Dinâmica Hamiltoniana Aplicada

Apresentação da disciplina

Prof. Ricardo Luiz Viana
rlv640@gmail.com

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, Brasil
Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba-PR, Brasil

PGF5381: disciplina optativa do curso de pós-graduação em Física
período: 8 semanas (de 16/08/2022 a 14/10/2022)

IFUSP
Instituto de Física da USP

Conteúdo da aula

Objetivos da disciplina

Programa da disciplina

Bibliografia

Avaliação

Histórico da Dinâmica Hamiltoniana

Objetivos da disciplina

- Revisar o formalismo Hamiltoniano da Mecânica Analítica
- Apresentar os fundamentos da descrição geométrica da Dinâmica Hamiltoniana no espaço de fase
- Introduzir técnicas de integração numérica das equações
- Estudar algumas formas da teoria de perturbação para sistemas quase-integráveis, com aplicações físicas
- Apresentar conceitos sobre sistemas quase-integráveis no espaço de fase (teoremas KAM e de Poincaré-Birkhoff)
- Introduzir o conceito de emaranhado homoclínico e a caracterização de órbitas caóticas no espaço de fase
- Estudar o problema restrito de três corpos no plano como aplicação do formalismo Hamiltoniano
- Apresentar aplicações selecionadas da Dinâmica Hamiltoniana para fluidos ideais e plasmas de fusão (Tokamaks)
- Discutir as relações entre a Teoria Quântica (antiga e nova) e a Dinâmica Hamiltoniana

Programa da disciplina

- Equações de Lagrange
- Aplicações: oscilador harmônico, pêndulo, problema de Kepler, partículas em campos eletromagnéticos
- Equações de Hamilton
- Transformações canônicas
- Espaço de fase: equilíbrio e estabilidade
- Teorema de Liouville
- Equação de Hamilton-Jacobi
- Variáveis de ângulo e ação
- Teoria de perturbações
- Sistemas não-integráveis: teoremas KAM e Poincaré-Birkhoff
- Emaranhado homoclínico e caos
- O problema de três corpos
- Aplicações em fluidos e plasmas

Bibliografia

- Notas de aula
- A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Motion*, 2nd Ed. (Springer Verlag, 1992)
- I. Percival, D. Richards, *Introduction to Dynamics* (Cambridge University Press, 1982)
- A. M. Ozório de Almeida, *Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization* (Cambridge University Press, 1988)
- H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd. Ed. (Addison Wesley, 1980)
- L. Landau, E. Lifshitz, *Mecânica* (Ed. Mir, Moscou, 1978)
- W. F. Wreszinski, *Mecânica Clássica Moderna* (EDUSP, São Paulo, 2016)
- S. Ferraz-Mello, *Caos e Planetas: Dinâmica Caótica de Sistemas Planetários* (Ed. da Física, São Paulo, 2021)
- M. A. M. de Aguiar, *Tópicos de Mecânica Clássica* (Ed. Livraria da Física/CBPF, São Paulo, 2011)
- N. Lemos, *Mecânica Analítica* (Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2013)

Avaliação

- pequena monografia abordando assunto de livre escolha envolvendo um ou mais tópicos abordados no curso
- pode ser um assunto ligado ao projeto de pesquisa de pós-graduação do estudante
- deve ser enviado ao professor por e-mail rlv640@gmail.com, no formato pdf
- data limite de envio: último dia de aula (14/10/2022)

Formalismo Lagrangiano

- Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)
- *Mécanique Analytique* (1789)
- introduziu as coordenadas generalizadas, que permitiram o emprego de diferentes sistemas de coordenadas, dando a liberdade de escolher aquele mais adequado
- as equações de movimento são obtidas a partir das energias cinética e potencial, dispensando a descrição das forças
- envolve apenas quantidades escalares, ao contrário das equações Newtonianas, que usam grandezas vetoriais como forças e torques

MÉCHANIQUE

ANALITIQUE.

A PARIS,

Chez la Veuve DESAINT, Libraire,

M. DCC. LXXXVIII.

Formalismo Hamiltoniano

- William Rowan Hamilton (1805-1865)
- dois trabalhos publicados em 1834-1835
- baseou sua formulação da dinâmica na ótica geométrica
- analogia entre os raios luminosos e as trajetórias das partículas
- princípio de Fermat (mínimo caminho ótico) levando ao princípio de mínima ação
- Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851)
- dois artigos publicados em 1836-1837
- reinterpretou e estendeu o trabalho de Hamilton para forças dependentes do tempo

O problema de N corpos

- determinação do movimento de N partículas no espaço interagindo por meio de forças gravitacionais
- é o problema historicamente mais importante de toda a Mecânica
- $N = 2$: problema de Kepler (solução exata: órbitas elípticas)
- $N = 3$: desafiou os maiores matemáticos desde Newton
- problema restrito dos três corpos no plano: duas partículas em órbitas circulares e uma terceira, de massa desprezível, interage com o campo gravitacional das outras duas

Teoria (hamiltoniana) de perturbação

- partimos de um problema com solução exata e consideramos o efeito de um termo perturbativo
- a órbita observada do planeta Urano apresentava pequenas discrepâncias em relação àquela calculada com base nos planetas então conhecidos e o Sol
- Urbain Le Verrier (1811-1877) propôs em 1846 a existência de um novo planeta, cuja atração gravitacional seria responsável pela perturbação
- o planeta Netuno foi descoberto um mês depois, exatamente na posição prevista por Leverrier

Teoria de perturbação

- soluções do problema perturbado são aproximadas na forma de séries de potências em um parâmetro "pequeno"
- Charles-Eugène Delaunay (1816-1872): aplicação das técnicas perturbativas ao problema restrito dos três corpos (Teoria Lunar)
- as séries perturbativas apresentam problemas de convergência quando há ressonâncias: comensurabilidade dos períodos orbitais
- exemplo: os períodos de Plutão e Netuno têm uma razão $2:3$

O prêmio do Rei Oscar II

- competição internacional de matemática em homenagem ao 60-ésimo aniversário do Rei (Suécia e Noruega)
- problema: solução do problema de N corpos usando séries perturbativas
- venceu Henri Poincaré (1854-1912), que estudou o problema restrito de 3 corpos
- introduziu novos conceitos e técnicas para a teoria dos sistemas Hamiltonianos não-integráveis
- pontos homoclínicos e comportamento caótico

SUR LE

PROBLÈME DES TROIS CORPS

ET LES

ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

MÉMOIRE COURONNÉ

DU PRIX DE S. M. LE ROI OSCAR II

LE 21 JANVIER 1889.

Desenvolvimentos matemáticos no Século XX

- George Birkhoff (1927): teoria geral de sistemas Hamiltonianos quase-integráveis
- Andrey Kolmogorov (1954): persistência de movimentos quase-periódicos mediante pequenas perturbações
- Jürgen Moser (1962): demonstração do teorema KAM para mapas do twist suaves
- Vladimir Arnold (1963): demonstração do teorema KAM para sistemas Hamiltonianos analíticos

Dinâmica Hamiltoniana e Mecânica Estatística

- espaço de fase: ideia que remonta aos trabalhos de Ludwig Boltzmann
- Josiah Gibbs (1902): conceito de ensemble
- é um grande número de cópias de um sistema, cada qual representando um estado possível do sistema no espaço de fase
- ensembles são representados por conjuntos de pontos no espaço de fase
- Teorema de Liouville: fluxo no espaço de fase é incompressível para sistemas Hamiltonianos
- Poincaré (1890): o volume no espaço de fase é um invariante canônico

Dinâmica Hamiltoniana e Mecânica Quântica

- Planck (1900): quantização da energia do oscilador harmônico
- Bohr (1913): quantização do momentum angular do átomo de hidrogênio
- Sommerfeld (1916): regra de quantização dos invariantes adiabáticos de um sistema periódico
- velha teoria quântica (1900-1925): uso da teoria hamiltoniana de perturbações com a regra de quantização
- Dirac (1925): relação entre os comutadores quânticos $(AB - BA)$ e os colchetes de Poisson das quantidades clássicas correspondentes

THE MECHANICS OF
THE ATOM

BY
MAX BORN

TRANSLATED BY
J. W. FISHER, B.Sc., Ph.D.
AND REVISED BY
D. R. HARTREE, Ph.D.

LONDON
G. BELL AND SONS, LTD.

Dinâmica Hamiltoniana e Mecânica Quântica

- Schrödinger (1926): analogia ótica-mecânica - os raios luminosos estão para as trajetórias das partículas, assim como as ondas eletromagnéticas estão para as ondas de matéria
- a equação de Hamilton-Jacobi é o limite clássico da Mecânica Quântica ($\hbar \to 0$): a fase da função de onda é identificada com a função principal de Hamilton
- frentes de onda: superfícies de fase constante
- aproximação semi-clássica: expansão em potências de $\hbar$, conduz à regra de quantização de Sommerfeld

Dinâmica Hamiltoniana e Mecânica dos Fluidos

- vórtices puntiformes em fluidos ideais: estudados por Helmholtz (1858)
- várias aplicações em aerodinâmica, meteorologia, turbulência
- natureza Hamiltoniana do problema foi apontada pela primeira vez por Kirchhoff (1876)
- problema de grande interesse matemático contemporâneo (Jair Koiller, UFRJ)

Dinâmica Hamiltoniana e Mecânica dos Fluidos

- advecção de um escalar passivo: transporte da partícula devido ao escoamento de um fluido
- várias aplicações científicas e tecnológicas
- para um escoamento plano incompressível o movimento do escalar é um sistema Hamiltoniano
- pode haver movimento caótico mesmo quando o escoamento é não-turbulento

Dinâmica Hamiltoniana e Física de Plasmas

- giração: movimento básico de elétrons e íons positivos em plasmas
- deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ocorre quando existem campos elétricos devidos a ondas longitudinais
- equações do movimento de deriva são similares às da advecção passiva (sistema Hamiltoniano)
- movimentos de partículas podem ser periódicos, quase-periódicos ou caóticos
- aplicações ao Tokamak TCABR do IFUSP

Dinâmica Hamiltoniana e Física de Plasmas

- a estrutura das linhas de campo magnético num Tokamak é um sistema Hamiltoniano
- uma coordenada geométrica faz o papel do tempo
- plasmas em equilíbrio MHD sujeitos a perturbações magnéticas podem ser estudados usando as ferramentas da Dinâmica Hamiltoniana
- pode haver comportamento caótico das linhas de campo magnético
- aplicações: limitador ergódico, divertor (interesse no TCABR)