PÊNDULO ELÁSTICO: COORDENADAS FÍSICAS, TRANSIÇÃO ORDEM-CAOS-ORDEM E DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA

Meirielen C. de Sousa[1], F. Alberto Marcus[2], Iberê L. Caldas[1], Ricardo L. Viana[2]

[1] Instituto de Física, Universidade de São Paulo
[2] Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná

Mecânica Clássica (Pós-Graduação), Instituto de Física da USP, 02/10/2019

PÊNDULO ELÁSTICO

- Mola massa desprezível, constante elástica k, comprimento l_0 ausência de forças

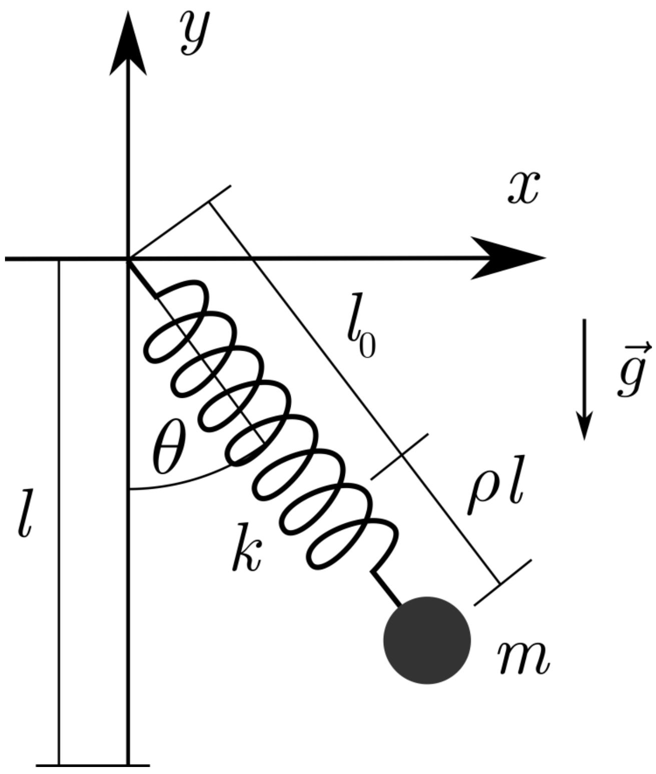
- Uma extremidade mola presa em $(x,y) = (0,0)$

- Massa m presa à extremidade livre mola

- Movimento apenas plano vertical:
  2 graus liberdade

- Posição equilíbrio estável:
  força elástica = força gravitacional
  $(x,y) = (0,-l)$

- $l = l_0+mg/k$, g é aceleração gravidade



APLICAÇÕES

- Paradigma para estudo sistemas não-lineares acoplados

- Diversas propriedades dinâmicas de interesse:

  - caos
  - ressonâncias
  - transição ordem-caos-ordem
  - troca de energia entre mola e pêndulo

- Representação qualitativa muitos sistemas:

  - órbitas corpos celestes (ex: satélites, asteroides)
  - análogo clássico modos vibração moléculas triatômicas produzindo ressonância Fermi espectros infravermelho e Raman
  - interação ondas eletromagnéticas em meio não-linear
  - acoplamento ondas em física plasmas
  - componente sistemas mecânicos, etc.

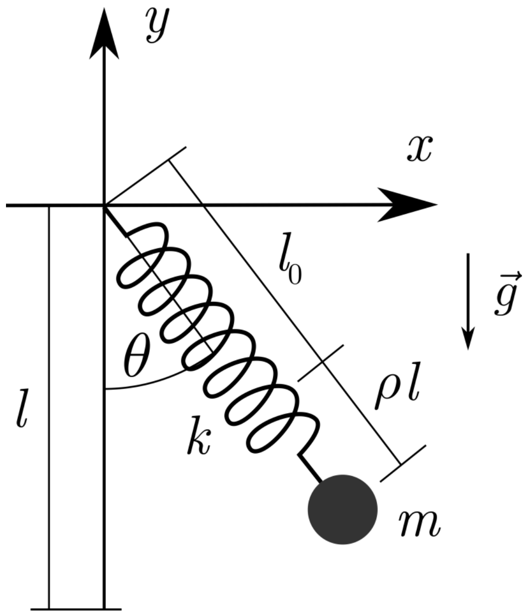
M. C. de Sousa *et al.*, Physica A 509, 1110 (2018)

COORDENADAS FÍSICAS

- Hamiltoniana coordenadas cartesianas:

$$\mathcal{E}_{Total} = \mathcal{E}_{Cinética} + \mathcal{E}_{Potencial\ \ Gravitacional} + \mathcal{E}_{Potencial\ \ Elástica}$$

$$\mathcal{E}_{Total} = \mathcal{H} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + mgy + \frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0\right)^2$$



- Sistema melhor compreendido quando utilizamos coordenadas (adimensionais) se relacionam diretamente aos movimentos mola e pêndulo

$$\rho = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{l} - \frac{l_0}{l} \quad \Rightarrow$$ compressão ou distensão mola a partir l_0

$$\theta = \arctan\frac{x}{-y} \quad \Rightarrow$$ ângulo entre massa m (pêndulo) e eixo vertical apontando para baixo (-y)

$$f = \frac{mg}{kl} = 1 - \frac{l_0}{l} \quad \Rightarrow$$ razão frequências pêndulo simples e oscilador harmônico simples

- Coordenadas físicas:

$$\rho = f - 1 + \sqrt{(x^2 + y^2)/l^2}$$
$$\theta = \arctan(x/-y)$$

- Momentos:

$$p_\rho = d\rho/dt$$
$$p_\theta = (\rho + 1 - f)^2 d\theta/dt$$

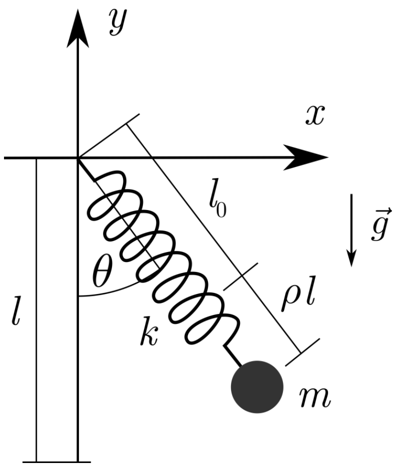
- Outras variáveis e parâmetros:

$$f = mg/kl = 1 - l_0/l$$

$$t = \tau\sqrt{k/m} \quad \text{(tempo adimensional)}$$

- Hamiltoniana coordenadas (ρ,θ):

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + mgy + \frac{k}{2}(\sqrt{x^2+y^2} - l_0)^2$$



$$E_T = H = \mathcal{H}/kl^2$$
$$E_T = H = \frac{1}{2}\left[p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{(\rho+1-f)^2}\right] + \frac{\rho^2}{2} - (\rho+1-f)f\cos\theta$$

M. C. de Sousa *et al.*, Physica A 509, 1110 (2018)

TIPOS TRAJETÓRIAS

- Dois graus liberdade
- Energia total E_T única constante movimento
- Sistema não-integrável:

  pode apresentar comportamento regular, ressonâncias, caos
- Soluções analíticas aproximadas apenas configurações restritas:

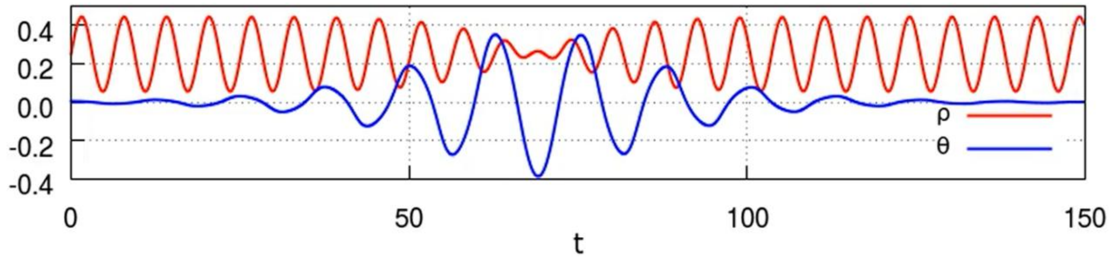
  baixas energias e pequenas amplitudes oscilação
- Demais configurações:

  integração numérica

- Ressonância paramétrica (regular):

  Baixas energias, pequenas amplitudes oscilação,

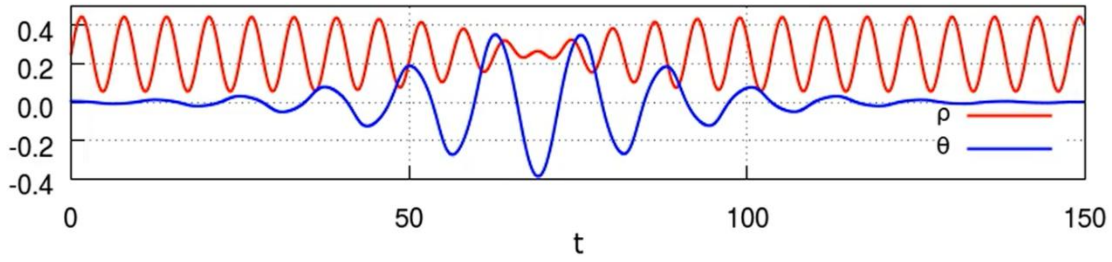
  $f = 0.25$ (razão frequências pêndulo simples e oscilador harmônico = 1/2)



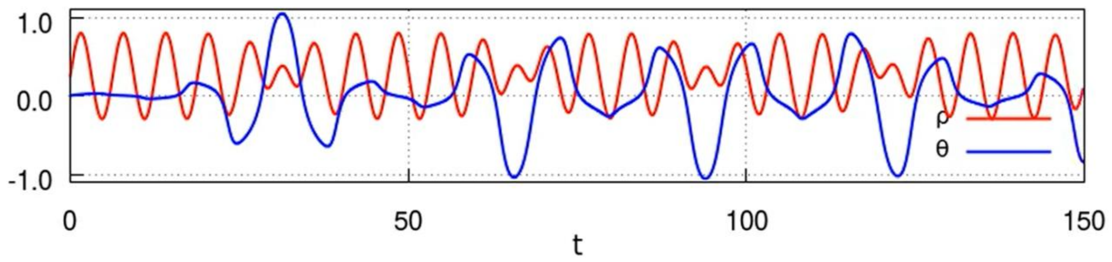
- Ressonância paramétrica (regular):

  Baixas energias, pequenas amplitudes oscilação,

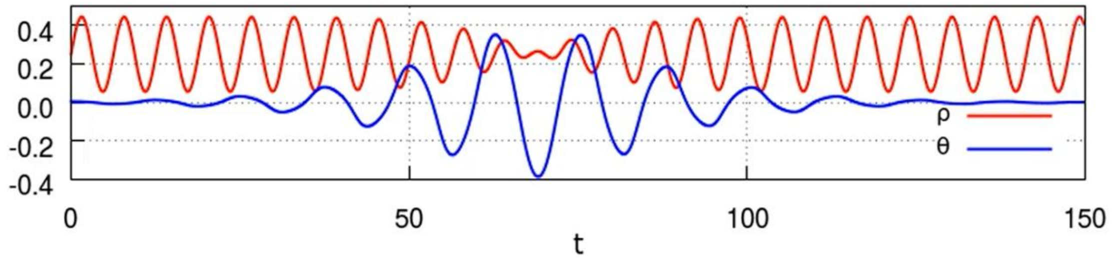
  $f = 0.25$ (razão frequências pêndulo simples e oscilador harmônico = 1/2)



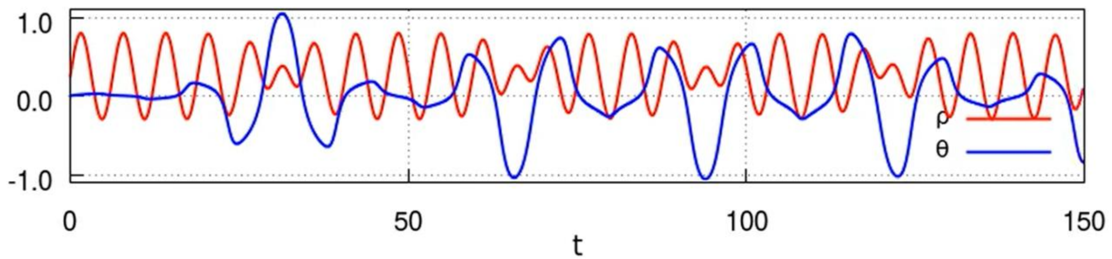
- Órbita quase-periódica (regular):



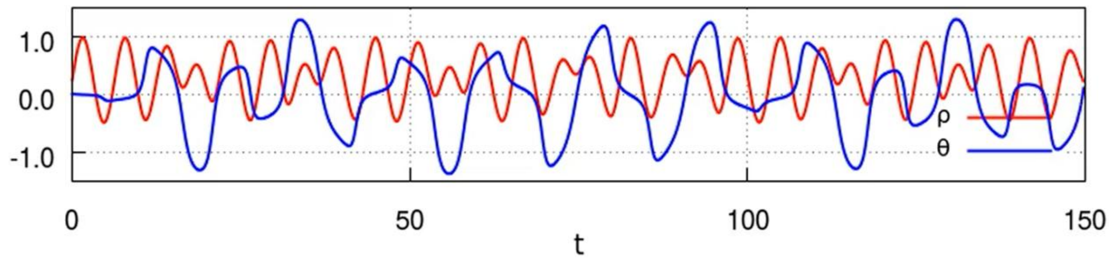
- Ressonância paramétrica (regular):
  Baixas energias, pequenas amplitudes oscilação,
  $f = 0.25$ (razão frequências pêndulo simples e oscilador harmônico = 1/2)



- Órbita quase-periódica (regular):



- Órbita caótica:



SEÇÕES DE POINCARÉ

- Órbitas individuais: evolução temporal para condição inicial específica

- Seções Poincaré: várias órbitas mostram diferentes comportamentos sistema pode apresentar para valor fixo E_T e f

- Energia total E_T conservada:

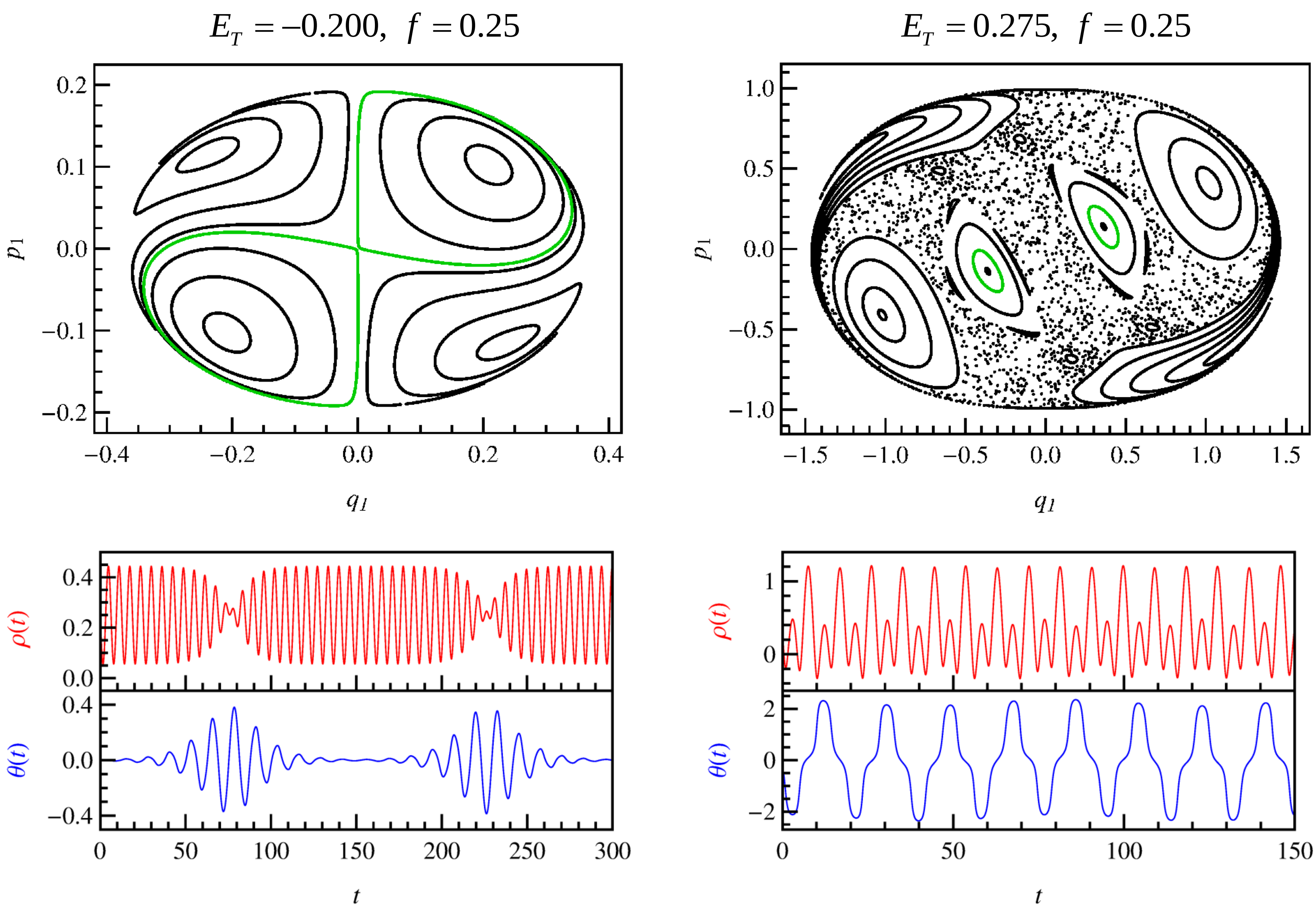
  trajetórias restritas superfície 3D delimitada por E_T

  no espaço fases 4D (x, y, p_x, p_y)

- Seções Poincaré $(p_1 = dq_1 / dt) \times (q_1 = x / l)$

  no plano $q_2 = (y + l) / l = 0$, com $p_2 = dq_2 / dt > 0$

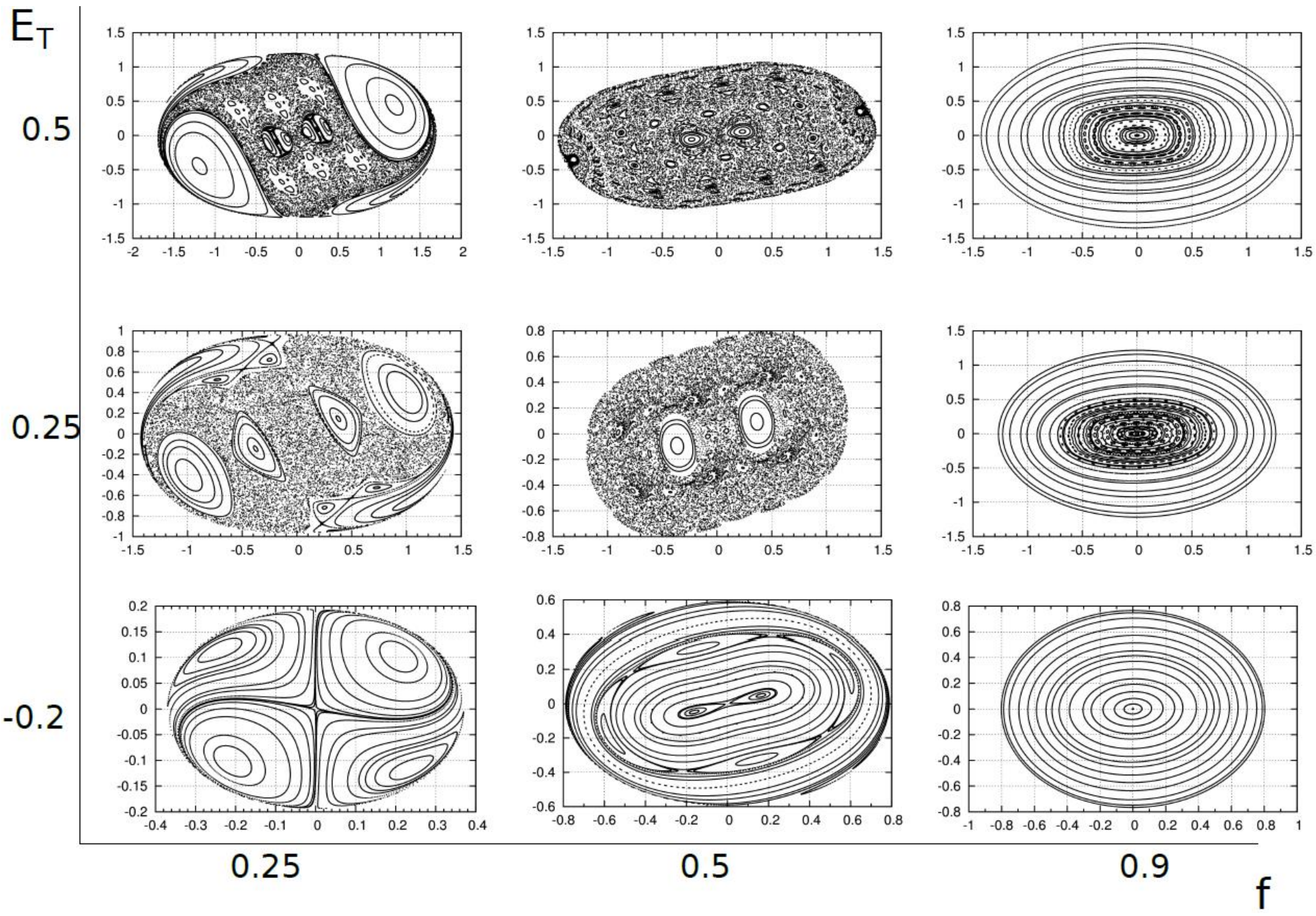
- Essa seção Poincaré contém posição equilíbrio estável $(x, y) = (0, -l)$



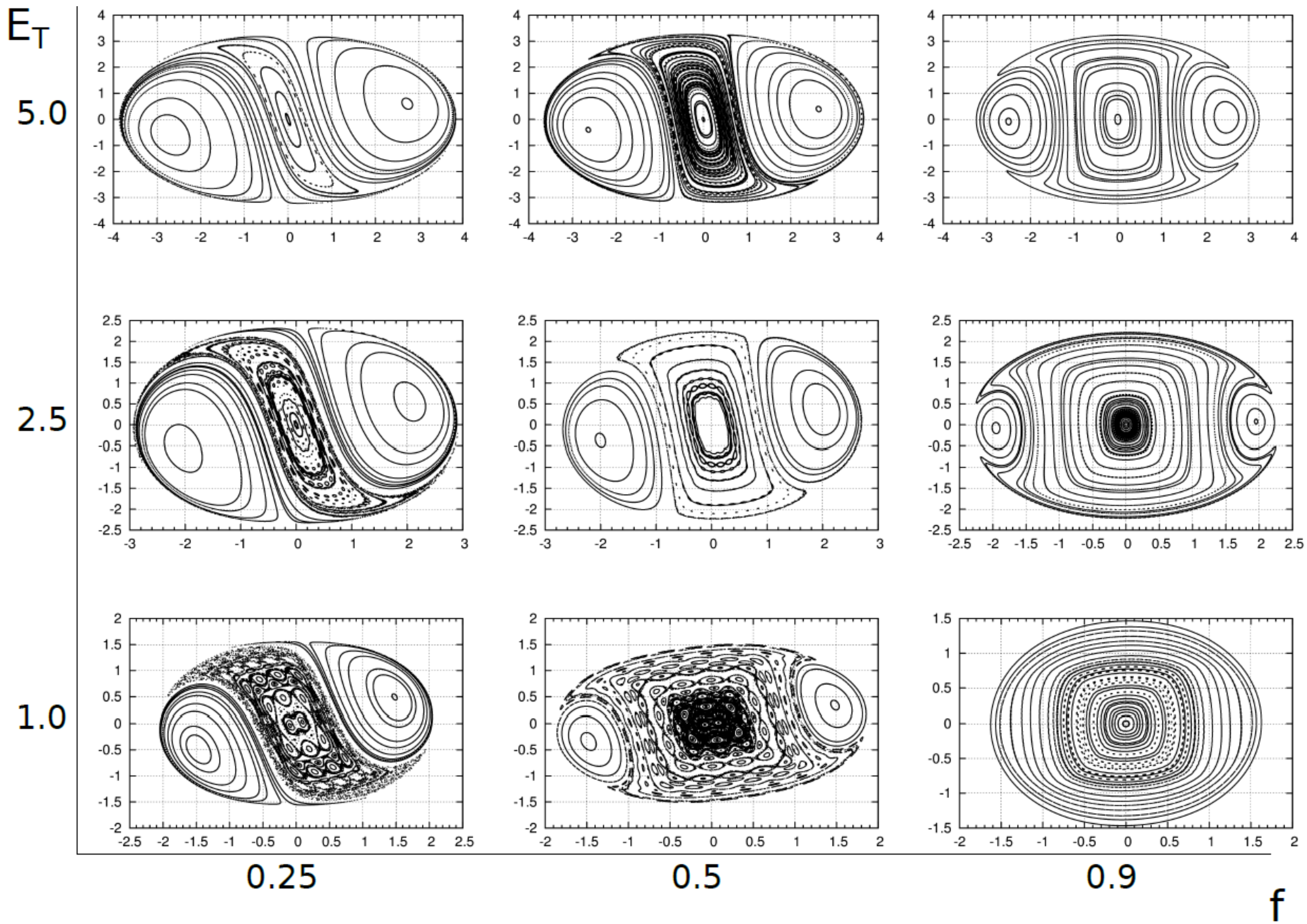
M. C. de Sousa *et al.*, Physica A 509, 1110 (2018)

TRANSIÇÃO ORDEM-CAOS-ORDEM

- Pêndulo elástico apresenta transição ordem-caos-ordem com aumento E_T e f



- Pêndulo elástico apresenta transição ordem-caos-ordem com aumento E_T e f



DISTRIBUIÇÃO ENERGIA

- Pêndulo elástico:

  pêndulo e oscilador harmônico acoplados

- Subsistemas trocam energia através acoplamento não-linear

- Como analisar acoplamento não-linear e movimento acoplado?

- Vamos considerar energia total distribuída entre 3 termos:

  oscilador harmônico (mola), pêndulo e acoplamento

M. C. de Sousa *et al.*, Physica A 509, 1110 (2018)

- Energia mola:

$$E_S = \frac{p_\rho^2 + \rho^2}{2} - (\rho + 1 - f) f$$

-> função apenas (ρ, p_ρ)

-> oscilador harmônico vertical,
sob ação gravidade

-> energia cinética,
potencial elástica, gravitacional

- Energia mola:

$$E_S = \frac{p_\rho^2 + \rho^2}{2} - (\rho + 1 - f)f$$

-> função apenas (ρ, p_ρ)

-> oscilador harmônico vertical,
sob ação gravidade

-> energia cinética,
potencial elástica, gravitacional

- Energia pêndulo:

$$E_P = \frac{p_\theta^2}{2} - f\cos\theta$$

-> função apenas (θ, p_θ)

-> pêndulo simples
com haste fixa comprimento l

-> l: comprimento mola distendida
equilíbrio estável sistema

-> energia cinética,
potencial gravitacional

- Energia mola:

$$E_S = \frac{p_\rho^2 + \rho^2}{2} - (\rho + 1 - f)f$$

-> função apenas (ρ, p_ρ)

-> oscilador harmônico vertical, sob ação gravidade

-> energia cinética, potencial elástica, gravitacional

- Energia pêndulo:

$$E_P = \frac{p_\theta^2}{2} - f\cos\theta$$

-> função apenas (θ, p_θ)

-> pêndulo simples com haste fixa comprimento l

-> l: comprimento mola distendida equilíbrio estável sistema

-> energia cinética, potencial gravitacional

- Energia acoplamento:

$$E_C = \frac{p_\theta^2}{2}\left[\frac{1}{(\rho+1-f)^2} - 1\right] - (\rho - f)f\cos\theta + (\rho + 1 - f)f$$

-> função (ρ, θ, p_θ)

-> energia responsável acoplamento não-linear entre mola e pêndulo

- Energia mola:

$$E_S = \frac{p_\rho^2 + \rho^2}{2} - (\rho + 1 - f)f$$

-> função apenas (ρ, p_ρ)

-> oscilador harmônico vertical,
sob ação gravidade

-> energia cinética,
potencial elástica, gravitacional

- Energia pêndulo:

$$E_P = \frac{p_\theta^2}{2} - f\cos\theta$$

-> função apenas (θ, p_θ)

-> pêndulo simples
com haste fixa comprimento l

-> l: comprimento mola distendida
equilíbrio estável sistema

-> energia cinética,
potencial gravitacional

- Energia acoplamento:

$$E_C = \frac{p_\theta^2}{2}\left[\frac{1}{(\rho + 1 - f)^2} - 1\right] - (\rho - f)f\cos\theta + (\rho + 1 - f)f$$

-> função (ρ, θ, p_θ)

-> energia responsável acoplamento não-linear entre mola e pêndulo

- Energia total pêndulo elástico (sistema acoplado): $E_T = E_S + E_P + E_C$

ENERGIA ACOPLAMENTO

$$E_C = \frac{p_\theta^2}{2}\left[\frac{1}{(\rho+1-f)^2}-1\right]-(\rho-f)f\cos\theta+(\rho+1-f)f$$

- Casos limite:

1) Apenas oscilador harmônico (mola) se move:

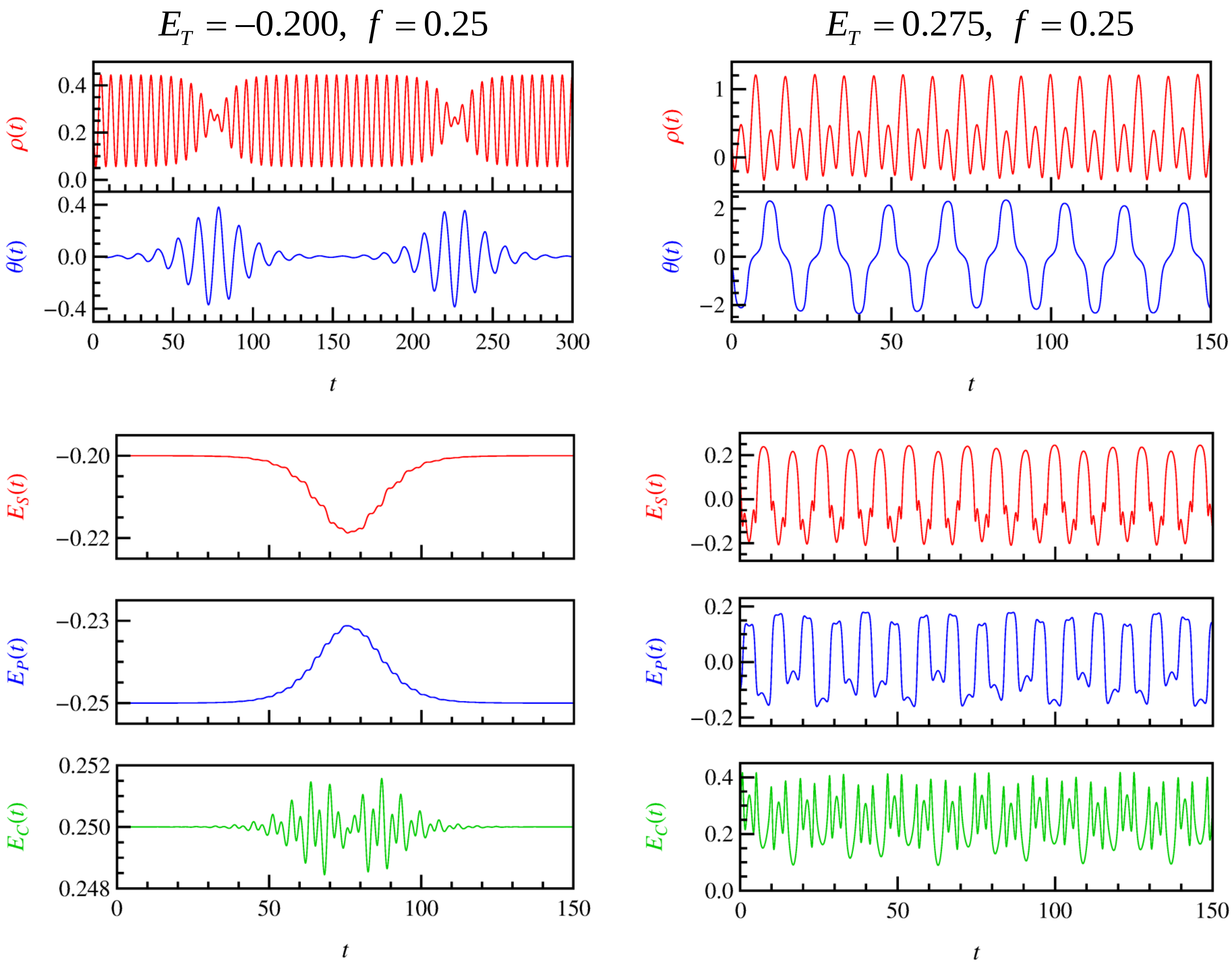
$$\theta=0,\, p_\theta=0 \qquad \Rightarrow \qquad E_C \text{ constante}$$

2) Apenas pêndulo se move:

$$\rho=f,\, p_\rho=0 \qquad \Rightarrow \qquad E_C \text{ constante}$$

- Energia acoplamento E_C representa corretamente acoplamento sistema

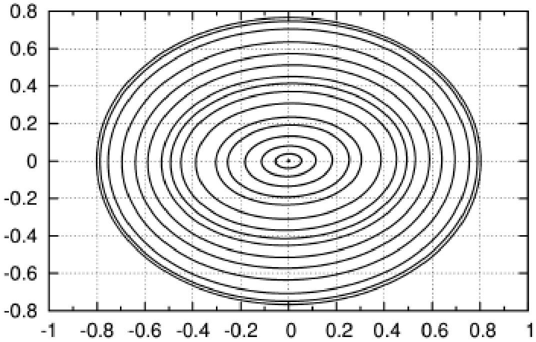
M. C. de Sousa *et al.*, Physica A 509, 1110 (2018)

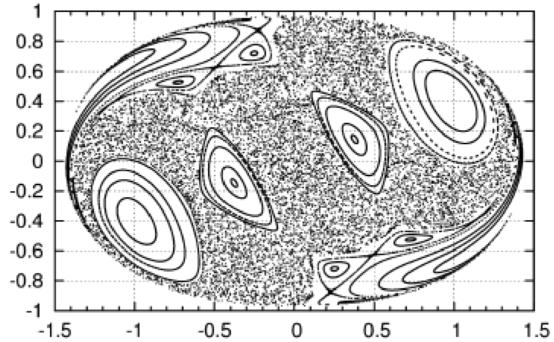


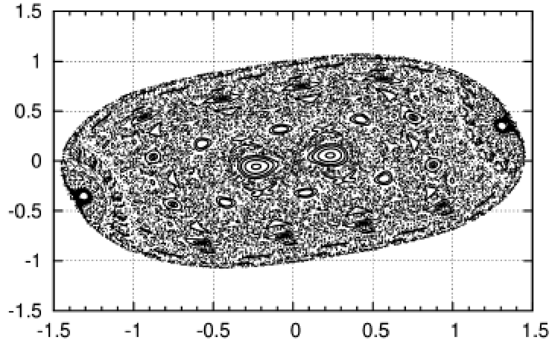
M. C. de Sousa *et al.*, Physica A 509, 1110 (2018)

DISTRIBUIÇÃO ENERGIA

$E_T = -0.20, \ f = 0.90$ $E_T = 0.25, \ f = 0.25$ $E_T = 0.50, \ f = 0.50$







- Distribuição energia diferente para cada tipo trajetória:

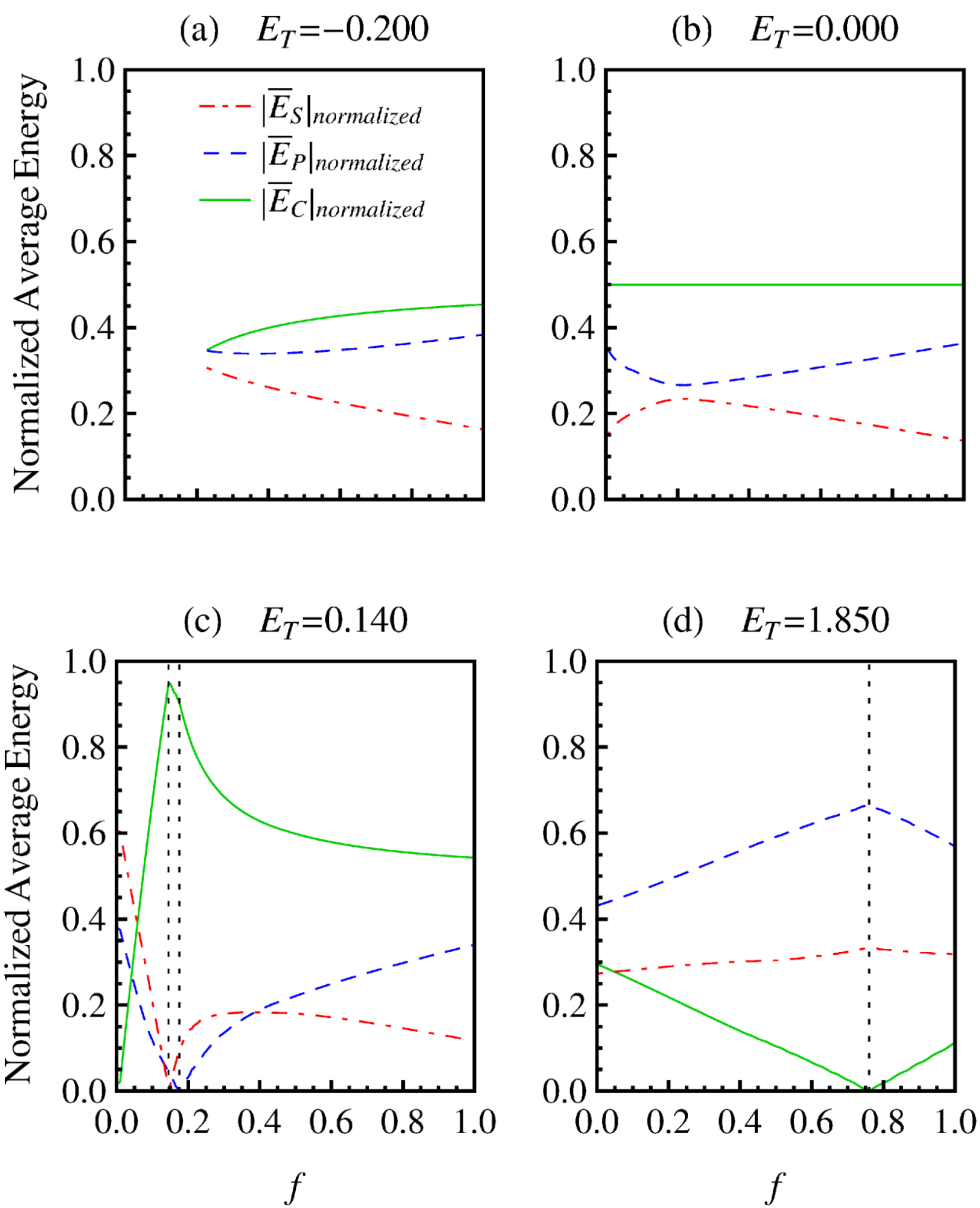
  toros invariantes, ilhas ressonância, caos

- Comportamento sistema diferente para cada valor E_T e f

- Energia média para grande número trajetórias:

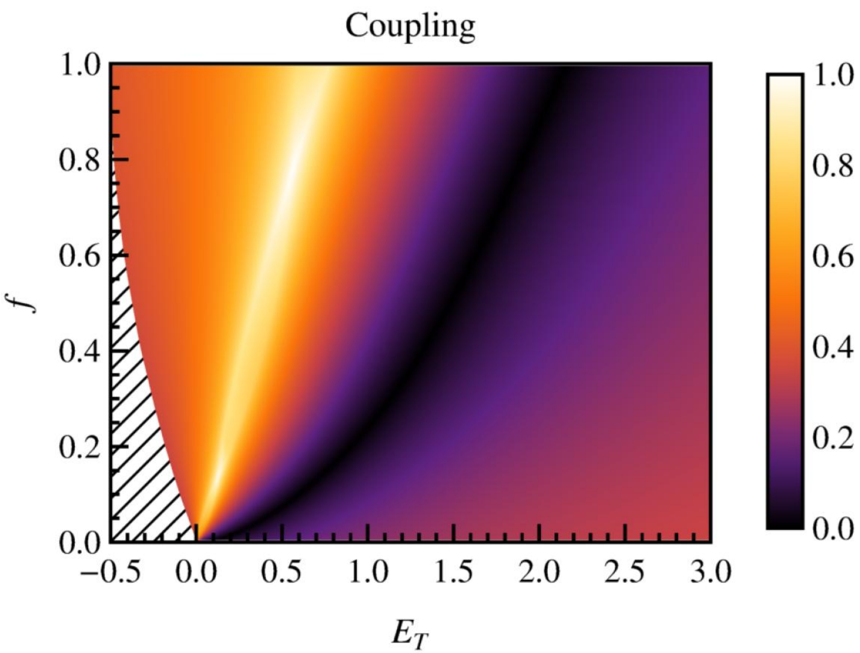
  como distribuição energia varia com E_T e f

M. C. de Sousa *et al.*, Physica A 509, 1110 (2018)



- Energia total baixa:
  acoplamento forte, $|\bar{E}_C|_N > 0.5$,
  mola e pêndulo trocam muita energia,
  difícil distinguir dois tipos movimento

- $|\bar{E}_C|_N \simeq 1$: toda energia, em média,
  no acoplamento, $|\bar{E}_S|_N \simeq |\bar{E}_P|_N \simeq 0$

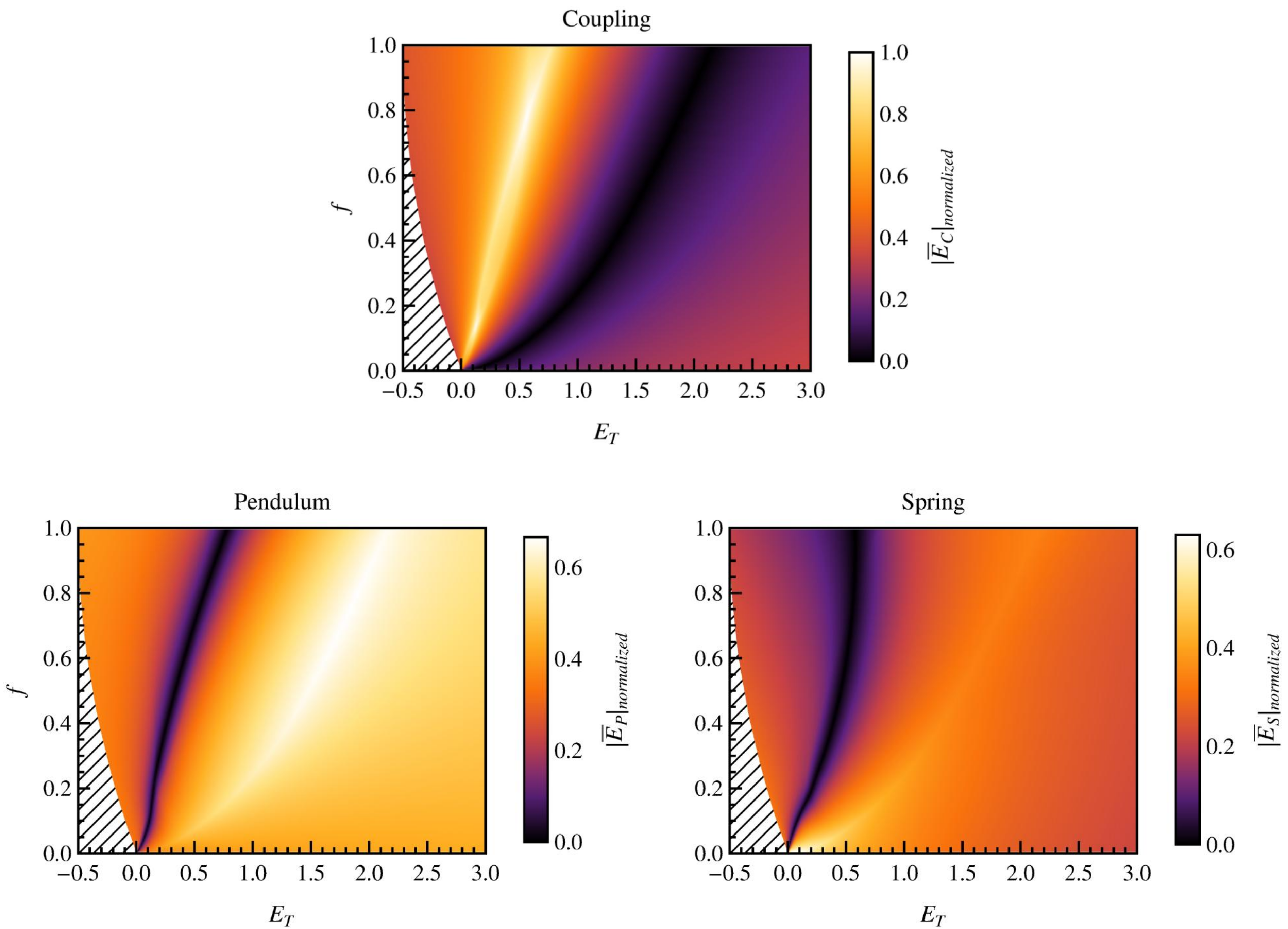


- Energia total intermediária:
  acoplamento fraco, $|\bar{E}_C|_N < 0.3$,
  mola e pêndulo trocam pouca energia,
  possível distinguir movimentos individuais mola e pêndulo

- $|\bar{E}_C|_N \simeq 0$: toda energia, em média, mola e pêndulo,
  energias mola e pêndulo são máximas

- Energia total elevada: acoplamento moderado,
  movimento pêndulo domina dinâmica

M. C. de Sousa *et al.*, Physica A 509, 1110 (2018)



Coupling
f
E_T
$|\overline{E}_C|_{normalized}$
Pendulum
f
E_T
$|\overline{E}_P|_{normalized}$
Spring
f
E_T
$|\overline{E}_S|_{normalized}$

- Sistema não-linear e não-integrável

- Descrição Hamiltoniana para termos energias

- Expressões analíticas podem ser usadas

  qualquer valor E_T e f

  qualquer valor amplitudes oscilação mola e pêndulo

  acoplamento fraco e forte

  todo tipo trajetória (regular, caótica, rotação e libração pêndulo)

- Possível saber como acoplamento não-linear

  provoca trocas energia entre mola e pêndulo

  determina comportamento sistema acoplado