez mais a precisão do conjunto $\{X_i[0]\}$ de condições iniciais, o que acabaria levando a limitações físicas ou de representação numérica. Isso ocorre pela dependência sensível dos sistemas caóticos às condições iniciais. A maneira de se contornar esse problema, é mantendo o comprimento n das seqüências binárias pequeno e controlando as trajetórias caóticas através da aplicação de pequenas perturbações de controle. Devido a essa sensibilidade às condições iniciais esses pequenos pulsos de controle têm um grande efeito no comportamento futuro das trajetórias. No capítulo 3 descreveremos como podemos contornar algumas limitações oferecidas por essa técnica, através de um método de controle por nós desenvolvido e que faz uso intensivo do conhecimento da dinâmica simbólica do sistema caótico em uso.

2.6 Considerações sobre o desempenho na presença de ruídos

Nesta seção discutiremos algumas quantidades e considerações sobre os efeitos da presença de ruídos nas comunicações com caos. Quando tratamos de quantificar e qualificar o desempenho de sistemas de comunicações, duas grandezas são de fundamental importância: a relação entre o nível de potência do sinal e o nível de potência do ruído presente no canal, essa grandeza adimensional é conhecida como relação sinal-ruído²¹. Podemos tratar essa relação, considerando a razão entre as potências dos sinais envolvidos, conforme a relação abaixo:

$$SNR = 10 \log \frac{P_S}{P_N} \quad (2.51)$$

sendo que P_S é potência do sinal e P_N é potência do ruído. Podemos, também, colocar a equação 2.51 como uma relação entre amplitudes de sinais

$$SNR = 20 \log \frac{V_S}{V_N} \quad (2.52)$$

com V_S sendo a amplitudes do sinal e V_N a amplitude do ruído. Em ambos os casos a relação sinal-ruído (SNR) é adimensional. Doravante, consideraremos sempre a forma dada pela equação 2.51, embora outras representações também sejam possíveis. Por exemplo, para um sistema discreto formado por M símbolos, com sinais de amplitude $s[n]$ e ruído com amplitude $\eta[n]$, a relação sinal-ruído ficaria segundo a forma dada por 2.51

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=1}^M s[n]^2}{\sum_{n=1}^M \eta[n]^2} \quad (2.53)$$

Outra grandeza importante na medida do desempenho de sistema de comunicação, é a relação entre o número de bits recebidos com erros bit_{erro} e o número de bits enviados $bit_{enviados}$, conhecida como taxa de erro de bits (BER)²²

$$BER = \frac{bit_{erro}}{bit_{enviados}} \quad (2.54)$$

²¹SNR - Signal Noise Ratio

²²BER - Bit Error Rate

Ambas as grandezas (*BER* e *SNR*) caracterizam o comportamento do sistema, quando considerado como um todo, ou seja, equipamentos de transmissão e recepção mais o canal físico. Para que um enlace digital de comunicação seja operacional em termos práticos é necessário ter-se a menor taxa de erro de bits possível, evitando-se procedimentos de retransmissão e correção de erros que degradam o desempenho e confiabilidade do sistema. Segundo [25] uma taxa de erro (*BER*) menor que 10^{-3} . é o mínimo necessário para um sistema de comunicação digital realizável (para sistemas com baixa velocidade de transmissão de dados).

É conveniente tratar os cálculos da *BER* em função da energia E_b do sinal e da densidade espectral de potência do ruído $N_0/2$. Em nossas análises estaremos considerando um canal físico onde sempre haverá a presença de uma parcela não desejável de energia, devida à presença do ruído. As análises consideram ruídos do tipo branco Gaussiano, com média nula e variância σ^2 .

A taxa de erro de bits (*BER*) em um canal com ruído gaussiano aditivo depende de vários fatores, entre os quais:

- Esquema de modulação: A *BER* depende em alto grau dos esquemas de modulação adotados e da maneira como o receptor é implementado;
- Quantidade de ruído: quanto maior o nível de ruído em um canal, maior a taxa de erros;
- Potência P_S do sinal transmitido: quanto menor a potência do sinal para um dado o nível de ruído, maior será a taxa de erros de bit;
- Tempo de detecção T_b disponível para transmissão e detecção de um bit. Isso, deve-se ao fato que existe uma relação inversamente proporcional entre tempo de detecção de bit e taxa de erros.

Verifica-se que a taxa de erro de bit é uma função complexa ($BER = f(N_0, P_S, T_b)$) de vários fatores, sendo em geral de difícil avaliação analítica, exceto para alguns casos mais simples [16, 29, 28]. Uma meta fundamental é procurar obter uma dada taxa de erro de bits com a menor quantidade de energia por bit. Um sistema é dito ser robusto à presença de ruídos quando for possível expressar a sua taxa de erros de bit somente em função da potência E_b do sinal e da densidade espectral ($N_0/2$) do ruído [30].

2.7 Conclusões

Em relação, à técnica de mascaramento caótico, verificamos ser bastante sensível à presença de ruídos aditivos, uma vez que estes não podem ser totalmente separados da informação. Também não oferece uma vantagem significativa em termos de segurança, pois em alguns casos obter sincronização caótica entre dois circuitos semelhantes pode não ser muito difícil. O uso do caos em comunicação por espalhamento espectral torna-se vantajoso, pois os sistemas caóticos apresentam um número infinito de estados, enquanto que geradores de seqüências pseudo-aleatórias convencionais apresentam período finito [15].

Entre os dois tipos de detecção da informação, podemos verificar que na detecção coerente as funções de base devem ser recuperadas pela sincronização entre as partes transmissora e receptora. Na detecção não coerente, a recuperação está baseada na análise de propriedades estatísticas do sinal recebido, uma vez que as funções de base não são conhecidas. A presença de ruídos têm grande influência no comportamento em relação à taxa de erros de bits, sendo sua avaliação quantitativa de difícil obtenção.

Em algumas modulações caóticas como por exemplo *CSK*, *COOK* e *DCSK* os sinais transmitidos são mapeados em amostras de comprimento finito das portadoras caóticas, sendo cada amostra diferente uma das outras. Esse ponto, é uma das principais diferenças entre a modulação convencional e modulação caótica.

Capítulo 3

Sistemas Caóticos de Interesse em Comunicações

3.1 Introdução

Comportamentos caóticos podem aparecer em muitos sistemas físicos descritos por sistemas de equações não-lineares. Muitos desses comportamentos são de grande interesse no desenvolvimento de sistemas de comunicação. Um elemento chave, que nos guiará na escolha dos sistemas não-lineares e que estarão sob o nosso interesse, é a característica da universalidade de comportamento qualitativo e quantitativo que esses apresentam. Essas características, são independentes do tipo particular do sistema. Podemos por exemplo, aprender sobre o comportamento de um determinado circuito não-linear ou um modelo matemático e aplicar imediatamente as conclusões para sistemas diferentes, descritos por equações semelhantes.

Para fins de estudo e sistematização podemos fazer uma classificação dos sistemas caóticos em dois grandes grupos: sistemas contínuos e sistemas discretos. O primeiro grupo compreende aqueles no qual os sistemas são representados por um conjunto de equações diferenciais ordinárias (*ODEs*)¹ da forma $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ com \vec{F} representando um conjunto de equações não-lineares nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , que evoluem de forma contínua com o tempo. Nessa classe, encontramos o modelo de Lorenz de convecção

¹Ordinary Differential Equations

de fluidos, parte integrante de um modelo para previsão do tempo, surgido na década de 60 [31]. Historicamente é um sistema importante, pois foi um dos primeiros modelos a mostrar toda uma gama de comportamentos caóticos, notadamente como resultado das primeiras simulações numéricas com o uso do computador. Esse sistema é composto de três equações a derivadas parciais acopladas, provenientes do modelo de *Navier-Stokes* para fluidos. Embora, existam muitos outros sistemas caóticos descritos por fluxos, como emissão de lasers, correntes em diodos, reações químicas, focaremos nossa atenção em um oscilador elétrico, conhecido por circuito de Matsumoto, por razões de ordem prática e por ser um típico representante desses sistemas.

O outro grupo são representados pelos sistemas que evoluem discretamente no tempo, também chamados de mapas, e que são representados por equações de diferenças, cuja forma genérica é: $\vec{x}[i + 1] = F_{\mu}(\vec{x}[i])$, sendo $\vec{x}[i]$ um vetor n -dimensional, e F_{μ} uma função não-linear discretizada segundo o índice i . Os sistemas discretos não-lineares ou mapas podem exibir um comportamento caótico mais complexo que uma simples equação diferencial, uma vez que estes estão livres da restrição da continuidade, podendo passar de um valor $x[n]$, para outro $x[n + 1]$ sem assumir valores intermediários. Um modelo de mapa unidimensional, derivado do crescimento logístico de populações biológicas, o mapa logístico, será o nosso elemento de estudo para sistemas discretos. Os mapas também são importantes, pois podemos estudar um sistema caótico contínuo, por meio de uma transformação chamada de secção de Poincaré, tornando o sistema discreto. Podemos ainda ter mapas bidimensionais, como por exemplo o mapa de Hénon [32], que pode ser obtido como uma simplificação para a secção de Poincaré do modelo de Lorenz [1].

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar um representante de cada um desses dois grandes grupos. Estudaremos as características de sistemas caóticos explorando suas vantagens e potencialidades em sistemas de comunicação.

3.2 Sistemas Caóticos Contínuos: O Circuito de Matsumoto

O circuito de Matsumoto [33], também muito conhecido como circuito de Chua, juntamente com o mapa logístico, está entre os sistemas caóticos mais exhaustivamente estudados. Quanto ao circuito de Matsumoto, tal fato, deve-se à sua grande versatili-

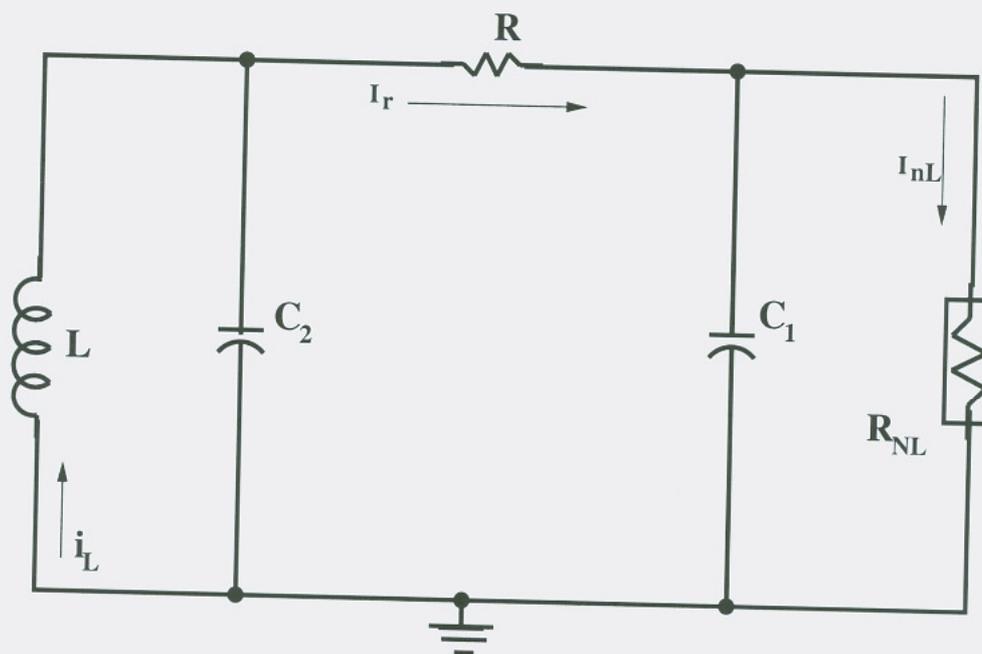


Figura 3.1: Diagrama Elétrico do Circuito de Matsumoto.

dade, facilidade de construção e simulação numérica.

Apresentado em sua forma básica têm apenas cinco componentes: dois capacitores, um indutor, um resistor linear e um resistor linear por partes, sendo este o único componente ativo do circuito. Nesta seção estudaremos os aspectos do circuito de Matsumoto que possam ser do interesse quanto à capacidade de servir como elemento de um sistema de comunicação baseado em caos.

Pelo diagrama elétrico do circuito de Matsumoto, mostrado na figura 3.1, pode-se ver que ele é um circuito oscilador do tipo LC paralelo. O resistor linear por partes R_{NL} introduz, via acoplamento com o resistor R uma realimentação de energia para a associação paralela entre o indutor L e o capacitor C_2 ; este resistor também atua como um limitador para a corrente no circuito. Como todos os outros componentes são passivos, o resistor R_{NL} atua como o elemento ativo, fornecendo a energia para a manutenção das oscilações no circuito. A implementação prática do circuito de Matsumoto pode ser feita utilizando-se componentes convencionais, o resistor R_{NL} pode ser implementado através de amplificadores operacionais. Uma boa referência sobre a construção desse circuito pode ser encontrada em [34]. Também, já existem versões integradas desse resistor [35], numa montagem conhecida como diodo de Chua.

3.2.1 Modelagem do Circuito de Matsumoto

O circuito de Matsumoto é modelado por um conjunto de três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, acopladas. Têm ainda, uma equação linear por partes, que representa a relação entre corrente e tensão (curva característica) do resistor R_{NL} . Essas equações são obtidas aplicando-se as leis de Kirchoff às duas malhas e aos nós do circuito. Sendo um sistema autônomo, as equações que o modelam não apresentam fontes de sinal externo² [36]. As tensões V_{C1} e V_{C2} nos capacitores C_1 e C_2 , juntamente com a corrente i_L no indutor constituem as variáveis dinâmicas do sistema, sendo que um ponto no espaço de fase será dado pelas três variáveis: (V_{C1}, V_{C2}, i_L) .

Abaixo as três equações diferenciais que modelam o circuito:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C2} - V_{C1}) - i_{NL} \\ C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C1} - V_{C2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -V_{C2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

sendo i_{NL} a corrente que circula pelo resistor não-linear R_{NL} e R o resistor de acoplamento entre R_{NL} e o circuito tanque oscilador LC.

A relação entre tensão e corrente no resistor linear por partes R_{NL} , é o resultado de dois valores diferentes de condutância em função da tensão aplicada, conforme podemos ver pela figura 3.2. A equação que define essa curva, mostra que a corrente i_{NL} depende das tensões V_{C1} aplicada nos extremos do resistor e da tensão de quebra B_P , também depende das condutâncias G_0 e G_1 . O parâmetro B_P é a tensão de quebra³, representado pelos pontos onde a curva apresenta mudança brusca no valor de sua condutância S , as condutâncias G_0 e G_1 indicam a inclinação das retas, conforme a equação a seguir:

$$i_{NL} = \begin{cases} -G_0 V_{C1} + (G_0 - G_1) V_{C1} & \text{para } V_{C1} \geq B_P \\ -(G_1) V_{C1} & \text{para } |V_{C1}| \leq B_P \\ -G_0 V_{C1} + (G_1 - G_0) V_{C1} & \text{para } V_{C1} \leq -B_P \end{cases} \quad (3.2)$$

Fisicamente o comportamento caótico do circuito aparece devido ao fato da condutância do resistor R_{NL} depender do ponto de operação do circuito. Isso resulta em

²Ou, podemos dizer que, um sistema autônomo é aquele em que a variável tempo não aparece explicitamente nas suas equações.

³breakpoint voltage

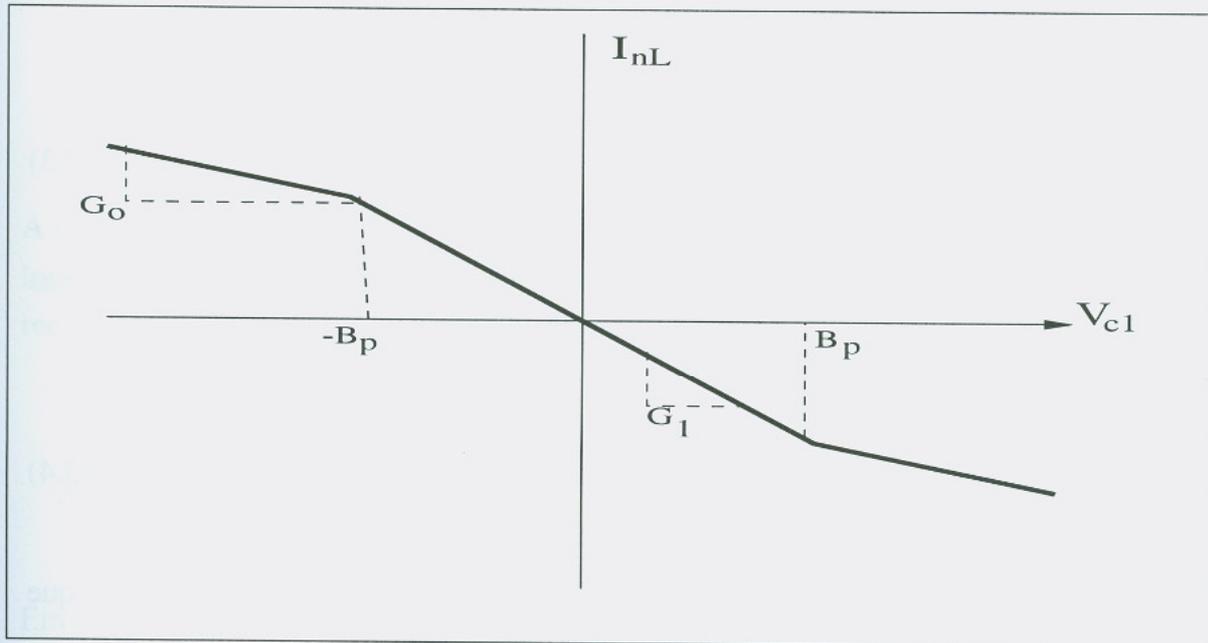


Figura 3.2: Curva característica do resistor R_{NL} do circuito de Matsumoto.

um balanço instável no ciclo de transferência de energia entre as partes do circuito [37].

3.2.2 Reescalamento dos valores dos componentes

Inicialmente, os valores originalmente utilizados dos componentes e parâmetros são os seguintes:

$$G_0 = -0,80mS \text{ (condutância em siemens)}$$

$$G_1 = -1,391mS \text{ (condutância em siemens)}$$

$$C_1 = 0,0052\mu F \text{ (capacitância em farads)}$$

$$C_2 = 0,056\mu F \text{ (capacitância em farads)}$$

$$R = 1739\Omega \text{ (resistência em ohms)}$$

$$L = 9,2mH \text{ (indutância em henrys)}$$

$$B_P = 1,0V \text{ (tensão em volts)}$$

Para nossos objetivos (simulação numérica), convém tornar essas grandezas adimensionais por uma mudança de variáveis [38]. Para isso, fazemos $G = \frac{1}{R}$, e opera-

mos as seguintes substituições, conforme indicado a seguir.

$$\begin{aligned} x &= \frac{V_{C1}}{B_P} & y &= \frac{V_{C2}}{B_P} & z &= \frac{i_L}{GB_P} \\ \tau &= \frac{t}{RC_2} & a &= \frac{G_1}{G} & b &= \frac{G_0}{G} \\ \alpha &= \frac{C_2}{C_1} & \beta &= \frac{C_2}{LG^2} & f(x) &= \frac{i_{NL}}{GB_P} \end{aligned} \quad (3.3)$$

sendo τ o tempo normalizado. Podemos transformar as equações ??, ?? e 3.1, nas novas equações normalizadas abaixo, em termos de x, y e z .

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha\{y - x - f(x)\} \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases} \quad (3.4)$$

A corrente i_{NL} no circuito de Chua, pode agora ser colocado em uma forma, em que fica evidente a linearidade por partes:

$$f(x) = \begin{cases} bx + a - b & \text{para } x \geq 1 \\ ax & \text{para } |x| \leq 1 \\ bx - a + b & \text{para } x \leq -1 \end{cases} \quad (3.5)$$

onde $a = 1 - RG_0$ e $b = 1 - RG_1$. Vamos colocar a função característica $f(x)$ do resistor não-linear (R_{NL}) na forma de um vetor coluna $\mathbf{F}(x)$

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Doravante, vamos nos referir a G como sendo o parâmetro de controle, que utilizaremos para caracterizar os diferentes tipos de topologias e comportamento do circuito.

3.2.3 Pontos Fixos do Atrator

Para acharmos os pontos fixos do atrator, que são simétricos em relação à origem, colocaremos o grupo de equações 3.4 na forma matricial $\mathbf{JX} + \mathbf{F}(x)$, sendo J a jacobiana do sistema

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha c & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

A constante c foi introduzida com o objetivo de levarmos em conta os diferentes valores que a função $f(x)$ assume, conforme indicado na equação 3.9. Podemos então reescrever o grupo de equações 3.4, em função da equação 3.7 e usando 3.6, tal que

$$\dot{X} = JX + F(x) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha c & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Em função da localização dos pontos fixos a constante c pode assumir os seguintes valores:

$$c = \begin{cases} b & \text{para o domínio } D_+ \\ a & \text{para o domínio } D_0 \\ b & \text{para o domínio } D_- \end{cases} \quad (3.9)$$

Resolvendo o sistema $\dot{X} = 0$, encontramos os três pontos fixos P^-, P^0, P^+ do sistema, que são pontos de equilíbrio hiperbólico; P^+ e P^- são simétricos em relação ao ponto P_0^4 como mostrado na figura 3.3.

A estabilidade dos pontos fixos é obtida pela análise dos autovalores da jacobiana (3.8), que fornece o fluxo linearizado próximo a origem. Voltaremos a utilizar o conceito de fluxo linearizado em torno da origem (ponto fixo), quando abordarmos os cálculos dos expoentes de Lyapunov. Resolvendo-se o sistema abaixo para a variável s , encontramos os três autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ da matriz jacobiana.

$$s^3 + s^2(\alpha c + 1) + s(\beta - \alpha + \alpha c) + \alpha\beta c = 0 \quad (3.10)$$

Resolvendo-se equação 3.10, tem-se que λ_1 é um autovalor real e positivo, λ_2 e λ_3 formam um par de autovalores complexos conjugados, com parte real é negativa, justificando a afirmação dos pontos de equilíbrio hiperbólico.

⁴Um ponto de equilíbrio é hiperbólico quando o fluxo linearizado em torno dela, apresenta um autovalor com parte real não-nula.

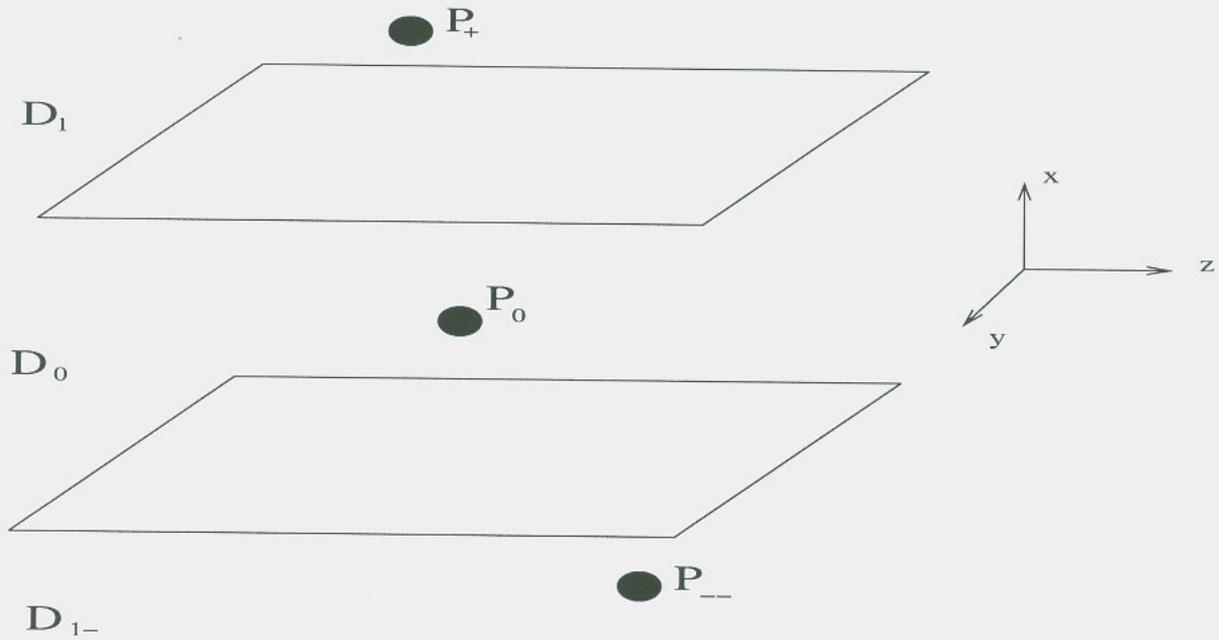


Figura 3.3: Diagrama espacial dos pontos fixos do circuito de Matsumoto.

Para o ponto fixo na origem $c = a = G_a/G$ e para os pontos fixos P^+ ou P^- $c = b = G_b/G$. Sendo G_a o recíproco da condutância G_0 e G_b recíproco da condutância G_1 da curva característica R_{NL} .

Fazendo-se: $\rho = (b - a)$ e $\xi = (b + 1)$, podemos escrever as expressões para os pontos fixos P^+ e P^- como sendo:

$$\begin{aligned} P^+ &= \left(\frac{\rho}{\xi}, 0, -\frac{\rho}{\xi} \right) \\ P^0 &= (0, 0, 0) \\ P^- &= \left(\frac{\rho}{\xi}, 0, \frac{\rho}{\xi} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

válidas para $a \neq b$, $b \neq -1$ e $(a+1)(b+1) < 0$.

O conjunto de equações diferenciais 3.1, será integrado numericamente. Como algoritmo de integração utilizamos o integrador de quarta ordem de Runge-Kutta, com passo fixo. As rotinas de integração e outros algoritmos, foram escritos em linguagem de programação Ansi-C.

3.2.4 A Dinâmica do circuito de Matsumoto

Um dos principais motivos do circuito de Matsumoto ser um dos paradigmas do caos: trata de um sistema simples, que pode exibir comportamento dinâmico complexo. Não obstante sua simplicidade, apresenta características de universalidade. Comportamentos como bifurcações, rota para caos via duplicação de período, bifurcações de Hopf e caos no sentido do teorema de Shil'nikov, já foram observados neste circuito. Esses comportamentos podem ser atingidos utilizando-se o parâmetro G , como elemento de controle. A sua variação permite obter diferentes topologias e comportamentos caóticos. Assim por exemplo, fazendo-se $G = 0.575$ obtém-se o atrator tipo *Rössler*, que apresenta uma única espiral, como mostrado na figura 3.4.

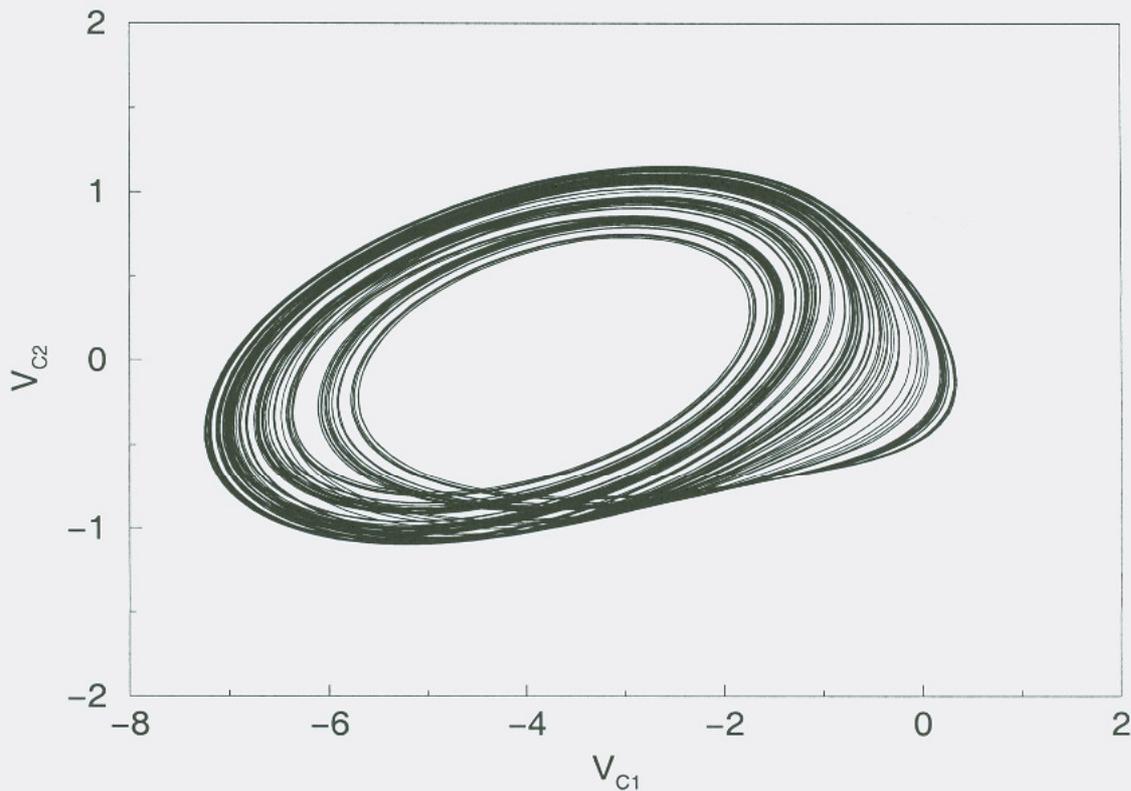


Figura 3.4: Projecção do atrator tipo *Rössler* no plano $(V_{C1}) \times (V_{C2})$ para $G = 0.5750$.

Outro atrator, conhecido como atrator tipo dupla espiral⁵ é obtido fazendo-se $G = 0.585$ como mostrado na figura 3.5. Nos gráficos 3.6 e 3.7 mostramos as projeções

⁵*Double Scroll*

para o atrator tipo *Rössler* nos planos $(V_{C1}) \times (i_L)$ e $(V_{C2}) \times (i_L)$. Para outros valores podemos conseguir órbitas periódicas desse mesmo atrator, conforme apresentado na figura 3.8. Lembramos que, quando falamos em atrator com uma única ou dupla espiral, estamos nos referindo a uma projeção no plano, uma vez que a estrutura topológica do atrator do circuito Matsumoto apresenta uma topologia muito complexa, distribuída no espaço e não somente no plano.

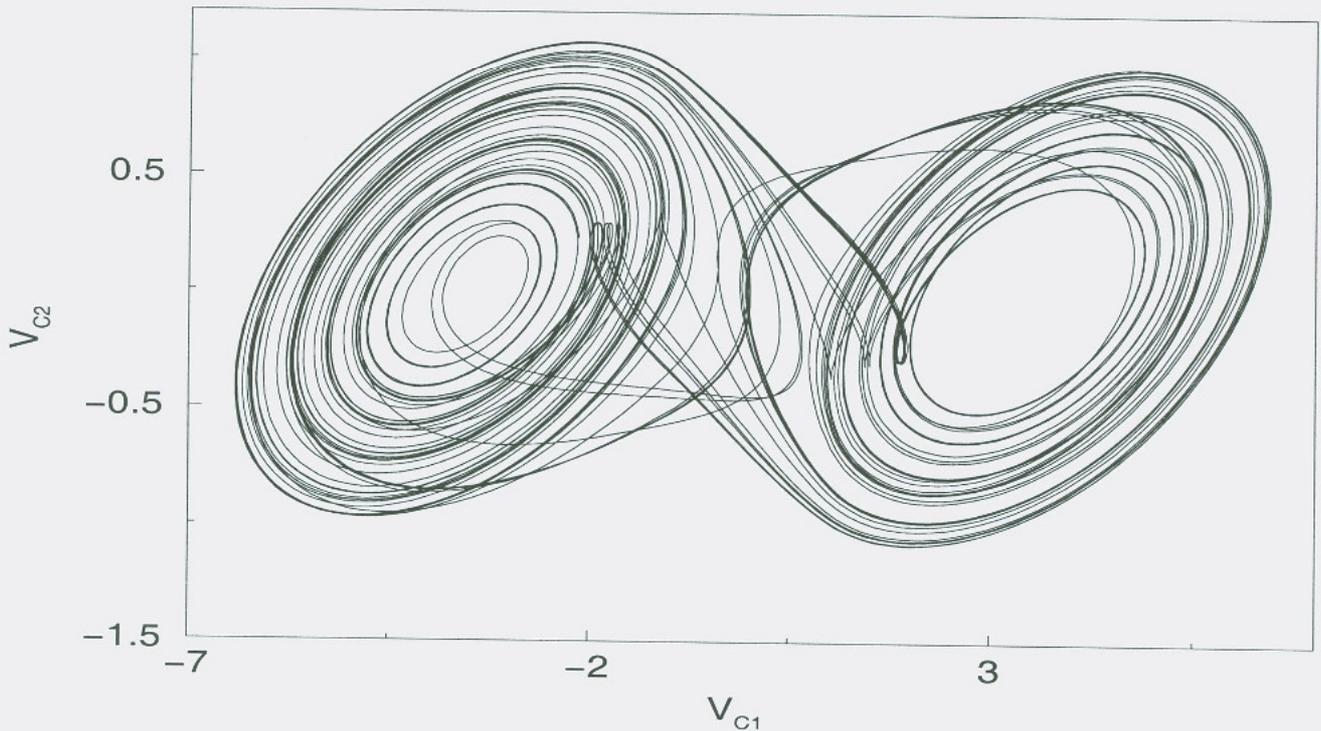


Figura 3.5: Atrator tipo dupla espiral para $G=0.5850$.

O aparecimento do caos no circuito de Matsumoto é devido a uma seqüência de duplicação de período. Esta rota para o caos via duplicação em cascata de períodos é conhecida como cenário de Feigenbaum, isto pode ser visto pela série mostrada na figura 3.8 em que para $G = 0,55695$ tem-se órbita de período⁶ 1, para $G = 0.5710$ tem-se órbita de período 2, para $G = 0.5720$ a órbita apresenta período 3 e finalmente para $G = 0.5750$ ocorre regime caótico após uma seqüência de bifurcações.

Na figura 3.9 pode-se ver diferença qualitativa existente entre as duas séries temporais da tensão V_{C1} para os dois tipos de atratores.

⁶Quando dizemos que uma órbita caótica é tem período n isso implica que dado um ponto x de sua trajetória o mesmo retornará em um tempo finito n vezes à sua ϵ vizinhança tal que $(x + \epsilon) \approx x$.

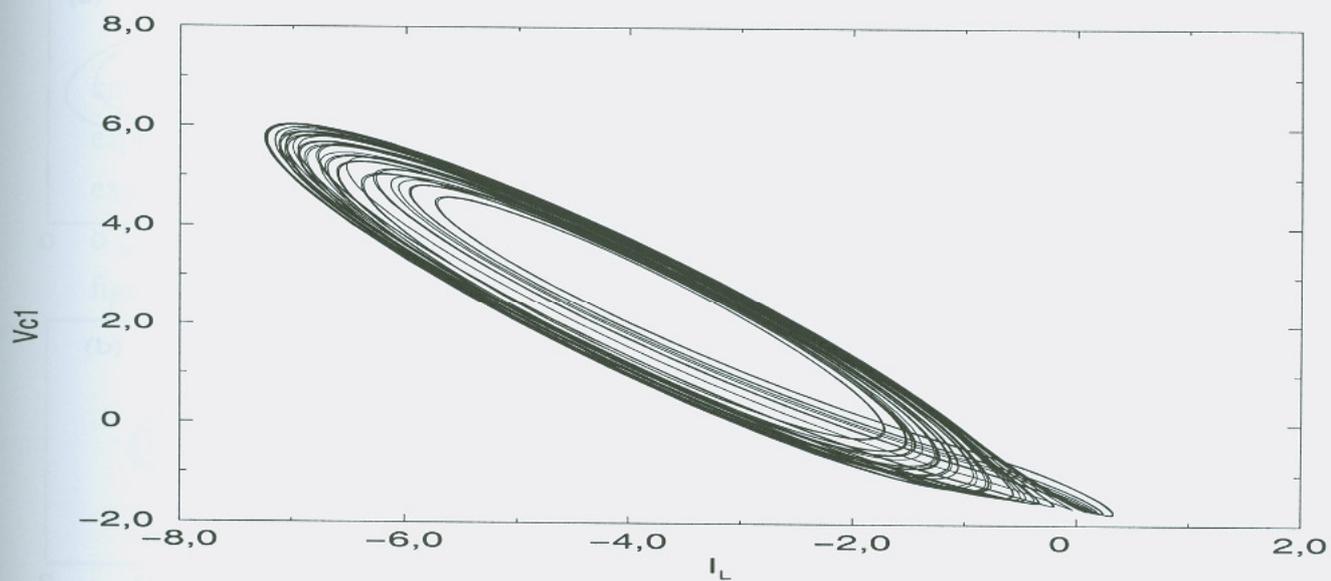


Figura 3.6: Projecção do atrator tipo *Rössler* no plano $(V_{C1}) \times (i_L)$, para $G=0.5750$.

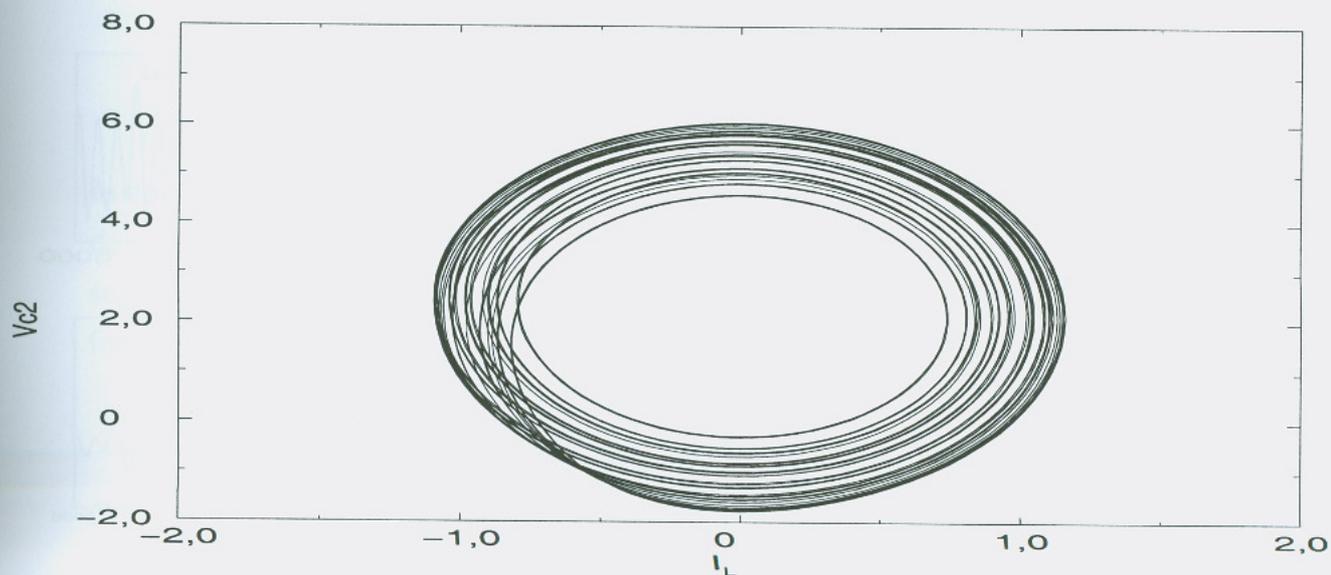


Figura 3.7: Projecção do atrator tipo *Rössler* no plano $(V_{C2}) \times (i_L)$, para $G=0.5750$.

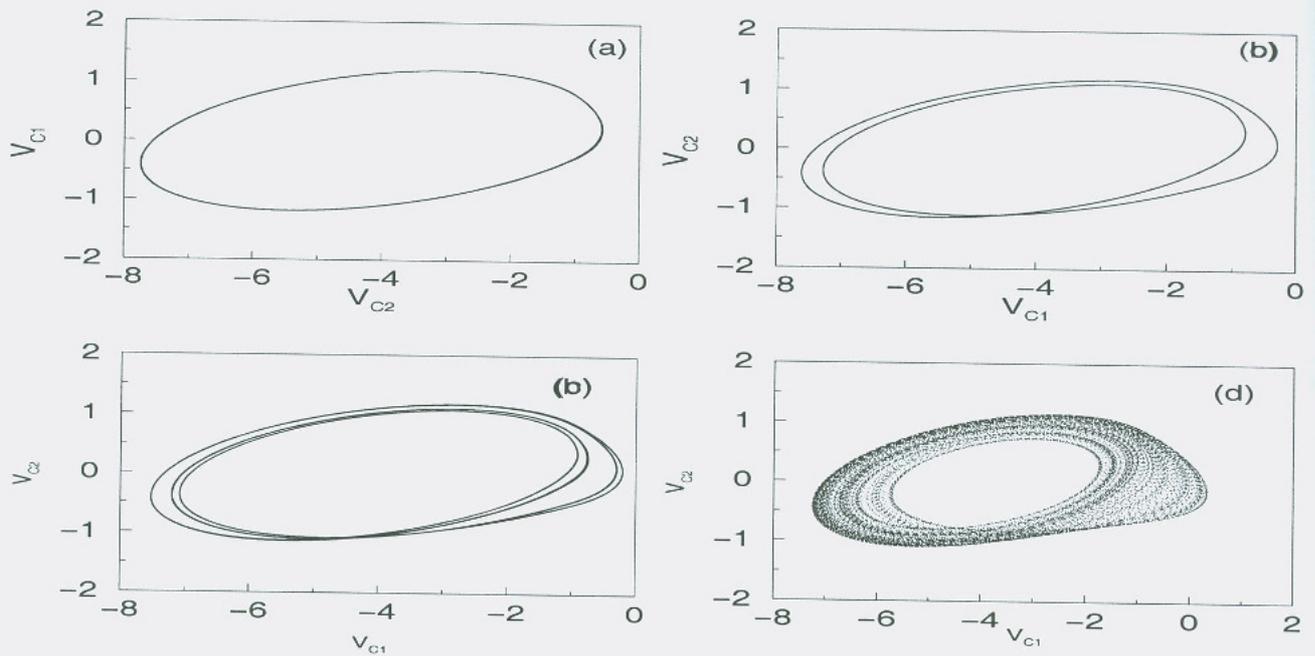


Figura 3.8: Seqüência de duplicação de períodos para o atrator de Matsumoto (a) $G = 0.5695$. (b) $G = 0.5710$. (c) $G = 0.5720$. (d) $G = 0.5750$.

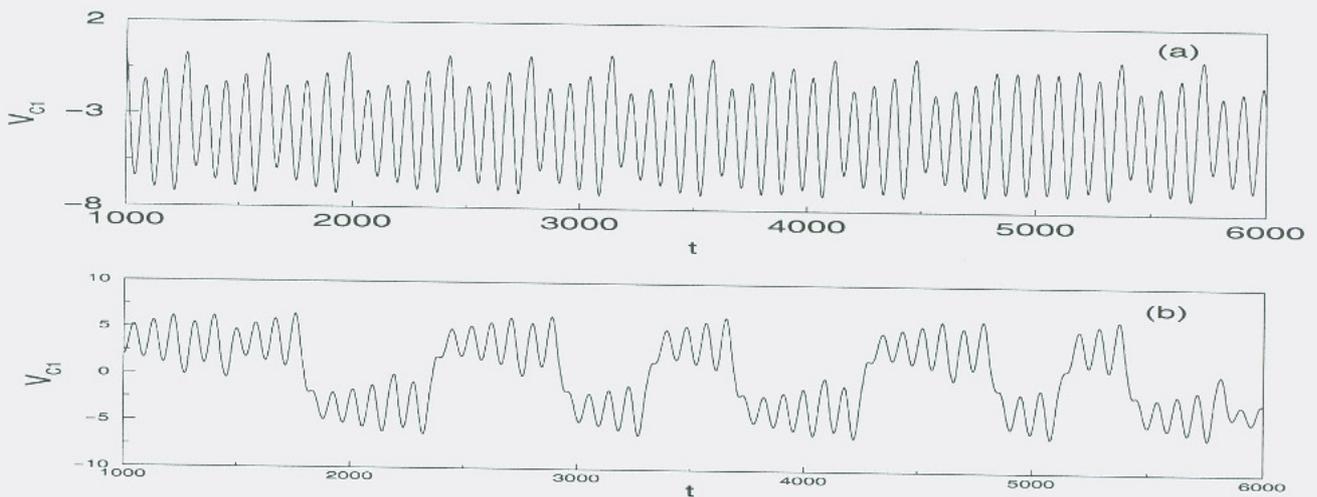


Figura 3.9: Série temporal da tensão V_{C1} para atratores: (a) Tipo Rössler (b) tipo dupla espiral.

3.3 Expoentes de Lyapunov para fluxos

Uma das características fundamentais dos sistemas caóticos é a sua dependência em relação às condições iniciais. Isso quer dizer que dados dois pontos próximos no espaço de fase, x_0 e x_1 , tal que $x_1 \approx x_0 + \Delta x_0$, suas trajetórias irão divergir em média, exponencialmente com o tempo, divergência que será tanto maior, quanto maior for o grau de não-linearidade do sistema. Uma idéia aproximada disso pode ser visto na figura 3.10.

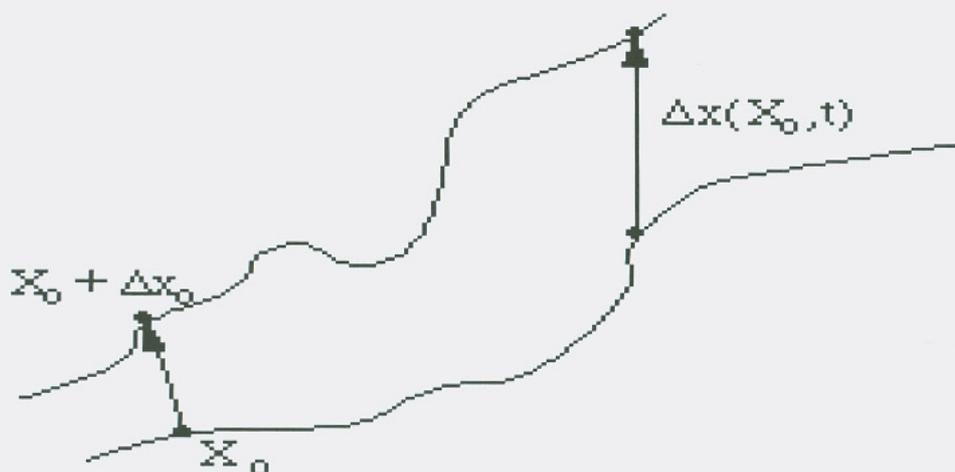


Figura 3.10: Divergência de dois pontos próximos, com o passar do tempo.

Os expoentes de Lyapunov são uma das maneiras de quantificar essa sensibilidade às condições iniciais. Sejam $x_0(t)$ e $x_1(t)$ as trajetórias que se originam a partir desses dois pontos, a distância $\delta_x = x_0(t) - x_1(t)$ entre eles irá se contrair ou se expandir segundo uma taxa exponencial λ . Se a equação dinâmica do sistema caótico é da forma:

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (3.12)$$

Como afirmamos que os pontos x_0 e x_1 são muito próximos, podemos desenvolver em série de Taylor a função $f(x)$ em torno do ponto x_1 :

$$f(x_1(t)) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx_1} |_{x_0} (x_1 - x_0) + \dots \quad (3.13)$$

e a taxa $\dot{\delta}$ da variação da distância entre os pontos é dada por

$$\dot{s}(t) = \dot{x}_1(t) - \dot{x}_0(t) \quad (3.14)$$

ou ainda por

$$\dot{s}(t) = \dot{x}_1 - \dot{x}_0 = f(x_1(t)) - f(x_0(t)) = \left. \frac{df}{dx_1} \right|_{x_0} (x_1 - x_0 + \dots) \quad (3.15)$$

Podemos então, manter somente o termo de primeiro grau na série de Taylor de $f(x)$, desse modo o expoente λ deve satisfazer a relação:

$$s(t) = s(0)e^{\lambda t} \quad (3.16)$$

Diferenciando a equação 3.16 com relação ao tempo t , temos

$$\dot{s}(t) = \lambda s(0)e^{\lambda t} = \lambda s(t) \quad (3.17)$$

Comparando as equações 3.17 e 3.14 podemos ver que o coeficiente λ é dado por

$$\lambda = \left. \frac{df(x_1)}{dx_1} \right|_{x_0} \quad (3.18)$$

ou seja, λ mede a variação das trajetórias que se originam no ponto x_0 de modo que sendo $\lambda > 0$ as duas trajetórias divergem e $\lambda < 0$ as trajetórias se contraem ou convergem. Em termos práticos podemos ver que a equação 3.18 varia, pois $x(t)$ também varia. Por isso, deixa-se o sistema evoluir por um tempo suficientemente longo e a partir de um conjunto $x_i(0)$ de condições iniciais, toma-se um valor médio para o coeficiente λ , chamado também de expoente de Lyapunov, ou seja:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i \quad (3.19)$$

sendo N o número de expoentes λ somados em um dado intervalo de tempo.

Como estamos tratando com sistemas que geram fluxos, podemos atribuir um expoente de Lyapunov para cada dimensão do nosso espaço de fase, formando o espectro de expoentes de Lyapunov do sistema. Para o circuito de Matsumoto podemos ter então três expoentes ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) que medem o afastamento das trajetórias envolvendo as variáveis de estado V_{C1}, V_{C2} e i_L respectivamente.

Em função dos sinais dos expoentes λ_1 , λ_2 e λ_3 , podemos ter uma descrição qualitativa do comportamento do sistema [26]:

Sinal dos expoentes	Tipo de atrator
(-, -, -)	Ponto fixo
(0, -, -)	Ciclo limite
(0, 0, -)	Quase-periódico
(+, 0, -)	Caótico

Assim, para um sistema ser considerado como caótico, deve existir pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. Quando o sistema têm mais de um expoente positivo, em um espaço de fase com pelo menos quatro dimensões, diz-se que é um sistema hipercaótico [39].

Descreveremos a seguir o procedimento para calcular os expoentes de Lyapunov para sistemas descritos por funções iteradas (mapas), como por exemplo, o mapa logístico. Se x_n for um ponto no espaço de fase do mapa $f^{(n)}(x)$ e $(x_n + \epsilon)$ um ponto vizinho. Iterando a função $f^{(n)}(x)$ n vezes e considerando-se o valor absoluto da diferença d_n entre as duas trajetórias $f^{(n)}(x_0)$ e $f^{(n)}(x_0 + \epsilon)$, teremos

$$d_n \equiv |f^{(n)}(x_0 + \epsilon) - f^{(n)}(x_0)| \quad (3.20)$$

sendo que, para comportamento caótico, esperamos que a distância d_n cresça exponencialmente com o índice n .

$$\frac{d_n}{\epsilon} = \frac{|f^{(n)}(x_0 + \epsilon) - f^{(n)}(x_0)|}{\epsilon} \equiv e^{\lambda n} \quad (3.21)$$

ou

$$\lambda = \left(\frac{1}{n} \ln \frac{|f^{(n)}(x_0 + \epsilon) - f^{(n)}(x_0)|}{\epsilon} \right) \quad (3.22)$$

Na equação 3.22 se fizermos $\epsilon \rightarrow 0$, podemos tomá-la como sendo a derivada n -ésima de $|f(x)|$ ou $|f^n(x)|$. Utilizando a regra de derivação em cadeia, podemos escrevê-la como um produto de n derivadas de $f(x)$

$$\lambda = \frac{1}{n} \left(\ln |f'(x_0)| * |f'(x_1)| * \dots * |f'(x_n)| \right) \quad (3.23)$$

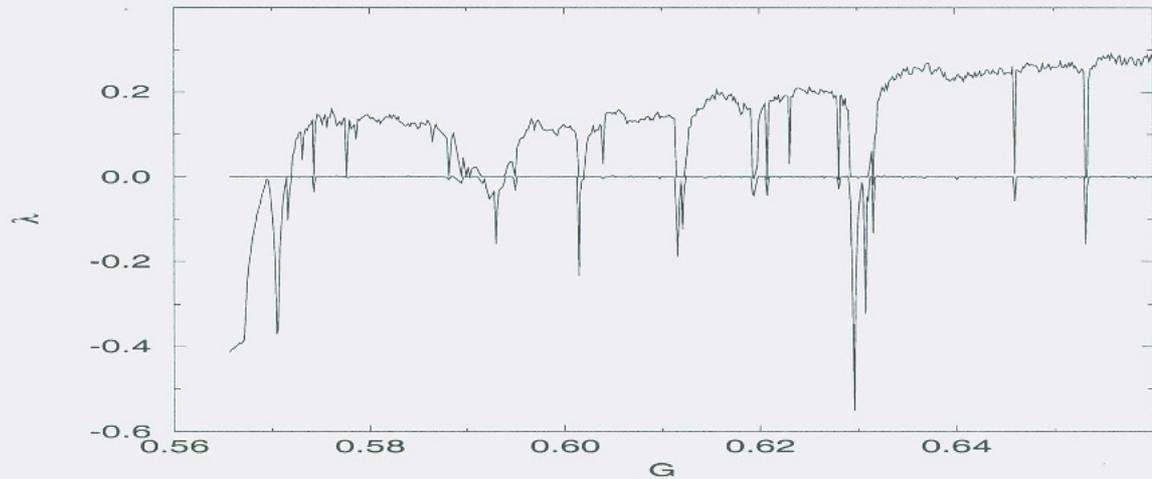


Figura 3.11: Coeficiente de Lyapunov em função do parâmetro G para o circuito de Matsumoto para a variável V_{C1} .

$$\lambda = \frac{1}{n} \left(\ln|f'(x_0)| + \ln|f'(x_1)| + \dots + \ln|f'(x_n)| \right) \quad (3.24)$$

Podemos interpretar a equação 3.24, como definindo o expoente de Lyapunov λ pela média das somas dos logaritmos dos valores absolutos das derivadas da função $f(x_n)$ do mapa, avaliada nos pontos da trajetória ou, genericamente

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{n=1}^n \ln \frac{df(x_n)}{dx_n} \quad (3.25)$$

Usando-se os expoentes de Lyapunov para quantificar o grau de caoticidade do sistema de Matsumoto podemos afirmar que, quando $G = 0,5750$ o circuito oscila em regime caótico. Comparando-se as figuras 3.11 e 3.12, podemos ver que nas regiões onde existem bifurcações de períodos e janelas periódicas, o expoente de Lyapunov é negativo. Na obtenção do gráfico da figura 3.11 empregamos o método sugerido por Wolf *et al* [40]. Nas regiões em que o comportamento é caótico, o expoente de Lyapunov é positivo e negativo, onde o comportamento é periódico.

Podemos ver também como varia o comportamento do sistema, em função do parâmetro G , plotando-se no eixo horizontal o valor de G . No eixo vertical plotamos uma série de valores para a variável em questão, para cada um dos valores as-

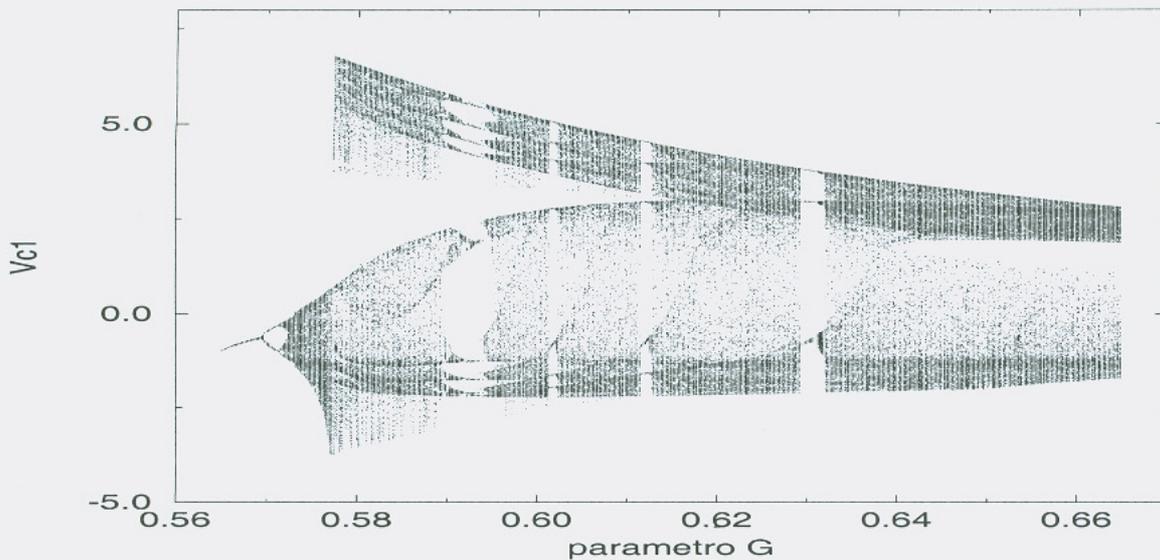


Figura 3.12: Diagrama de Bifurcação para a tensão V_{C1} em função do parâmetro G , para a variável V_{C1} do circuito de Matsumoto.

sumidos pelo parâmetro G . Essa análise é conhecida como diagrama de bifurcação. O gráfico da figura 3.12, mostra o diagrama de bifurcação para o circuito de Matsumoto. Para sua obtenção, variamos em pequenos incrementos o valor de G no intervalo $\{0.56 \leq G < 0.66\}$. Para cada um desses valores, iteramos 500 vezes o sistema. Desprezamos um pequeno período transiente e plotamos esses valores no eixo vertical. O diagrama de bifurcação permite verificar os pontos em que ocorrem mudanças na dinâmica do sistema. Regiões onde existem janelas periódicas, caos e pontos onde as trajetórias bifurcam-se podem ser facilmente observadas. Por exemplo, para regiões próximos do valor $G = 0,63$, temos uma janela de período 3. Isto pode ser visto também pelo expoente de Lyapunov que é negativo para esta nessa vizinhança do parâmetro G .

Pela análise espectral do sinal, podemos obter o espectro de Fourier ou espectro de potência e caracterizar o aparecimento do caos. Essa análise, foi feita para o circuito de Matsumoto. O espectro de uma trajetória periódica com um ciclo limite irá aparecer como um espectro discreto, enquanto uma trajetória não-periódica irá aparecer com um espectro contínuo, o qual é típico de sistemas caóticos. Um sinal com espectro de

banda larga, significa que o mesmo não apresenta uma frequência dominante e que sua potência encontra-se espalhada ao longo do seu espectro.

Para a série temporal de V_{C1} , mostrado no gráfico 3.13 podemos ver o espectro de potência, (a) para órbitas periódicas e em (b) para órbitas caóticas.

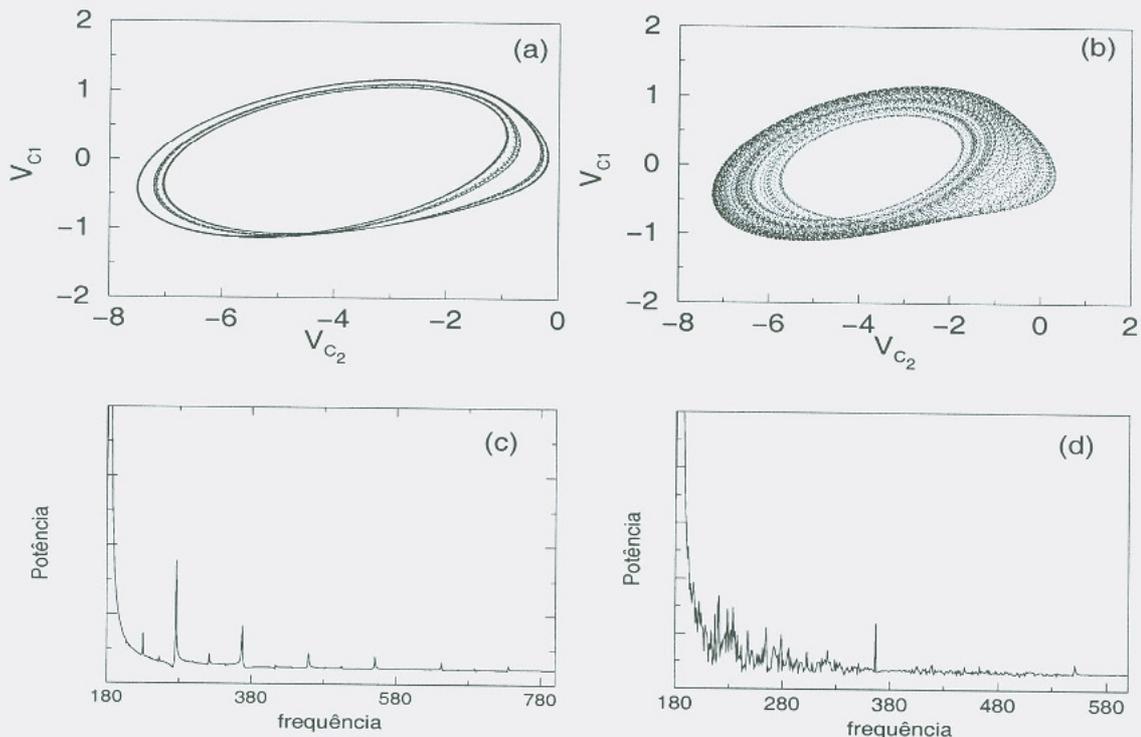


Figura 3.13: (a) Órbita de período 4. (b) Atrator Caótico (c) Espectro de Fourier para órbita periódica (d) espectro de Fourier para o atrator caótico.

3.4 Secções de Poincaré de sistemas caóticos contínuos

Os sistemas caóticos contínuos que são descritos por conjuntos de equações diferenciais (fluxos) podem ser reduzidos a um sistema discreto pelo uso das secções de Poincaré ou mapas de Poincaré. Essa técnica será muito utilizada em nosso desenvolvimento de sistemas de comunicação com caos.

O mapa de Poincaré é o conjunto de pontos obtidos pela intersecção da trajetória caótica com um plano transversal à essas trajetórias. Uma órbita de período 1 aparecerá como dois pontos (um para cada sentido do plano), conforme mostra a figura

3.15. Uma órbita quase-periódica formará uma curva fechada, enquanto que trajetórias caóticas aparecerão como pontos espalhados ao longo da superfície. Este conjunto de pontos normalmente não está contido em uma dimensão, apresentando uma dimensão fractal entre 1 e 2 [41].

Para o circuito de Matsumoto, a aplicação da secção de Poincaré nos permite uma redução da dimensão do sistema de três para duas, passamos do domínio contínuo para o domínio discreto. Uma trajetória contínua ao atravessar o plano Σ pela primeira vez originará o ponto Z_n e em seguida o ponto Z_{n+1} e assim sucessivamente, como mostra a figura 3.14, criando uma sequência de pontos no plano Σ . Conforme já convenciona-mos anteriormente, o plano Σ no qual as secções de Poincaré estão imersas é formado pelas variáveis dinâmicas $x = V_{C1}$ e $y = i_L$, a tensão no capacitor C_1 e a corrente no indutor i_L , respectivamente.

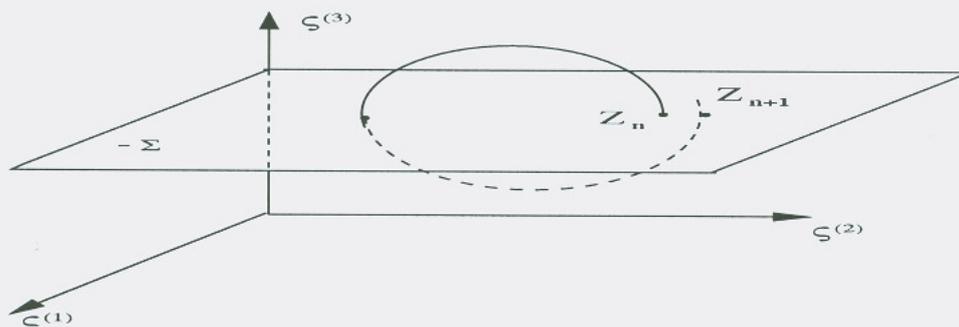


Figura 3.14: Transformação de um fluxo em pontos discretos no plano σ .

Seja um espaço de fase Σ de dimensão d , então a secção de Poincaré de um fluxo imerso nesse espaço terá dimensão $d - 1$. Genericamente, um mapa \mathcal{P} de Poincaré é uma função da forma:

$$X_{n+1} = P(X_n) \quad (3.26)$$

com $X_n, X_{n+1} \in \mathcal{P}$ e com $n \in \mathbb{Z}^+$.

O uso das secções de Poincaré nos permite uma nova descrição de um sistema caótico. Assim, órbitas periódicas aparecerão como pontos discretos distribuídos no plano Σ e órbitas não-periódicas descreverão uma trajetória aparentemente aleatória no plano Σ .

Embora a escolha da secção no espaço de dimensão d seja arbitrária, para o caso específico do circuito de Matsumoto, adotaremos a secção de Poincaré como aquela

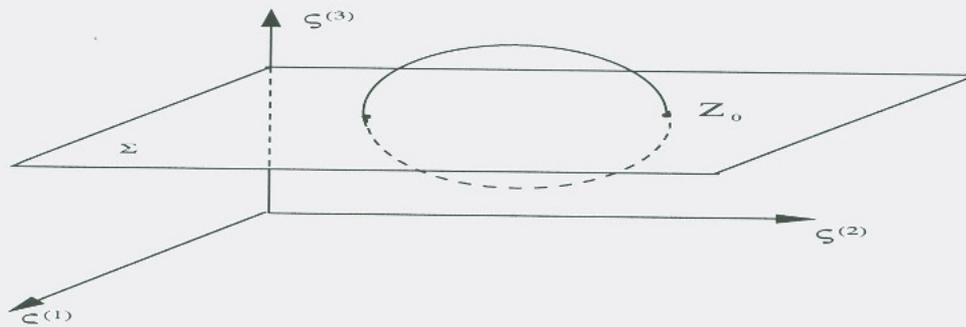


Figura 3.15: Órbita de período 1 aparece como um ponto no plano σ .

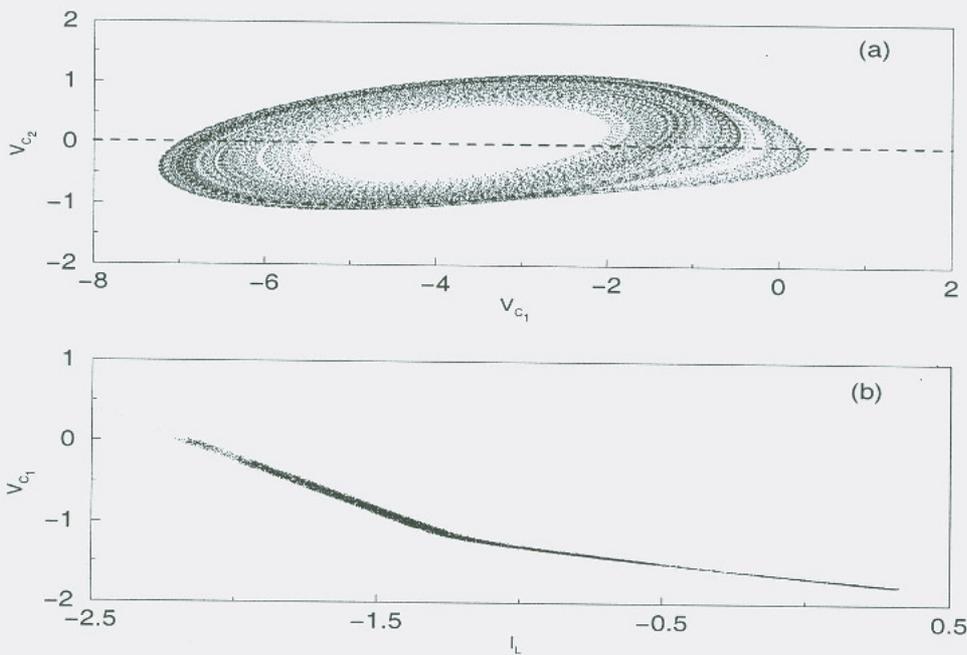


Figura 3.16: (a) Atrator para $G=0.5750$ (b) projeção da seção de Poincaré no plano $V_{C2} = 0$ e $(i_l) \times (V_{C1})$.

gerada quando o fluxo passar pelo plano $y = V_{C2} = 0$, indo do sentido negativo para positivo, ou seja o módulo de V_{C1} é menor antes de atravessar a seção de Poincaré e maior ao sair. A figura 3.16 mostra o atrator de Matsumoto com a projeção da seção de Poincaré tomada no plano $V_{C2} = 0$.

3.5 Sistemas caóticos discretos: O Mapa Logístico

Ao contrário do que acontece com sistemas contínuos que são descritos por sistemas de equações diferenciais e precisam de pelo menos três dimensões para exibir comportamento caótico, existem sistemas que são descritos por funções de iteração e também apresentam comportamento caótico, não obstante terem somente uma ou duas dimensões e serem não-inversíveis. Muitos fenômenos físicos podem ser modelados por sistemas de tempo discreto, também chamados de mapas. Por exemplo, o modelo de crescimento populacional pode ser modelado por um sistema muito simples conhecido como mapa quadrático ou mapa logístico, cuja forma é do tipo:

$$x[n + 1] = \mu x[n](1 - x[n]) = F_\mu(x[n]) \quad (3.27)$$

onde $x[n]$ é um número que reflete a população após o n ésimo ciclo, como uma função da população em um momento anterior $x[n - 1]$. O parâmetro μ depende das condições do ambiente (comida, água etc), e será utilizado como elemento de caracterização do sistema. Assim, dada a população $x[n]$ em um dado momento podemos obter a população após n ciclos, pela aplicação repetida da função $F_\mu(x[n])$ ao valor inicial $x[0]$, em processo de iterações sucessivas, ou

$$x[1] = F_\mu(x[0]), x[2] = F_\mu(x[1]), \dots, x[n - 1] = F_\mu(x[n - 2]), x[n] = F_\mu(x[n - 1]) \quad (3.28)$$

A seqüência de pontos $x[0], x[1], x[2], \dots, x[n]$ provenientes da iteração da função $F_\mu(x[n])$ n vezes gera a trajetória do mapa. Existe um valor específico $x[PF]$ para a variável $x[n]$ que retorna o mesmo valor, quando a função $F_\mu(x[n])$ é iterada, ou seja $x[PF] = F_\mu(x[PF])$, esse ponto é chamado de ponto fixo da função $F_\mu(x[n])$. No gráfico (a) da figura 3.17 o ponto fixo é o encontro da linha diagonal com a curva que representa o conjunto das trajetórias do mapa iterado, pois $F(x[n])$ leva a $x[n]$. O gráfico de $x[n + 1]$ contra $x[n]$ é chamado de mapa de primeiro retorno. Plotando-se o ponto $x[n]$ contra o ponto $x[n + 2]$, obtemos o gráfico da figura 3.17b, chamado de mapa de segundo retorno. Em ambos os gráficos o parâmetro μ têm valor $\mu = 4.0$

O mapa logístico pertence à classe dos mapas unimodais, que são mapas mais simples, apresentando um único ponto de máximo x_c , não pertencendo à classe dos

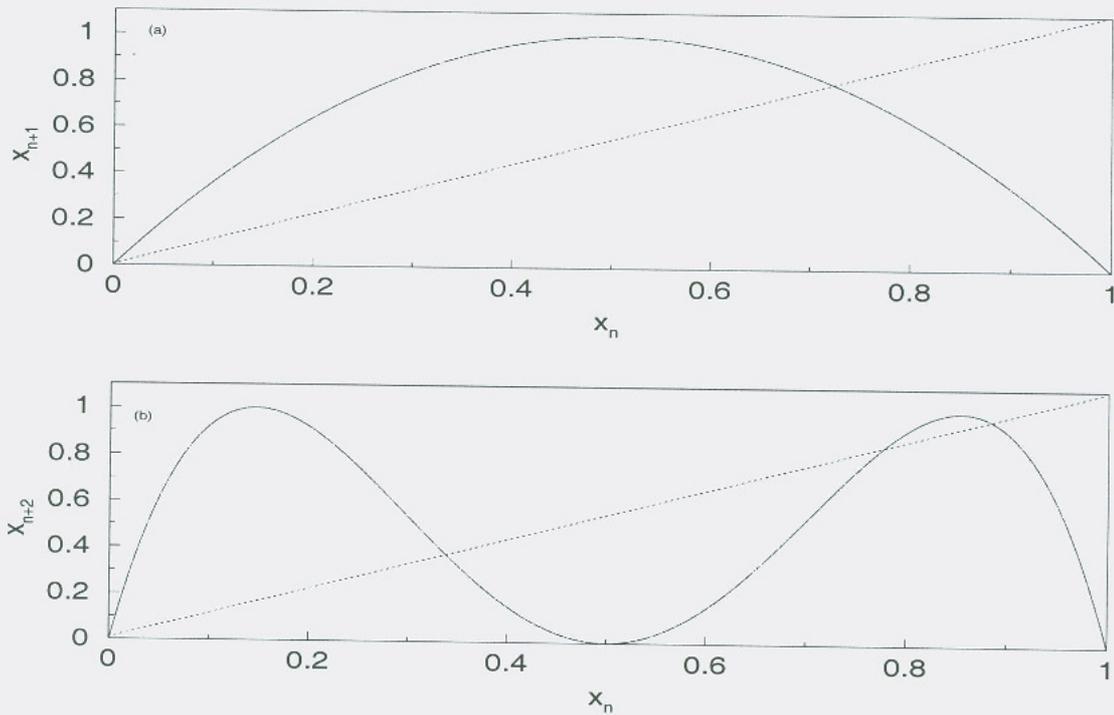


Figura 3.17: Mapa de primeiro e segundo retorno para o mapa logístico.

sistemas inversíveis [26], ou seja, não podemos partir de um ponto $x[n]$ e aplicar a função F_μ reversa no tempo para obter $x[n-1]$. Sendo unimodal só existe um ponto de máximo que ocorre para $x_c = \frac{1}{2}$, obtido tomando-se a primeira derivada da função $F_\mu(x[n])$

$$\frac{d(F_\mu)}{dx} = \frac{d(\mu x[1-x])}{dx} = \mu(1-2x) = 0 \quad (3.29)$$

a solução da equação 3.29 fornece o valor do ponto crítico $x_c = 0,5$, a figura 3.18 mostra o mapa de retorno com o ponto crítico x_c indicado.

3.5.1 Diagrama de Bifurcação do Mapa Logístico

Analogamente ao que foi feito com o circuito de Matsumoto, vamos analisar o diagrama de bifurcação do mapa logístico. Para isto, plotamos no eixo x o valor do parâmetro μ versus o valor do ponto genérico x_n no eixo vertical. Isto está indicado na figura 3.19a, o parâmetro μ está plotado na faixa de $2.8 < \mu < 4.0$. Para cada

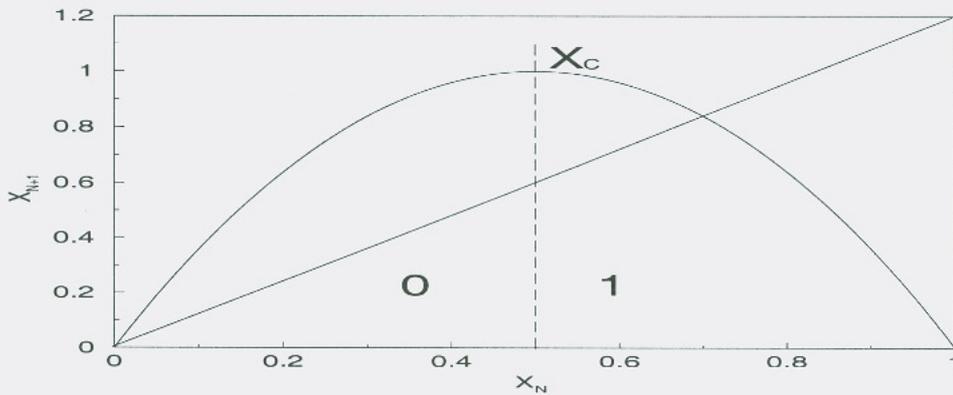


Figura 3.18: Mapa de primeiro retorno para o mapa logístico.

valor de μ iteramos 200 vezes a função $x[n+1] = x[n]\mu(1-x[n])$. Para a faixa de $1.0 < \mu < 3.0$ tem-se, somente, órbitas de período $p = 1$. Para $\mu = 3.0$ ocorre a primeira bifurcação com duplicação de período, i.e. $p=2$. Em $\mu = 3.447$ ocorre nova duplicação de período, agora as órbitas têm período $p = 4$. A partir desse ponto, ocorre uma série de duplicações do período p (cascata de duplicações de período), isso pode ser visto na figura 3.20, na qual ampliamos a faixa do parâmetro $3.5 < \mu < 3.65$. Com o aumento do parâmetro μ , $p \rightarrow \infty$, e começa a aparecer o comportamento caótico. Esse caminho para o caos, via duplicação de período, é uma cascata de bifurcações do tipo *flip*, uma vez que a matriz jacobiana do sistema têm um autovalor com parte real de módulo menor que 1.

Para calcularmos o expoente de Lyapunov para o mapa logístico, aplicamos a definição dada pela equação 3.24. A partir da equação 3.27 calculamos a Jacobiana $J(x)$ que, para o mapa logístico, é igual à sua derivada

$$J(x) = \frac{dF_{\mu}(x)}{dx} = \frac{d(\mu x(1-x))}{dx} = \mu(1-2x) \quad (3.30)$$

Assim, pela iteração da equação 3.30, obtemos o expoente de Lyapunov para o mapa logístico, em função do parâmetro μ .

A figura 3.19 mostra o gráfico (a) do diagrama de bifurcação e o expoente de Lyapunov, juntos, para efeito de comparação. Nos eixos horizontais plotamos o parâmetro μ e no eixo vertical o valor de x_n para o diagrama de bifurcação e o valor do expoente de Lyapunov em função de μ , no gráfico (b). Podemos notar pela análise desse gráfico, que os pontos onde ocorrem bifurcações das órbitas periódicas, o expoente de

Lyapunov é nulo, bem como nas regiões onde existem janelas periódicas, como indicado pelas linhas pontilhadas que unem os dois gráficos. Ainda, a partir de $\mu = 3.41$, o expoente de Lyapunov começa ficar positivo, indicando comportamento caótico, como podemos observar na região correspondente no diagrama de bifurcação. Para $\mu = 4.0$ o expoente atinge o seu valor máximo, existindo uma região de pleno regime caótico.

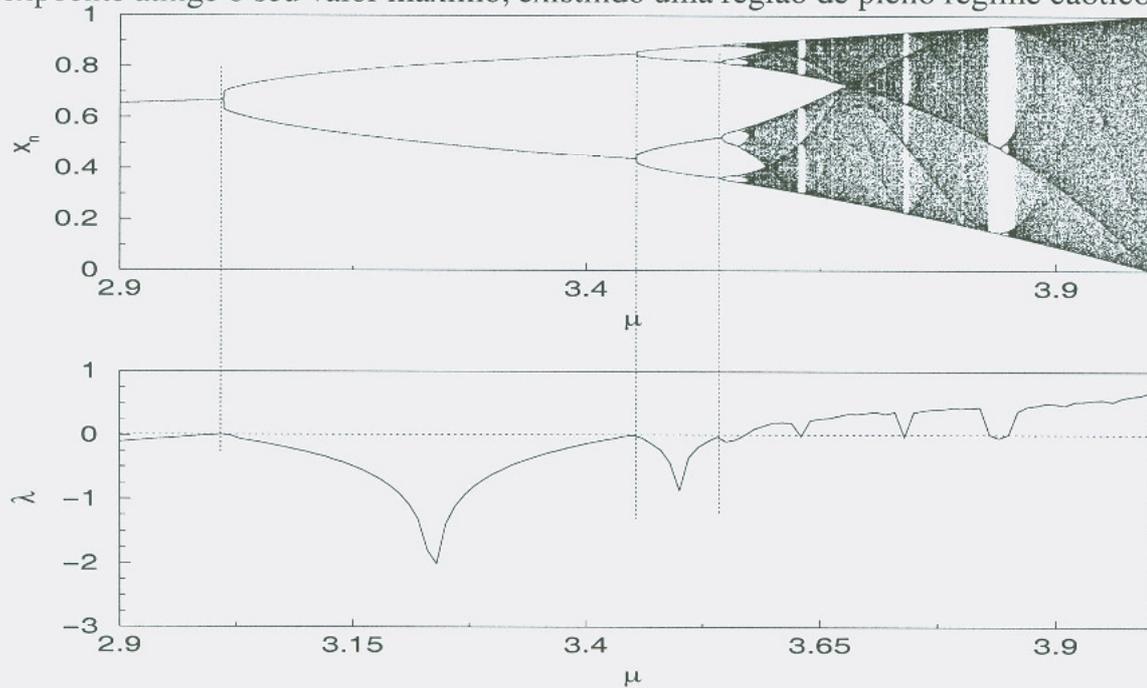


Figura 3.19: Expoentes de Lyapunov para o mapa logístico.

Ampliando-se a figura 3.19 veremos outros fenômenos tais como crises interiores, onde um comportamento caótico dá lugar, abruptamente ao comportamento periódico. Podemos ver isso pela figura 3.21, em que a partir do valor $\mu = 3.828$ temos uma janela periódica com $p = 3$.

Pode-se ver também a divergência entre pontos inicialmente próximos, pelo gráfico da figura 3.22, onde plotamos as séries temporais desses pontos. A divergência entre as trajetórias começa a ficar evidente à partir da décima iteração, aproximadamente. Esses pontos foram obtidos tomando-se o valor $\mu = 4.0$, como parâmetro do mapa logístico.

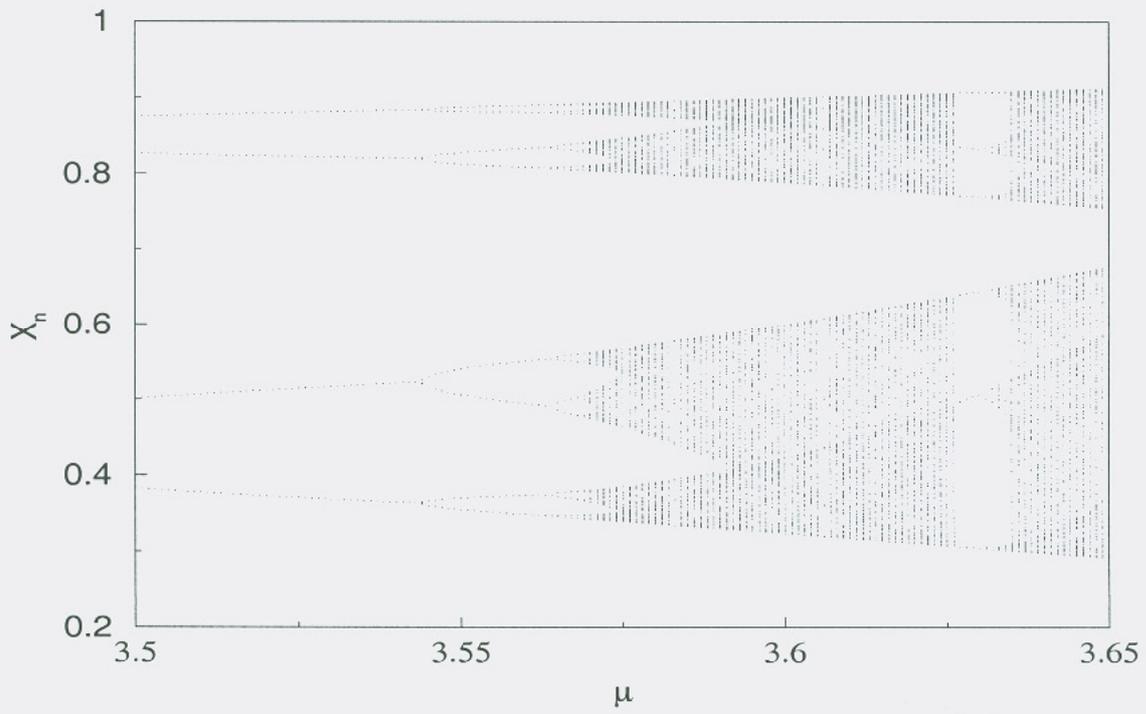


Figura 3.20: Ampliação do diagrama de bifurcação do mapa logístico.

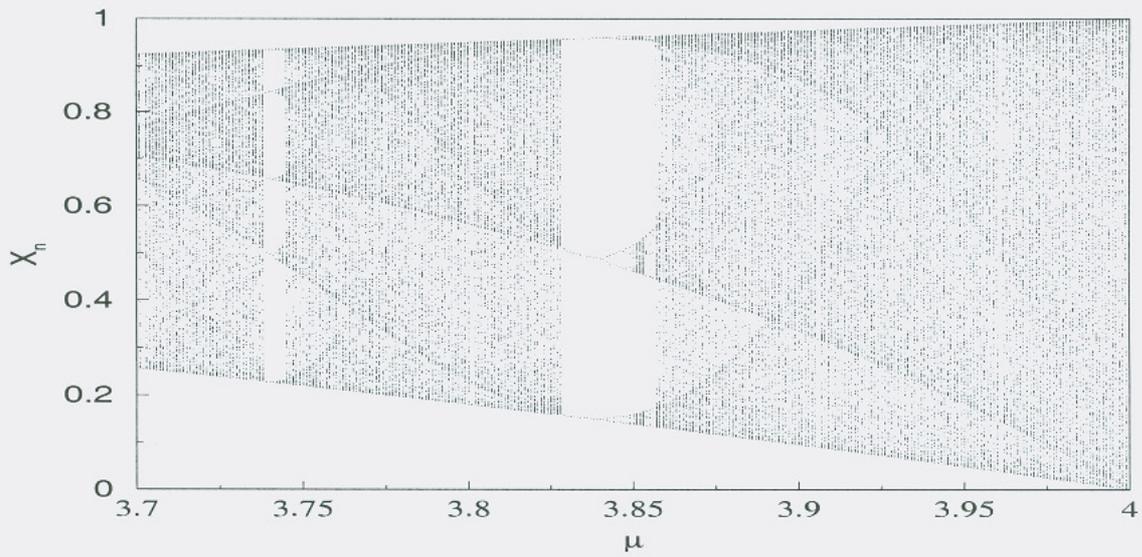


Figura 3.21: Aparecimento de crise no mapa logístico.

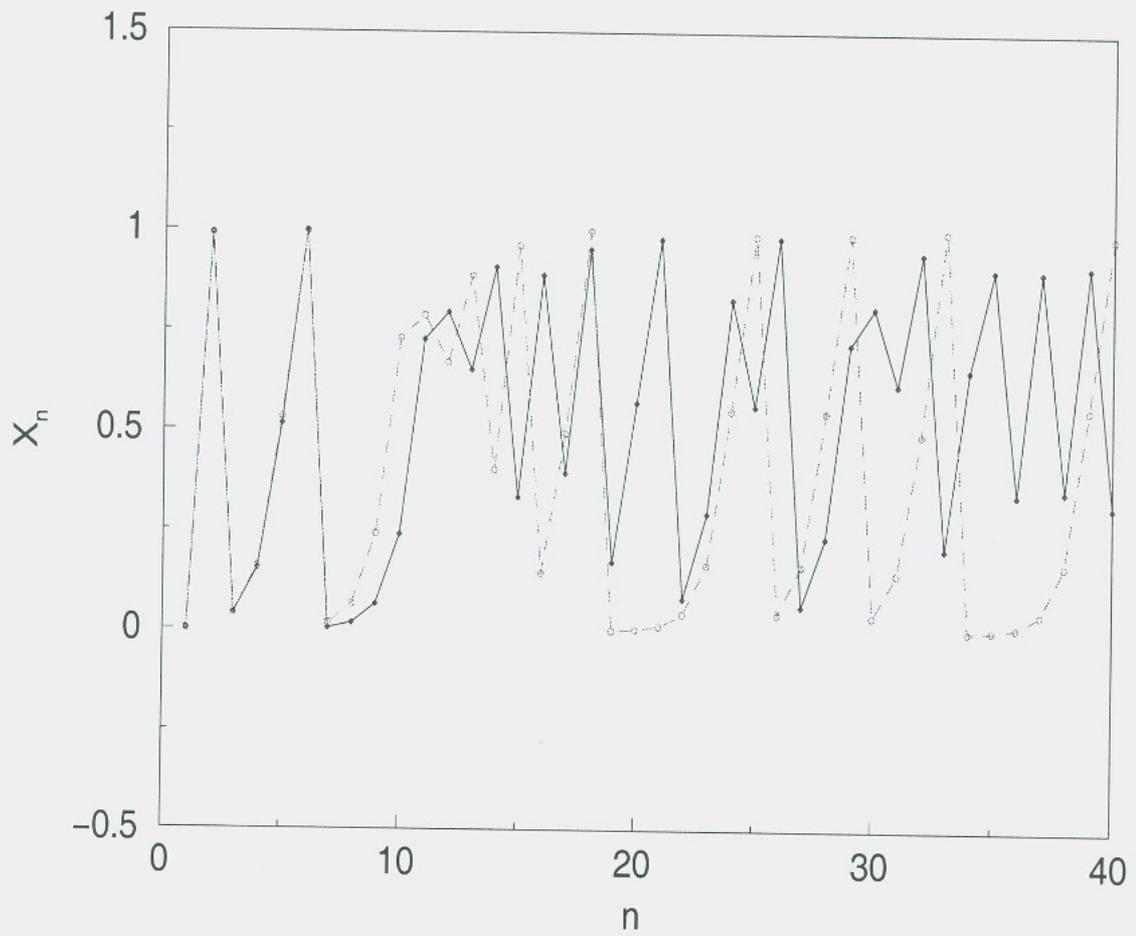


Figura 3.22: Dependências das condições iniciais no mapa logístico.

3.6 Conclusões

Foram analisados nessa secção, alguns aspectos dos sistemas caóticos, tendo em vista nossos objetivos iniciais; construir esquemas de comunicação baseado em caos. Foram apresentados dois representantes típicos de uma ampla gama de sistemas caóticos, o circuito de Matsumoto e o mapa logístico.

Os diferentes tipos de topologias apresentadas pelo circuito de Matsumoto podem ser aproveitadas por exemplo, em esquemas de comunicação que codificam a informação ora em um atrator ora em outro [42], em um esquema de modulação conhecido como *T - CSK (topological chaos shift keying)*. Codificações desse tipo não são as únicas possíveis, como veremos ao longo desse trabalho.

O parâmetro G para o circuito de Matsumoto e o parâmetro μ no caso do mapa logístico, nos permitem controlar a dinâmica caóticas desses sistemas, característica esta que será fundamental para a transmissão de informação nos sistemas de comunicação com caos. Embora, o circuito de Matsumoto seja um sistema caótico contínuo, através das secções de Poincaré, podemos fazer uma discretização em um espaço de fase bidimensional. Com o uso dos diagramas de bifurcação, pudemos ter uma descrição do comportamento dinâmico dos sistemas, em função de algum parâmetro. Para o circuito de Matsumoto, escolhemos o parâmetro G e para o mapa logístico, escolhemos o parâmetro μ . Comportamentos como movimentos periódicos, movimentos quase-periódicos podem ser previstos com o uso dos diagramas de bifurcação. Os expoentes de Lyapunov, bem como os espectros de potência, também são utilizados para a caracterização do caos, como foi apresentado para o mapa logístico e o circuito de Matsumoto.

Capítulo 4

Dinâmica Simbólica e Entropia Topológica em Sistemas Caóticos

4.1 Introdução

Neste capítulo serão discutidos aspectos do problema da quantidade de informação que pode ser codificada em um sistema de comunicação com caos. Essa questão é relevante porque, em alguns esquemas a informação é codificada diretamente na dinâmica do sistema. Como os sistemas caóticos podem ser vistos como fontes de informação, uma vez que a partir de uma condição inicial mais e mais detalhes se revelam durante a evolução do sistema. Uma maneira de medirmos essa informação criada, é pela introdução do formalismo da dinâmica simbólica.

O problema da codificação pode ser visto do ponto de vista da partição do espaço de fase do sistema. Atribuindo-se símbolos à cada divisão e procurando-se atingir o máximo de entropia para o sistema. Mostraremos então, à luz da teoria da informação, como obter a melhor maneira de fazer esse particionamento. Isso, nos conduz diretamente ao conceito de dinâmica simbólica, que também será importante no método de controle de trajetórias por nós implementado e apresentado nos capítulos posteriores.

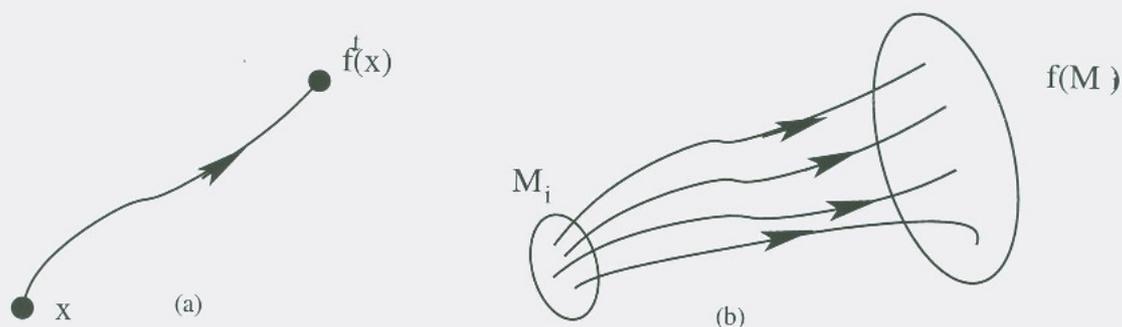


Figura 4.1: (a) Trajetória descrita por um ponto x . (b) Transformação do espaço de fase pela aplicação de f^t .

4.2 O Espaço de fase e a dinâmica simbólica

Começaremos essa seção estabelecendo algumas conceitos fundamentais para as nossas considerações futuras.

Um sistema dinâmico $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X})$, pode ser descrito em termos de um ponto que se move em um espaço abstrato. À esse espaço onde as grandezas de interesse são indicadas, chama-se espaço de fase Ω . Nesse espaço abstrato, podemos estudar a dinâmica do sistema. Existindo uma regra específica f^t , regendo o comportamento das variáveis nesse espaço de fase, podemos dizer que esse sistema têm um comportamento determinístico.

Seja $\mathbf{x} \in \Omega$ com $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_d\}$, sendo o vetor d -dimensional das variáveis do sistema e d a dimensão do espaço de fase Ω regidos regra f^T , que governa a evolução temporal do sistema, tal que $f^t : \Omega \rightarrow \Omega$ então, a dupla (Ω, f^t) pode descrever a dinâmica do sistema.

Quando a variável tempo é contínua, ou seja: $t \in \mathcal{R}$ a função f^t descreve um fluxo e sendo a variável tempo discreta ou seja: $t \in \mathcal{Z}$, então a função f^t descreve um processo discreto ou mapa.

Dado um ponto inicial \mathbf{x}_0 de uma trajetória, a evolução segundo f^t gera uma seqüência de pontos que descreve essa trajetória: $\mathbf{x}(t) = f^t(\mathbf{x}_0)$, conforme indicado na figura 4.1(a). Uma região Ω_i do espaço de fase é transformado em outra região $f^t\Omega_i$ pela aplicação da regra f^t , o que nos sistemas caóticos implica contrações e expansões ao longo do espaço de fase, conforme indicado na figura 4.1b.

Um sistema dinâmico caótico pode ser descrito de muitas maneiras e em alguns

casos uma descrição exata da dinâmica do sistema pode ser muito difícil. A dinâmica simbólica fornece uma maneira alternativa e rigorosa de descrever o caos [43].

Uma trajetória no espaço de fase percorre vários caminhos, percorrendo ao longo da sua dinâmica partes desse espaço Ω . A dinâmica simbólica nos fornece uma visão topológica das trajetórias no espaço de fase. Vamos considerar nossa discussão para o caso de um sistema discreto do tipo:

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n) \quad \text{com} \quad x \in \mathcal{R} \quad (4.1)$$

uma descrição completa desse sistema necessitaria o conhecimento de todos os elementos do conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ para todas escolhas do ponto inicial x_0 , o que obviamente é impraticável. Outra maneira possível, é considerarmos o espaço de fase Ω sendo particionado, segundo algum critério, em partições $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_N$, distintas e disjuntas. À cada uma dessas partições, associamos um símbolo diferente. Essa divisão é tal que tenhamos:

$$\Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_N = \emptyset \quad (4.2)$$

Um exemplo, pode ser visto na figura 4.2, onde o espaço de fase $\{\Omega : \mathcal{X}\mathcal{Y}\}$ foi dividido em seis regiões disjuntas. Podemos agora saber qual o itinerário resultante da iteração do ponto partindo por exemplo da partição Ω_0 . À seqüência das partições Ω_i percorridas por uma trajetória, chama-se itinerário e será útil quando tratarmos do alfabeto¹ do sistema. Essa é uma maneira de acompanharmos a evolução temporal da dinâmica do sistema, agora, em termos de variáveis discretas (símbolos discretos), no espaço de fase do sistema. Portanto, no espaço de fase Ω , uma trajetória pode ser analisada como uma seqüência de símbolos discretos, correspondente as diferentes partições, visitadas por essa trajetória. A essa descrição do sistema, em termos topológicos chamamos de dinâmica simbólica [43].

Um exemplo de itinerário pode ser visto na figura 4.3, com o espaço de fase $\Omega = \mathcal{X}\mathcal{Y}$ particionado em seis partições distintas e disjuntas. A dinâmica do sistema pode ser descrito segundo a seqüência dos símbolos atribuídos a $\Omega_0\Omega_3\Omega_4\Omega_0\Omega_2\Omega_5\dots$, gerados

¹No espaço topológico do sistema, chamamos de alfabeto ao conjunto de símbolos gerados pelo sistema, segundo um conjunto de regras (gramática).

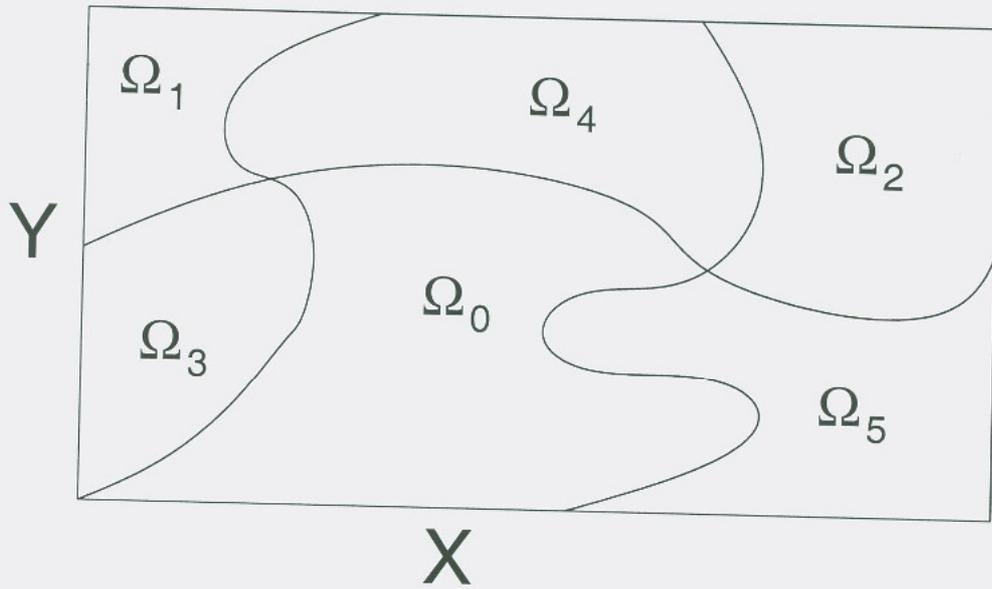


Figura 4.2: Exemplo de divisão do espaço de fase.

pela iteração da condição inicial $X_0 \in \Omega_0$. A seqüência assim produzida, mantém o ordenamento temporal da dinâmica do sistema, em um espaço de fase discreto [44].

Em um sistema dinâmico de dimensão N , representado em um espaço de fase $\{X : X_1, X_2, X_3, \dots, X_N\}$, podemos através de uma transformação homeomórfica passar do espaço de fase X para outro espaço de fase² Ω . O espaço de fase Ω pode ser representado por uma coleção finita de conjuntos abertos disjuntos $\{\Omega_i\}$ com a propriedade $\Omega_k \cap \Omega_i = \emptyset$ para $(k \neq i)$. Em Ω , uma partição será definida como partição topológica, se a união de todos os seus sub-conjuntos Ω_i cobrir todo o espaço de fase Ω ou seja:

$$\Omega = \sum_{k=1}^N \Omega_k \quad (4.3)$$

Consideremos agora a divisão do espaço Ω de fase da figura 4.2 em dois sub-espaços Ω_0 e Ω_1 tais que $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$ e $\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega$.

Ao conjunto $\{S : s_0 s_1 s_2 \dots s_j | s_j = 0 \vee s_j = 1\}$, com $j \in Z$, chamamos de espaço de símbolos ou espaço de estados relativos aos símbolos 0 e 1. Nesse espaço de fase, uma dinâmica caótica, será representada pelas seqüências do tipo $(s_0 s_1 s_2 s_3 \dots)$ e órbitas

²Uma transformação $h : X \rightarrow \Omega$ é dita ser homeomórfica se preservar a equivalência topológica entre X e Ω , através de uma correspondência um-a-um entre os elementos de ambos [45].

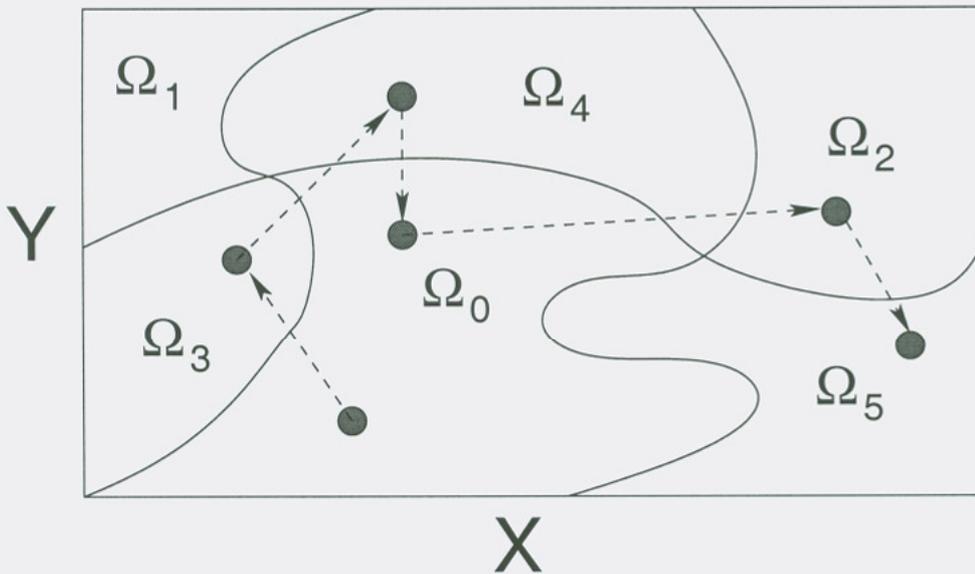


Figura 4.3: Exemplo de itinerário no espaço de fase

periódicas serão representadas pelas seqüências periódicas $(s_0 s_1 s_2 s_3 \dots s_0 s_1 s_2 s_3 \dots s_0 s_1 s_2 s_3)$. Por exemplo, vamos indicar abaixo como representar nessa notação, algumas órbitas periódicas:

- Período 1: $\overbrace{00}, \overbrace{00}$
- Período 2: $\overbrace{0101}, \overbrace{1010}$
- Período 3: $\overbrace{000000}, \overbrace{001001}, \overbrace{010010}, \overbrace{100100}, \overbrace{101101}$

Também é possível, órbitas com período arbitrário serem representadas da mesma maneira.

Assim, um itinerário é uma seqüência infinita de símbolos 0s e 1s, gerados pelos pontos da trajetória que pertencem ao espaço de fase Ω .

Em termos práticos, a dinâmica simbólica é muito útil porque nos fornece duas características úteis no estudo de sistemas caóticos:

- As órbitas periódicas podem ser facilmente seguidas, pela assinatura³ fornecida pelas suas seqüências simbólicas.

³Padrão de símbolos discretos gerados pela dinâmica simbólica do sistema.

- Pelo itinerário gerado pela divisão do espaço de fase, podemos obter uma descrição de qualquer órbita no espaço de fase, com qualquer grau de resolução [46].

4.3 A entropia topológica

Como vimos na seção anterior, conforme aumenta a periodicidade das órbitas, também aumenta os possíveis graus de liberdade do sistema. Uma maneira de quantificar esse incremento, é pela utilização de uma métrica adequada. Vamos utilizar como métrica, a entropia topológica ($\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$). Por meio da entropia topológica, podemos medir a complexidade dos itinerários seguidos pelas trajetórias caóticas no espaço de fase do sistema dinâmico. Para um espaço de fase Ω podemos definir a entropia ($\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$), medida em bits, utilizando a relação entre o número $I(n)$ de seqüências geradas e o comprimento n dessas seqüência. A entropia⁴ ($\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$) topológica [45], pode ser definida como:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left(\frac{\log_2(I(n))}{n} \right) \quad (4.4)$$

Assim, para uma dada divisão do espaço de fase, quanto maior o número de possíveis seqüências, maior a entropia topológica do sistema. Podemos portanto dizer, que a entropia ($\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$), como definido na equação 4.4 é dependente da partição do espaço de fase. De um ponto de vista dinâmico, a entropia topológica mede a complexidade do conjunto invariante caótico [47].

Vamos supor o espaço de fase dividido em 2 regiões diferentes e iteremos o sistema por um longo tempo. Sigamos então, o itinerário descrito por um ponto de uma trajetória qualquer, considerando seqüências de 10 símbolos binários (um itinerário pode ser representado por seqüências de símbolos). Para um sistema estocástico [48], ao fim do processo possivelmente teremos observado que existirão $2^{10} = 1024$ diferentes itinerários. Pela equação 4.4, podemos calcular que a entropia (\mathcal{H}_{est}) desse sistema será:

⁴O nome entropia deriva da física estatística, onde é usada como medida do estado de desordem (número de graus de liberdade) de um sistema.

$$\mathcal{H}_{est} = \left(\frac{\log_2(2^{10})}{10} \right) = \log_2 2 = 1 \quad (4.5)$$

que é o máximo valor possível para \mathcal{H}_{est} .

Façamos a mesma análise para um sistema dinâmico caótico. Nesse caso, veremos que no espaço de estados do sistema, nem todas os possíveis $2^{10} = 1024$ itinerários existirão. A implicação disso é que a equação 4.4 fornece para a entropia (\mathcal{H}_{caos}) de um sistema com caos, um valor menor que o dado pela equação 4.5. Sistemas caóticos, tipicamente exibem uma entropia (\mathcal{H}_{caos}) menor que a máxima possível (\mathcal{H}_{est}) para um dado comprimento n de símbolos.

A entropia topológica é importante porque têm relação direta com a quantidade de informação que podemos codificar nas trajetórias caóticas (capacidade do canal caótico) [49, 50].

4.4 O mapa de retorno e dinâmica simbólica

Na seção anterior, vimos os conceitos de dinâmica simbólica, o conceito de entropia topológica e o problema dos sistemas caóticos em geral apresentarem uma entropia (\mathcal{H}_{caos}) menor que a entropia máxima (\mathcal{H}_{est}), comparando-se com um processo puramente estocástico. Nessa seção, vamos conceituar o que seja mapa de primeiro retorno, e como podemos empregá-lo para otimizar a colocação da linha de partição, para os circuito de Matsumoto e o mapa logístico.

Seja o conjunto de pontos $x[i] \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ de uma trajetória de um sistema caótico. O mapa de primeiro retorno será obtido quando tomarmos pontos no espaço de fase formados pela dupla $x[i], x[i+1]$. Isso significa que, conhecido o ponto $x[i]$ e utilizando-se o mapa de primeiro retorno podemos prever que o sistema irá para o ponto $x[i+1]$. Analogamente, um mapa de segundo retorno seria o conjunto de pontos $\{x[i], x[i+2]\}$, que indicaria que após duas unidades discretas de tempo o ponto $x[i]$ evoluiria para o ponto $x[i+2]$, passando pelo ponto $x[i+1]$.

Na figura 4.4 podemos ver que o mapa de primeiro retorno do circuito de Matsumoto é um mapa do tipo unimodal. Um mapa unimodal pode ser descrito por uma função $f(x)$ de $R \rightarrow R$, definida em um intervalo S com um crescimento monotônico de um lado (Σ_0) e um decaimento monotônico do outro (Σ_1). Nesses mapas, existe um ponto crítico X_C , que pode ser de máximo ou de mínimo. Um ponto será máximo

de $f(X_c)$, se para todo $x \in \mathcal{S} \rightarrow f(x) < f(X_c)$. O próprio ponto crítico X_c não pertence à nenhum dos ramos do mapa unimodal. Justificaremos na próxima secção que o ponto crítico (X_C) gera a máxima entropia para o sistema.

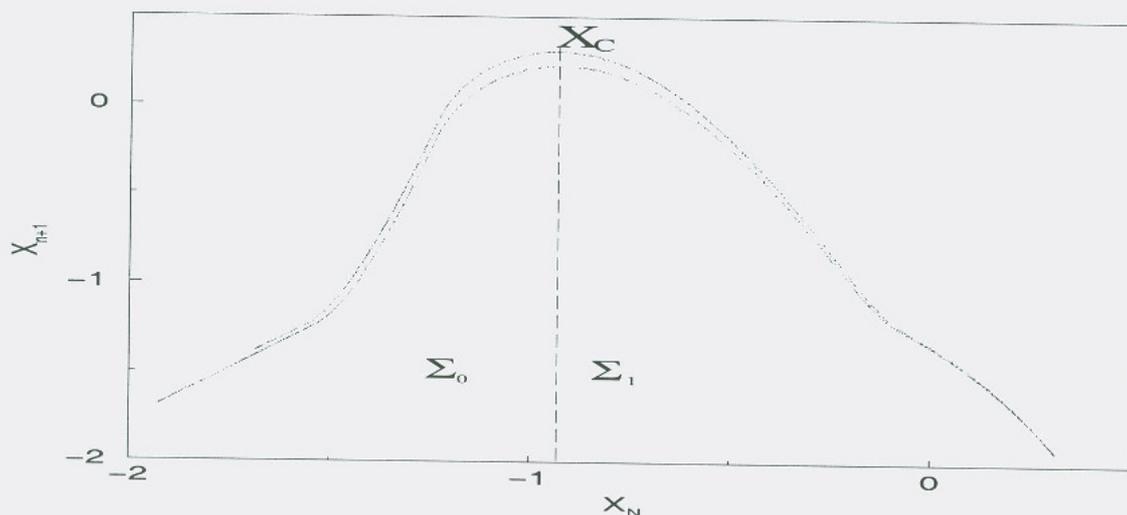


Figura 4.4: Partição binária do mapa de retorno (Circuito de Matsumoto)

Para o circuito de Matsumoto, com $G = 0.5750$ podemos observar que o ponto crítico $X_C = -0.953$ é um ponto de máximo contido no intervalo $\mathcal{S} = (-2.0, 0.5)$. A figura 4.4 mostra o ponto crítico X_C , a linha tracejada indica a separação entre os dois sub-espacos topológicos Σ_0 e Σ_1 .

No gráfico 4.5(a) mostramos a linha de partição V_P , colocada na coordenada $V_{C1} = -0.953$ para o atrator tipo *Rössler*. Em (b) a secção de Poincaré correspondente do atrator é mostrado, com o traço indicando a localização da linha de partição, e a atribuição dos símbolos 0 e 1.

Analogamente a figura 4.6 mostra o mapa de primeiro retorno para o mapa logístico, que também é um mapa unimodal. O ponto crítico X_C está localizado em $X_n = 0.5$, o qual divide o espaco de fase simetricamente.

Uma partição será geratriz se houver uma correspondência bi-unívoca entre diferentes pontos no espaco de fase com distintas seqüências de comprimento infinito [44], ou de maneira equivalente, existe uma função bi-unívoca entre trajetórias caóticas e seqüências simbólicas.

Em geral, descobrir uma função geratriz não é uma tarefa simples, sendo mais fácil encontrar funções geratrizes para seqüências finitas de símbolos [51, 45]. Para mapas

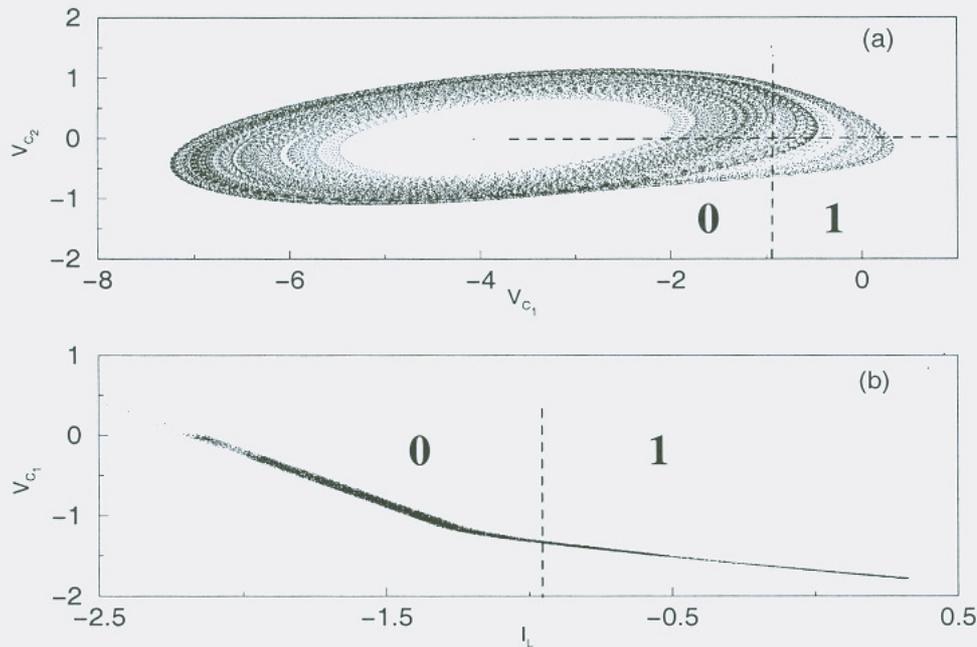


Figura 4.5: (a) Atrator tipo *Rössler* com a linha de partição indicada. (b) Linha de partição na projeção da secção de Poincaré.

bi-dimensionais não existe uma regra única para a colocação de uma partição geratriz. O problema de encontrar partições que sejam geratrizes é de grande importância em esquemas de comunicação com caos [49], uma vez que a entropia topológica não será máxima, quando a mesma não for encontrada. Para o mapa logístico, a linha que passa pelo ponto crítico $\left(X_C = \frac{1}{2}\right)$, separa o espaço de fase de tal forma que a partição seja geratriz [49, 51], e que para mapas bi-dimensionais, pode ter uma forma mais complexa. Esse último caso, ocorre por exemplo, nos mapas de Poincaré do atrator do circuito de Matsumoto. Em mapas não inversíveis obtidos de fluxos não-autônomos, através da secção de Poincaré, a linha de partição pode ter uma forma complexa, devido ao infinito número de órbitas periódicas instáveis nas quais as direções das variedades estáveis e instáveis coincidem (sub-conjuntos não hiperbólicos).

Mostraremos, na seqüência do nosso trabalho, como evitamos esse problema através da introdução de uma técnica de controle, na qual usaremos a dinâmica simbólica podada⁵ do sistema.

⁵*pruning symbolic dynamics* (uma dinâmica simbólica podada não gera todas as possíveis seqüências no espaço de estados do sistema)

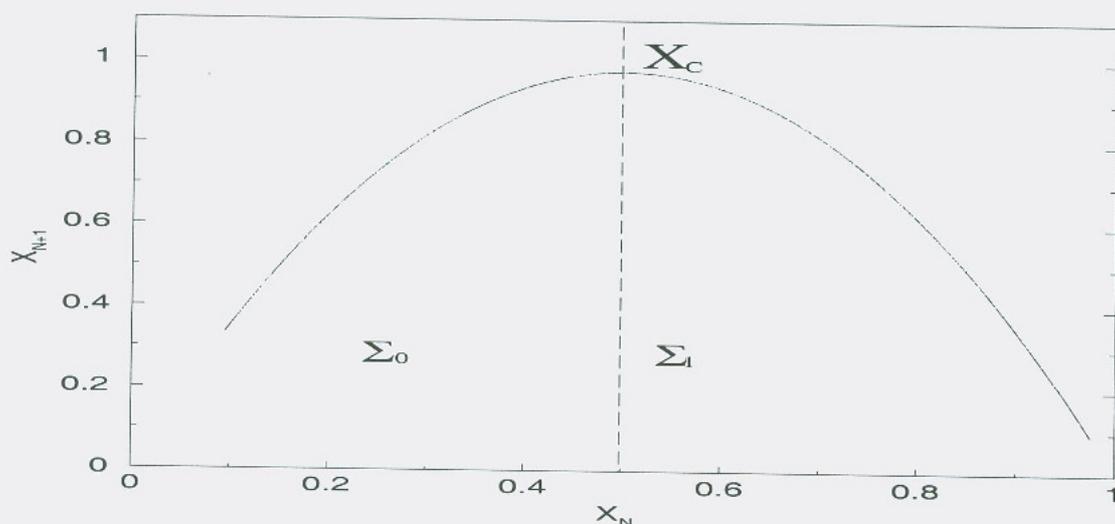


Figura 4.6: Partição binária do mapa de primeiro retorno (Mapa Logístico)

4.4.1 Dinâmica simbólica do circuito de Matsumoto

Para começar a estudar a dinâmica simbólica do circuito de Matsumoto, o primeiro passo será escolhermos uma partição. Vimos anteriormente, que escolher uma partição geratriz não é uma tarefa fácil para mapas bi-dimensionais.

Descreveremos agora, o procedimento numérico, para acharmos a melhor colocação para a linha de partição. O critério que adotaremos, será aquele da máxima entropia, considerando-se uma partição binária. Por ora, consideraremos apenas a entropia absoluta (\mathcal{H}_S) de Shannon, dada pela equação

$$H_S(p_0, p_1, p_2, \dots) = - \sum_{i=0}^{\infty} p_i \log_2 p_i \quad (4.6)$$

em que p_i são as probabilidades da ocorrência dos símbolos considerados (0 e 1). A entropia \mathcal{H}_S de Shannon é expressa em bits e será máxima, quando as probabilidades p_i forem iguais para todos os símbolos, conforme pode-se ver no gráfico 4.7, a entropia atinge seu máximo valor para $p_i = 0.5$, ou seja, quando os dois símbolos são equiprováveis. Adiante aplicaremos esse mesmo critério para a colocação da linha de partição do espaço de fase. Nos extremos do intervalo a entropia se anula, uma vez que $p_i = 1$ ou $p_i = 0$, o que significa que não existe incerteza nos símbolos. Outra propriedade apresentada pela entropia \mathcal{H}_S , é que ela sempre será não-negativa, ou $\mathcal{H}_S \geq 0$ [52].

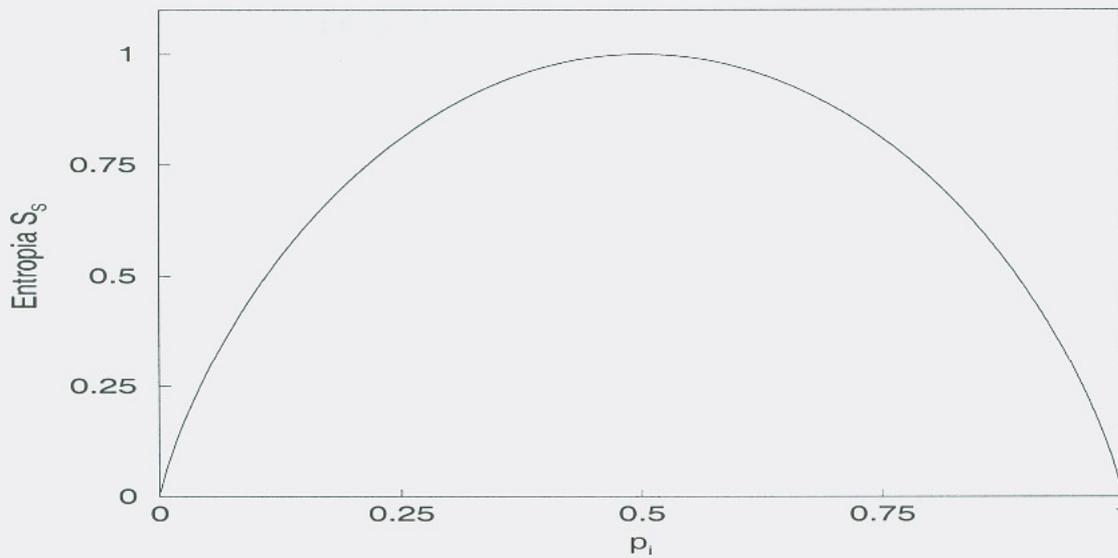


Figura 4.7: Curva da entropia \mathcal{H}_S , em função das probabilidades p_i .

Na seqüência levaremos em conta o efeito das restrições impostas pela dinâmica do atrator. No intervalo (\mathcal{S}) de variação de V_{C1} , ou seja $S = [-2.2, +0.5]$, integramos as equações ??, ?? e 3.1, calculando a entropia (\mathcal{H}_S) na seção de Poincaré contida no plano $V_{C2} = 0$, para cada incremento ΔV_{C1} , até cobrirmos todo o intervalo (\mathcal{S}). Esperamos com isso, encontrar um ponto (V_P), em que \mathcal{H}_S seja máximo. Nesse ponto, colocaremos a linha de partição. No cálculo de \mathcal{H}_S , adotamos uma partição binária, associando os símbolos 0 e 1 a cada lado da partição. Seja V_P o valor da coordenada associada à linha de partição, os símbolos gerados (s_n) serão da forma:

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{para } V_{C1} > V_P \\ 1 & \text{para } V_{C1} < V_P \end{cases} \quad (4.7)$$

Então, iteramos o sistema discreto e via seção de Poincaré, vamos coletando os símbolos 0 e 1 gerados pelo sistema. Os símbolos são contados e calculadas as porcentagens (p_i) de aparições relativas em relação à quantidade total de bits gerados. Para cada valor da coordenada V_{C1} calculamos a entropia \mathcal{H}_S , de acordo com a equação 4.6.

Na figura 4.8a, podemos ver o resultado desses cálculos para o atrator tipo *Rössler* do circuito de Matsumoto. A curva obtida mostra como a entropia \mathcal{H}_S varia em função da localização da linha de partição nas coordenadas X_P . A entropia topológica atinge um ponto de máximo em $V_P = V_{C1} = -0.95$, valor esse que já havíamos ado-

tado como coordenada da linha de partição (V_P), porém agora, justificada pelo critério da máxima entropia.

De uma maneira alternativa mostramos no gráfico 4.8b o cálculo das entropias para os bits 0 e 1 considerando-se a probabilidade relativa entre ambos. A linha cheia refere-se ao bit 1 e a linha tracejada ao bit 0. Podemos ver que elas se cruzam no ponto de coordenada $V_{C1} = V_P = 0.95$; justamente o ponto onde as probabilidades são iguais para os bits 0 e 1, ou seja, o ponto onde temos a máxima entropia. Esse procedimento aparentemente arbitrário de localização da linha de partição, baseia-se na idéia de um valor (V_P) limiar de cruzamento⁶ e têm sido empregado na ausência de um critério rigoroso para a escolha da partição geratriz [45].

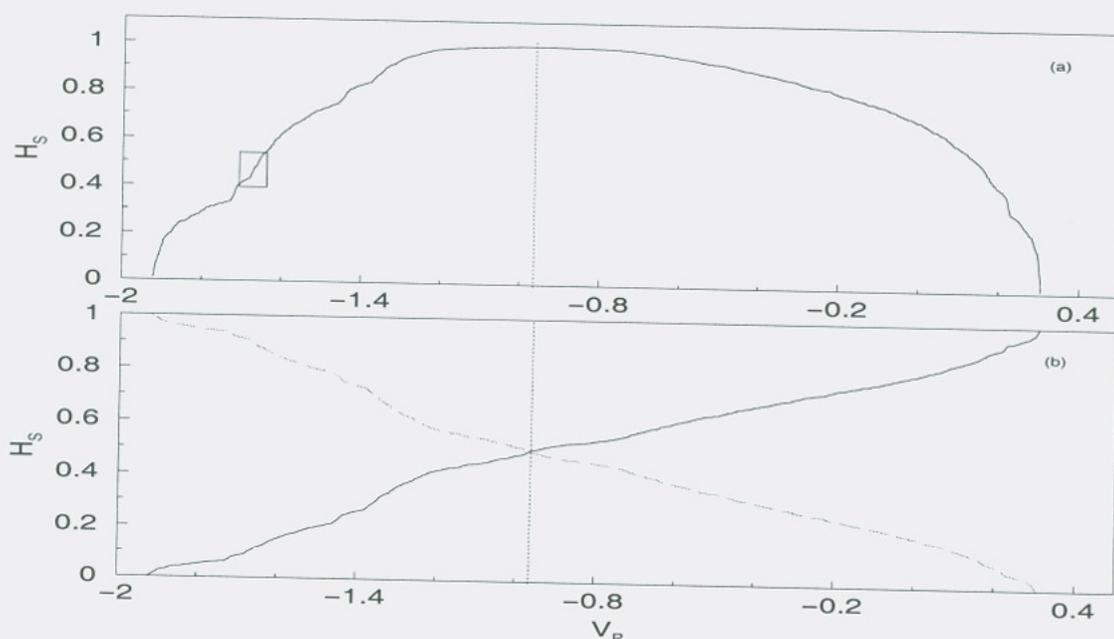


Figura 4.8: Entropia topológica para o atrator tipo *Rössler* em função da posição da linha de partição X_P

Em seguida, o gráfico 4.9 mostra uma ampliação do box indicado no gráfico 4.8a, onde revela-se uma estrutura com comportamento monotônico tipo escada-do-diabo⁷. Estruturas com a mesma topologia, também aparecem nos trabalhos de Bollt [45], sobre o problema da inadequada localização da linha de partição no mapa da tenda⁸,

⁶threshold-crossing method

⁷devils' staircase

⁸(tent map) definido por: $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], x \rightarrow (1 - 2|x - \frac{1}{2}|)$ ou $x_{n+1} = 2x_n \text{ mod}(1)$. Esse mapa,

onde também se afirma que uma má colocação da linha de partição, pode ter por efeito uma diminuição na entropia topológica (\mathcal{H}_S) do sistema.

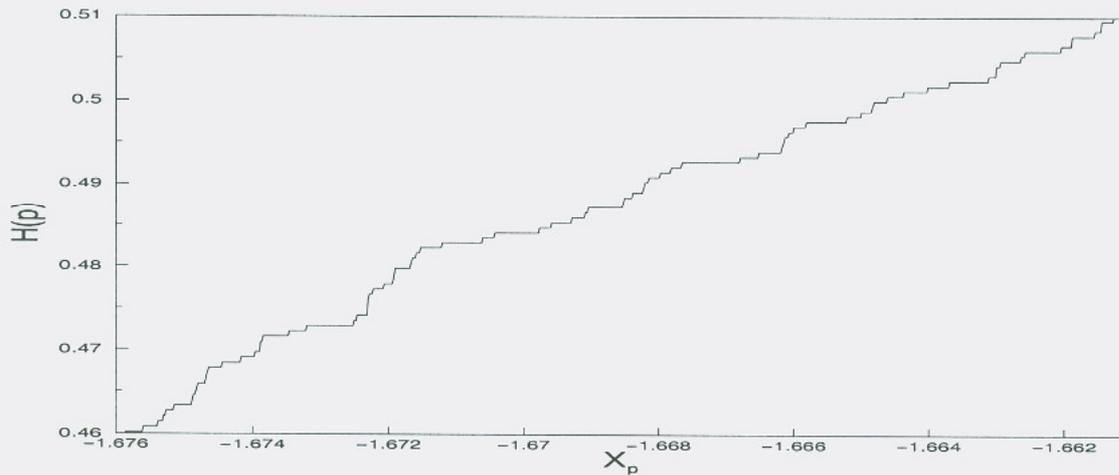


Figura 4.9: Ampliação do box da figura 4.8.

A entropia \mathcal{H}_S mostrada no gráfico 4.8, foi calculada considerando-se somente símbolos binários.

Vamos calcular \mathcal{H}_S agora, tomando-se um conjunto $S = (s_0 s_1 s_2 \dots s_n)$ de símbolos (bits), formando palavras de comprimento N . Quando calculamos a entropia para *palavras*, devemos utilizar o conceito de entropia condicional \mathcal{H}_{cond} ou entropia mútua, pois como já citamos, sistemas caóticos apresentam limitações no comprimento máximo das seqüências de bits. O resultado disso é que o sistema apresentará uma entropia \mathcal{S}_S , menor que um sistema que não apresente tal restrição. Vejamos o que seja, e como podemos calcular a entropia condicional \mathcal{H}_{cond} . Se um sistema pode gerar dois símbolos x e y e sendo $X(x)$ e $Y(y)$ as probabilidades de ocorrência de cada um deles. Então, podemos definir a entropia condicional $\mathcal{H}_{cond} = \mathcal{H}(X|Y)$ como sendo:

$$\mathcal{H}(X|Y) = - \sum X \sum (Y|X) \log(Y|X) \quad (4.8)$$

Nessa equação, $Y|X$ é a probabilidade de aparecer o símbolo x , após ter aparecido y com X e Y sendo as probabilidades de aparecimento dos símbolos x e y respectivamente. Na figura 4.10, temos uma representação pictórica da relação entre as entropias

pertence à classe dos mapas que podem gerar seqüências completas de símbolos (*fullshift*).

$\mathcal{H}(X)$, $\mathcal{H}(Y)$, e as entropias condicionais $\mathcal{H}(Y|X)$ e $\mathcal{H}(X|Y)$. A entropia conjunta $\mathcal{H}(X, Y)$ representa a soma das entropias $\mathcal{H}(X)$ e $\mathcal{H}(Y)$.

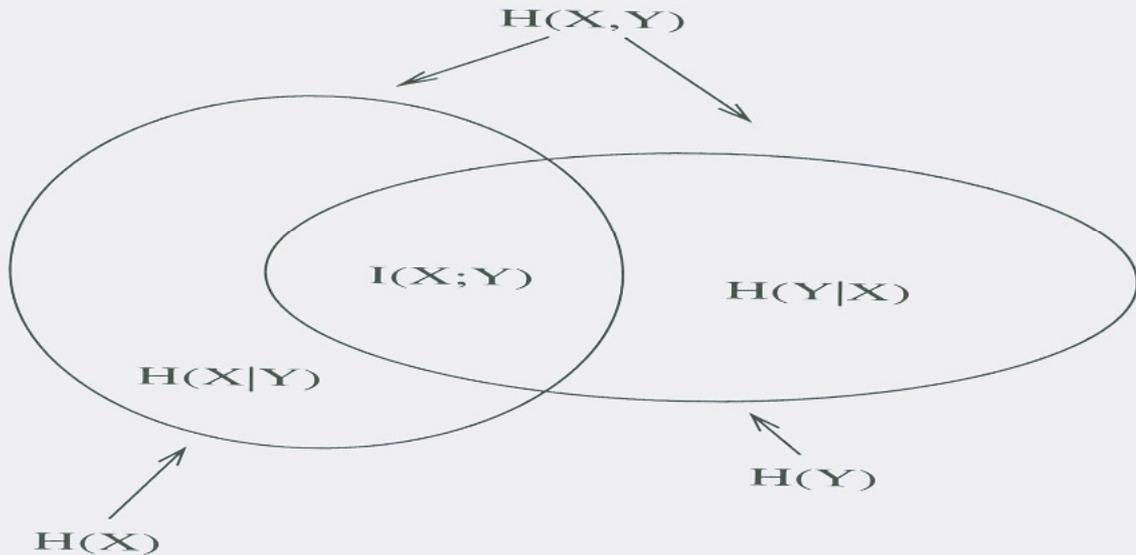


Figura 4.10: Diagrama: relação entre as entropias

Nessa figura $I(X; Y)$ representa a informação mútua que um símbolo têm do outro, sendo a informação comum entre os dois símbolos x e y . Em sistemas caóticos a informação mútua $I(X; Y)$ reduz a entropia, pois como podemos ver pela figura 4.10:

$$I(X; Y) = I(Y; X) = \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(X|Y) \rightarrow \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y) < \mathcal{H}(X, Y) \quad (4.9)$$

A entropia condicional mede o grau de relação, que um símbolo têm com o outro. Exemplificando, para o parâmetro $G = 0.5750$ o atrator tipo *Rössler* não produz seqüências com mais de quatro símbolos iguais.

Portanto, quando ocorrer a seqüência 00000 ou 11111, com certeza, o próximo bit será 1 ou 0, ou seja, houve perda de entropia. Isso, justifica porque sistemas caóticos em geral, não atingem uma entropia máxima, para um dado comprimento n de bits. O resultado, pode ser visto no gráfico 4.11 onde podemos ver que a entropia \mathcal{H}_T atinge um valor máximo de aproximadamente 0.95. Isso resulta da perda de entropia quando o sistema gera seqüências de 5 bits iguais, pois nesses casos não haverá incerteza quanto ao próximo bit. Calculemos a perda de entropia resultante: como $n = 5$, teremos de acordo com a equação 4.4:

$$\mathcal{H} = \frac{\log_2(2^5 - 2)}{5} = 0.95 \text{ bits} \quad (4.10)$$

subtraímos 2 do lado esquerdo de 4.10, uma vez que as seqüências do 00000 e 11111 não serão produzidas.

A entropia condicional \mathcal{H}_{cond} , foi calculada deixando-se o sistema evoluir naturalmente por um longo tempo e amostrando-se as seqüências de palavras geradas⁹.

Para um processo puramente estocástico, com símbolos binários teríamos uma entropia \mathcal{H}_S máxima¹⁰, porém os sistemas caóticos tipicamente não conseguem atingir uma entropia unitária, conforme podemos observar na figura 4.11. Esse fenômeno é derivado de uma dinâmica simbólica *podada* e essa limitação de seqüências proibidas¹¹, impõe algumas restrições na codificação da informação quando utilizamos a dinâmica não forçada de um sistema caótico. Uma de nossa metas, é contornarmos essa restrição.

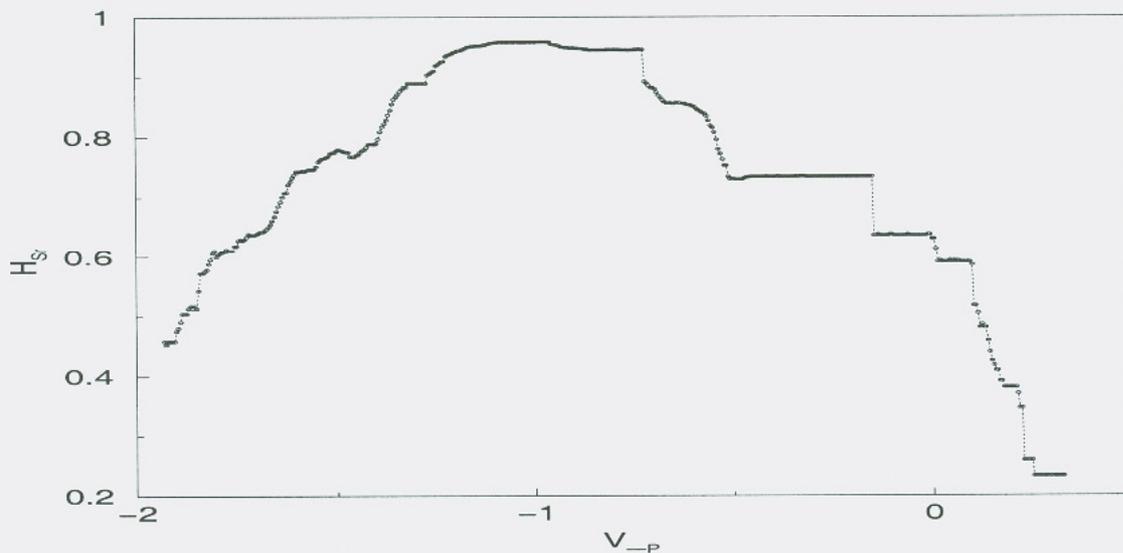


Figura 4.11: Entropia condicional para palavras (N=5).

⁹free running

¹⁰O valor máximo é 1, porque normalizamos, dividindo pelo número de bits da palavra. $\mathcal{H}_S = 1$

¹¹run length constraint

4.4.2 A Função código para o circuito de Matsumoto

Até agora, tratamos de analisar os sistemas de Matsumoto e o mapa logístico, considerando os símbolos como sendo bits. Vimos, que pela escolha de um ponto V_P , podíamos obter a máxima entropia permitida para o sistema. Também vimos que havia um limite superior para a entropia, visto que tínhamos restrições nas seqüências de bits. Para nosso objetivo principal, que é o controle e codificação da informação nas trajetórias caóticas, precisamos ir um passo além. Vamos definir uma função $G : R^2 \rightarrow R^2$ onde $G = G(s_0, r_s)$, em que dada uma condição inicial $s_0 = V_{C1}$ e um número $r_s : |r_s \in \mathcal{Z}$, nos informe de forma inequívoca, quais os próximos N símbolos o sistema caótico produzirá.

Isso equivale a podermos prever, no espaço de fase, qual o itinerário seguido por uma dada trajetória, que começa no ponto s_0 . Devido a propriedade da dependência sensível as condições iniciais, essa previsão será limitada a um comprimento n menor que o comprimento N das seqüências simbólicas consideradas.

Nesse ponto, podemos introduzir a métrica para r_s , associando um número inteiro obtido da forma indicada a seguir:

$$r_s = \sum_{i=0}^{N-1} b_i C^{N-i} \quad (4.11)$$

em que N é o número de bits nas seqüências e C , o número de divisões do espaço de fase e b_i o símbolos considerados. Chamemos s_0 o valor da coordenada V_{C1} , amostrado quando o primeiro bit b_0 for obtido. A função $G(s_0, r)$ é obtida associando-se um número r_s com a condição inicial s_0 .

A métrica r_s é equivalente ao espaço simbólico do circuito de Matsumoto, pois dado um valor r_s , podemos associar univocamente uma seqüência $b_0 b_1 \dots b_N$ de símbolos.¹²

O significado físico da função $G(s_0, r_0)$ é: existe uma relação unívoca entre uma palavra r_s do alfabeto¹³ e uma condição inicial s_0 , dado pela coordenada V_{C1} , que iterada na secção de Poincaré, fornecerá os símbolos binários b_i que formarão a palavra r_s .

¹²Podemos chamar a esse conjunto de N bits de *palavra*.

¹³O alfabeto, consiste no conjunto de todos os símbolos permitidos de serem criados pelo sistema dinâmico, segundo um conjunto de regras (gramática do sistema).

Descreveremos agora como a função código $G(s_0, r_s)$ é obtida: na secção de Poincaré do circuito de Matsumoto amostramos a tensão $s = V_{C1}$, assim, uma seqüência de bits $b_0b_1b_2b_3\dots b_9$ vai sendo gerada. De acordo com a equação

$$r_s = \sum_{i=0}^{10-1} b_i 2^{(10-(i+1))} \quad (4.12)$$

obteremos o número r_s associado à cada condição inicial s_0 . Dessa forma, o bit b_0 será o dígito mais significativo (*MSB*)¹⁴, e ao bit b_9 será associado o valor $s_r = V_{C1}$ correspondente ao primeiro cruzamento na secção de Poincaré. Para $N = 10$, r_s estará contido no intervalo $0 < r \leq 1023$. Assim, podemos associar através da função código $G(s_0, r_s)$, uma seqüência de cruzamentos pela seção de Poincaré, à partir de uma condição inicial s_r , ou seja, obtemos a função de codificação $G(s_0, r_s) = s(r)$.

O gráfico 4.12 mostra a função código $G(s, r)$, obtida para o atrator tipo Rössler, considerando-se palavras com comprimento $N=10$ bits.

Esta função mostra que gramática que rege a dinâmica simbólica do atrator é do tipo restrita, ou seja nem todas as palavras são permitidas. A função código $G(s_0, r_s)$, será de grande importância em nosso método de controle, pois quando quisermos gerar uma determinada seqüência de símbolos r_s de comprimento N , aplicaremos um controle Δ_p que levará o sistema à condição inicial $s_0 = V_{C1}$, dada pela função código $G(s_0, r_s)$.

¹⁴most significant bit

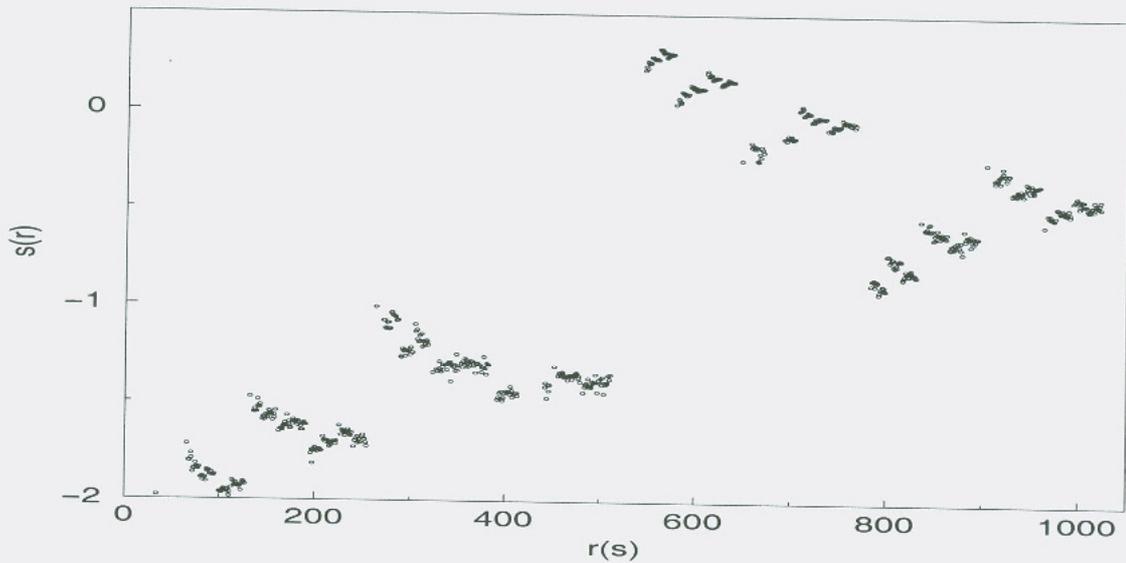


Figura 4.12: Função código para atrator tipo *Rössler*

4.5 Conclusões

Vimos neste capítulo a relação entre a partição do espaço de fase, dinâmica simbólica e entropia topológica do atrator.

Em sistemas de comunicação uma das metas é a obtenção de máxima entropia no canal de transmissão, uma vez que isso está diretamente relacionado com a capacidade \mathcal{H} de transmissão de informação do canal. Também pudemos verificar que os sistemas caóticos apresentam uma dinâmica simbólica *podada* com alguma restrição na gramática do sistema. Isso, têm por consequência, um alfabeto restrito, o que leva a dificuldades na codificação.

A divisão do espaço de fase têm grande influência na entropia do sistema como pudemos ver no gráfico ???. Também vimos como as gramáticas restritivas dos sistemas caóticos impedem que consigamos obter uma entropia máxima para um dado número de divisões do espaço de fase.

A função código $G(s_0, r_s)$ obtida a partir da dinâmica simbólica, também mostrou o alfabeto limitado da dinâmica simbólica do atrator de Matsumoto. Finalmente, dada uma condição inicial s_0 podemos, empregando a função código $G(s_0, r_s)$ saber preditivamente qual a sequência de símbolos r_s será gerada, uma vez que conhecemos a relação $s(r)$.

Finalmente, o que mais interessa do ponto de vista de sistemas de comunicação, é que dada uma determinada seqüência r de bits, podemos atribuir uma condição inicial s que levem as trajetórias do sistema a cruzarem a secção de Poincaré, gerando a seqüência de símbolos desejada.

Capítulo 5

Sincronização de Sistemas Caóticos

5.1 Introdução

Entre as diversas propriedades de interesse no desenvolvimento de sistemas de comunicação utilizando o caos, a sincronização reveste-se de grande importância. Isto fica evidente quando do projeto de esquemas de recuperação dos sinais recebidos, através da detecção coerente e daqueles métodos em que o sinal caótico está embutido na dinâmica do sistema, como por exemplo, na codificação dinâmica.

Sincronização é a capacidade de osciladores com diferentes regimes de frequência alterarem o seu comportamento em função do outro. Em geral, esse comportamento culmina com o ajuste de uma das frequências convergindo para o valor da frequência de um dos osciladores, ou uma razão inteira entre ambas. No caso de osciladores não-lineares, devido a instabilidade local das trajetórias, existem faixas de valores para o acoplamento entre eles, que tornam possível a sincronização [53, 54]. A amplitude do sinal proveniente do sistema condutor deve ser intensa o suficiente para dominar o comportamento independente do circuito conduzido. Podemos ter ainda, como resultado final, em função desse acoplamento e das não-linearidades dos circuitos, oscilações idênticas, quase-periódicas, ou pontos fixos [54].

Em 1990, em um trabalho seminal, Carrol e Pecora [55], propuseram um método para obter a sincronização entre dois circuitos caóticos e a partir daí, vários trabalhos foram propostos, tanto de natureza teórica [56, 57], quanto de novas aplicações da sincronização; notadamente no desenvolvimento de novos métodos de se obter comunicação utilizando sistemas caóticos [21, 6, 58, 59].

Nossa motivação ao efetuarmos um estudo sobre a sincronização caótica justifica-se, uma vez que nos métodos de detecção coerente, uma cópia da forma de onda caótica deve ser fornecida ao receptor, para uso do detector de correlação. Esta cópia pode ser obtida através da sincronização entre os circuitos caóticos do transmissor e o receptor.

Os primeiros trabalhos em comunicação com caos em que portadoras caóticas eram utilizadas para mascarar a informação útil, lançavam mão exclusivamente da sincronização para a recuperação da informação [6]. Neste processo, como já descrevemos, subtraía-se do sinal recebido a portadora caótica obtida localmente por sincronização, porém, este método caiu em desuso, por mostrar-se muito sensível à presença de ruídos.

Uma maneira de conservar a segurança em sistema com mascaramento caótico pode ser explorado com o uso de sistemas que exibam comportamento hipercaótico, ou seja, que apresentem múltiplos expoentes de Lyapunov positivos [60], tornando mais difícil a interceptação da mensagem, por reconstrução do espaço de fase [9, 61]. Peng [62], mostrou que ao contrário do que se pensava, em um sistema hipercaótico não é necessário transmitir tantas variáveis quantos sejam os expoentes positivos de Lyapunov, tornando mais viável o uso dessa técnica.

Nesse capítulo, estaremos interessados nos aspectos relacionados à sincronização entre circuitos caóticos, com a finalidade de obter sistemas de comunicação, embora a sincronização caótica possa ser vista sob um aspecto mais amplo, como por exemplo, a sincronização entre redes de mapas discretos acoplados [63, 64].

5.2 Método Carrol e Pecora de sincronização de sistemas caóticos

Descreveremos, nessa seção, o método de sincronização baseado na abordagem mestre-escravo, embora outros esquemas também sejam possíveis. Esse método, que foi primeiramente proposto por Carrol e Pecora [56, 55], consiste em dividir o sistema caótico em dois subsistemas: um chamado de mestre, que irá conduzir o outro, chamado de escravo. Essa subdivisão está condicionada à estabilidade de cada subsistema. Essa condição de estabilidade que garante que o sistema irá assintoticamente convergir através de uma variável de sincronização é dada pelos coeficientes condicionais de Lyapunov [60].

Vamos mostrar como é possível essa sincronização. Suponhamos um sistema dinâmico n -dimensional

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = F(\mathbf{X}), \quad (5.1)$$

no qual sistema $F(\mathbf{X})$ é subdividido em dois subsistemas autônomos V e W tais que $V = V[u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ e $W = W[u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_n]^T$. Podemos, então, substituir a equação 5.1 por

$$\frac{dV}{dt} = G(V, W) \quad (5.2)$$

$$\frac{dW}{dt} = H(V, W) \quad (5.3)$$

A partir do sub-sistema original $\dot{W} = H(V, W)$, criamos outro sub-sistema $\dot{W}' = H(V, W')$ idêntico, substituindo o conjunto de variáveis W pelas variáveis W' na função H , com essa nova variável, têm-se o novo sistema aumentado.

$$\frac{dV}{dt} = G(V, W) \quad (5.4)$$

$$\frac{dW}{dt} = H(V, W) \quad (5.5)$$

$$\frac{dW'}{dt} = H(V, W') \quad (5.6)$$

Em termos das componentes, os dois sub-sistemas ficariam na forma:

$$\left. \begin{aligned} \dot{V} &= G(V, W) \\ \dot{W} &= H(V, W) \end{aligned} \right\} \text{ Sistema condutor}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{W}' &= H(V, W') \end{aligned} \right\} \text{ Sistema conduzido}$$

Para o caso específico do circuito de Matsumoto, com $x(t)$ sendo a variável de condução, teremos a seguinte configuração:

$$\text{sistema condutor} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\alpha(y - x - g(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\text{sistema conduzido} \rightarrow \begin{cases} \dot{y}' = x - y' + z' \\ \dot{z}' = -\beta y' \end{cases} \quad (5.8)$$

Essa configuração, é apresentada na figura 5.1.

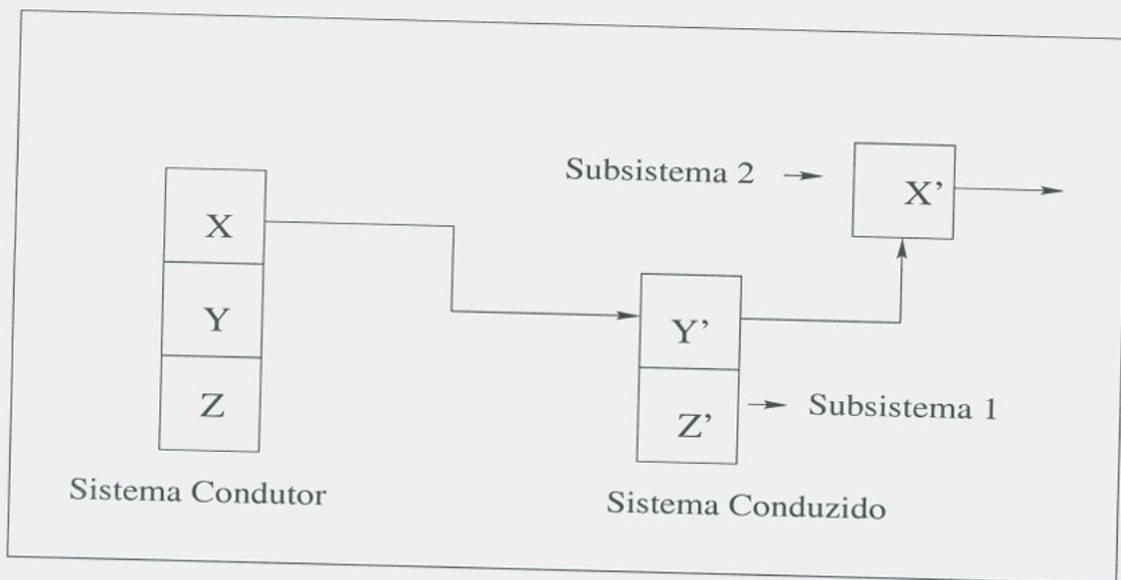


Figura 5.1: Divisão do sistema aumentado $u(V,W,Z)$.

Queremos esclarecer que por questões de uniformidade de notação, quando nos referirmos a sistema mestre, estaremos nos referindo ao sistema transmissor e referindo-nos ao sistema escravo, queremos dizer o sistema receptor, uma vez que estamos tratando do assunto no contexto da engenharia de comunicação.

Ocorrerá a sincronização entre os subsistemas mestre e escravo quando

$$|V(t) - V'(t)| \rightarrow 0 \quad (5.9)$$

$$|W(t) - W'(t)| \rightarrow 0 \quad (5.10)$$

$$|Z(t) - Z'(t)| \rightarrow 0 \quad (5.11)$$

Isso, significa que, no espaço de fase de sincronização, a distância entre as duas variáveis tende a zero. Genericamente, podemos dizer, que ocorrendo a sincronização, a seguinte situação ocorrerá:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \|V(t) - V'(t)\| = \|W(t) - W'(t)\| = \|Z(t) - Z'(t)\| = 0 \quad (5.12)$$

com $\|e(t)\|$, sendo a função erro de sincronização para $t \rightarrow \infty$, ou seja, quando os valores das variáveis do sistema escravo se aproximarem assintoticamente dos valores das variáveis do sistema mestre, o sistema estará em sincronismo. Isto ocorre devido à variedade de sincronização ser estável. Um exemplo disso, pode ser visto no gráfico da figura 5.2 mostrando a série temporal da tensão V_{C1} entre dois circuitos de Matsumoto sincronizados. Nesse gráfico, podemos ver a convergência entre as duas variáveis. A linha cheia indica a variável condutora e a linha tracejada, a variável conduzida. Outra maneira de observamos que o erro de sincronização $\|e(t)\|$ tende a zero, pode ser visto no gráfico da figura 5.3 onde plotamos a diferença entre as tensões V_{C1} do circuito mestre e a tensão V'_{C1} do circuito escravo. Nota-se nesse gráfico, a existência de um intervalo de tempo transiente, até que o erro se aproxime de zero, uma vez que a sincronização não é instantânea.

Essa técnica na qual substituímos uma das variáveis do sistema escravo pela variável correspondente do sistema mestre é chamada de sincronização por substituição completa. A seguir, descreveremos como podemos escolher subsistemas que possam ser sincronizados, uma vez que podemos ter várias possibilidades de divisão dos sistemas. Mostraremos a seguir, detalhes como fazer isto para o circuito de Matsumoto.

5.2.1 Variedades de Sincronização

Geometricamente, a sincronização no espaço de fase pode ser vista se plotarmos as variáveis V, W e W' . Uma vez que $W = W'$ e $Z = Z'$ os movimentos devem permanecer restritos aos planos definidos por essas igualdades. Essas igualdades definem um hiperplano no espaço de fase 5-dimensional $\{V, W, W', Z, Z'\}$ [38]. Esse hiperplano é também conhecido como plano da variedade de sincronização. A sincronização é dita idêntica se o movimento está continuamente confinado ao hiperplano no espaço de fase [57].

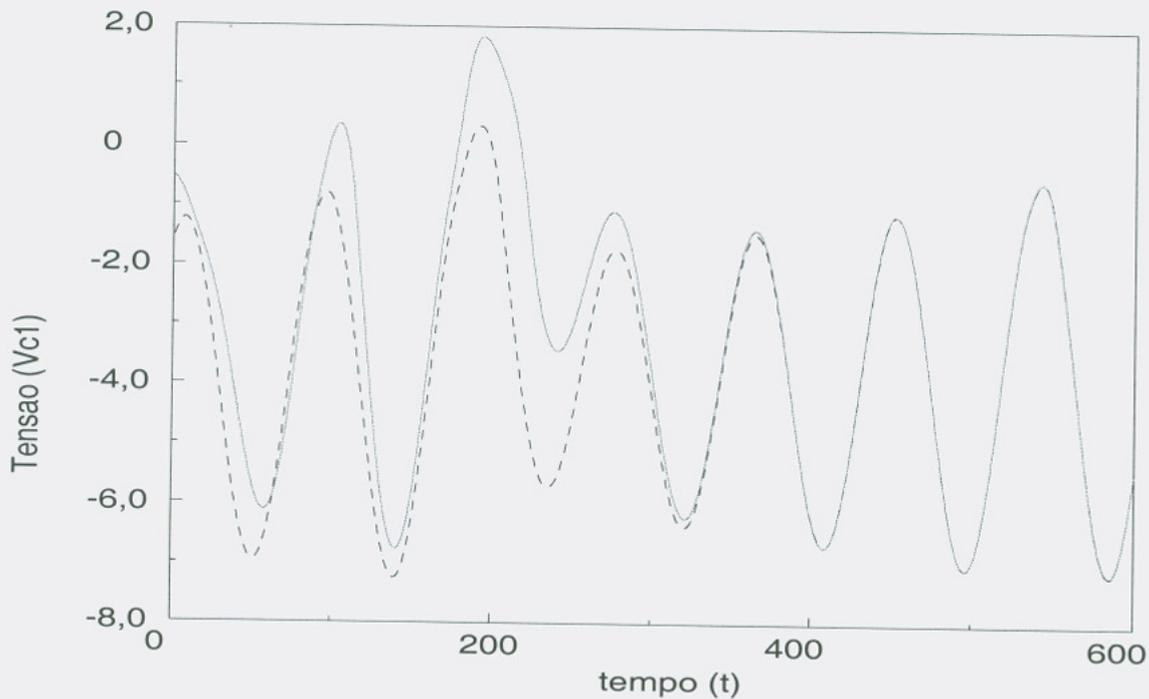


Figura 5.2: Série temporal do erro de sincronização

Definindo as variáveis transversas e tangentes como: $W_{\perp} = W - W'$, $W_{\parallel} = W + W'$, $Z_{\perp} = Z - Z'$ e $Z_{\parallel} = Z + Z'$, podemos fazer uma transformação de modo que as três variáveis (V , W_{\parallel} , Z_{\parallel}) estejam na variedade de sincronização e W_{\perp} e Z_{\perp} estejam em um plano perpendicular à variedade de sincronização (variedade transversal) de sincronização. Na condição de sincronização devemos ter V_{\perp} e Z_{\perp} indo a zero quando $t \rightarrow \infty$, isto implica que o ponto $(0, 0)$ na variedade transversal deve ser um ponto fixo dentro da variedade de sincronização. Utilizaremos novamente, as variáveis transversas quando da análise da divisão e a estabilidade dos subsistemas resultantes, o que faremos na próxima secção.

Para o circuito de Matsumoto o gráfico 5.4, mostra a variedade de sincronização entre $(V_{C1}^{(m)} \parallel)$ e $(V_{C1}^{(e)} \parallel)$, dos circuitos mestre e escravo, na ausência de ruídos. Em (a) indica-se a existência de sincronização entre os circuitos e em (b) o estado de não sincronização.

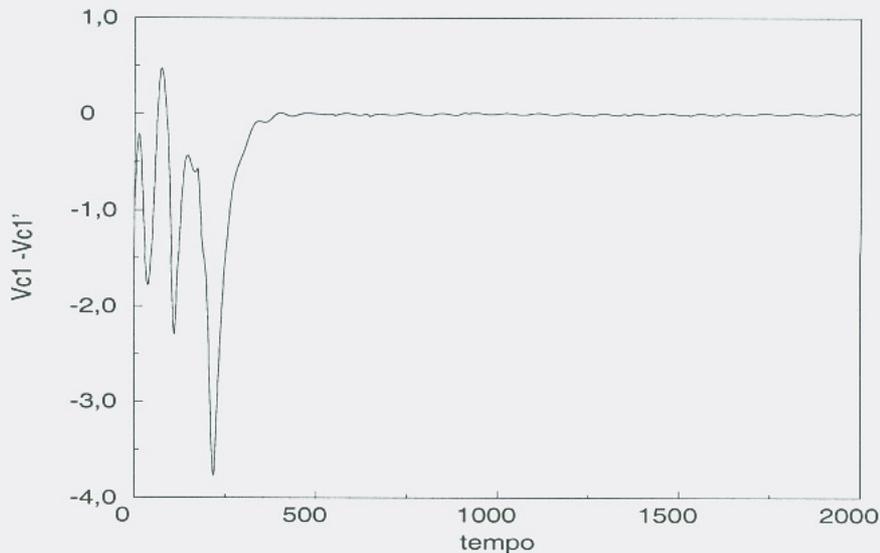


Figura 5.3: Série temporal do erro entre as variáveis

5.2.2 Estabilidade dos Sistemas e os Expoentes Condicionais de Lyapunov

Na seção anterior, quando fizemos a sincronização por substituição completa, vimos que a diferença $|W - W'| \rightarrow 0$ e $|Z - Z'| \rightarrow 0$, quando o tempo $t \rightarrow \infty$. Isso ocorre quando a variedade de sincronização é estável. A estabilidade deve ser considerada nas variedades tangentes ($//$) bem como nas variedades transversas (\perp) à direção de sincronização. Basicamente existem dois métodos de analisar a estabilidade das trajetórias caóticas sincronizadas.

O primeiro critério é por meio das funções de Lyapunov e aplica-se às perturbações na variedade transversal. O critério das funções de Lyapunov, embora seja geral, tem pouca aplicação prática, uma vez que pode ser muito difícil construir a função de Lyapunov para sistemas arbitrários. O outro método para estudo da estabilidade, baseia-se na análise dos expoentes de Lyapunov das equações linearizadas das variedades transversais (\perp) e pode ser em geral aplicado a todo tipo de sistemas. Embora um sistema para ter sincronização estável deva ter os expoentes de Lyapunov das variedades transversais negativos, isto nem sempre assegura estabilidade. Esse fato ocorre porque podem existir órbitas atípicas na variedade de sincronização, que geram trajetórias

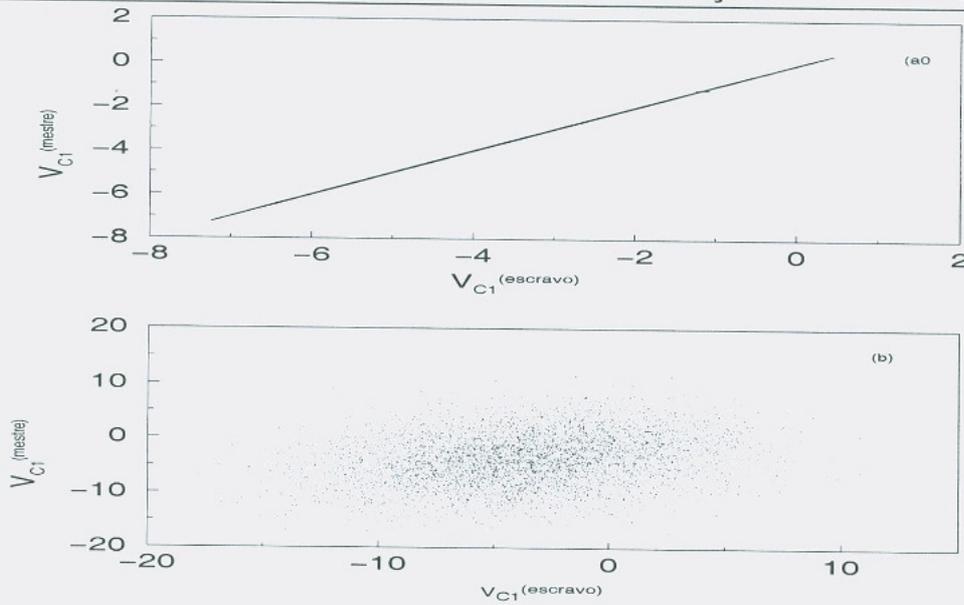


Figura 5.4: Variedade de sincronização para circuito de Matsumoto no plano $(V_{C1}^{(m)}) \parallel$ x $(V_{C1}^{(e)}) \parallel$. (a) estado sincronizado (b) estado não sincronizado

divergentes, desestabilizando a sincronização [54].

Vamos agora considerar um sistema composto de dois circuitos de Matsumoto, um circuito que irá conduzir, chamado de circuito mestre. O circuito conduzido será chamado de circuito escravo. Dentro da técnica de sincronização Carrol e Pecora, podemos fazer várias divisões, algumas podem levar a variedades de sincronização estáveis e outras, a instáveis. Vamos considerar a escolha, utilizando os expoentes condicionais de Lyapunov. Abaixo, mostramos as equações de estado para os circuitos, utilizando os índices (T) e (R) para indicar os circuitos mestre e escravo, respectivamente.

Para o circuito mestre (transmissor) temos as variáveis com índice (T) :

$$\dot{V}_{C1}^{(T)} = f(V_{C1}^{(T)}, V_{C2}^{(T)}) \rightarrow C_1 \frac{dV_{C1}^{(T)}}{dt} = G(V_{C2}^{(T)} - V_{C1}^{(T)}) - i_{NL}^{(T)} \quad (5.13)$$

$$\dot{V}_{C2}^{(T)} = g(V_{C1}^{(T)}, V_{C2}^{(T)}) \rightarrow C_2 \frac{dV_{C2}^{(T)}}{dt} = G(V_{C1}^{(T)} - V_{C2}^{(T)}) + i_L^{(T)} \quad (5.14)$$

$$\frac{di_L^{(T)}}{dt} = -\frac{1}{L} V_{C2}^{(T)} \quad (5.15)$$

e, para o circuito escravo (receptor) temos as variáveis com índice (R) :

$$\begin{aligned}\dot{V}_{C1}^{(R)} &= f(V_{C1}^{(R)}, V_{C2}^{(R)}) \rightarrow C_1 \frac{dV_{C1}^{(R)}}{dt} = G(V_{C2}^{(R)} - V_{C1}^{(R)}) - i_{NL}^{(R)} \\ \dot{V}_{C2}^{(R)} &= g(V_{C1}^{(R)}, V_{C2}^{(R)}) \rightarrow C_2 \frac{dV_{C2}^{(R)}}{dt} = G(V_{C1}^{(R)} - KV_{C2}^{(R)}) + i_L^{(R)}\end{aligned}\quad (5.16)$$

Assim, as variáveis transversas e tangentes ficam sendo:

$$\mathbf{X}(t) \perp = \begin{cases} V_{C1} \perp = V_{C1}^{(T)} - V_{C1}^{(R)} \\ V_{C2} \perp = V_{C2}^{(T)} - V_{C2}^{(R)} \\ i_L \perp = i_L^{(T)} - i_L^{(R)} \end{cases} \quad (5.17)$$

Para o cálculo dos expoentes condicionais, precisamos das equações variacionais¹ $\mathbf{J}(t) \perp$ dos sistemas mestre e escravo (variedades transversas)

$$\mathbf{J}(t) \perp = \begin{pmatrix} \dot{V}_{C1} \perp \\ \dot{V}_{C2} \perp \\ \dot{i}_L \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{C_1}(G + \Delta i \perp) & \frac{1}{C_1}G & 0 \\ G & -(G + K) & 1 \\ 0 & \frac{-1}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

com K sendo uma constante de acoplamento linear [65, 66] entre os dois circuitos, para o caso de acoplamento unidirecional onde Δi é a diferença entre as correntes nos resistores não-lineares envolvidos R_{NL} , ou seja:

$$\Delta i \perp = i_{NL}^{(T)} - i_{NL}^{(R)} \quad (5.19)$$

sendo $i_{NL}^{(T)}$ a corrente no resistor não-linear do transmissor

$$i_{NL}^{(T)} = G_0 V_{C1}^{(T)} + \frac{1}{2}(G_1 - G_0)|V_{C1}^{(T)} + B_P| + \frac{1}{2}(G_0 - G_1)|V_{C1}^{(T)} - B_P| \quad (5.20)$$

e $i_{NL}^{(R)}$ a corrente no resistor não-linear do receptor

¹Também chamada de jacobiana do sistema

$$i_{NL}^{(R)} = G_0 V_{C1}^{(R)} + \frac{1}{2}(G_1 - G_0)|V_{C1}^{(R)} + B_P| + \frac{1}{2}(G_0 - G_1)|V_{C1}^{(R)} - B_P| \quad (5.21)$$

Efetuada a operação de subtração resulta para $\Delta i \perp$

$$\Delta i \perp = \begin{pmatrix} G_0((V_{C1})^{(R)} - V_{C1}^{(T)}) = G_0((V_{C1})^{(T)} - V_{C1}^{(R)}) \\ G_1((V_{C1})^{(R)} - V_{C1}^{(T)}) = G_1((V_{C1})^{(T)} - V_{C1}^{(R)}) \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Os expoentes condicionais de Lyapunov são calculados integrando-se numericamente o conjunto de equações 5.17 e 5.18 segundo o algoritmo descrito em [8]. Ou seja, integramos

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}}(t) \\ \mathbf{J}(t) \perp \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

com o conjunto de condições iniciais abaixo:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}(0) \\ \mathbf{J}(0) \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

Em nossas simulações sempre consideramos uma constante de acoplamento K de valor unitário, embora em implementações experimentais, este valor possa ser variado, para um acoplamento ótimo [38].

5.3 Sincronização do Circuito de Matsumoto

Nessa seção mostraremos como fazer a sincronização entre dois circuitos de Matsumoto na configuração mestre-escravo. Na prática, torna-se difícil afirmar que dois circuitos sejam idênticos [67]. Esse problema, também foi analisado por Zhong [65], levando em conta os efeitos da intensidade do acoplamento e as diferentes condições iniciais entre os sistemas. Por isso, podemos considerar uma pequena faixa de variação δp nos parâmetros dos dois sistemas, ou seja

$$\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{p} + \delta \mathbf{p}, \mathbf{X}) \quad (5.25)$$

sendo δp um vetor contendo as diferenças entre os parâmetros dos dois sistemas caóticos. Devido a esse fato, devemos impor uma condição mais fraca à equação 5.12, ou

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \epsilon \quad (5.26)$$

$\epsilon \ll 1$ é um vetor que reflete os erros de sincronização entre os dois sistemas.

O problema gerado pelas incertezas que advém das imperfeições na sincronização devido ao descasamento entre os parâmetros dos dois sistemas, foram investigados por Carrol [67] e Taherion [68].

Nossa meta ao obter esse conjunto sincronizado é a transmissão da informação codificada na variedade de sincronização. No circuito mestre adotaremos como variável de sincronização $x = V_{C1}$, seguindo o critério dos expoentes condicionais de Lyapunov serem menor que 1 para a variável de sincronismo. Para o sistema escravo, faremos a divisão em dois subsistemas. O primeiro subsistema incluirá as variáveis de estado $W' = V_{C2}^{(R)}$ e $Z' = i_L^{(R)}$, este subsistema será conduzido pela variável de estado $X = V_{C1}^{(T)}$ proveniente do sinal caótico recebido do circuito mestre. O outro subsistema é formado pela variável $X' = V_{C1}^{(R)}$ conduzido pelo sinal $W' = V_{C2}^{(R)}$. A figura 5.3 mostra um diagrama em blocos da divisão do circuito de Matsumoto, utilizada em nossas simulações. Na figura 5.6, indicamos como a subdivisão dos sistemas foi feita. Destacamos nessa figura, a existência de um circuito isolador (*buffer*), separando um subsistema do outro, uma vez que desejamos um acoplamento unidirecional entre eles. O retângulo pontilhado indica a parte correspondente ao segundo subsistema do circuito escravo.

Vamos analisar a estabilidade dessa configuração, para isso precisamos obter a jacobiana do sub-sistema conduzido formado pelas variáveis de estado (normalizadas) $y = V_{C2}$ e $z = i_L$.

$$\dot{W}' = \begin{cases} \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad (5.27)$$

Da equação acima, obtemos a jacobiana para o subsistema conduzido:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_{C2} \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} & \frac{dy}{dy} \\ \frac{di_L}{dx} & \frac{di_L}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

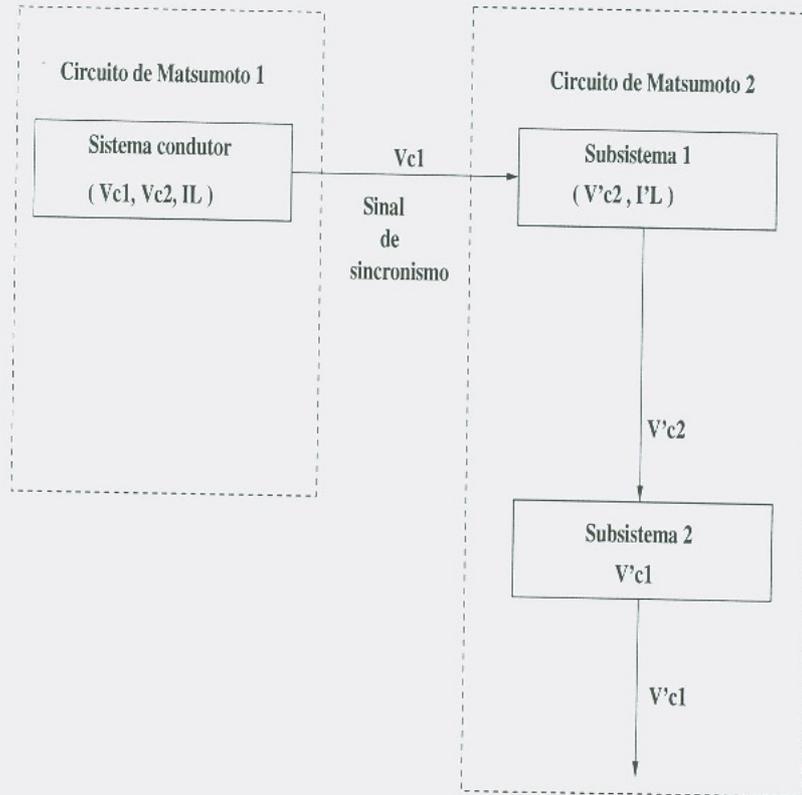


Figura 5.5: Diagrama em blocos da sincronização entre dois circuitos de Matsumoto sendo β o fator adimensional dado por

$$\beta = \frac{C_2}{LG^2} \quad (5.29)$$

obtido das equações normalizadas do circuito de Matsumoto.

Os autovalores da Jacobiana são dados por

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\beta} = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{4\beta-1} \quad (5.30)$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\beta} = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{4\beta-1} \quad (5.31)$$

pois $1-4\beta < 0$. Os expoentes condicionais de Lyapunov (CLE) λ_1 e λ_2 são as soluções da equação de variação temporal

$$\chi(\tau) = \chi_0 e^{\lambda_1 \tau} \alpha_1 + \chi_0 e^{\lambda_2 \tau} \alpha_2 \quad (5.32)$$

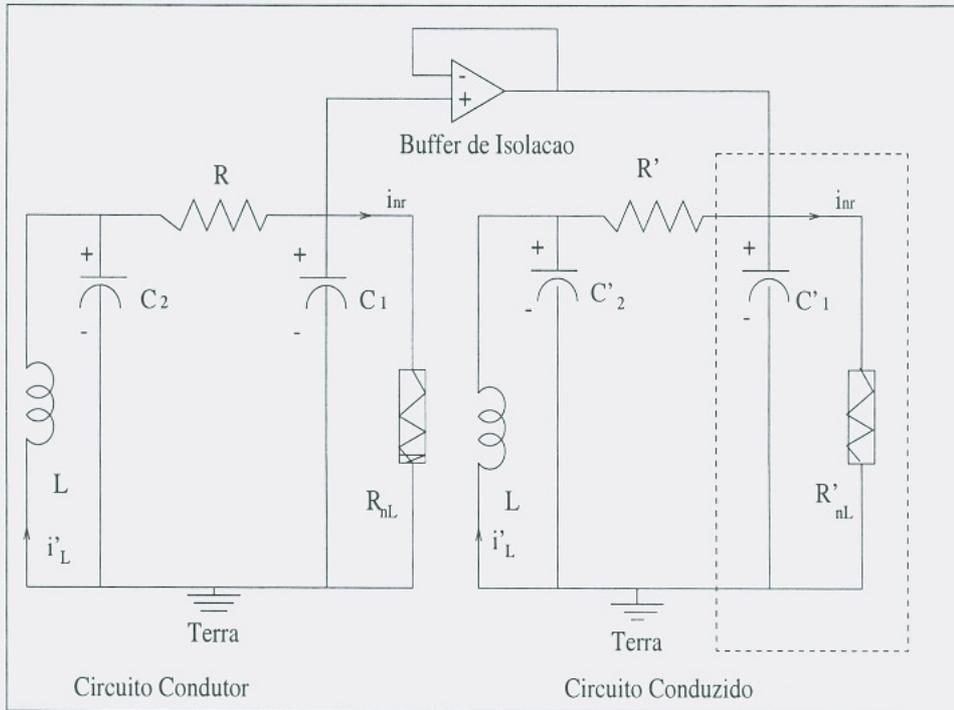


Figura 5.6: Sincronismo unidirecional entre sistema mestre e escravo

onde α_1 e α_2 são os autovetores correspondentes a λ_1 e λ_2 respectivamente. Ou seja:

$$\chi(\tau) = e^{-\frac{\tau}{2}} \left[A \cos \left(\sqrt{4\beta - \frac{1}{2}} \tau \right) - B \sin \left(\sqrt{4\beta - \frac{1}{2}} \tau \right) \right] \quad (5.33)$$

com A, B, C e D sendo constantes. Então, os coeficientes condicionais de Lyapunov são $(-0.5, -0.5)$, quando $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \chi(\tau) = 0$, indicando a estabilidade do sistema, visto que os coeficientes condicionais de Lyapunov são negativos.

No circuito conduzido, necessitamos recuperar a variável $V_{C1}^{(R)}$, para isso, devemos observar que não existe acoplamento interno entre as variáveis dos dois subsistemas conduzidos, uma vez que essa é a variável de sincronização. Isso pode ser visto na figura 5.7 onde um segundo *buffer* isola o subsistema 1 conduzido por $V_{C1}^{(T)}$, formado pelas variáveis de estado $V_{C2}^{(R)}$ e $i_L^{(R)}$. O subsistema 2, por sua vez, deve ser conduzido por $V_{C2}^{(R)}$ e conforme indicado pela relação entre $V_{C1}^{(R)}$ e $V_{C2}^{(R)}$, dado pela equação 5.16, fornece o valor local de $V_{C1}^{(R)}$.

Veremos brevemente aqui, como a presença de ruídos e pequenas diferenças no casamento entre os parâmetros afetam a sincronização entre os sistemas mestre e es-

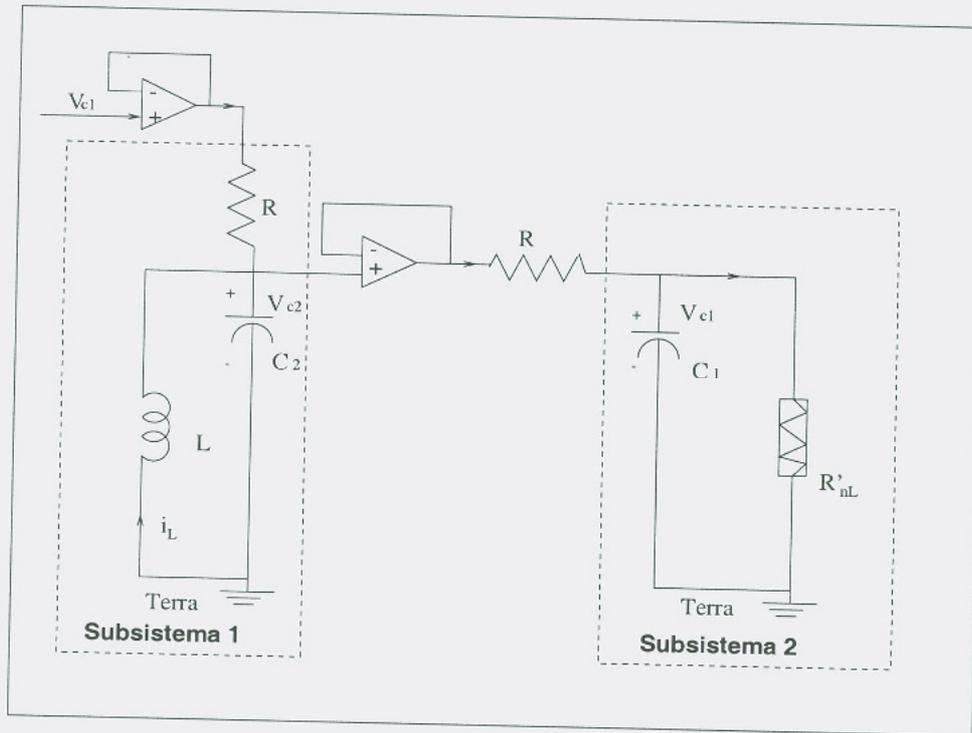


Figura 5.7: Acoplamento unidirecional no sub-sistema escravo

cravo. Maiores detalhes dos efeitos devido a ruídos serão vistos nos capítulos onde tratamos dos esquemas de modulação caótica e comunicação por espalhamento espectral. Nessa discussão, faremos a sincronização entre o sistema mestre e o sistema escravo com a variável condutora contaminada com ruído gaussiano, e analisaremos o comportamento da variedade de sincronização.

Os resultados são apresentados nos gráficos da figura 5.3. Nos eixos verticais estão plotados as variáveis (V_m) de sincronização do circuito mestre e nos eixos horizontais as variáveis de sincronização V_e do circuito escravo. Quando não existe presença de ruído no canal, a variedade de sincronização apresenta-se como indicado em 5.3a. À medida que a relação sinal-ruído (SNR) se torna menor como em 5.3b com (SNR) de 32,7dB e em 5.3c com (SNR) de 38.7dB e (SNR) de 26,7dB em ??d, pode-se ver como a variedade de sincronização apresenta maior variância, indicando que existe uma maior diferença entre as dinâmicas dos dois sistemas, como indicado pela equação 5.26.

Em sistemas reais não podemos assegurar a exata igualdade entre os parâmetros dos sistemas mestre e escravo. Uma pequena tolerância deve ser possível, como indicado pela equação 5.25. Suponhamos dois circuitos de Matsumoto acoplados pela variável

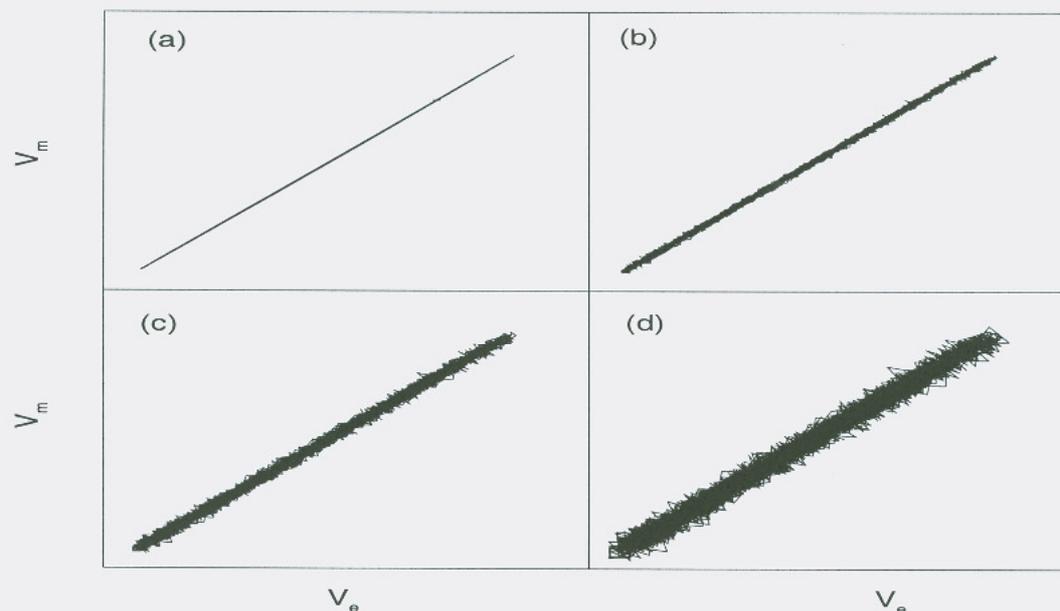


Figura 5.8: Erro de sincronização devido a presença de ruídos.

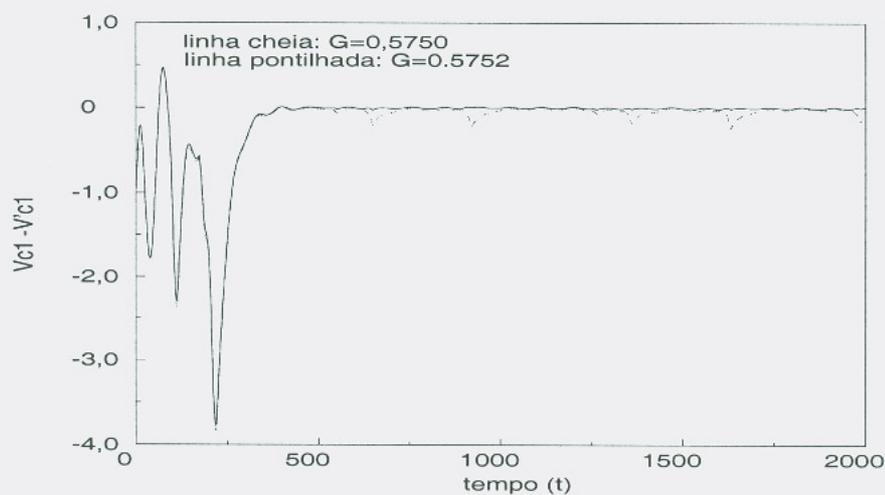


Figura 5.9: Erro de sincronização devido ao descasamento dos parâmetros

de sincronização V_{C1} e com parâmetros $G_1 = 0.5750$ e $G_2 = 0.5752$, ou seja existe uma pequena diferença entre eles. No gráfico da figura 5.3, plotamos a série temporal do erro de sincronização e no gráfico da figura 5.10 a série temporal das variáveis $V_{C1}^{(T)}$ e $V_{C1}^{(R)}$ do sistema mestre e escravo. Em ambos os gráficos observa-se pequenas rajadas de erros.

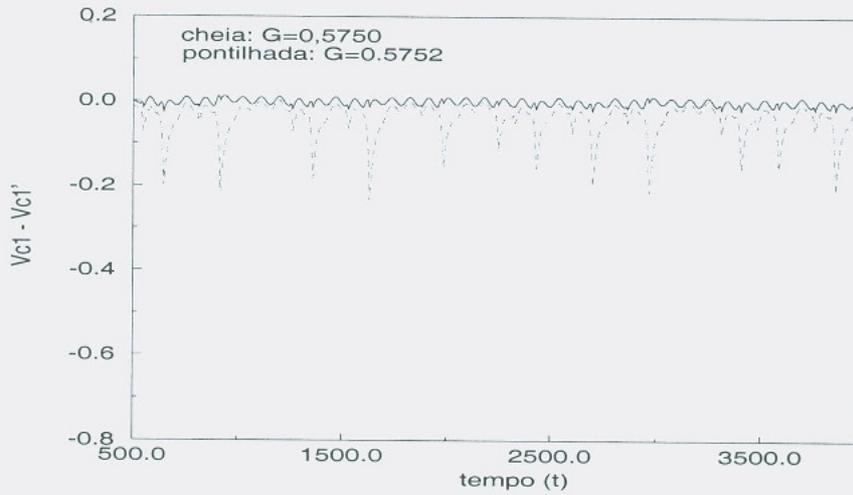


Figura 5.10: Diferença entre as séries temporais de V_{C1} , devido ao descasamento dos parâmetros

5.4 Conclusões

Nesse capítulo pudemos verificar que a sincronização entre dois sistemas caóticos de mesma espécie, porém com ligeiras diferenças em seus parâmetros, mostra-se possível. No entanto, algumas restrições são impostas quanto à liberdade para escolher as variáveis de sincronização, que devem obedecer ao critério dos expoentes condicionais de Lyapunov. Vimos ainda, que dado um sistema, podem ser feitas sub-divisões em sub-sistemas menores. Nessas configurações um sub-sistema atua como condutor e outro como conduzido.

O circuito de Matsumoto apresenta sincronização caótica robusta, sendo bem tolerante a ruídos presentes no sinal caótico condutor. Pudemos observar como a presença de ruído junto com a variável de sincronização pode afetar a variedade de sincronização. Como na prática torna-se difícil a construção de dois circuitos absolutamente idênticos, analisamos os possíveis efeitos que pequenas diferenças no descasamento entre os parâmetros pode ter sobre a sincronização caótica.

Outrossim, a propriedade de sincronização é de fundamental importância na comunicação caótica por modulação dinâmica, bem como nas técnicas de comunicação com detecção coerente, quando uma cópia exata das funções de base devem ser recu-

peradas no circuito de recepção.

Capítulo 6

Controle de Sistemas Caóticos com Aplicações em Sistemas de Comunicação

6.1 Introdução

A necessidade de fazer o controle do caos, em um sistema de comunicação, aparece naturalmente, quando necessitamos inserir a informação no fluxo caótico. Alguns métodos de comunicação com caos não fazem uso explícito do controle do caos, como por exemplo, os que usam o caos como sinal modulador de uma portadora. Outras técnicas porém, fazem uso pleno do controle caótico como a codificação dinâmica de informação.

O controle do caos pode ser entendido, como a alteração na dinâmica natural de um sistema caótico, levando-o a exibir outro comportamento. Por exemplo, por meio do controle, podemos estabilizar uma órbita periódica instável, ou podemos ainda, fazer com que o caos deixe de existir (supressão do caos) [69]. Outra possibilidade pode ser, o direcionamento das trajetórias caóticas, pela aplicação de pulsos de controle [3, 70].

Os métodos de controle de caos, podem ter várias aplicações na engenharia. Em sistemas mecânicos para controle de vibrações em uma fita elástica [71], em sistemas biológicos [72], em controle de lasers [73], controle de reações químicas [74], além da aplicação em sistemas de comunicação.

Alguns desse métodos aplicam pulsos de pequena amplitude, não alterando de

forma significativa a dinâmica do sistema, como por exemplo o método *OGY* [75]. Outros, fazem uso de pulsos de controle de maior amplitude para controle do caos, como o método devido à Hubler e Jackson [76]. Por exemplo, usando-se um sistema caótico como elemento de comunicação, necessitamos, de alguma maneira, inserir a informação desejada dentro da dinâmica caótica do sistema considerado, isso pode ser feito através do controle das trajetórias do sistema caótico [70]. Dentro desse contexto podemos desejar que as trajetórias sigam determinadas órbitas, quando adotamos uma divisão espacial do espaço de fase como elemento codificador da informação.

Neste capítulo mostraremos como controlar órbitas caóticas, levando-as para regiões em particular do espaço de fase, usando o método de controle por nós desenvolvido. Duas abordagens são de interesse particular ao se usar o caos para codificar informação em sua dinâmica. Na primeira abordagem, leva-se as trajetórias da sua dinâmica natural para uma dinâmica forçada, em que as trajetórias são conduzidas através da aplicação de perturbações de controle, em geral de pequenas amplitudes [3]. A outra abordagem possível envolve levar a trajetória caótica a migrar rapidamente de um ponto para outro, através da aplicação de uma perturbação em alguma variável de controle do sistema, em um processo conhecido como direcionamento (*targeting*) de trajetórias [77, 78, 79, 70]. Nosso trabalho, aqui, concentra-se nessa última vertente, em que, por meio do direcionamento de trajetórias, codificaremos a informação no sistema dinâmico caótico. Aqui, não temos a preocupação quanto à amplitude dos pulsos de controle, mas sim quanto ao tempo para direcionarmos uma determinada trajetória, uma vez que em sistemas de comunicação não há necessidade de se restringir a amplitude dos pulsos de controle [80].

6.2 O método *OGY* de controle de sistemas caóticos

Descreveremos, nessa seção, a técnica de controle de caos conhecido como método *OGY* (Ott, Grebogi e Yorke) [81]. Esse método tem como princípio fundamental, o fato de todo sistema caótico ter um número infinito de órbitas periódicas instáveis, embutidas em sua dinâmica [82, 83]. Essas órbitas periódicas instáveis podem ser controladas pela aplicação em determinadas instantes de tempo, de pequenos pulsos de controle em uma pequena região próxima do ponto¹ em que desejamos man-

¹À essa região do espaço de fase com raio ϵ , chamaremos doravante de ϵ -vizinhança de um ponto

$$\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}(i+1, p_0) = \mathbf{A}[X_n - \mathbf{X}(i, p_0)] + \mathbf{B}\Delta p_n \quad (6.3)$$

sendo $\Delta p_n = p_n - p_0$ o módulo do pulso de controle, tal que $\Delta p_n \ll \delta$, \mathbf{A} é a matriz (2x2) jacobiana do sistema e \mathbf{B} um vetor coluna bidimensional.

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}_x \mathbf{F}(\mathbf{X}, p)|_{x=x(i), p=p_0} \quad (6.4)$$

e

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_p \mathbf{F}(\mathbf{X}, p)|_{x=x(i), p=p_0} \quad (6.5)$$

Os autovetores associados à matriz \mathbf{A} fornecem as direções correspondentes às direções estáveis e instáveis do ponto fixo X_{PF} .

Dentro do atrator existem muitas órbitas periódicas estáveis e instáveis e, associadas à cada uma delas, tem-se uma direção estável e outra direção instável. Os pontos da trajetória que se afastam exponencialmente da órbita estão associados à direção instável, e aqueles pontos que se aproximam da órbita estão associados à direção estável. O método de controle *OGY* repousa na existência dessas variedades estáveis e instáveis, imersas na dinâmica do atrator.

Lai *et al* [84] propuseram um algoritmo para a determinação dessas direções estáveis e instáveis.

Associando os vetores \vec{e}_e e \vec{e}_i às direções estáveis e instáveis no ponto $X(i)$, sejam dois outros vetores \vec{f}_{est} e \vec{f}_{ins} tais que as seguintes condições sejam obedecidas:

$$\begin{aligned} \vec{f}_{est} \cdot \vec{e}_{ins} &= 0 \\ \vec{f}_{est} \cdot \vec{e}_{est} &= 1 \\ \vec{f}_{ins} \cdot \vec{e}_{ins} &= 1 \\ \vec{f}_{ins} \cdot \vec{e}_{est} &= 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

esses vetores são chamados de contravariantes.

Na figura 6.1a vemos as direções estáveis e instáveis associadas ao ponto X_0 , em 6.1b podemos ver o resultado da aplicação de um pulso de controle δp no ponto X_0 , levando a trajetória a passar agora pelo ponto X_1 na próxima iteração. O ponto X_1 também está contido na órbita que passa pela variedade estável da trajetória. O

parâmetro p_0 é o valor associado ao ponto X , para pulsos de controle com amplitude nula.

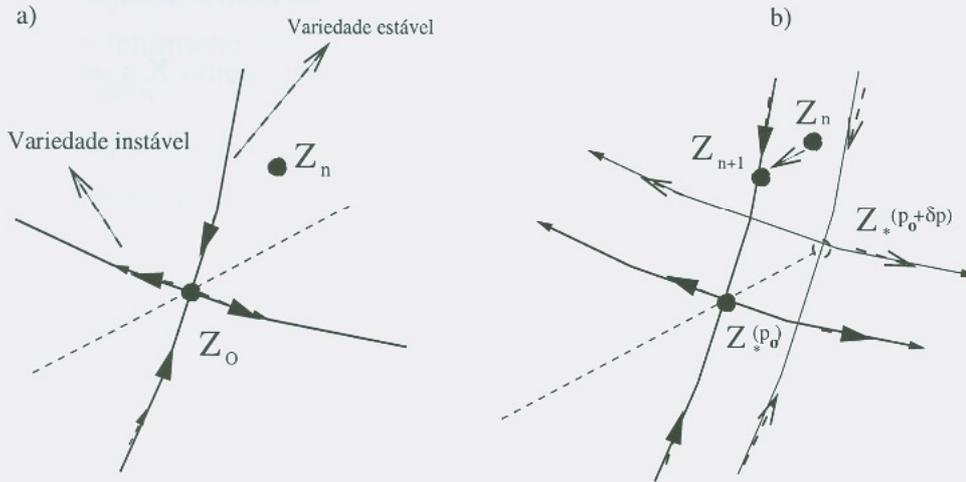


Figura 6.1: a) Variedades estáveis e instáveis b) Influência de uma pequena perturbação na variedade instável,

Para uma órbita ser estabilizada, um pulso de controle é aplicado quando na próxima iteração um ponto da trajetória, após entrar na vizinhança em torno de $X(i)$, permanecer ao longo da direção estável, ou seja, que a condição abaixo é obedecida:

$$[\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}(i + 1), p_0] \cdot \mathbf{f}_{ins} = 0 \tag{6.7}$$

Desenvolvendo o produto interno entre os dois lados da equação 6.3 com o vetor contravariante instável $\mathbf{f}_{ins,i+1}$ e usando o resultado da equação 6.7, obteremos a amplitude do pulso de controle que será, então, dada por:

$$\Delta p_n = \frac{\{\mathbf{A} \cdot [\mathbf{X}_n - \mathbf{X}(i, p_0)] \cdot \mathbf{f}_{ins,i+1}\}}{-\mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_{ins,i+1}} \tag{6.8}$$

1. Controle de Sistemas Caóticos com Aplicações em Sistemas de Comunicação

Em resumo o método *OGY* de controle de caos deve ser implementado segundo o roteiro abaixo:

1. Encontrar uma órbita periódica instável que passe pelo ponto \mathbf{X} a ser controlado.
2. Encontrar as direções estáveis (*est*) e instáveis (*ins*) e os respectivos vetores contravariantes \mathbf{f}_{est} e \mathbf{f}_{ins} da órbita caótica a ser controlada, obedecidos os vínculos entre eles.
3. Aplicar o pulso de controle Δp_N , calculado segundo a equação 6.8, quando a órbita entrar na ϵ vizinhança do ponto \mathbf{X} .

Ogorzalek [85], apresentou considerações sobre o projeto de controladores reais, baseados no método *OGY*, apontando vantagens e dificuldades práticas que advém de uma implementação real.

6.3 Nosso método de controle

Nesta secção iremos mostrar como desenvolvemos um método de controle baseado em algumas idéias derivadas do método *OGY*, mas com significativas diferenças. Nesse método, uma preocupação fundamental é manter os pulsos Δp_n com amplitude pequena em relação à grandeza de controle, que no caso do circuito de Matsumoto é a corrente i_L no indutor. Essa limitação, deve ser obedecida para não haver grande alteração na dinâmica caótica do atrator. Nessa condição, o modelo de aproximação linear na vizinhança do ponto $X(i)$ continuará sendo válido.

6.3.1 Motivação

Nos métodos de controle como o *OGY*, que fazem uso de perturbações de pequena amplitude, uma órbita pode demorar um tempo grande para atingir um certo local do espaço de fase do atrator. Embora esse raciocínio esteja validado pela hipótese ergódica das trajetórias, em aplicações que envolvem modulação dinâmica isso, pode implicar limitações na forma como a codificação pode ser efetuada e na efetiva velocidade de transmissão de informação.

No método por nós desenvolvido tivemos dois principais objetivos.

O primeiro objetivo é eliminar o que no contexto de codificação de informação torna-se indesejável: a inserção de bits extras para contornar os problemas de seqüências proibidas, um fenômeno típico de sistemas caóticos³. A informação a ser transmitida pelo sistema caótico pode ser codificada fazendo-se o controle das trajetórias do atrator para que ele visite determinadas regiões do espaço de fase. Esse método de codificação é conhecido como modulação dinâmica [80], porque a informação fica inserida na dinâmica do sistema caótico.

Esquemas de comunicações caóticas, fazendo uso da codificação dinâmica, devem inserir um bit extra⁴ no processo de codificação, para contornar o problema de codificar longas seqüências de símbolos repetidos. Por exemplo, o circuito de Matsumoto com divisão binária do espaço de fase, não gera seqüências do tipo 00000 ou com mais de três símbolos binários iguais, isso foi mostrado quando tratamos da dinâmica do circuito de Matsumoto. Esse procedimento, (aumento na quantidade de bits), não é interessante do ponto de vista da otimização do uso do canal físico.

O segundo objetivo a ser atingido pelo nosso método de controle é diminuir a sensibilidade à presença de ruídos durante a fase de transmissão. Como o processo de codificação baseia-se na partição do espaço de fase, pode ocorrer que alguns pontos da trajetórias caiam em regiões próximas à linha de partição. Pequenos ruídos podem levar alguns pontos dessa região limiar a caírem do outro lado da linha de partição⁵. Isso, gerará um erro de decodificação.

6.3.2 Descrição do Método

A idéia central do nosso método de controle de trajetórias baseia-se em calcular previamente uma perturbação Δ_P que será nosso parâmetro de controle. O diferencial desse método, é a maneira como a perturbação Δ_P será calculada e aplicada. No capítulo que tratou da dinâmica simbólica, vimos que podíamos fazer uma divisão do espaço de fase do sistema caótico atribuindo-se símbolos discretos a tantas quantas fossem as divisões adotadas. Seja V_{PS} o volume ocupado pelo espaço de fase de um sistema caótico, dividindo-se esse volume em um número N , teremos no limite quando

³run-length constraint

⁴bit stuffing

⁵threshold line

$N \rightarrow \infty$;

$$\delta_V = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{V_{PS}}{N} \right), \quad (6.9)$$

considerando-se que podemos então associar cada ponto⁶ P_i do espaço de fase a um volume elementar δ_V . Sejam os pontos P_0 de coordenadas $\mathbf{X}(0)$ e o ponto P_1 de coordenadas $\mathbf{X}(1)$, no espaço de fase do sistema caótico. Teoricamente, seria possível achar uma função

$$\mathbf{F}(\Delta_P) = F(\mathbf{X}(0), \mathbf{X}(1)) \quad (6.10)$$

tal que P_1 seja o ponto da trajetória que será alcançado pelo sistema, após receber o pulso Δ_P como perturbação, partindo do ponto P_0 , como mostrado pela equação 6.11. Devemos observar que o ponto P_0 é interior ao volume elementar δ_V .

Embora não seja possível uma forma analítica para a função $F(\mathbf{X}(0), \mathbf{X}(1))$, podemos calculá-la através de métodos numéricos por aproximações sucessivas. Para conseguir a divisão do espaço de fase utilizamos a dinâmica simbólica do sistema caótico. Sejam $\mathbf{X}(0)$ e $\mathbf{X}(1)$ as coordenadas de dois pontos diferentes de uma trajetória caótica, então, aplicando-se o pulso de perturbação Δ_P , teremos:

$$\mathbf{X}(1) = F(\mathbf{X}(0) + \Delta_P) \quad (6.11)$$

Podemos, ainda considerar que a variável caótica $\mathbf{X}(1)$ na forma da equação 6.11 é equivalente a associar uma condição inicial $\mathbf{X}(i)$ a cada ponto P_i do espaço de fase, tal que

$$\mathbf{X}(i+1) = F(\mathbf{X}(i)) \quad (6.12)$$

sendo $\mathbf{X}(i+1)$ a coordenada do ponto a ser alcançado pela trajetória.

Descreveremos agora o nosso procedimento para obter a função $F(\mathbf{X}(0), \mathbf{X}(1))$, para um espaço de fase bidimensional. Anteriormente, quando descrevemos a dinâmica

⁶Os pontos aqui considerados são os pontos que se referem ao conjunto das condições iniciais que são obtidos quando obtemos a dinâmica simbólica do sistema. Por exemplo, quando consideramos grupos de 10 cruzamentos pela secção de Poincaré teremos um conjunto com aproximadamente 724 condições iniciais, cada uma correspondendo a um ponto no espaço de fase.

simbólica, fazíamos uma associação entre uma variável de estado caótica, por exemplo $V_{C1} = s$ para o circuito de Matsumoto e $x[n]$ para o mapa logístico e um número inteiro r^7 sendo que a relação entre eles é dado pela função código $G(r, s)$. Portanto, podemos associar a cada número $r(s)$ um valor Δ_P , que levaria o ponto $s = P_0$ da trajetória ao ponto P_1 . Então, dado um ponto P_1 , construímos a matriz coluna bidimensional $M_{2 \times N}$, em que N é o número de áreas elementares δ_Ω em que o espaço de fase foi dividido. Daqui por diante, nos referiremos à matriz $M_{2 \times N}$, como matriz de codificação M_C .

Os elementos da primeira coluna da matriz $M_{2 \times N}$ são os elementos do conjunto m_{i1} com $i \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$, que representam as coordenadas dos pontos associados a cada área elementar δ_Ω do espaço de fase. Por sua vez, cada elemento m_{i1} estará associado com um elemento m_{j2} com $j \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$, formando o par (m_{i1}, m_{j2}) , onde m_{j2} representa a perturbação Δ_P associada com o elemento m_{i1} , para $i = j$.

Indicaremos agora, como a matriz de codificação M_C pode ser obtida numericamente. A partir da dinâmica simbólica do sistema, tomam-se as coordenadas $s(r)$, associadas à cada área elementar δ_Ω do espaço de fase. Isso, é fornecida pela função código $G(r, s)$ do sistema. e tendo-se a coordenada P_1 do ponto a ser atingido itera-se o sistema caótico, com pequenos passos de perturbação, o que é feito somando-se a cada iteração um incremento δ_p em algum parâmetro de controle. Para o circuito de Matsumoto, o parâmetro de controle é o valor da corrente i_L no indutor. Isso, significa que quando iteramos as equações ??,?? e 3.1, devemos substituir a equação

$$C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{1}{R}(V_{C1} - V_{C2}) + i_L \quad (6.13)$$

por

$$C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{1}{R}(V_{C1} - V_{C2}) + (i_L + \delta_p) \quad (6.14)$$

onde, à cada iteração adiciona-se uma pequena⁸ perturbação δ_p , incrementada à cada iteração. Quando a trajetória do sistema alcança o ponto P_1 , o processo é encerrado. Se n iterações foram aplicadas, o valor da perturbação Δ_p será obtido por:

⁷Como veremos a seguir o número r está associado a uma seqüência de símbolos binário. Utilizamos uma conversão para a notação decimal, por questões de simplicidade.

⁸Por pequena, queremos dizer uma relação da ordem de 1% da amplitude da grandeza considerada, no caso em questão, a corrente i_L no indutor.

$$\Delta_P = n * \delta_p \quad (6.15)$$

Esse valor da perturbação é então associado com a coordenada $r(s) = r(P_i)$ da dinâmica simbólica do sistema. Esse procedimento deve ser executado N vezes, até que todos os elementos m_{i1} da matriz matriz de codificação M_C , tenham o valor de Δ_P correspondente. Ou seja, para cada ponto que se deseja atingir devemos calcular previamente a matriz M_C , com as coordenadas $s(r)$ associadas às perturbações Δ_P .

Uma suposição fundamental nesse modo de calcular a matriz matriz de codificação M_C , é a validade da equação 6.3. Isso, implica que se partirmos de um ponto $X(i)$ e após a aplicação do pulso δ_p iterarmos o sistema 6.14, a dinâmica do sistema irá do ponto $X[i]$ ao ponto $X[i + 1]$. Admitimos então, que o segmento de trajetória $\overline{P_i P_{i+1}}$ possa ser aproximado por uma reta que vai do ponto $X[i] = P_i$ ao ponto $X[i + 1] = P_{i+1}$, ou seja, que a aproximação linear continuará válida. Essa técnica é o cerne de métodos numéricos de integração de equações diferenciais, como por exemplo o método iterativo de Euler [86].

Vamos exemplificar esse procedimento para o circuito de Matsumoto. A função código $G(s, r)$ é o nosso ponto de partida, uma vez que ela já nos fornece a divisão do espaço de fase em pontos discretos s associados a um número inteiro r . Seja $P_1 = X[1]$ o nosso ponto de chegada; para construirmos a matriz M_C , precisamos calcular os valores das perturbações Δ_P para cada ponto $r(s_0)$ do atrator caótico.

No gráfico da figura 6.2 mostramos a plotagem das matrizes de codificação M_C , para dois alvos distintos. A curva superior indica o resultado do cálculo da perturbação Δ_P quando o alvo escolhido foi P_0 de coordenada $V_{C1} = -0.50$ e a curva inferior indica os pulsos Δ_P para alvo P_1 de coordenada $V_{C1} = -1.6$. Denominamos essas curvas de controle, curva bit0 e curva bit1, por razões que nos serão úteis adiante. Todas as unidades são adimensionais. Analisando-se essa figura, podemos notar algumas particularidades, como por exemplo a simetria entre elas em relação ao um eixo vertical que passe ponto de abscissa $V_{C1} = -0.93$. Ocorre que esse é, justamente, o ponto onde foi feita a partição da secção de Poincaré, quando da obtenção da dinâmica simbólica do sistema. A curva inferior que representa as amplitudes dos pulsos de controle Δ_P apresenta-se transladada no eixo das ordenadas, indicando uma relação aproximadamente linear entre ambas, para todo o espaço de fase do sistema. As funções mostradas em 6.2, provém das matrizes de codificação M_C , calculadas previamente.

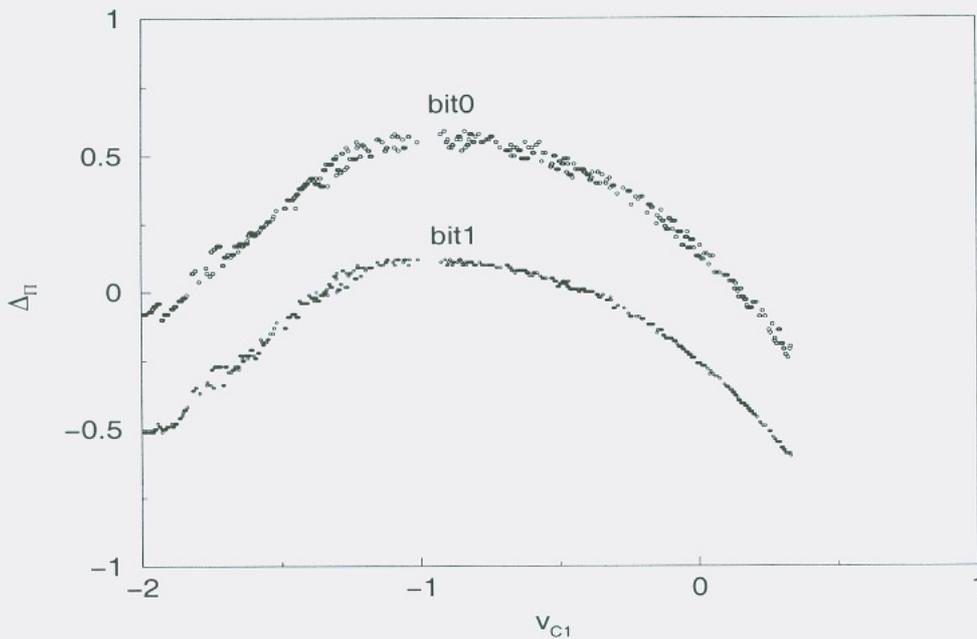


Figura 6.2: Funções de codificação M_C para bit 0 e bit 1.

Vamos introduzir uma melhoria na aplicação desse método de controle.

Em lugar de trabalharmos com a matriz M_C , podemos fazer um ajuste quadrático e substituí-la pela sua curva ajustada com os seguintes coeficientes:

$$\text{bit0} = 0.1493 - 0.9503 * X - 0.5564 * X^2 \quad (6.16)$$

e

$$\text{bit1} = -0.2601 - 0.889 * X - 0.5263 * X^2 \quad (6.17)$$

com X sendo o ponto atual da trajetória no momento da aplicação do controle. As duas curvas ajustadas podem ser vistas no gráfico da figura 6.3, onde em (a) plotamos novamente as curvas *bit0* e *bit1* para efeito de comparação, em (b) são vistas as curvas *bit0* e *bit1* ajustadas, segundo um polinômio de segundo grau.

Temos agora, pelo uso das equações 6.16 e 6.17, expressões analíticas entre um ponto qualquer no espaço de fase e os pontos alvos P_0 e P_1 , tornando a aplicação do controle ou direcionamento das trajetórias, mais eficiente. Isso, se deve ao fato de não ser, agora, necessário fazer uma busca na matriz de codificação M_C , procurando-se pelo valor da coordenada V_{C1} que esteja o mais próximo de algum elemento $mi1$ da matriz M_C .

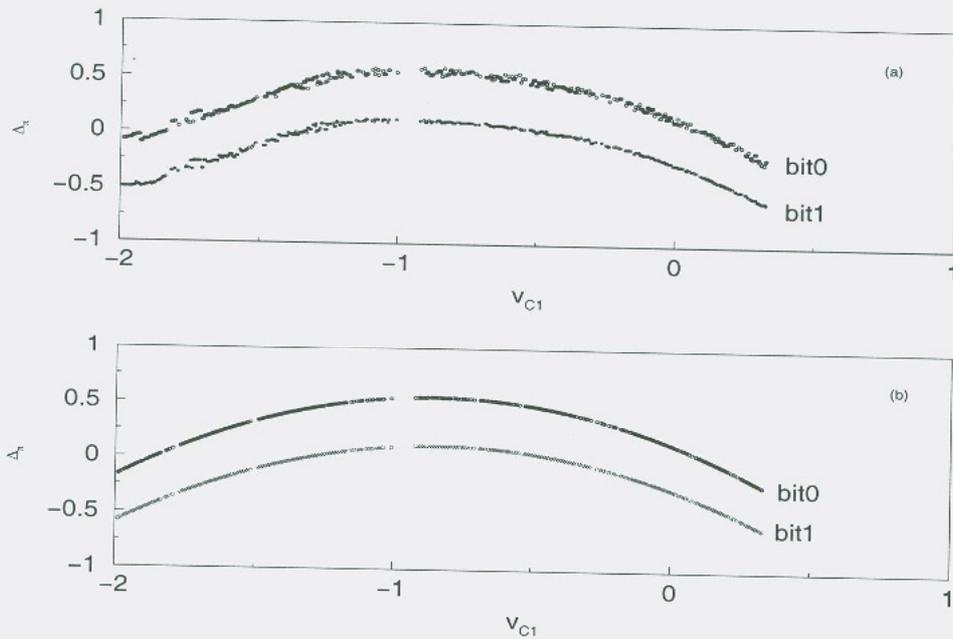


Figura 6.3: Curvas ajustadas das matrizes de codificação M_C para bit 0 e bit 1.

Aplicando-se repetidamente esse procedimento, podemos fazer o controle⁹ de trajetórias a partir de qualquer ponto do espaço de fase do atrator, uma vez que dado um ponto inicial P_0 de qualquer trajetória podemos, utilizando as equações 6.16 e 6.17, levar em uma única iteração, a trajetória para os pontos de destino P_0 ou P_1 .

6.3.3 Aplicações do método

Quando pensamos na criação desse método, tínhamos em mente uma técnica de direcionamento de trajetórias para aplicação no método de comunicação caótica por modulação dinâmica. A motivação principal era eliminar o problema causado quando precisássemos codificar longas seqüências do mesmo símbolo binário. Como já mostramos, os sistemas caóticos em geral, apresentam gramáticas restritivas¹⁰. Para contornar esse problema quebra-se essas longas seqüências, pela inserção de bits extras, o

⁹De agora em diante, por controle, nos referimos à aplicação repetida do procedimento de direcionamento. Isto porque, uma vez que o ponto se dirigiu à região desejada, repetir o processo, implica mantê-lo na ϵ vizinhança desse ponto.

¹⁰run length constraint

que aumenta o comprimento da informação adicionada ao sistema¹¹.

Nosso método de controle, elimina esse passo, pois permite o direcionamento direto da trajetória caótica em uma única iteração, embora às custas de uma pequena alteração na dinâmica do sistema.

Podemos imediatamente aplicar essa técnica de direcionamento também no controle de trajetórias. Isso, pode ser feito se observarmos que na concepção original do método, havíamos dividido o espaço de fase caótico em duas partições e calculado as perturbações Δ_P para cada um dos alvos pré-definidos como sendo bits 0 e 1. Pois bem, pela codificação de longas seqüências de bits 0 e 1 podemos fazer com que as trajetórias fiquem confinadas na ϵ vizinhança dos alvos P_0 ou P_1 , criando-se assim uma dinâmica caótica forçada que apresenta órbitas caóticas periódicas, dentro do conceito da ϵ vizinhança.

Vejam os gráficos indicados na figura 6.4, em que aplicamos o nosso método para quatro distintos alvos. No gráfico 6.4a, o alvo é $P_1 = -0.13$, para 6.4b, o alvo é $P_1 = -0.094$, em 6.4c $P_1 = -0.5$ e finalmente em 6.4d $P_1 = -1.462$. Nos quatro gráficos podemos observar como a aplicação continuada da técnica de controle torna o movimento caótico periódico, dentro de uma pequena faixa de variação da variável caótica. As linhas que estão mais fracas indicam as trajetórias antes do método ser aplicado. A figura 6.5 mostra outros exemplos de órbitas caóticas controladas, para diferentes alvos.

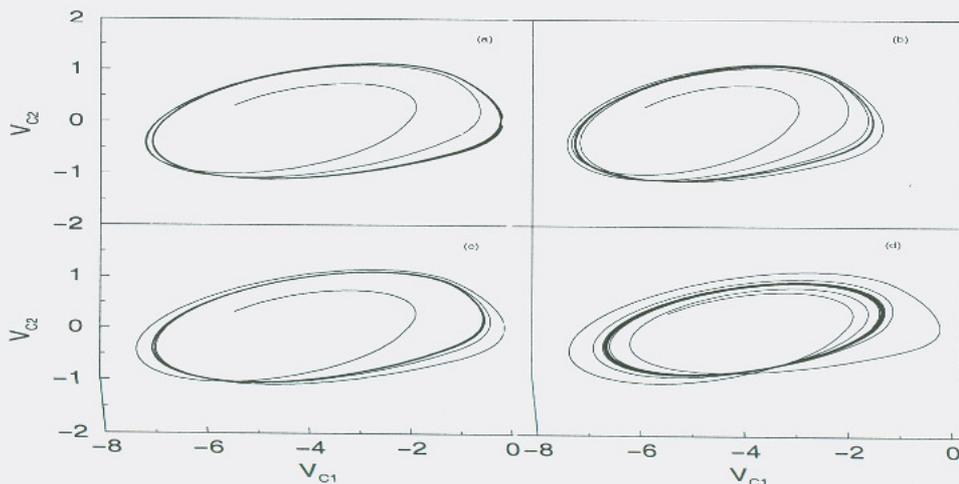


Figura 6.4: Comparação de trajetórias com diferentes alvos (caso 1).

¹¹Do inglês *overhead*, que é sempre um fato a se evitar em sistemas de comunicação.

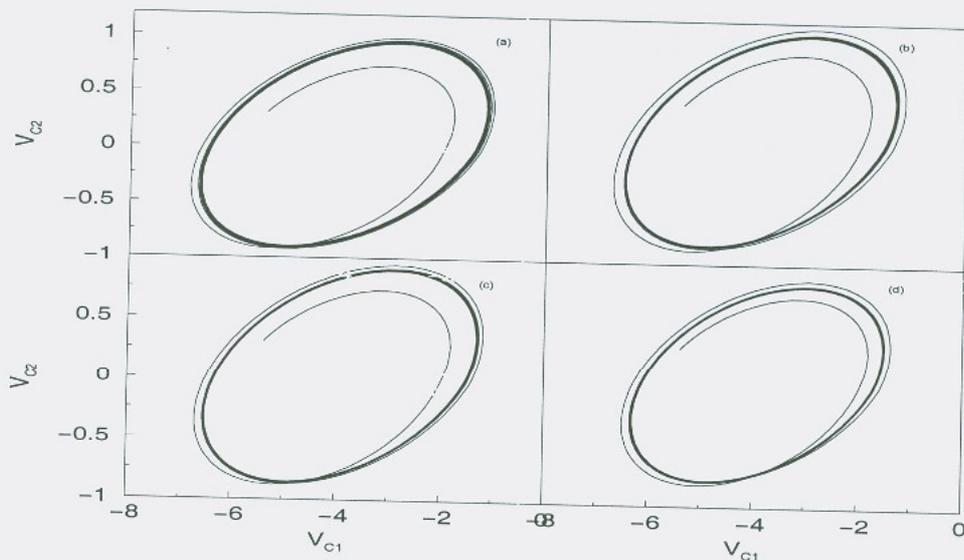


Figura 6.5: Comparação de trajetórias com diferentes alvos (caso 2).

As figuras 6.6 e 6.7 mostram dois exemplos do controle de trajetórias em que escolhemos controlar as trajetórias que passam pela coordenada de $V_{C1} = -0.14$. Em 6.6a são mostrados os valores assumidos pelos pulsos de controle Δ_P . Em 6.6b, mostramos a série temporal controlada. No gráfico 6.7a mostramos a trajetória escolhida para ser controlada com $V_{C1} = -1.25$ e em 6.7b os pulsos de controle empregados. Em ambos os casos podemos ver como o método apresenta bom desempenho na estabilização das órbitas caóticas instáveis. Quando da aplicação da perturbação de controle, não temos um período transiente, uma vez que, aplicada a perturbação, as trajetórias são imediatamente controladas, como podemos observar em ambos os gráficos.

Uma outra maneira de vermos a aplicação do método é através da análise dos gráficos das figuras 6.8 e 6.9 e em (c) apresentamos a série temporal da variável caótica de V_{C1} em (b) a série temporal da perturbação Δ_P aplicada e em (a) os valores da perturbação Δ_P aplicados em cada ponto que a trajetória da variável V_{C1} percorreu. Podemos ver pela série temporal de V_{C1} o desdobramento em bandas caóticas em torno do alvo estabelecido e também a relativa constância da amplitude dos pulsos de controle, uma vez atingido o alvo pois, nesse caso, o sistema tem apenas que aplicar pulsos para manter a trajetória dentro da região desejada.

Afirmamos, ser fundamental para o funcionamento desse método a aproximação linear expressa pela equação 6.3. Podemos ver isso, pelos gráficos da figura 6.10

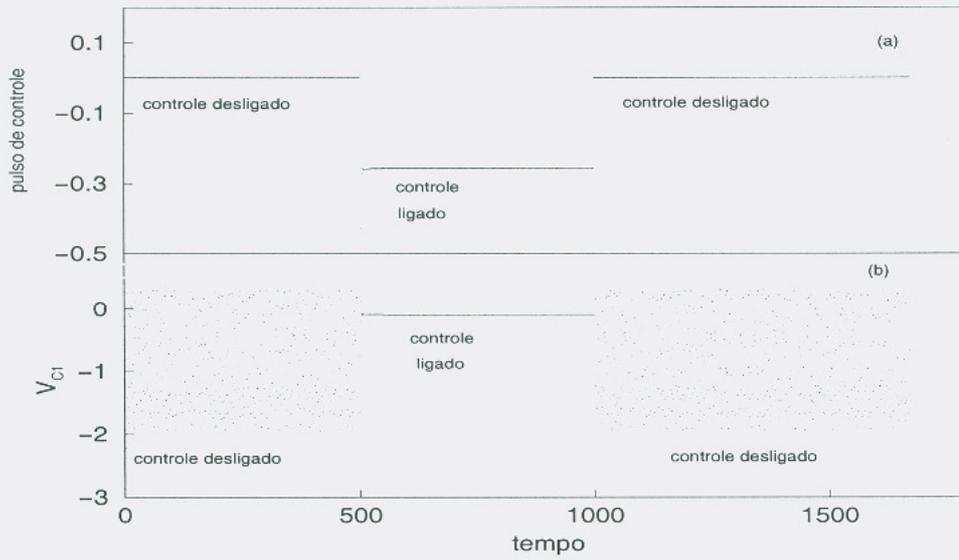


Figura 6.6: Aplicação do controle (a) Amplitude dos pulsos de controle (b) Série temporal controlada para $V_{C1} = -0.14$.

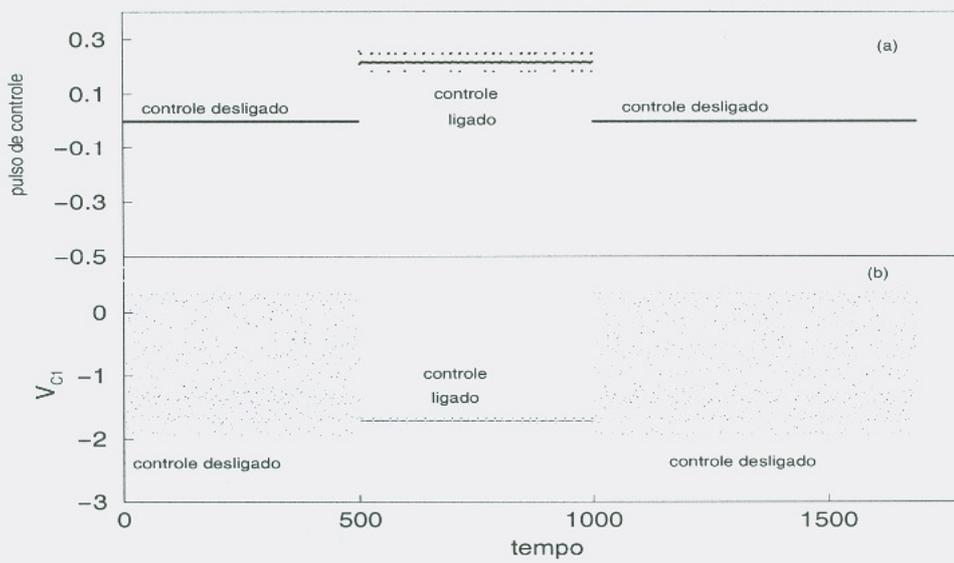


Figura 6.7: Aplicação do controle (a) Amplitude dos pulsos de controle (b) Série temporal controlada para $V_{C1} = -1.725$.

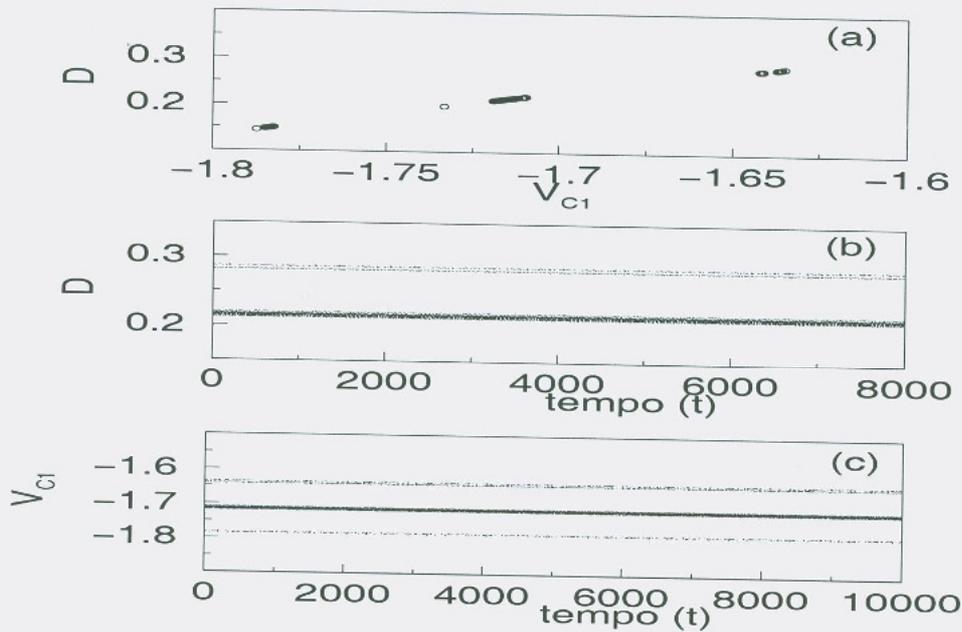


Figura 6.8: Órbitas caóticas controladas para alvo= $V_{C1}=-1.70$

onde nos eixos y plotamos os valores das perturbações Δ_P para manter a trajetória confinada à ϵ vizinhança de diferentes alvos escolhidos. Nos eixos x , são plotados as variações das coordenadas V_{C1} do circuito de Matsumoto, que estão sob controle. O que podemos observar nos gráficos (a), (b), (c) e (d) é justamente a linearidade entre Δ_P e $\Delta_{V_{C1}}$, com $|\Delta_{V_{C1}}| \leq |\epsilon|$. Essa linearidade, também pode ser vista nos gráficos 6.8a e 6.9a, em que a amplitude dos pulsos Δ_P , varia proporcionalmente com a amplitude da variável V_{C1} .

Finalmente, podemos fazer uma aplicação desse método na comunicação caótica por modulação dinâmica. Para obter isso, faremos uso agora das curvas *bit0* e *bit1* dadas pelo gráfico 6.2. Na comunicação por modulação dinâmica o conteúdo da fonte de informação controla diretamente a evolução da dinâmica caótica do sistema, via aplicação dos pulsos de controle. A curva *bit0* indica a amplitude dos pulsos Δ_P necessários para fazer com que uma trajetória, estando em qualquer ponto do espaço de fase, seja direcionada diretamente para a região codificada como sendo o símbolo 0. Analogamente, a curva *bit1* indica os valores de Δ_P que levarão as trajetórias para a região do espaço de fase atribuída ao *bit1*.

A figura 6.11 mostra como podemos utilizar o direcionamento de trajetórias para

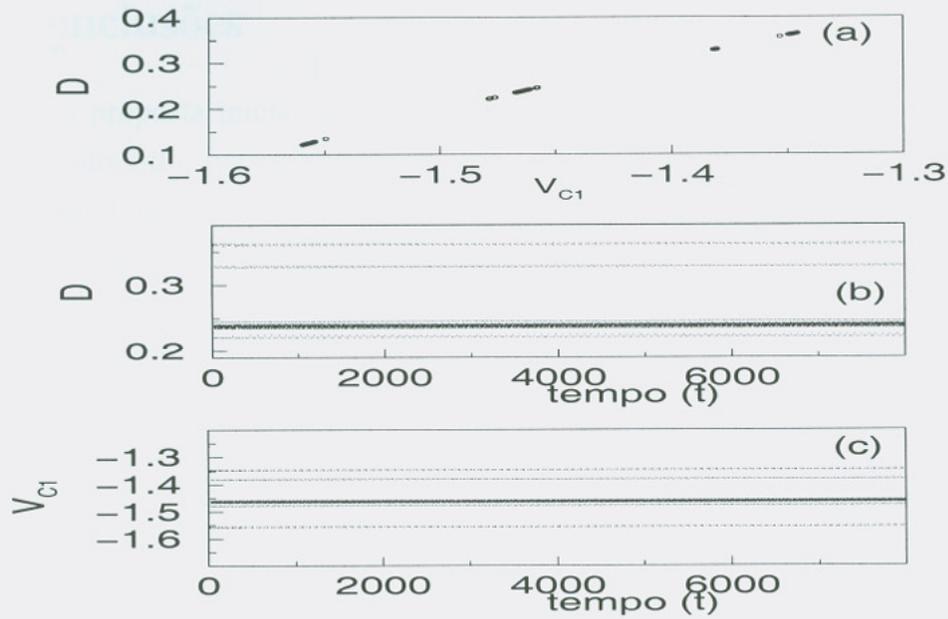


Figura 6.9: Órbitas caóticas controladas para $V_{C1} = -1.52$.

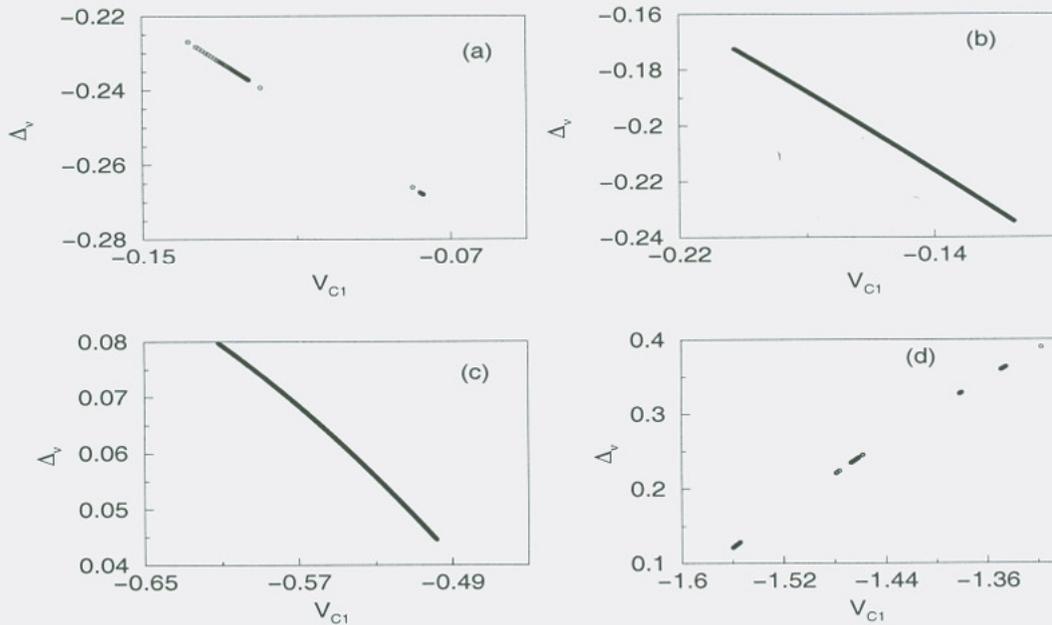


Figura 6.10: Relação entre as perturbações Δ_P e a ϵ vizinhança.

aumentar a robustez do sistema. Na figura 6.11a, em que vemos a secção de Poincaré resultante após a codificação de uma longa seqüência de bits 0 e 1 de forma aleatória,

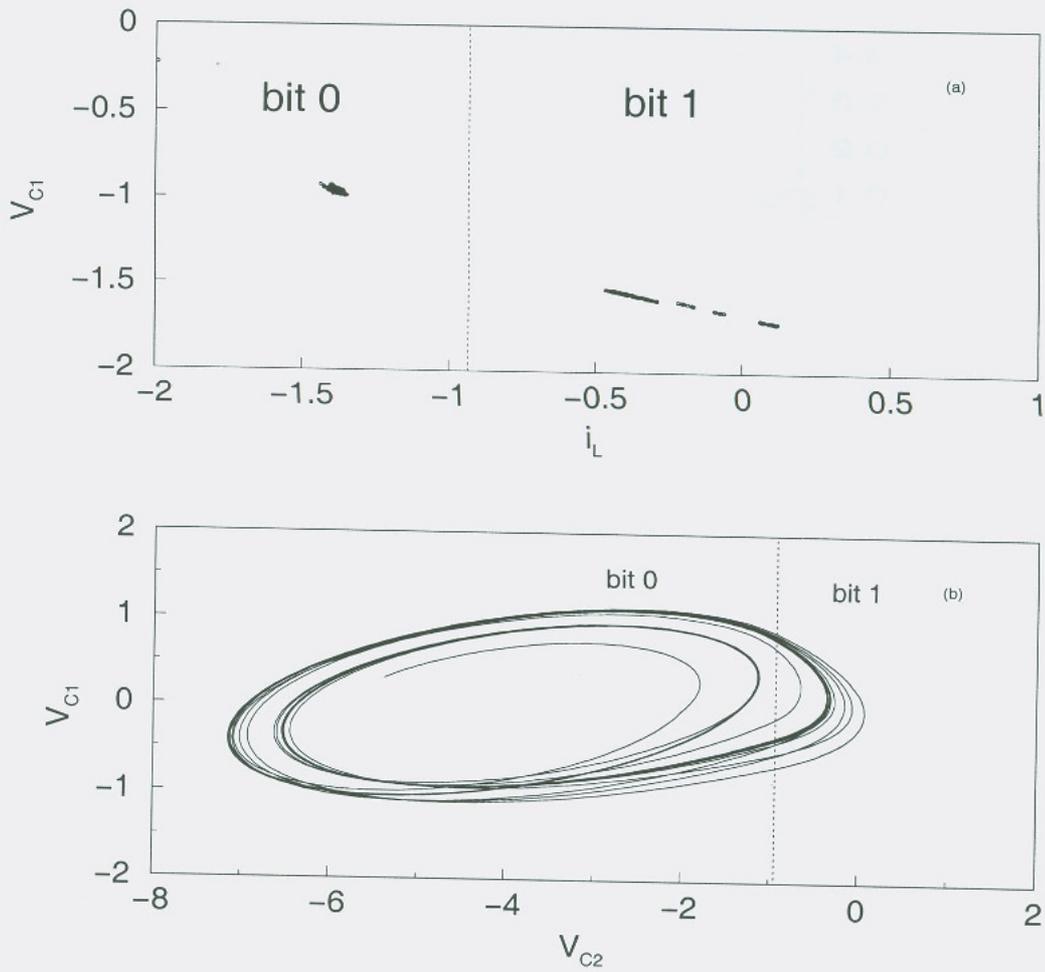


Figura 6.11: (a) Secção de Poincaré (b) atrator controlado

podemos ver uma maior separação entre as partições. Isso também pode ser visto em 6.11b, em que vemos que o espaço de fase do atrator não é totalmente ocupado pela dinâmica do sistema. Nessas figuras a linha pontilhada indica a localização da partição lógica.

6.4 Conclusões

Quanto à proposta inicial que tínhamos em mente, podemos concluir que nosso objetivo foi atingido, pois o método mostrou-se eficiente quanto ao direcionamento e controle das trajetórias. Embora o método utilize alguns conceitos do método de controle *OGY*, como a aproximação linear em torno de uma pequena região ϵ , estendemos este conceito. Com algumas modificações, aplicamos esse procedimento para o cálculo prévio dos pulsos de controle.

A idéia de se utilizar a dinâmica simbólica serviu para fazermos um mapeamento, um por um, entre um alvo P_i e o pulso de controle (Δ_p) que, aplicado localmente, colocava a trajetória próxima ao alvo, dentro do conceito da ϵ vizinhança. Uma vez definido qual o nosso alvo, a matriz de codificação M_C pode ser calculada como explicado. Na prática, após a sua obtenção, podemos utilizar uma curva ajustada por um polinômio de segundo grau, tornando o controle do sistema mais eficiente, uma vez que agora temos uma equação explícita para o cálculo das perturbações.

Como método de direcionamento de trajetórias, a técnica também é muito eficiente, uma vez que podemos partir de qualquer ponto no espaço de fase e, em uma única iteração, levarmos a trajetória ao ponto desejado, sem que para isso novos cálculos e iterações sejam necessários. O grau com que podemos obter precisão no direcionamento ou controle das trajetórias depende de quantas iterações são utilizadas na construção da dinâmica simbólica, uma vez que, ao aumentarmos o comprimento da palavra adotada, consideramos sub-conjuntos do espaço de fase cada vez menores. Esse procedimento encontra limites práticos na precisão numérica do algoritmo utilizado.

Na comunicação caótica por modulação dinâmica, essa técnica de controle é interessante, uma vez que reduz a quantidade de informação extra a ser inserida na informação útil. Com a idéia de colocarmos uma região de exclusão, podemos aumentar a robustez à ruídos, uma vez que pela escolha apropriada das regiões onde codificamos os bits 0 e 1, podemos ampliar a separação entre essas regiões.

Em resumo, vimos que podemos utilizar esse método para controlar órbitas caóticas instáveis a partir da dinâmica simbólica do sistema caótico.

Podemos afirmar, então agora, que nosso objetivo inicial de desenvolver um método de controle de trajetórias que pudesse ser aplicado em sistemas de comunicação com caos foi atingido.

Capítulo 7

Direcionamento de trajetórias aplicados à modulação dinâmica

7.1 Introdução

Em capítulos anteriores, apresentamos o controle do caos, em que desenvolvemos um método de direcionamento de trajetórias onde a dinâmica simbólica do sistema caótico era utilizada para o cálculo das perturbações necessárias para levar as trajetória diretamente à região do espaço de fase desejada.

Veremos nessa seção como podemos usar isso, para codificar informação no caos, em uma técnica por nós desenvolvida, como uma aplicação de nosso método de direcionamento de trajetórias.

Quando a informação $s(t)$ é utilizada para alterar diretamente o comportamento do sistema caótico, dizemos que está havendo modulação dinâmica. Essa técnica é diferente daquelas em que dinâmica do sistema caótico não é alterado pela presença da informação. Nessa modulação, o conteúdo da informação $s(t)$ influencia o comportamento dinâmico $\dot{\mathbf{X}}$ do sistema caótico, via uma função F de codificação, ou seja

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = F(\mathbf{X}, s(t)) \quad (7.1)$$

Essa influência, realiza-se via controle do caos.

Os seguintes fatos nos motivaram no desenvolvimento do nosso método.

- (a) Evitar a inserção de bits extras nos sistemas caóticos com gramática restrita.

- (b) Aproveitar as propriedades do método de direcionamento de trajetórias, por nós desenvolvido.
- (c) Aumentar a margem de tolerância a ruídos na modulação caótica.
- (d) A dificuldade em encontrar uma partição geratriz adequada.

7.2 Algumas considerações teóricas

Quando apresentamos o nosso método de direcionamento de trajetórias vimos que a dado um ponto inicial P_0 de uma trajetória caótica, podíamos associar uma perturbação Δ_{P_0} que levaria essa trajetória outro ponto P_1 do espaço de fase.

Nosso objetivo é codificar informação na dinâmica caótica do sistema. Para isso, iremos associar univocamente um ponto P_0 ao bit 0 e ao bit 1 associaremos um outro ponto P_1 , ambos localizados no espaço de fase do circuito de Matsumoto.

Quando fizemos a colocação da linha de partição, como indicado na figura 4.5, vimos que pontos da trajetória poderiam passar muito próximos a linha de partição. Na presença de ruídos alguns desses pontos passando próximos a linha de partição poderiam ser levados a serem decodificados erroneamente, devido a “caírem” no lado errado da linha de partição. Esse fato elevaria a taxa de erro de bits (*BER*) do sistema, o que não é desejável.

Podemos evitar em parte que isso ocorra, fazendo uma restrição na dinâmica do sistema, de modo que as trajetórias caóticas não passem próximas da linha de partição. Essa restrição será feita da seguinte maneira: considerando-se a localização da linha de partição, no espaço de fase Ω excluimos do mesmo, uma região de largura δ_V , região essa simétrica em relação a localização da linha de partição. Com isso, resulta que a dinâmica do sistema ficará limitada em um espaço de fase $\hat{\Omega}$, tal que:

$$\Omega = \hat{\Omega} \cup \delta_V \quad (7.2)$$

Devido à ergodicidade do sistema, pontos da trajetória acabarão por passar próximos da linha de partição lógica (dentro do conceito da ϵ vizinhança).

Pontos vizinhos à linha de partição podem ser erroneamente decodificados, mesmo na presença de ruídos $\eta(t)$ de pequena amplitude, que somados à variável de decisão V_{C1} , podem levar a erros o circuito de decodificação.

7.3 Exemplo de aplicação do método

Vamos aplicar nosso método de modulação dinâmica a um sistema composto por um transmissor e receptor caóticos acoplados por sincronização. Utilizamos o esquema de sincronização já visto anteriormente, na configuração mestre-escravo. Um fluxo aleatório de informação composta de bits 0 e bits 1 será enviado e posteriormente recuperado, no circuito de recepção. Nessa primeira simulação queremos verificar como o sistema se comporta em relação à região do espaço de fase que foi excluída.

Quando a relação sinal-ruído SNR diminui (implicando uma maior energia do ruído), a dinâmica do sistema tende a ocupar a região proibida do espaço de fase. Podemos verificar isto no gráfico 7.2, onde em (a) tem-se a série temporal para uma sequência aleatória de bits 0 e 1 sem a presença de ruídos, em 7.2b tem-se uma relação sinal-ruído (SNR) de $30.7dB$. No gráfico da figura 7.3a temos SNR de $27.3dB$ e em 7.3b uma relação sinal-ruído de $25.1dB$.

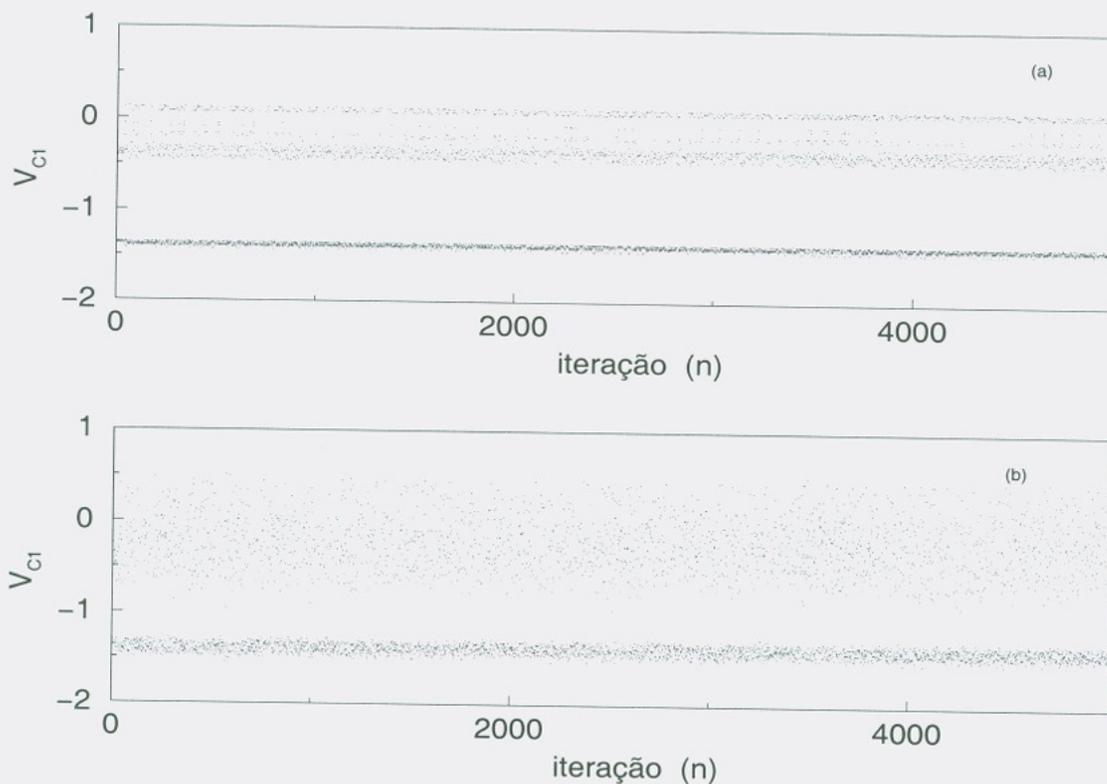


Figura 7.2: Série temporal de V_{C1} para uma sequência aleatória de bits (a) sem ruído (b) com SNR de $30.7dB$.

Em ambos os casos, podemos ver que a região proibida encolhe com o aumento do nível de ruído. Com relação sinal-ruídos da ordem de $25.0dB$ a região proibida fica totalmente sombreada pela dinâmica caótica do sistema. Outra maneira de vermos a separação entre as regiões do espaço de fase pode ser visto no gráfico 7.4 onde em (a) temos a projeção da secção de Poincaré no plano $(x, z) \Leftrightarrow (V_{C1}, i_L)$ para SNR de $27.4dB$ no sinal caótico, em (b) tem-se a mesma projeção para um sinal caótico livre de ruídos, onde se pode ver a região que foi excluída da dinâmica do sistema. No caso do gráfico (a), pode-se ver a perda de definição na linha de partição entre as duas projeções, devido ao ruído.

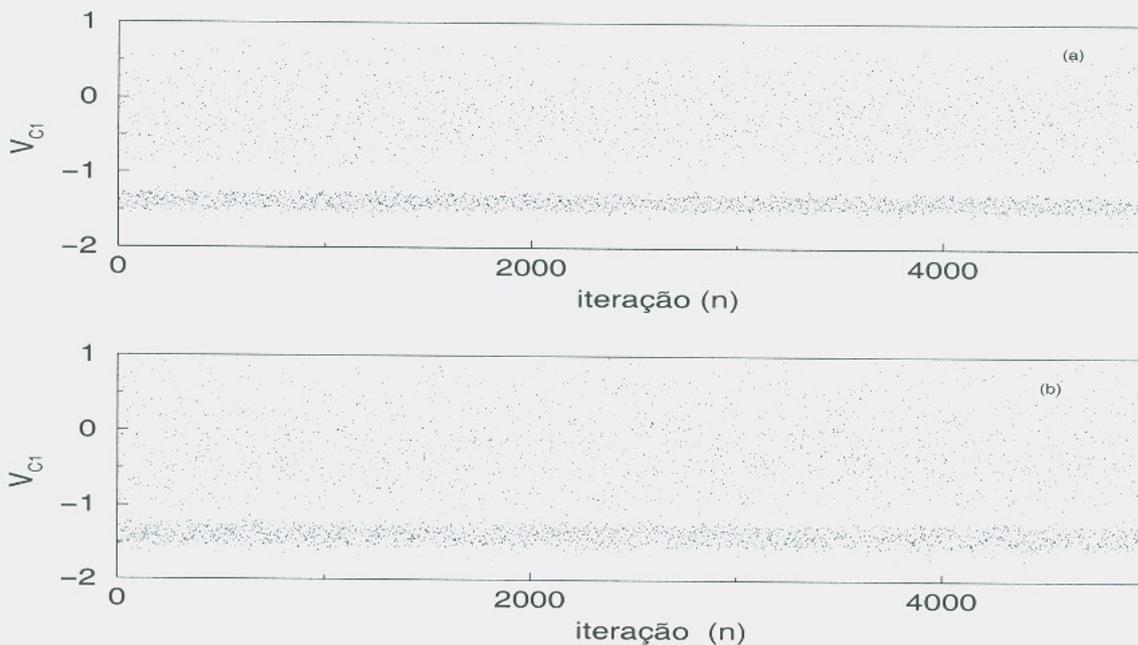


Figura 7.3: Série temporal de V_{C1} para uma sequência aleatória de bits (a) com SNR de $25.1dB$ (b) SNR de $27.3 dB$.

Consideremos agora o caso, diferentemente do anterior onde enviamos uma informação codificada na dinâmica caótica do sistema e recuperada no bloco receptor. Para isso, codificamos a mensagem *BRASIL*. Para a codificação, utilizamos utilizamos o código *ASCII*¹ para representarmos cada letra como uma seqüência de sinais binários. Na secção de Poincaré do sistema (o circuito de Matsumoto), atribuímos o símbolo 0 para os sinais com amplitude $V_{C1} \leq -0.93$. Esse valor corresponde à localização

¹American Standart Code for Interchange of Information

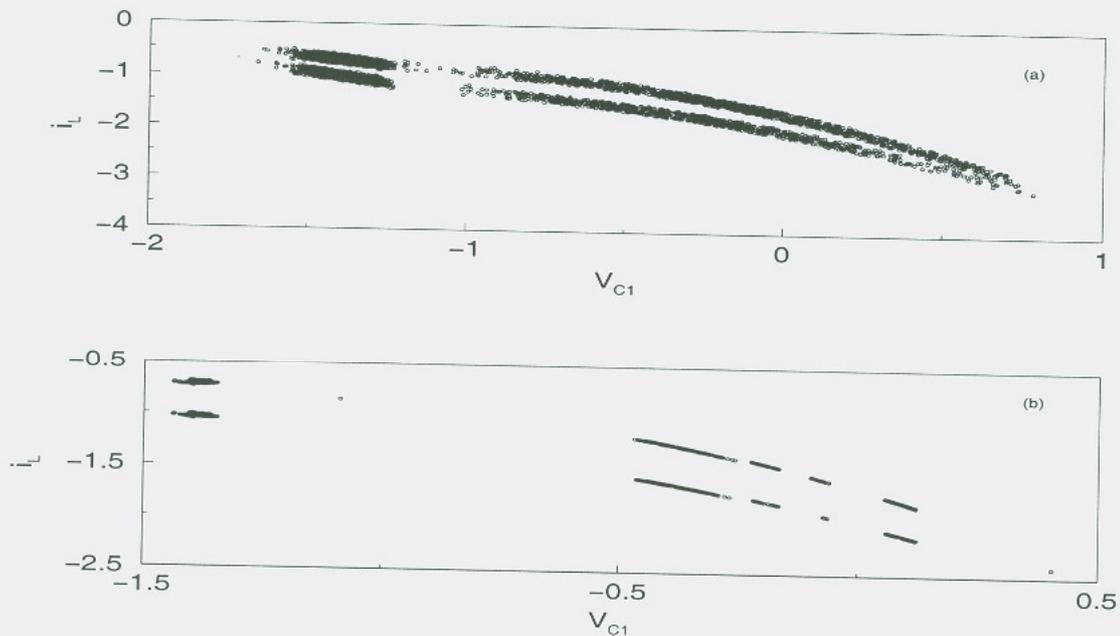


Figura 7.4: Projeção das secções de Poincaré no plano (V_{C1}, i_L) (a) com SNR de 27.4dB (b) sem ruído.

da linha de partição no espaço de fase. Para o símbolo 1 são atribuídos valores de $V_{C1} \geq -0.93$. Para este exemplo não consideramos o sistema na presença de ruídos. Como o código ASCII atribui um conjunto de oito bits por letra do alfabeto, na palavra *BRASIL* temos um total de 48 bits. A série temporal de V_{C1} resultante pode ser visto no gráfico 7.5. A linha de decisão no módulo receptor, aparece como o traço horizontal separando nitidamente as duas regiões do eixo das coordenadas. As linhas tracejadas verticais no gráfico indicam para fins de clareza, a duração variável de cada símbolo, considerando-se a dinâmica do sistema.

7.4 Conclusões

Os métodos de modulação caótica dinâmica quando utilizados para transportar informação mostram ser viáveis, para sistema onde seja possível manter uma baixa potência de ruído no sistema.

Uma maneira de se aumentar a robustez à presença de ruídos, pode ser pela limitação de parte da dinâmica caótica, excluindo-se aquelas regiões próximas à linha de partição.

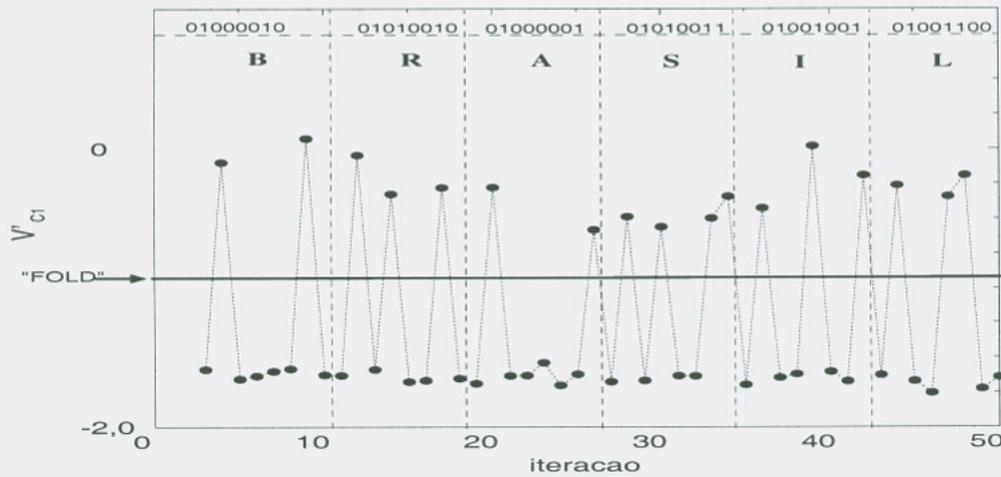


Figura 7.5: Série temporal da mensagem *BRASIL* codificada em V_{C1}

As simulações indicam viabilidade de comunicação, com relação sinal-ruído da ordem de $30dB$. Vale mencionar que essa relação sinal-ruído é o valor normalmente tido como aceitável para a telefonia fixa.

Este método mostrou-se de fácil implementação, uma vez que necessitamos somente das equações de controle 6.16 e 6.16 para efetuarmos a codificação na dinâmica do sistema.

Escolhendo-se os dois alvos P_0 e P_1 suficientemente afastados da linha de partição, podemos aumentar a robustez à presença de ruídos, uma vez que haverá menor probabilidade de pontos da trajetória serem decodificados com erro.

Considerando-se ainda o uso dessa técnica de modulação com o método de direcionamento de trajetórias por nós apresentado, podemos afirmar que esta técnica de modulação dinâmica apresenta ainda como ponto positivo o fato eliminar-se a inserção de bits extras, colocados para se evitar os problemas de codificação de uma dinâmica simbólica restrita, uma característica típica de sistemas caóticos.

Capítulo 8

Espalhamento Espectral por Análise do Tempo de retorno

8.1 Introdução

Muitos trabalhos foram propostos em que o caos é o elemento que transporta a informação. Com algumas excessões, todos os métodos de comunicação que utilizem caos como elemento portador da informação, podem ser considerados de espalhamento espectral.

Embora essa seja uma forma muito ampla de classificação, podemos dentro dessa ampla classe, considerar dois tipos distintos de espalhamento espectral. O primeiro tipo de comunicação caótica faz uso da dinâmica caótica para a modulação da informação, técnica essa a que já referimo-nos como sendo a modulação dinâmica. Esse método necessita o conhecimento da dinâmica do sistema caótico, uma vez que se torna necessário lançar mão de algum método de controle de caos, para que o fluxo de informação possa controlar as trajetórias do sistema caótico, pois a informação será codificada em regiões do espaço de fase do sistema caótico [42, 3, 87]. Do ponto de vista da recuperação da informação, de alguma forma será necessário reconstruir o espaço de fase original, o que pode ser conseguido via sincronização caótica. Este é o esquema de detecção coerente, onde uma cópia da forma de onda portadora deve ser providenciada no lado receptor do enlace de comunicação. Uma outra maneira de evitar a reconstrução do espaço de fase são os sistemas em que o sinal de referência

é transmitido alternadamente¹ com o sinal caótico. Essa abordagem é utilizada no método de chaveamento caótico por deslocamento diferencial (*DCSK*). Uma propriedade importante dos métodos de comunicação por espalhamento espectral é a redução significativa das interferências no canal, devido à utilização de uma largura espectral muito maior que a necessária para conter a informação, isto é o que se chama de ganho de processamento²[28].

Assim, para se obter espalhamento espectral torna-se necessário aumentar a largura de banda do canal em relação à largura do sinal de informação. Porém, isso não garante necessariamente ganho de processamento [28]. Um exemplo, pode ser visto no método de mascaramento caótico, onde uma portadora caótica sobrepõe-se à informação útil e onde não existe ganho de processamento pelo emprego de portadora banda larga. Aumentar o ganho de processamento em sistemas de espalhamento espectral com caos não é tarefa fácil, uma vez que se torna difícil a recuperação das seqüências caóticas não-periódicas empregadas no espalhamento espectral na presença de ruídos, além disso, construir e projetar filtros casados em tempo-real para sinais caóticos, também é difícil de realizar.

Nesse capítulo descreveremos o método de comunicação por espalhamento espectral por nós desenvolvido. Esse método baseia-se na estatística dos tempos de recorrência das trajetórias, considerando-se uma secção de Poincaré perpendicular a essas trajetórias. Nosso objetivo é conseguir uma técnica de comunicação com caos, com uma boa relação sinal-ruído, e que apresente melhoria no ganho de processamento. Os

¹TR - Transmitted Reference

²Ganho de processamento (GP) - é a melhoria da relação sinal-ruído que um sistema utilizando a técnica de espalhamento espectral é capaz de obter em relação a um sistema que não utiliza esta mesma técnica, conservadas as demais condições. Para sistemas que empregam espalhamento espectral em seqüência direta esse ganho está diretamente relacionado à relação entre o comprimento da informação e o comprimento do código de espalhamento.

Para sistemas por saltos em freqüência, o ganho de processamento é uma função direta do número de canais de salto nos quais está sendo espalhada a informação transmitida. O ganho de processamento de um sistema em seqüência direta deve ser pelo menos de 10 dB, e deve ser determinado a partir da relação sinal-ruído em dB com a seqüência de espalhamento desligado e essa mesma relação com a seqüência de espalhamento ligada.

$$GP = \frac{(SNR)_{sem \ espalhamento}}{(SNR)_{espalhado}} \quad (8.1)$$

resultados que obtivemos foram obtidos por simulação numérica com o circuito de Matsumoto, com os parâmetros já vistos anteriormente.

8.2 Tempo de recorrência em sistemas caóticos

Em sistemas caóticos podemos fazer a caracterização da série temporal por uma análise estatística da distribuição assumida por esses valores. Valores médios, variâncias e desvio padrão são as grandezas mais comumente utilizadas na caracterização de séries temporais. Podemos ainda, definir outra grandeza, chamada de tempo de retorno ou tempo de recorrência de Poincaré. O conceito de tempo de retorno pode ser aplicado a mapas unidimensionais e modelos descritos por fluxos estacionários [88].

No espaço de fase do sistema Ω , escolhemos um ponto arbitrário X_0 e consideramos uma ϵ -vizinhança de raio r , ou seja, o conjunto dos pontos cuja distância D_ϵ ao ponto X_0 seja menor que o raio r . Em um sistema caótico ergódico o ponto X_0 pode ser arbitrariamente escolhido. Tomemos agora, um conjunto de N pontos em uma trajetória caótica, e dentro desse conjunto, consideramos um subconjunto $S_i = \{X_i, X_{i+1}, \dots\}$ dos pontos dessa trajetória que passem pela ϵ -vizinhança de raio r . Ao sub-conjunto desses pontos, S_i , chamamos de pontos recorrentes de Poincaré e a $T(i) = t_{i+1} - t_i$ para $i = 0, 1, 2, \dots$, o tempo gasto para um ponto da trajetória retornar para o interior da ϵ -vizinhança ou seja: $r \leq D_\epsilon$.

Uma representação dessa idéia é apresentada na figura 8.1, onde o círculo pontilhado de raio ϵ , contém três trajetórias 1, 2 e 3. O tempo de recorrência de Poincaré, é o tempo $T(i)$ gasto para que cada trajetória retorne à área interna do círculo pontilhado. A distribuição dos valores de $T(i)$ obedece à uma lei de potência, com uma estatística do tipo Poisson [89]. Seja $\mu(\epsilon(X_0))$ uma medida associada com $\epsilon(X_0)$, ou $\mu(\epsilon(X_0)) = \mu(S_i) \approx r^d$. A medida $\mu(\epsilon(X_0))$ pode ser calculada pela frequência com que a ϵ vizinhança é percorrida pelos pontos da trajetória.

$$\mu(S_1) = \frac{N/\bar{T}_1(r)/\tau}{N} \quad (8.2)$$

e

$$\bar{T}_1(r) \approx r^d \quad (8.3)$$

A quantidade $\overline{T}_1(r)/r^{-d}$ depende da escolha do ponto X_0 , o que indica que algumas regiões do espaço de fase são mais freqüentemente visitadas que outras.

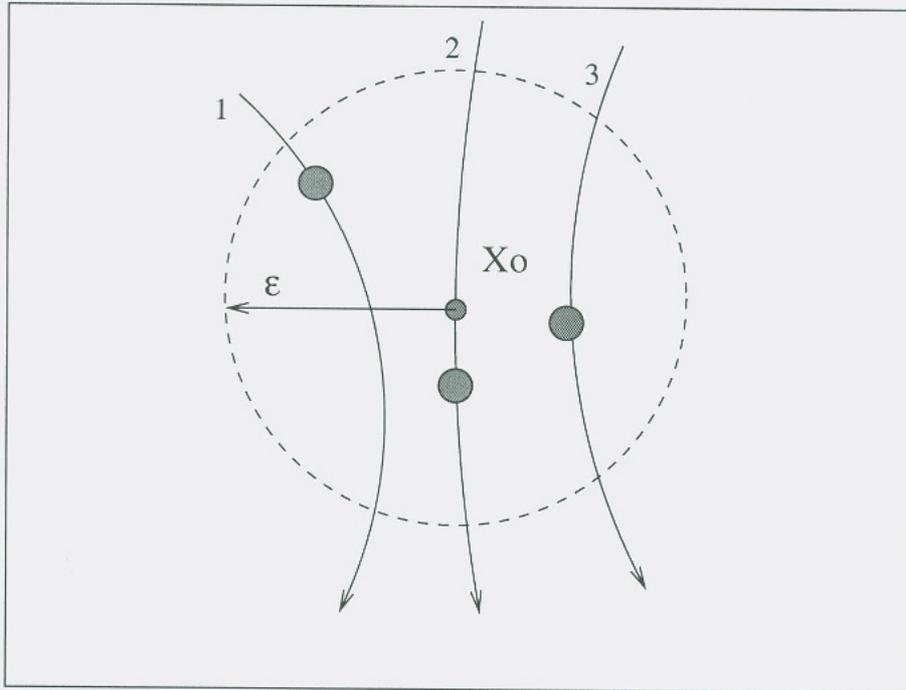


Figura 8.1: Conceito de tempo de retorno.

8.3 Estatísticas do tempo de retorno para o Circuito de Matsumoto

Para analisarmos a distribuição do tempo de recorrência para o circuito de Matsumoto devemos estabelecer o plano segundo o qual as trajetórias irão atravessar. Levando-se em conta o período das órbitas, estamos interessados somente naquelas que correspondem ao primeiro tempo de retorno. Olhando-se a figura 8.2, o tempo de recorrência de Poincaré é o tempo necessário para uma trajetória passando pelo ponto P_0 atravessar o plano Σ e retornar ao ponto P_0 . Isso é equivalente a uma órbita caótica com recorrência de ordem 1³. Os pontos P_0 e P_1 estão contidos no plano

³Em um sentido menos restritivo podemos entender uma trajetória de ordem de recorrência n como sendo uma órbita caótica de período n .

$\Sigma = (V_{C1})x(i_L)$. Daqui por diante nos referiremos a esse tempo como sendo τ_2 . Também consideramos o tempo gasto para um ponto ir de P_0 ao ponto P_1 , referido daqui por diante como sendo o tempo τ_1 , independente do sentido adotado. No circuito de Matsumoto consideramos a secção de Poincaré tomada na altura do plano $V_{C2} = 0$.

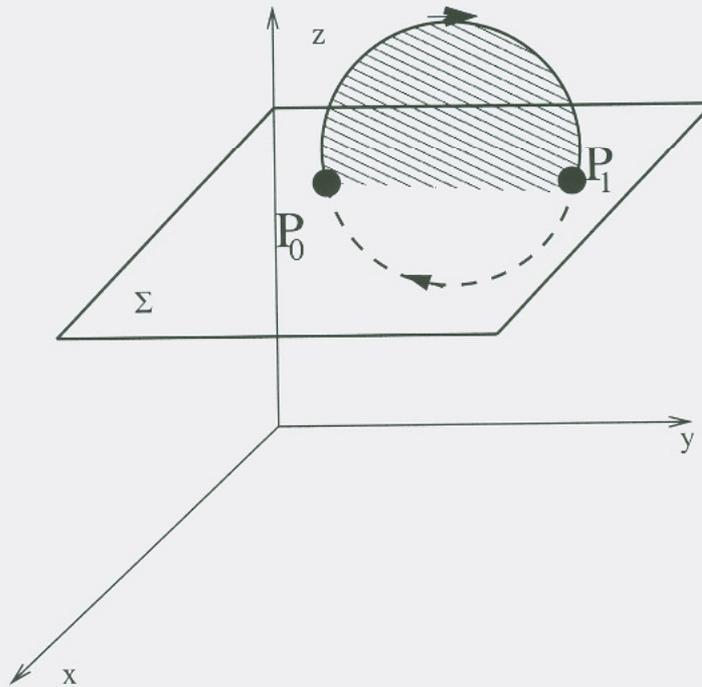


Figura 8.2: Diagrama do tempo de recorrência na secção de Poincaré.

O gráfico 8.3 mostra um histograma com a distribuição dos tempos de retorno em que consideramos os tempos de retorno τ_1 e τ_2 . Aproximadamente 1700 cruzamentos na secção de Poincaré resultaram em diferentes frequências para os tempos τ_1 e τ_2 . Nos gráficos 8.3a indica-se os tempos de retorno τ_1 e em 8.3b mostra-se os tempos de retorno τ_2 . Podemos ver ainda, que os tempos τ_1 têm uma maior variância e que estão mais espalhados que os tempos τ_2 que por sua vez, estão mais concentrados em torno do valor $\tau_1 = 89$. Os histogramas foram obtidos em um sistema mestre-escravo sincronizados pela variável V_{C1} sem presença de ruídos. Nos gráficos onde aparecem histogramas, adotamos como convenção, colocar a palavra *histograma* como legenda eixo vertical.

O gráfico da figura 8.3 foi obtido sem considerar fluxo de informações no circuito caótico. Seja agora o esquema onde quando se deseja enviar o bit 0, a variável de sincronização V_{C1} é enviada, sendo recebida pelo circuito receptor juntamente com o

ruído $\eta(t)$ aditivo do canal, suposto gaussiano com média nula, ou seja, o sinal $m_i(t)$ $i = 0$ ou 1 recebido é da forma

$$m_1(t) = V_{C1} + \eta(t) \quad \rightarrow \quad \text{para bit } 1 \quad (8.4)$$

e quando se deseja enviar o bit 0 a variável de sincronização é tornada nula ou seja $V_{C1} = 0$ e o circuito caótico de recepção somente recebe o sinal $m_0(t)$ composto do ruído aditivo adquirido durante o tempo de transmissão, assim,

$$m_0(t) = \eta(t) \quad \rightarrow \quad \text{para bit } 0 \quad (8.5)$$

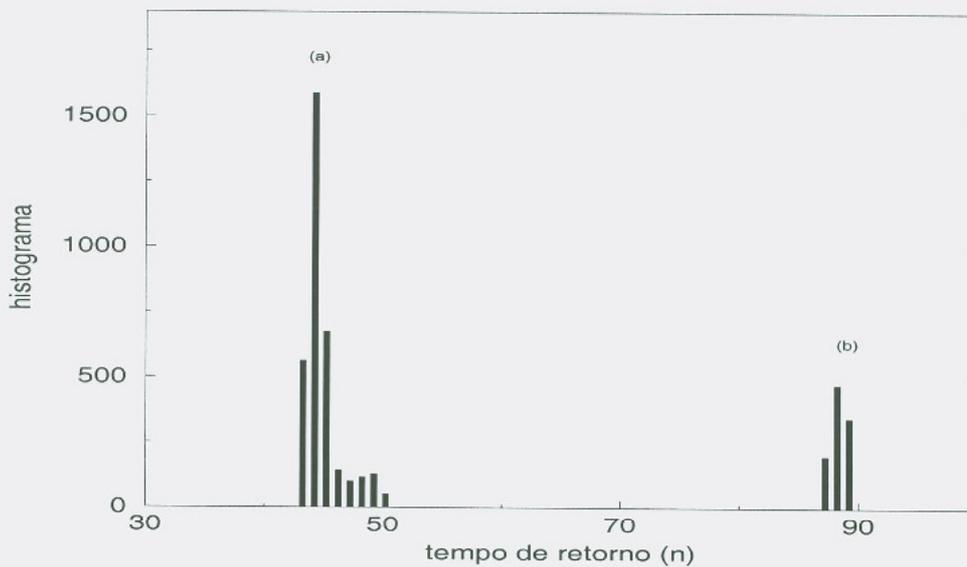


Figura 8.3: Histograma do tempo de retorno.

8.3.1 Efeito da presença de ruídos no tempo de retorno

O histograma do gráfico 8.3 foi obtido considerando-se o sistema isento de ruídos. Vamos agora, considerar o caso onde o ruído esteja presente junto com o sinal. O gráfico 8.4 mostra os histogramas resultantes quando existe ruído presente junto com a variável caótica. Em ambos os casos (a) e (b), relação sinal-ruído é $\left(\frac{P_b}{P_N}\right) = 2.9$ dB, com P_b sendo a potência do sinal e P_N sendo a potência do ruído. No gráfico (a) o histograma mostra a distribuição dos tempos de retorno para o sinal $m(t)$, após

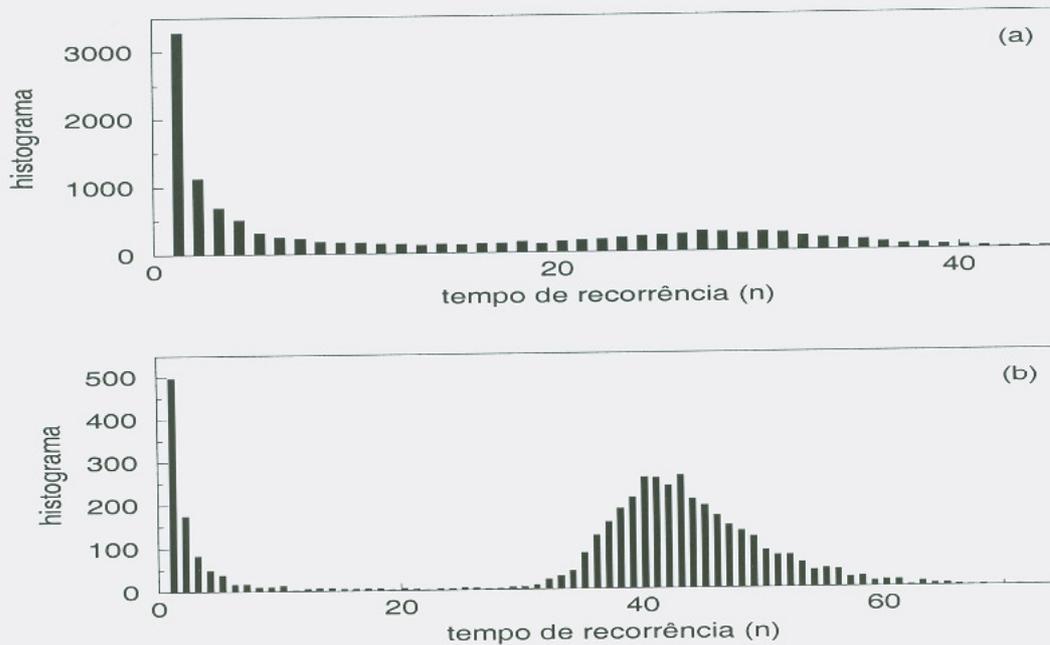


Figura 8.4: Comparação entre a distribuição dos tempos de retorno com ruído (2.9 dB.)

ser reconstruído via sincronização caótica. Podemos ver a dispersão produzida pela presença dos ruídos, produzindo um espectro de distribuição dos tempos aproximadamente contínuo⁴, com a moda concentrando-se em valores mais baixos do tempo de retorno, havendo uma ligeira tendência para uma distribuição bimodal. Essa distribuição é nitidamente bimodal quando o sinal $m(t)$ é formado pela variável caótica V_{C1} , somada com a variável $\eta(t)$ aleatória, conforme pode ser visto na figura 8.4b.

No gráfico 8.5 indica-se a distribuição da variável de sincronização V_{C1} , sem a presença de ruído. Conforme afirmamos anteriormente, alguns pontos do atrator são percorridos com mais frequência, o que é indicado na figura 8.5 pelo histograma onde vemos duas modas concentradas nas coordenadas $V_{C1} \approx -6.64$ e $V_{C1} \approx -1.48$.

Níveis elevados de potência de ruído adicionados à variável de sincronização ainda conseguem ser discriminados pelo circuito de recepção sincronizado. No gráfico da figura 8.6a temos uma relação entre potência do sinal e potência do ruído da ordem de 2.89 dB e na figura (b) mostramos o histograma do sinal recuperado na saída do circuito receptor (circuito escravo). Com essa relação sinal-ruído a distribuição dos tem-

⁴Um espectro de frequências composto por um grande número de raias discretas pode ser aproximado por um espectro contínuo.

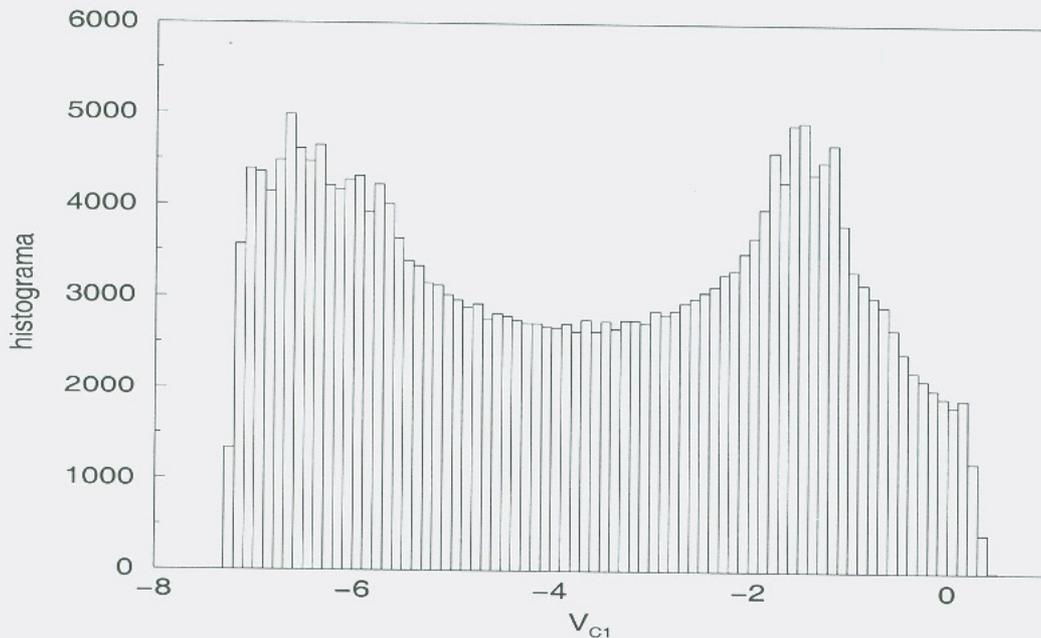


Figura 8.5: Histograma para a variável de sincronização V_{C1} sem ruído.

pos de retorno já mostra uma tendência à uma distribuição tipo gaussiana. Em 8.6b o sinal $m(t) = \eta(t)$ é composto somente do ruído adicionado ao sinal $m(t)$, equivalente à codificação do bit 0. O histograma apresenta uma distribuição aproximadamente plana, o que era de se esperar, uma vez que estamos considerando um ruído gaussiano com média nula, onde supostamente deveríamos ter um histograma aproximadamente plano de distribuição dos tempos de retorno.

A mesma análise anterior pode ser aplicada ao gráfico 8.7 em que a relação sinal-ruído é da ordem de $16.8dB$, menor que o caso anterior. Podemos ver que com uma menor relação sinal-ruído, ainda existe uma forte correlação na variável V_{C1} , pois o gráfico 8.7a mostra que ainda existe uma distribuição bimodal dos valores de V_{C1} , embora com uma variância menor. No gráfico 8.7b, os valores de V_{C1} são devidos somente à recepção do ruído, a distribuição dos tempos de retorno também é aproximadamente plana, como em 8.6b. Na figura 8.8a o histograma mostra uma distribuição do tipo Poisson devido a uma relação sinal-ruído relativamente baixa com (SNR da ordem de $16.8dB$). Quando os tempos de retorno são devidos somente à variável aleatória, a distribuição apresenta-se aproximadamente bimodal, uma vez que ainda existe o predomínio da variável caótica sobre o comportamento dinâmico do circuito, isso pode

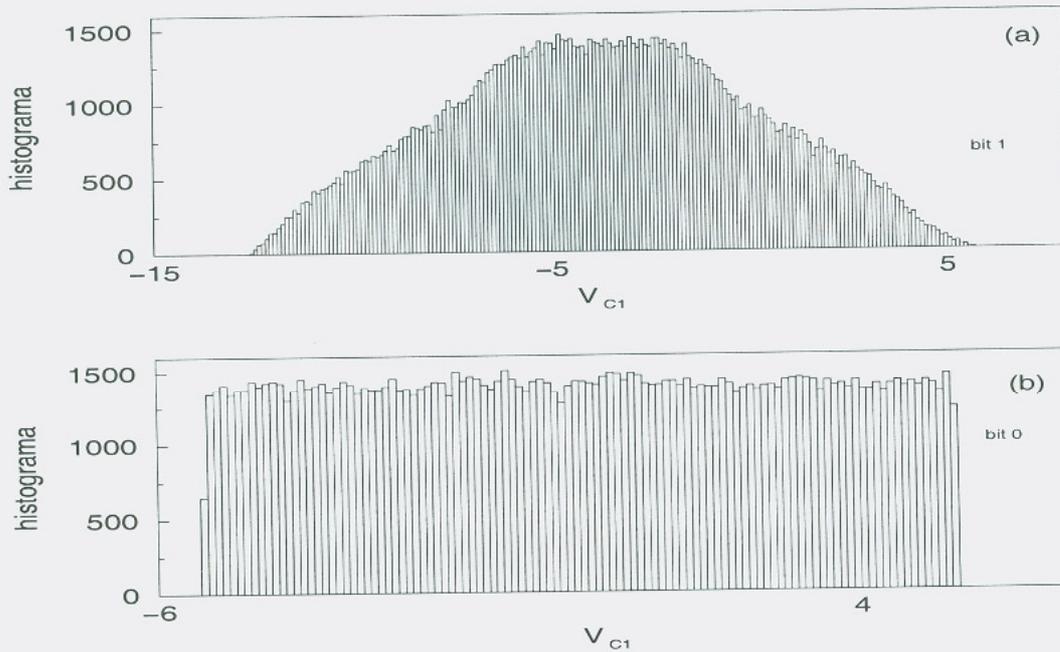


Figura 8.6: Comparação entre a distribuição da variável de sincronização V_{C1} (a) com SNR de 2.89dB (b) somente ruído.

ser visto no gráfico da figura 8.9.

Outra maneira de ver como os ruídos influenciam na variação do tempo de recorrência é indicado pelo gráfico 8.10, no qual plotamos os tempos de recorrência tomados na secção de Poincaré, para vários níveis de ruído. Em 8.10a o sinal caótico não contém nenhum ruído, o tempo de retorno é da ordem de aproximadamente 90 iterações. Doravante nos referiremos ao tempo em termos de iterações, em analogia com as nossas simulações, onde o passo de integração é dado em unidades discretas de tempo. Assim, por exemplo se o tempo de recorrência for de 90, isto significa que a variável considerada consumiu 90 iterações do bloco integrador para cruzar novamente a secção de Poincaré. Vemos que no mesmo gráfico em (b), (c), (d) e (e), temos relação sinal-ruído ($SNR = 16.1 \text{ dB}$), ($SNR = 12.2 \text{ dB}$), ($SNR = 8.0 \text{ dB}$) e ($SNR = 4.2 \text{ dB}$) para as curvas b,c,d e e respectivamente. Podemos novamente observar que com o aumento do ruído os tempos de retorno diminuíram.

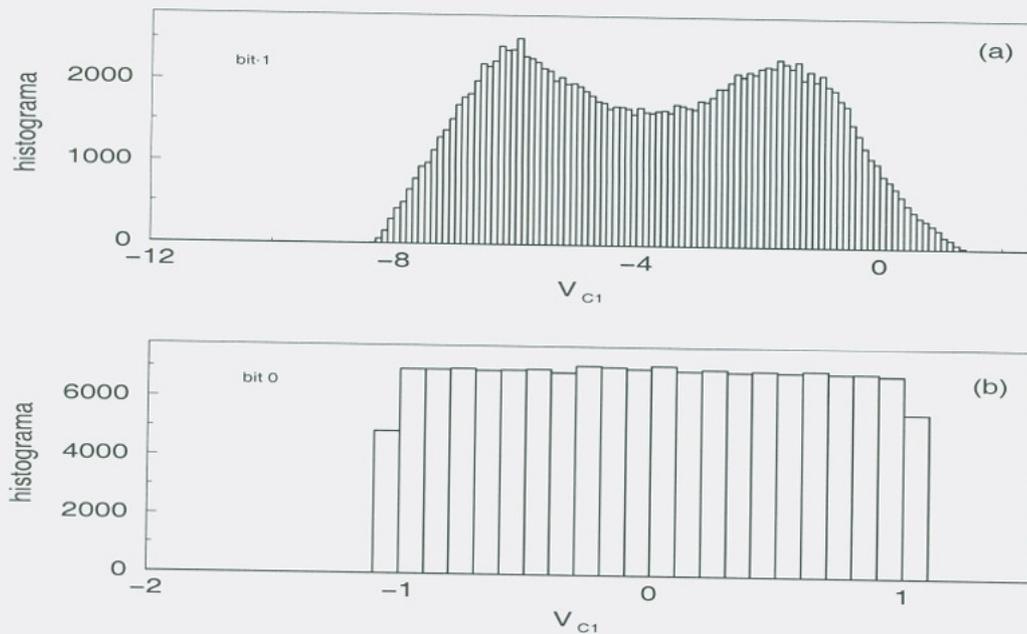


Figura 8.7: Comparação entre a distribuição da variável de sincronização V_{C1} e ruído de 16.89 dB.

8.4 Comunicação caótica por tempo de retorno

Quando estudamos o método de comunicação caótica por chaveamento caótico diferencial *DCSK*, vimos que a principal diferença entre a técnica de chaveamento caótico *CSK* era a maneira como a informação era recuperada. No método *CSK* o circuito de correlação fazia a decisão sobre o bit baseado na energia E_0 do sinal caótico recebido. Porém, o valor de limiar variava para cada nível de ruído presente no sinal composto $m(t) = V_{C1} + \eta(t)$. Isso implica que deve haver pelo menos um período de aprendizagem do sistema para o que a decisão possa ser efetuada.

Para contornar esse problema, o nosso método lança mão de um segundo circuito caótico idêntico ao primeiro, porém, cujo sinal de entrada provém de um gerador de sinais aleatórios, o qual será utilizado como referência local.

O sinal caótico $m(t) = V_{C1} + \eta(t)$ é a variável condutora do gerador caótico responsável pela recuperação da informação. A saída desse gerador passa por um circuito de análise estatística que extrai o tempo médio de recorrência $\bar{\tau}_1$. A saída do gerador caótico de referência passa por um segundo circuito analisador de estatística, fornecendo o tempo médio de retorno $\bar{\tau}_{ref}$. A figura 8.11 mostra um diagrama em

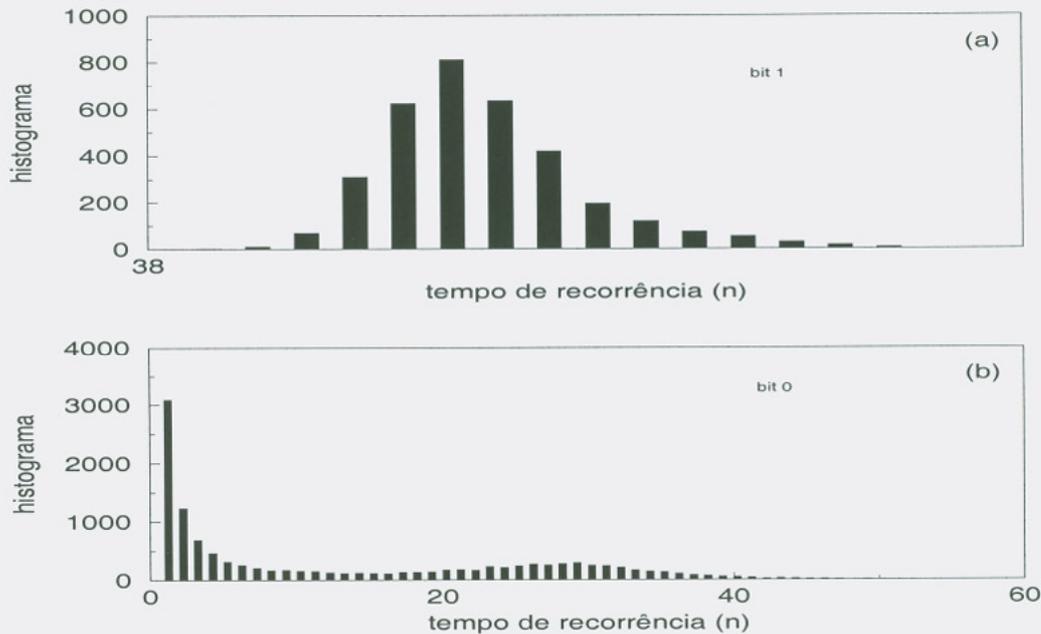


Figura 8.8: Comparação entre a distribuição dos tempos de retorno com ruído de 16.8 dB.

blocos do nosso esquema.

Comparando-se com a correlação obtida entre o primeiro semi-ciclo com o segundo semi-ciclo, faz-se a decisão do bit. Esse procedimento evita que o circuito de decisão seja dependente do nível de ruído presente no canal. Os métodos que empregam esse recurso são chamados de sistema com referência transmitida TR . Lembrando ainda que as técnicas CSK e $DCSK$ fazem uso de detecção não-coerente, onde o sinal de referência não é obtido por sincronização caótica.

Nosso método, semelhantemente à técnica $DCSK$ também não faz a decisão de bit baseado na energia do sinal caótico. Para isso, considera o valor médio dos tempos de retorno para o sinal caótico obtido por sincronização caótica. Explicaremos agora, como codificar a informação em nosso esquema. Vamos considerar sinais digitais. Quando queremos enviar o bit 1, enviamos um segmento de onda caótica, com duração T_b . Para se enviar o bit 0, desliga-se o sinal caótico, durante o tempo (T_b) de duração do bit. Essa abordagem é a mesma empregada no método de modulação caótico liga-desliga ($COOK$)

Sendo T_b a duração do bit e τ_1 o tempo de retorno de Poincaré no atrator caótico, então a relação $n_s = \frac{T_b}{\tau_1}$ é o fator de espalhamento espectral adotado, com n_s sendo

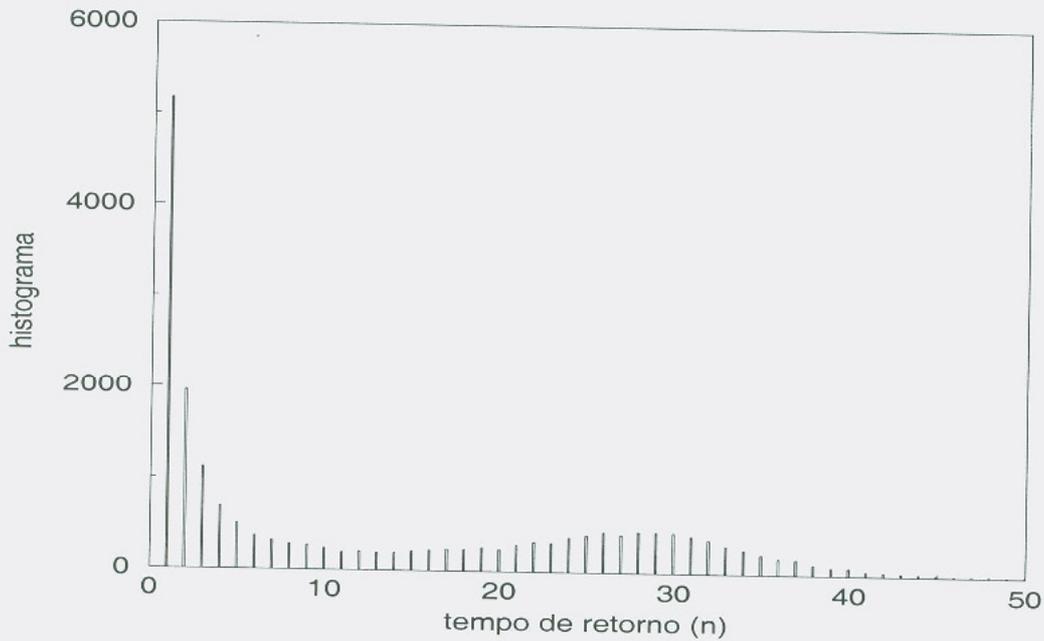


Figura 8.9: Histograma da distribuição do tempo de retorno para sinal V_{C1} aleatório.

um número inteiro. Devemos ter naturalmente $T_b \gg \tau_1$ para que haja o espalhamento espectral. Isso implica que para a transmissão de um bit, uma trajetória caótica deve cruzar n_s vezes secção de Poincaré. O valor médio $\bar{\tau}_1$ do tempo de retorno para um ciclo de transmissão de um bit, será dado por:

$$\bar{\tau}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_s} \tau_i}{n_s} \quad (8.6)$$

Esse valor é calculado à cada cruzamento pela secção de Poincaré, pois para uma dada duração T_b de um bit, e tendo-se em conta que o tempo médio de retorno τ_1 é menor que T_w , devem haver pelos menos T_b/τ_1 cruzamentos pela secção de Poincaré.

A idéia central para a recuperação da informação é partir do fato que mesmo na presença de ruídos, a sincronização caótica entre os circuitos caóticos é suficientemente robusta, para manter correlação não-nula com a variável caótica condutora, $(V_{C1}^{(T)})$, no caso do circuito de Matsumoto e sincronização tipo *Carrol-Pecora*.

A correlação entre duas variáveis indica a intensidade da relação linear entre elas. Fazamos provisoriamente $x_t = V_{C1}^{(T)}$ e $y_r = V_{C1}^{(R)}$. O grau de correlação entre x e y é medido pelo coeficiente r_{corr} calculado como se segue:

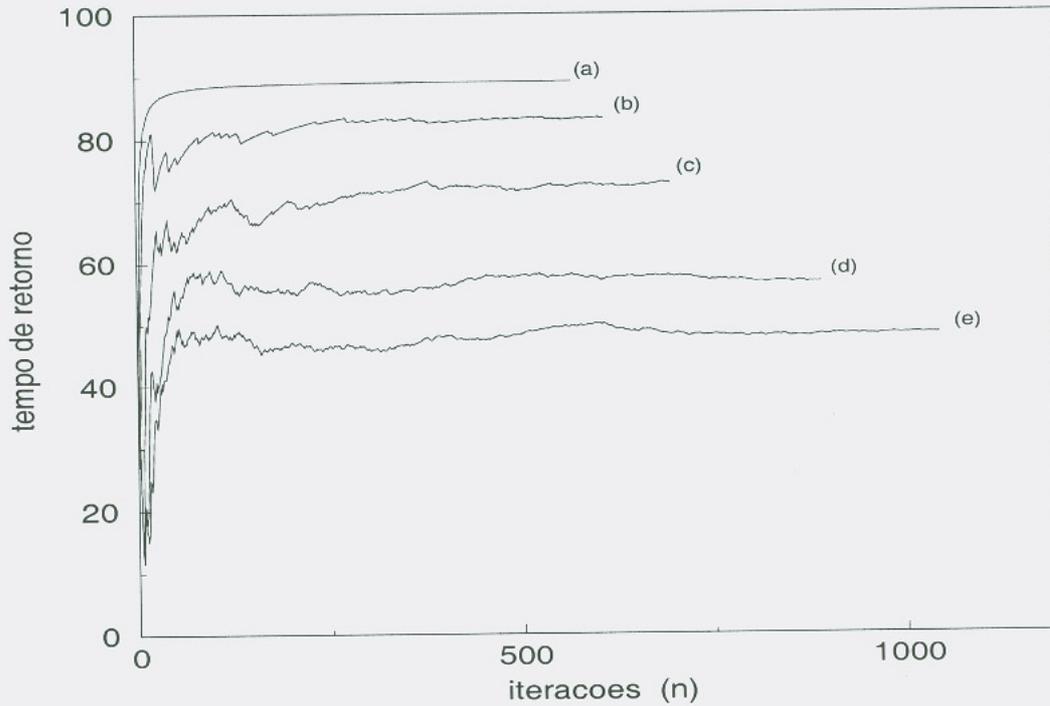


Figura 8.10: Dependência dos tempos de retorno em função do ruído.

$$r = \frac{S_{x_T y_R}}{\sqrt{S_{x_T x_T}} \sqrt{S_{y_R y_R}}} \quad (8.7)$$

onde

$$\begin{aligned} S_{x_t y_r} &= \Sigma(x_t - \bar{x}_t)(y_r - \bar{y}_r) \\ S_{x_t x_t} &= \Sigma(x_t - \bar{x}_t)^2 \\ S_{y_r y_r} &= \Sigma(y_r - \bar{y}_r)^2 \end{aligned} \quad (8.8)$$

sendo \bar{x}_t o valor médio de x_t e \bar{y}_r o valor médio de y_r .

Da expressão acima pode-se ver que o coeficiente r pode variar continuamente no intervalo $[-1, +1]$. Valores de r próximos de ± 1 indicam que existe uma forte relação entre as grandezas x e y e valores de r próximos de 0 indicam que x e y são pouco correlacionadas, o que em geral ocorre quando x e y seguem uma distribuição aleatória. O gráfico 8.12 mostra o grau de correlação entre $x_T = V_{C1}^{(T)}$, variável condutora e $y_R = V_{C1}^{(R)}$, variável conduzida, para diferentes níveis de ruído. Nesse gráfico, com

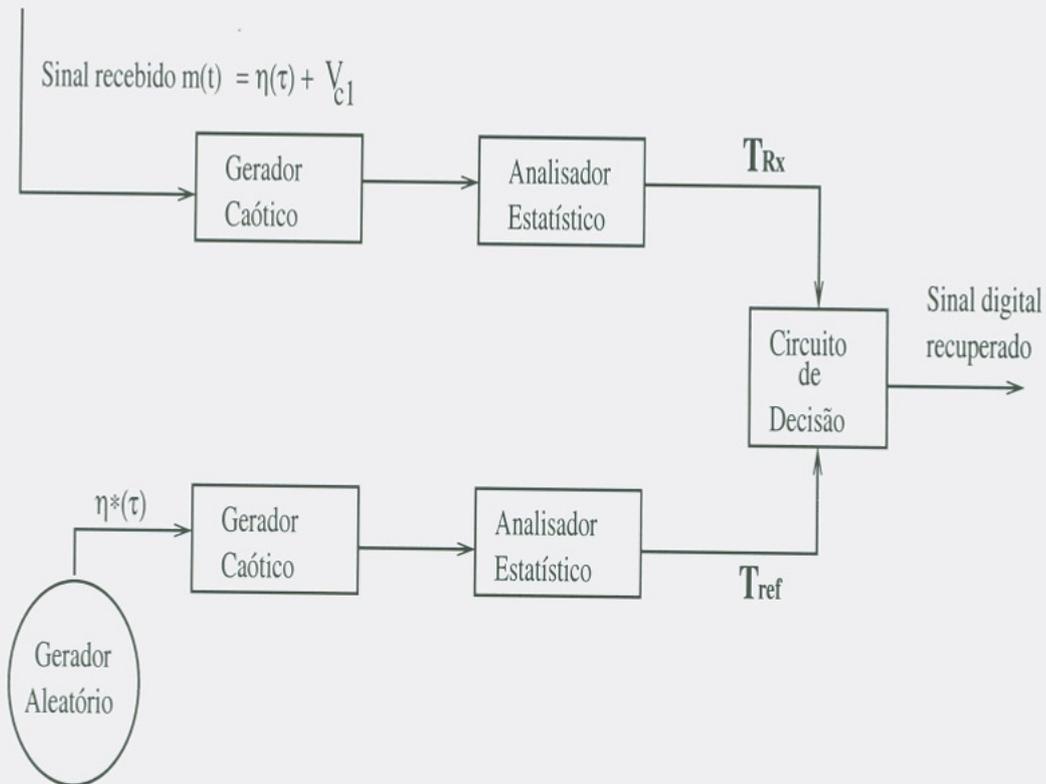


Figura 8.11: Diagrama em blocos do receptor baseado no tempo de retorno.

uma relação sinal-ruído de 13.3 dB a correlação é próxima de 1, enquanto que em b , c e d , podemos ver o grau de correlação aproximando-se de zero conforme a relação sinal-ruído SNR diminui. Considerações sobre a correlação entre as variáveis caóticas do circuito mestre e do circuito escravo são relevantes, porque isso relaciona-se diretamente com a taxa de erro de bits (BER) do sistema de comunicação. Quando calculamos a correlação entre partes do mesmo sinal, porém atrasado de (τ) unidades de tempo, estamos calculando a auto-correlação. Os sistemas caóticos, devem apresentar sinais com baixa auto-correlação, para $\tau \neq 0$. Esse fato, pode ser explorado com vantagens na geração das seqüências pseudos-aleatórias para compartilhamento do meio, como na técnica $CDMA$ [16].

Para se efetuar a decodificação do sinal caótico $m(t) = V_{C1} + \eta(t)$, o circuito de decisão calcula o valor médio dos tempos de retorno $\bar{\tau}_{1Rx}$ do sinal caótico, calculado durante o período de duração T_b do bit. Em seguida, esse valor é comparado com o valor médio $\bar{\tau}_{1ref}$ dos tempos de retorno de um outro circuito utilizado como re-

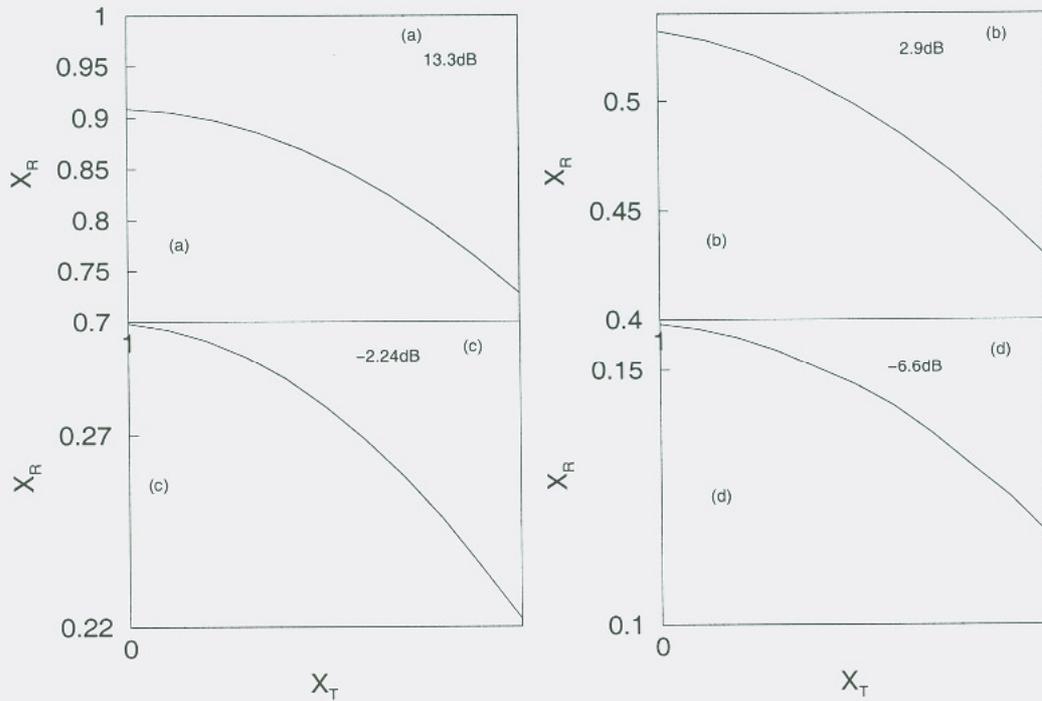


Figura 8.12: Correlação entre as variáveis $(V_{C1}^T)x(V_{C1}^R)$, para diferentes níveis de ruído.

ferência, mas que recebe como sinal de entrada somente o ruído $\eta(t)$, ou seja devemos ter $m'(t) = \eta(t)$.

As equações 8.9 e 8.10 mostram como a decodificação é feita. Ao atribuirmos o bit 0 quando $\bar{\tau}_{1ref}$ for menor que $\bar{\tau}_{1Rx}$, estamos levando em conta que, na presença de ruídos, os tempos de retorno se tornam menores.

$$bit = 0 \quad \text{se} \quad (\bar{\tau}_{1Ref}) \leq (\bar{\tau}_{1Rx}) \tag{8.9}$$

$$bit = 1 \quad \text{se} \quad (\bar{\tau}_{1Ref}) > (\bar{\tau}_{1Rx}) \tag{8.10}$$

Os tempos de recorrência demonstraram ser afetados pelo ruído presente de uma maneira inversamente proporcional ao tempo de duração T_b do bit. Isso faz sentido, uma vez que o analisador estatístico tem um número muito maior de amostras para obter um valor médio para o tempo de retorno. Como já vimos na figura 8.12, mesmo na presença de ruídos ainda temos uma correlação não-nula entre o sinal recebido e o sinal recuperado no circuito de decisão. Com índices de correlação mais elevados, ou seja, cuja amplitude esteja próximo de ± 1 , podemos utilizar um tempo de duração de bit

menor, isso, impacta diretamente a velocidade transmissão de informação (diminuição do fator de espalhamento). O gráfico 8.13 mostra a distribuição dos tempos de recorrência para um bit com duração $T_b = 500$ amostras e relações sinal-ruído da ordem de (a) $SNR = 18.5 \text{ dB}$ e (b) $SNR = 10.6 \text{ dB}$. Pode-se ver que com um menor relação sinal-ruído a distância entre o sinal de referência e sinal propriamente dito diminui, atingindo um ponto onde começam a se entrelaçar⁵, quando isso ocorrer, haverá um erro de decisão de bit. Os gráficos 8.14 mostram que para uma dada duração (T_b) do bit, níveis progressivos de ruído fazem com que haja uma aproximação entre as duas distribuições, indicada pela linha pontilhada em (a) temos a distribuição de frequências dos tempos de retorno quando não existe ruído e em (b) mostramos a mesma distribuição de frequências para relação sinal-ruído ($SNR=16.6\text{dB}$). Isso torna a separação entre ambas menos nítida, o que poderá levar a taxas de erro de bit (BER) maiores, conforme veremos adiante.

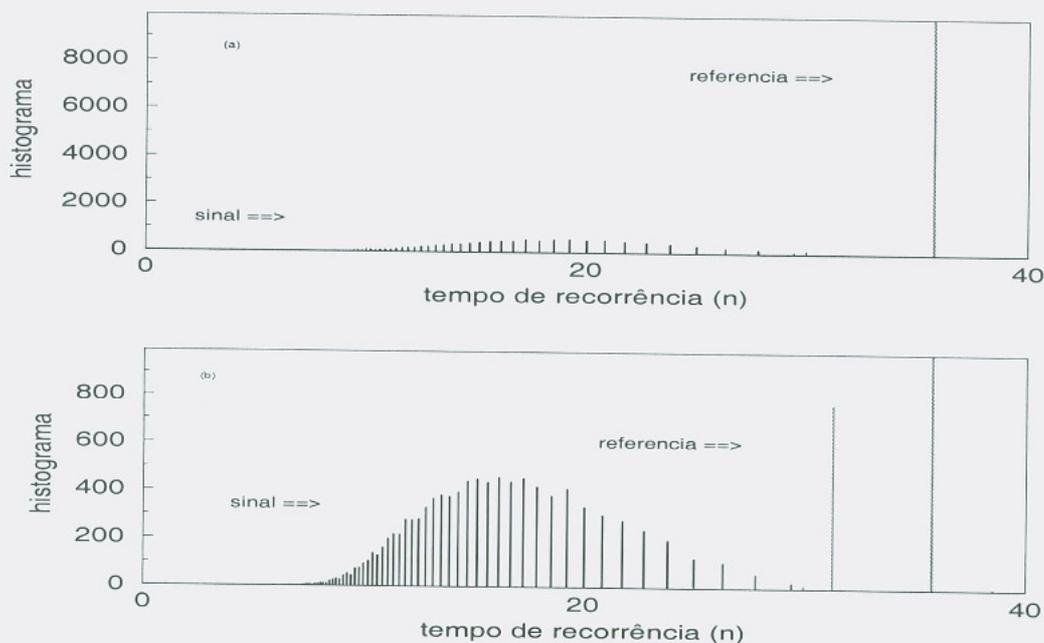


Figura 8.13: Comparação entre a distribuição dos tempos de retorno para $T_b = 500$ (a) $SNR = 18.5 \text{ dB}$, (b) $SNR = 10.6 \text{ dB}$.

Também podemos ver o comportamento do sistema em relação ao ruído se olharmos a série temporal dos tempos de retorno do sinal e do sistema de referência, uma

⁵overlapping

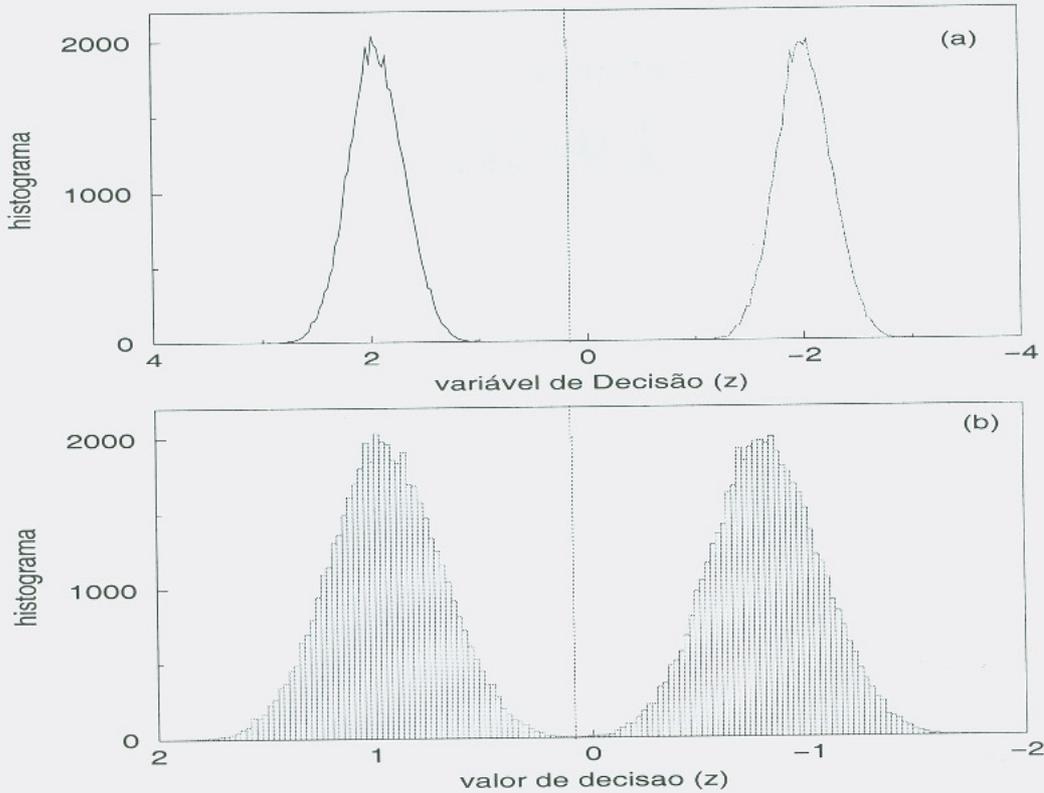


Figura 8.14: Comparação entre a distribuição dos tempos de retorno (a) sem ruído (b) com ruído (SNR=16.6dB).

vez que, nesse caso, podemos perceber se existe entrelaçamento entre os módulos dos tempos de recorrência. O gráfico 8.15 mostra a nítida separação entre as duas séries temporais para uma relação sinal-ruído ($SNR = 10.45 \text{ dB}$). Como já afirmamos, a sensibilidade aos ruídos aumenta quando aumentamos o tempo de duração do bit. No gráfico 8.15a o tempo T_b de duração é $T_b = 500$ amostras e no gráfico 8.15b para a mesma relação sinal-ruído tem-se uma duração de bit $T_b = 1000$ amostras. Nesse caso, o circuito de decisão consegue discriminar com baixa probabilidade de erros os dois sinais, o que já não acontece no caso indicado no gráfico 8.15(b). No gráfico 8.16a temos a série temporal dos tempos de retorno para uma relação sinal-ruído de 8.67 dB e no gráfico 8.16b para relação sinal-ruído de 7.87 dB . A duração (T_b) do bit é 1000 em ambos os casos.

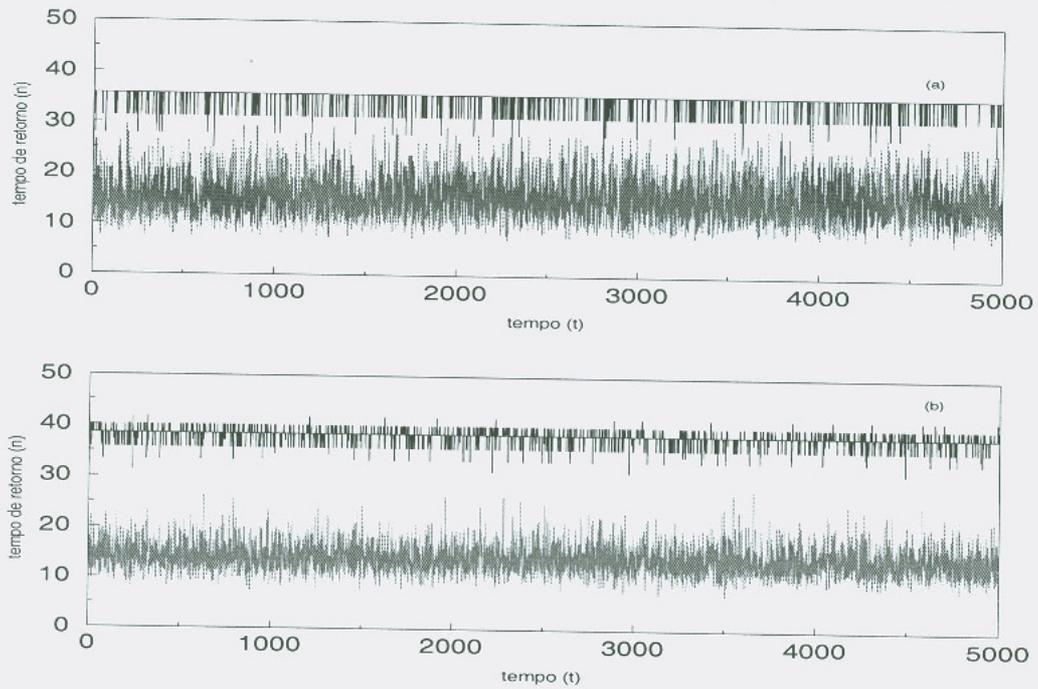


Figura 8.15: Série temporal dos tempos de retorno para (a) $T_b = 500$ (b) $T_b = 1000$.

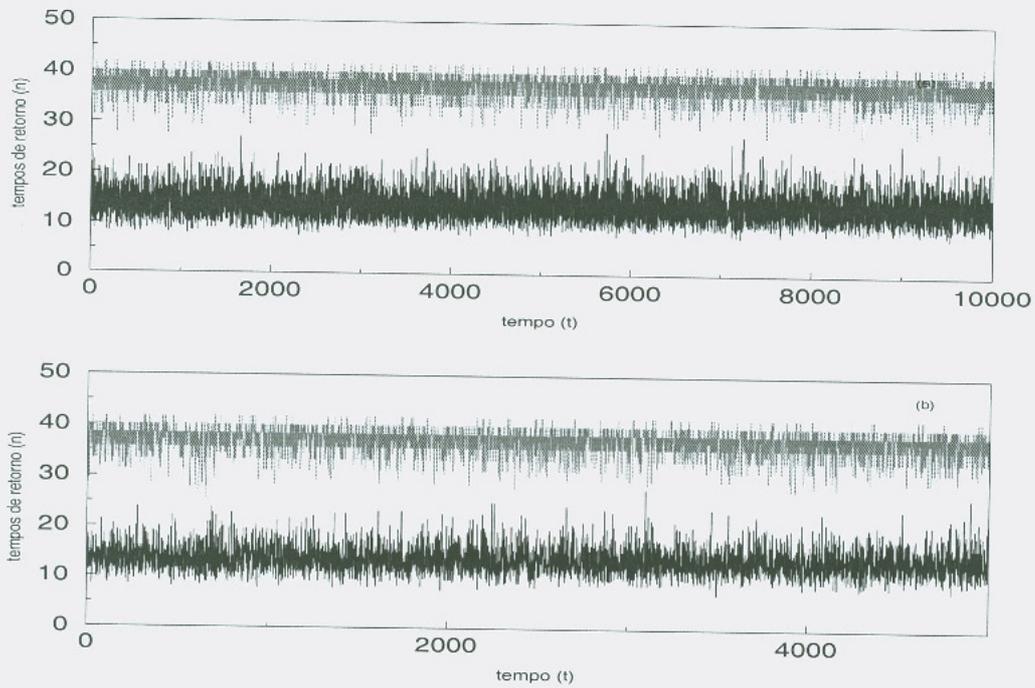


Figura 8.16: Série temporal dos tempos de retorno para (a) $T_b = 1000$ e $\text{SNR}=8.67\text{dB}$ (b) $T_b = 1000$ e $\text{SNR}=7.87\text{dB}$

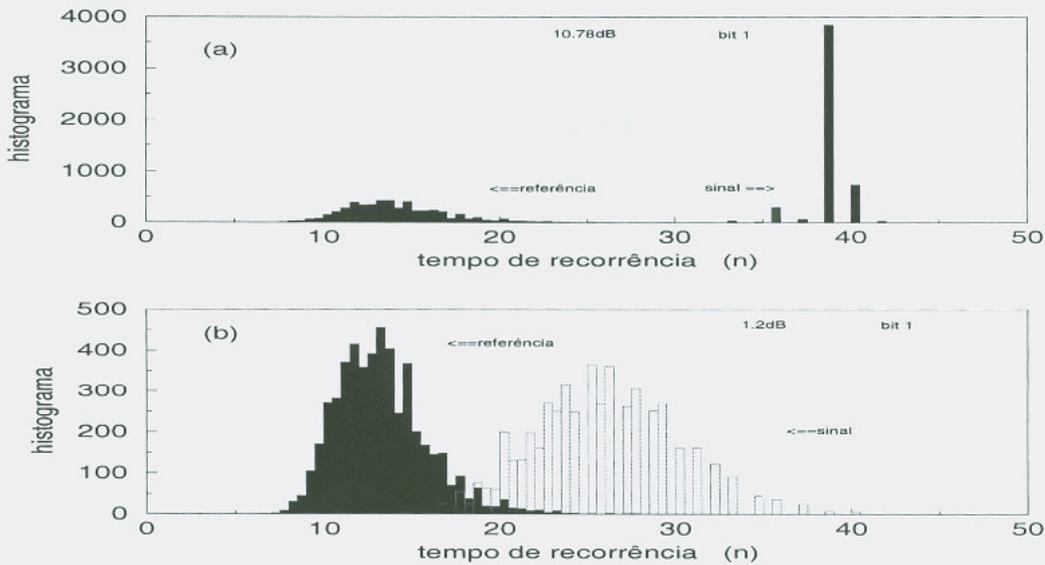


Figura 8.17: Comparação entre a distribuição dos tempos de retorno para Poincaré normal.

8.5 Considerações sobre o desempenho do método

Vimos nas secções anteriores como diferentes níveis de ruído afetavam os tempos de recorrência, mantido fixo a duração do bit. Também verificamos que a presença de ruído influencia os tempos de retorno. Uma vez, que nosso método faz a decisão de bits, em função dos tempos de retorno, isto implica que a taxa de erro de bits também será afetada. Nessa seção, mostraremos os resultados de algumas simulações, para verificar essa influência. Não faremos considerações de ordem teórica. Trabalhos que tratam da relação analítica entre ruídos e taxa de erros, para algumas técnicas de modulação, podem ser encontradas nas referências [16, 28, 30]. Em geral, essas análises levam em conta um modelo para o canal, suposto linear e com ruído gaussiano.

O gráfico 8.18 mostra a taxa de erro de bits obtida numericamente para diferentes durações de bits. A relação sinal-ruído (SNR) é plotada no eixo das abcissas e no eixo vertical, nomeado como BER , plotamos a taxa de erro relativa, ou seja a razão entre o número de bits decodificados com erro (N_{erro}) e o número (N_{tx}) de bits transmitidos:

$$BER = \frac{N_{erro}}{N_{tx}} \quad (8.11)$$

No gráfico 8.18a temos um período de $T_b = 1000$ amostras, em 8.18b o período é

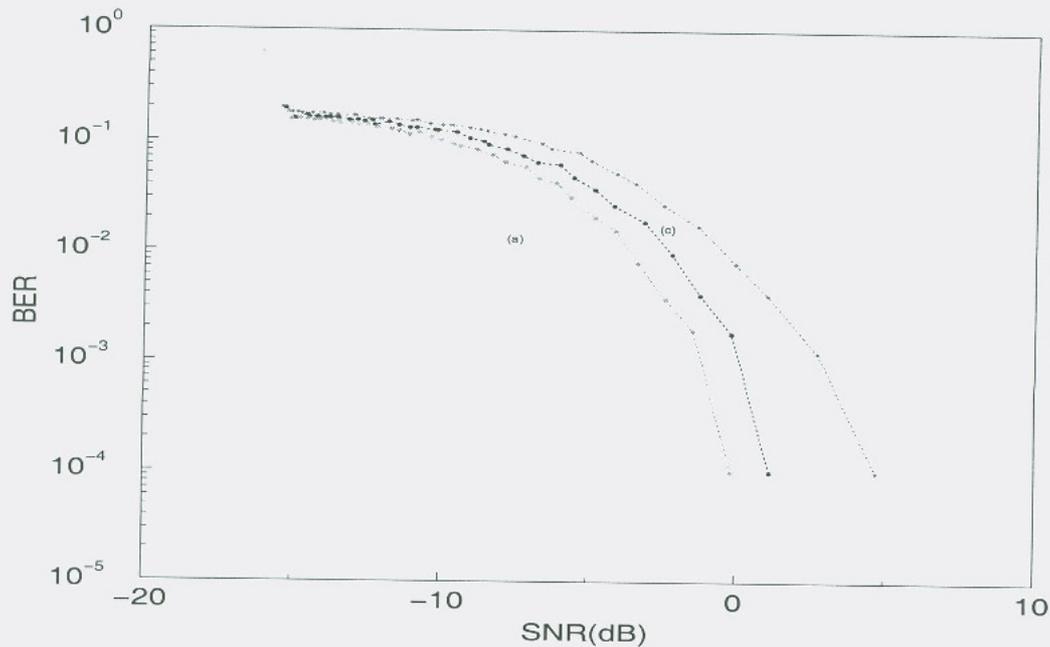


Figura 8.18: Dependência da taxa de erro de bits em função do ruído.

$T_b = 1500$ amostras e em 8.18c a duração do bit é de 2000 amostras. Podemos ver que aumentando-se o fator de espalhamento, dado pelo maior período de duração do bit, obtemos maior resistência à presença de ruídos; isso indica ganho de processamento, como era nosso objetivo inicial. Para $T_b = 1000$ amostras temos uma taxa de erro em bits menor que uma em um milhão ($BER < 10^{-6}$), com relação sinal-ruído de $SNR = 3.2 \text{ dB}$. Para $T_b = 1500$ amostras tem-se taxa de erros menor que 10^{-6} quando $SNR = -0.12 \text{ dB}$ e para $T_b = 2000$ amostras e relação sinal-ruído de -1.42 dB temos também uma taxa de erro pequena ($BER < 10^{-6}$). Podemos ver que essas relações sinal-ruído são adequadas para sistemas de comunicação com caos, o que indica a eficiência do método empregado.

8.6 Conclusões

Neste método, podemos verificar que o tempo de recorrência de Poincaré é uma característica que mantém um alto grau de correlação com a dinâmica caótica, mesmo na presença de altos níveis de ruído. Através da sincronização caótica torna-se possível recuperar o tempo de recorrência tomada em uma secção de Poincaré no espaço de fase. Uma preocupação que tivemos foi sempre considerar um sinal caótico contaminado com ruídos. Assim, verificamos que o efeito de ruídos é abaixar o valor médio dos tempos de retorno, tornando menos diferenciável o sinal caótico que contém a informação do sinal utilizado como referência.

Através da análise da correlação entre os sinais caóticos e de referência, podemos verificar que o grau de correlação entre os dois fluxos vai diminuindo à medida que o nível de ruído aumenta, esta análise indica o grau de robustez do sistema aos ruídos. A presença do ruído têm por efeito uma dispersão na distribuição dos tempos de retorno, produzindo para níveis altos de ruído, distribuições bimodais. A velocidade de transmissão de informação também foi afetada pelos ruídos, pois para se conseguir uma detecção com baixas taxas de erro, precisamos aumentar o fator de espalhamento; pois isso implica um tempo maior de amostragem do fluxo caótico.

Verificamos ainda que adotando-se seqüências caóticas mais longas (fator de espalhamento) aumentavamos a resistência ao ruído do sistema, ou seja, conseguimos obter ganho de processamento, que era um dos nossos objetivo principais. Este ganho de processamento obtido quando espalhamos a informação em partes maiores do fluxo caótico, permite a obtenção de taxas de erro (*BER*) menores, mesmo na presença de maiores níveis de ruído, o que torna o sistema de grande interêsse para comunicação em ambientes com alto grau de adversidade.

Outro objetivo que conseguimos atingir foi fazer a decisão de bits não mais em função da energia do sinal, o qual varia em função da relação sinal-ruído do canal. Isso implica que o circuito de decisão fica independente do nível de ruído presente no sinal.

Capítulo 9

Conclusões Finais

Começaremos a conclusão desta tese relembrando a nossa questão inicial, pode o caos ser vantajoso em sistemas de comunicação? Podemos concluir que sim. Abaixo, apontaremos em resumo os principais pontos que nos levam à essa conclusão.

O caos apresenta muitos pontos que podem ser aproveitados em sistemas de comunicação. Identificamos muitos elementos em comum entre sistemas caóticos e sistemas de que tratam da informação, como por exemplo entropia, capacidade, modulação e geração de sequências periódicas ou não-periódicas.

Alguns dos vários possíveis esquemas de comunicação com sinais caóticos foram apresentados, onde pudemos comparar aspectos positivos e negativos entre eles. Foram mostrados alguns representantes típicos de sistemas caóticos que pudessem ser interesse em sistemas de comunicação. Assim, estudamos alguns aspectos da família dos sistemas caóticos discretos, representados pelo mapa logístico. O mesmo procedimento, porém com maior detalhamento foi aplicado aos sistemas caóticos contínuos, onde escolhemos entre várias possibilidades o circuito elétrico de Matsumoto.

Com o controle do caos pudemos fazer sistemas onde controlamos a distribuição no espaço de fase dos pontos das trajetórias onde as informações estão codificadas. Pela escolha adequada das regiões de codificação e pela aplicação do nosso método de direcionamento de trajetórias conseguimos aumentar a resistência à presença de ruídos, bem como a eliminação dos bits extras na informação, como apresentamos na comunicação por modulação caótica. Verificamos também a estreita relação entre a topologia do espaço de fase caótico e a capacidade de codificação de informação, via entropia topológica. Embora, tenhamos trabalhado com uma divisão binária do

espaço de fase, pode-se estender essa divisão, podendo-se codificar mais informação, na dinâmica caótica do sistema.

A partir de características fundamentais dos sistemas caóticos como a sincronização caótica e o controle de órbitas periódicas instáveis, também pudemos derivar novas possibilidades de comunicação com caos. Principalmente quando consideramos os sinais provenientes dos sistemas caóticos como portadoras de banda larga, podendo-se estender suas aplicações para a comunicação por espalhamento espectral. Pois, vimos que os sinais caóticos decorrelacionam-se rapidamente entre si, com a função de autocorrelação apresentando um pico acentuado em zero e decaindo rapidamente.

Verificamos também que embora nosso método de controle aplique pulsos de controle de amplitude maior que no método *OGY*, tal fato não altera a dinâmica de forma significativa, que leve a perda de sincronização, por exemplo.

O método da comunicação por espalhamento espectral baseado no tempo de retorno mostrou apresentar uma boa relação sinal-ruído, bem como ganho de processamento, o que pode favorecer sistemas que necessitem operar em condições de baixa relação sinal-ruído, seja por estarem em ambiente hostis, ou por precisar operar com níveis muito baixos de potência. Um exemplo dessa última abordagem temos hoje na telefonia celular, onde os aparelhos celulares empregando o espalhamento espectral, apresentam cada vez mais autonomia e segurança, através da melhoria na relação sinal-ruído e de geradores de seqüências pseudo-aleatórias com baixa correlação. Ambos os requisitos podem ser alcançados com o uso do caos.

Portanto, podemos novamente afirmar: sim!, o caos apresenta qualidades que podem ser aplicadas com vantagens no desenvolvimento de sistemas de comunicação.

Bibliografia

- [1] H. B. Lin. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford University Press, New York, NY, 1994.
- [2] S. BOCCALETTI, C. GREBOGI, Y.C. LAI, H. MANCINI, and D. MAZA. The control of chaos: Theory and applications. *Physics Reports*, 329:106–193, 2000.
- [3] S. Hayes, C. Grebogi, and E. Ott. Communicating with chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 70:3031–3034, 1993.
- [4] S. Hayes, C. Grebogi, and A. Yorke. Experimental control of chaos for communication. *Phys. Rev. Lett.*, 73:1781–1784, 1994.
- [5] G. Kolumban, M. P. Kennedy, and L. O. Chua. The role of synchronization in digital communications using chaos-part iii: Chaotic modulation and chaotic synchronization. *IEEE Trans. Circuits and Syst. I. Vol. 45*, pages 1129–1140, 1998.
- [6] K. M. Cuomo and A. V. Oppenheim. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communication. *Phys. Rev. Lett.*, 71:65–68, 1993.
- [7] F. Takens. *Detecting strange attractors in turbulence*. in *Dynamical Systems and Turbulence (Lectures Notes im Math. 898)*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [8] H. D. I. Abarbanel. *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer Verlag, New York, 1996.
- [9] G. Perez and H. A. Cerdeira. Extracting message masked by chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 74:1970–1973, 1995.

- [10] R. E. Ziemer. *Introduction to Spread Spectrum Communication*. Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [11] F. C. M. Lau, C. K. Yip, and S. F. Hau. A multiple-access technique for differential chaos-shift keying. *IEEE Trans. Circuits and Syst. I. Vol. 49*, pages 96–104, 2002.
- [12] F. Arquello and M. Bugallo. Multi-user receivers for spread spectrum communications based on chaotic sequences. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 12:847–853, 2002.
- [13] D. A. Guimarães. *Introdução às Comunicações Móveis*. Disponível em: <http://www.inatel.br/docentes/dayani>, Acessado em Outubro de 2003, 2003.
- [14] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw Hill, New York, 1995.
- [15] M. Itoh. Spread spectrum communication via chaos. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 9:155–213, 1998.
- [16] A. Abel, A. Bauer, and W. Schwarz. *Chaotic Codes for CDMA Applications*. Disponível em: <http://citeseer.nj.nec.com/abel97chaotic.html>, Acessado em Janeiro de 2004, 2004.
- [17] M. P. Kennedy and G. Kolumban. Digital communications using chaos. *Signal Processing. Vol. 80*, pages 1307–1320, 2000.
- [18] A. B. Carlson. *Communication Systems*. McGraw-Hill, Inc, New York, NY, 1981.
- [19] M. Hasler and T. Schimming. Communications using chaos. *International Conference on Signals and Electronic Systems*, pages 19–30, 2001.
- [20] G. Kolumban, J. Zoltan, and M. P. Kennedy. A robust modulation scheme for chaotic communications. *IEICE Trans. Fundamentals. I. Vol. E81-A, número 9*, pages 1798–1802, 1998.
- [21] U. Parlitz, L. O. Chua, and L. J. Kocarev. Transmission of digital signals by chaotic synchronization. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2:973–977, 1992.

- [22] H. Dedieu, M. P. Kennedy, and M. Hasler. Chaos shift keying: Modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing chuas's circuit. *IEEE Trans. Circ. Syst. II*, 40:634–642, 1993.
- [23] A. V. Oppenheim, G. W. Wornell, S. H. Isabelle, and K. M. Cuomo. Signal processing in the context of chaotic signals. *Proc. IEEE. ICASSP.*, IV:117–120, 1992.
- [24] L. Kocarev, K. S. Halle, and L. O. Chua. Experimental demonstration of secure communication via chaotic synchronization. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2:1011–1020, 1992.
- [25] M. P. Kennedy and G. Kolumban. Chaos communications; from theory to implementation. *Proc. 1997. European Conf. Circuit Theory and Design*, pages 272–275, 1997.
- [26] N. F. Ferrara and C. P. Prado. *Caos, Uma introdução*. Editora Edgard Blucher, São Paulo, São Paulo, 1994.
- [27] A. S. Dmitriev, M. Hasler, A. I. Panas, and K. V. Zakharchenko. Basic principles of direct chaotic communications. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 6:488–500, 2003.
- [28] M. Sushchik, L. S. Tsimring, and A. R. Volkovskii. Performance analysis of correlation-based communication schemes utilizing chaos. *IEEE Trans. Circuits and Syst. I. Vol. 47*, pages 1684–1691, 2000.
- [29] W. M. Tam and F. C. M. Lau. An approach to calculating the bit-error rate of a coherent chaos-shift-keying digital communication system under a noisy multiuser environment. *IEEE Trans. Circuits and Syst. I. Vol. 49*, pages 210–223, 2002.
- [30] A. Abel and W. Schwarz. *Chaos communication on noisy channels*. UCSD/UCLA/Stanford Winter School in Chaotic Communications, San Diego, Jan. 26, 2000. Disponível em: <http://www.iee.et.tu-dresden.de/falk/E1/pub/2000/schwarz4.pdf>, Acessado em Janeiro de 2004, 2004.
- [31] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20:130–141, 1963.

- [32] M. Henon. A two dimensional mapping with a strange attractor. *Com. Math. Phys.*, 50:69–76, 1976.
- [33] T. Matsumoto and L. O. Chua. The double scroll. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-32:797–818, 1985.
- [34] M. Mulukutla and C. Aissi. Implementation of the chua's circuit and its applications. *Proceedings of the 2002 ASEE Gulf-Southwest Annual Conference*, IVB5:01–08, 2002.
- [35] J. M. Cruz and L. O. Chua. A cmos ic nonlinear resistor for chuas's circuit. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 12:985–995, 1992.
- [36] N. M. Rabinder and W. Wu Chai. Introduction to experimental chaos using chua's circuit. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 40:59–89, 1992.
- [37] G. A. Johnson, T. E. Tigner, and E. R. Hunt. *Controlling Chaos in Chua's Circuit. Chaos And Synchronization in Chua's Circuit And Applications*. World Scientific Press, New York, NY, 1993.
- [38] T. Kapitaniak. *Controlling Chaos*. Academic Press, New York, NY, 1996.
- [39] Meyerand Th. M.J. and A. Kitteland J. Parisi. Hyperchaos in the generalized rossler system. *Phys. Rev. E*, 56:5069–5074, 1997.
- [40] A. Wolf, J. B. Swift, and J. Vastano. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 16:3251–3260, 1985.
- [41] K. Alligood, T. Sauer, and J.A. Yorke. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, NY, 1997.
- [42] G. M. Maggio. Applications of symbolic dynamics to chaos-based communications. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 12:985–995, 1992.
- [43] H. B. Lin. *Elementary Symbolic Dynamics*. World Scientific Press, New York, NY, 1987.
- [44] P. Cvitanovic. *Classical and Quantum Chaos*. Disponível em: www.nbi.dk/ChaosBook/ChaosBook, Acessado em Novembro de 2003, 2003.

- [45] E. M. Bollt. Review of chaos communication by feedback control of symbolic dynamics. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 13:269–285, 2003.
- [46] N. B. Tufillaro, T. Abbott, and J. P. Reilly. *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison Wesley, NY, New York, NY, 1992.
- [47] E. Bollt and Y-C. Lai. Dynamics of coding in communication with chaos. *Phys. Rev. E*, 58:1724–1736, 1998.
- [48] Paul G. Hoel, Sidney C. Port, and Charles J. Stone. *An Introduction to Stochastic Processes*. John Wiley & Sons, New York, NY, 1972.
- [49] Y. C. Lai, E. Bollt, and C. Grebogi. Communicating with chaos using two-dimensional symbolic. *Physics Letters A*, 255:75–81, 1999.
- [50] M. S. Baptista, M. S., E. E. Macau, and C. Grebogi. Conditions for efficient chaos-based communication. *Chaos*, 13:145–150, 2003.
- [51] L. D. Ruslam, Y.-C. Cheng, E. Bollt, and M. Dhamala. Estimating generating partitions of chaotic systems by unstable periodic orbits. *Phys. Rev. E*, 61:1353–1356, 2000.
- [52] T. M. Cover and A. J. Thomas. *Elements of information theory*. John Wiley and Sons, New York, 1991.
- [53] T. Kapitaniak and M. S. El-Naschie. A note on randomness and strange behaviour images of synchronized: Experiments with circuits. *Phys. Lett. A*, 154:249–253, 1991.
- [54] N. F. Rulkov. Images of synchronized: Experiments with circuits. *Chaos*, 6:262–279, 1996.
- [55] L. M. Pecora and T. L. Carrol. Driving systems with chaotic signals. *Phys. Rev. Lett.*, 44:2374–2388, 1991.
- [56] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64:821–824, 1990.

- [57] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronizing nonautonomous chaotic circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 40:646–650, 1995.
- [58] H. Dedieu, M. P. Kennedy, and M. Hassler. Chaos shift keying: Modulation and demodulation of a carrier using self-synchronizing chua's circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 40:634–642, 1993.
- [59] A. Sato and T. Endo. Experiments of secure communications via chaotic synchronization of phase-locked loops. *IEEE Trans. Fundament.*, E78-A:1286–1290, 1995.
- [60] M. Ding. Control and synchronization of chaos in high dimensional systems: Review of some recent results. *Chaos*, 7:644–651, 1997.
- [61] K. Short. Steps toward unmasking secure communications. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 4:959–977, 1994.
- [62] M. Ding. Control and synchronization of chaos in high dimensional systems: Review of some recent results. *Chaos.*, 7:644–652, 1997.
- [63] K. Kaneko. *Theory and Application of Coupled Map Lattices*. John Wiley & Sons, New York, NY, 1993.
- [64] K. Kaneko. Globally coupled maps. *Physica D*, 54:5–10, 1991.
- [65] G. Q. Zhong, K. F. Man, and K. K. Ko. Uncertainty in chaos synchronization. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 6:1723–1735, 2001.
- [66] L. O. Chua, M. Itoh, and L. Kocarev. Chaos synchronization in chua's circuits. *J. Circuits Syst. Comput.*, 3:93–108, 1993.
- [67] T. L. Carroll, G. A. Johnson, L. M. Pecora, and D. J. Mar. Parameter-insensitive and narrow-band synchronization of chaotic circuits. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 9(11):2189–2196, 1999.
- [68] S. Taherion and Y. C. Lai. Observability of lag synchronization of coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. E*, 59:6242–6251, 1997.

- [69] Y. S. Kivshar, F. Rodelsperger, and H Brenner. Supression of chaos by nonressonant parametric pertubations. *Phys. Rev. E*, 49:319–324, 1994.
- [70] A. Rodrigues, M. S. Baptista, J. R. C. Piqueira, and I. L. Caldas. Conditional targeting for communication. *Chaos, Solitons and Fractal*, page no prelo, 2004.
- [71] W. L. Ditto, S. N. Rauseo, and M. L. Spano. Extracting message masked by chaos. *Phys. Rev. Lett*, 65:3211–3214, 1990.
- [72] A. Garfinkel, M. L. Spano, W. L. Ditto, and J. N. Weiss. Controlling cardiac chaos. *Science*, 257:1230–1233, 1992.
- [73] T. Fischer Heil and W. I. Elsasser. Influence of amplitude-phase coupling on the dynamics of semiconductor lasers subject to optical feedback. *Physical Review A*, 60:634–641, 1999.
- [74] V. Petrov, M. J. Crowley, and K. Showalter. Tracking unstable periodic orbits in the belousov-zhabotinsky reaction. *Phys. Rev. Lett*, 72:2955–2958, 1994.
- [75] C. Grebogi, Lai Y.C., and S. Hayes. Control and applications of chaos. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 7:2175–2197, 1997.
- [76] A. Hubler. Adaptive control of chaotic systems. *Phyis. Acta*, 62:343–346, 1989.
- [77] E. M. Bollt and E. J. Kostelich. Optimal targeting of chaos. *Phys. Lett. A*, 245:399–406, 1998.
- [78] M. S. Baptista and I. L. Caldas. Easy-to-implement method to target nonlinear systems. *Chaos*, 8:290–299, 1998.
- [79] E. E. Macau. Targeting in chaotic scattering. *Phys. Rev. E*, 57:5337–5346, 1998.
- [80] D. Gligoroski, D. Dimovski, L. Kocarev, V. Urumov, and L. O. Chua. A method for encoding messages by time targeting of the trajectories of chaotic systems. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 6:2119–2125, 1996.
- [81] Ott E., C. Grebogi, and A. Yorke. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1196–1199, 1990.

- [82] H. D. I. Abarbanel. *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer-Verlag, New York, NY, 1995.
- [83] J. P. Eckmann and D. Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Review of Modern Physics*, 57:617–655, 1985.
- [84] Y. C. Lay and C. Grebogi. Synchronization of chaotic trajectories using control. *Phys. Rev. E*, 47:2357–2362, 1993.
- [85] M. J. Ogorzaek. Design considerations for electronic chaos controllers. *Chaos, Solitons and Fractals*, 9:1–2, 1998.
- [86] M. A. G. Ruggiero and V. L. R. Lopes. *Cálculo Numérico. Aspectos Teóricos e Computacionais*. Makron Books, São Paulo, 1997.
- [87] J. Schweizer and M. P. Kennedy. Predictive poincaré control: A control theory for chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 52:4865–4875, 1995.
- [88] G. M. Zaslavsky and M. K. Tippet. Connection between recurrence-time statistics and anomalous transport. *Phys. Rev. Lett.*, 67:3251–3254, 1991.
- [89] J. P. Gao. Detecting nonstationarity and state transitions in a time series. *Phys. Rev. E*, 63:4865–4875, 2002.