

Dinâmica Hamiltoniana Aplicada

Capítulo 10

Aplicações em plasmas

Prof. Ricardo Luiz Viana
rlv640@gmail.com



Conteúdo da aula

Introdução

Tokamaks

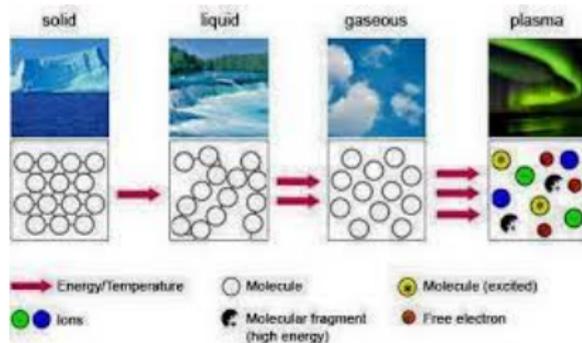
Hamiltoniana de deriva

Linhas de campo magnético em Tokamaks

Limitadores magnéticos em Tokamaks

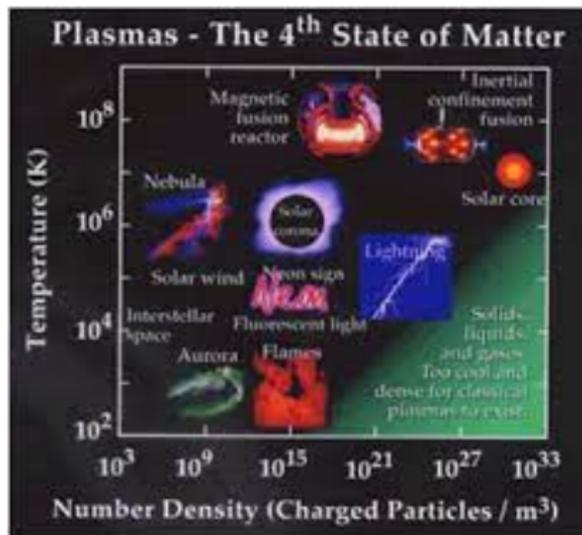
Conclusões

Plasmas



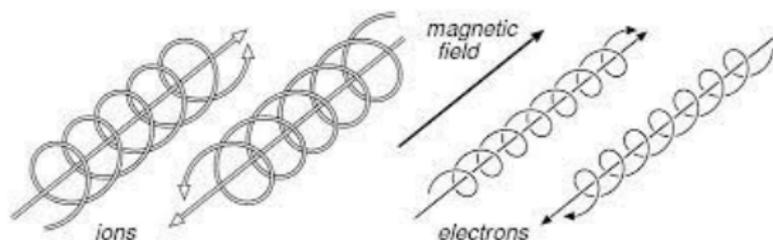
- ▶ um plasma é um gás ionizado que possui propriedades coletivas devido às interações eletromagnéticas (de longo alcance) entre suas partículas
- ▶ plasmas totalmente ionizados: elétrons livres e íons positivos
- ▶ quantidades macroscópicas básicas:
 1. densidade de partículas: número por unidade de volume:
 $n_s = N_s/V$, onde $s = e$ (elétrons), $s = i$ (íons)
 2. temperatura: para um plasma em equilíbrio térmico a energia cinética média das partículas é $(3/2)k_B T_s$, onde k_B é a constante de Boltzmann, e T_s é a temperatura ($1eV \rightarrow 11604K$)

Plasmas de fusão



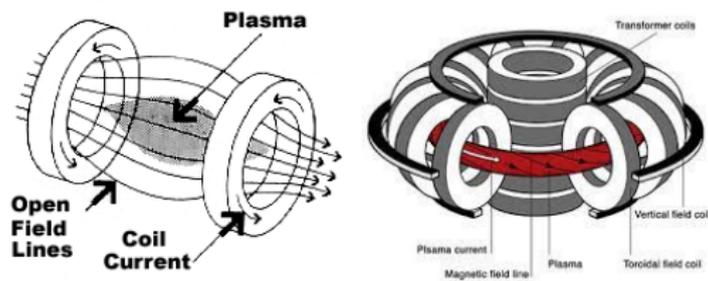
- ▶ plasmas de fusão: $n_s \sim 10^{20} \text{ m}^{-3}$ e $T_s \sim 10^3 \text{ eV}$,
- ▶ velocidades térmicas dos íons são da ordem de 10^5 m/s , enquanto que, para elétrons, elas são da ordem de 10^7 m/s
- ▶ podem ser tratadas no regime não-relativístico

Giração num campo magnético externo



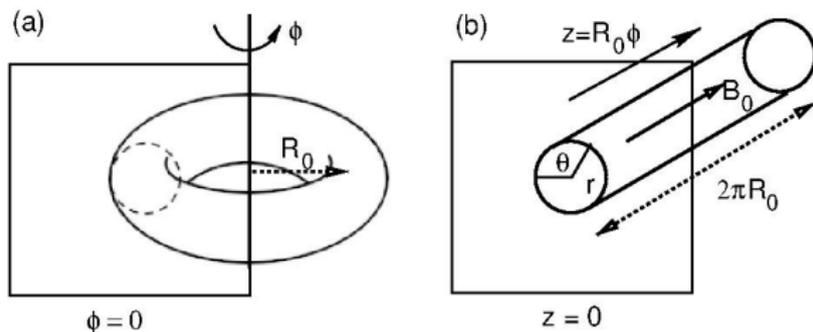
- ▶ plasmas de fusão e astrofísicos estão tipicamente sujeitos a campos magnéticos externos
- ▶ giração: trajetórias helicoidais de frequência $\Omega_s = |q_s|B/m_s$ e raio $r_s = v_{\perp}/\Omega_s$, onde $q_s =$ carga e $m_s =$ massa
- ▶ o centro de guia move-se com velocidade constante v_{\parallel} ao longo das linhas de campo magnético
- ▶ plasmas de fusão: campos magnéticos são da ordem de 1 T - a girofrequência eletrônica é da ordem de $\Omega_e \sim 2 \times 10^{11}\text{ s}^{-1}$
- ▶ com o valor da velocidade térmica correspondente em v_{\perp} , o raio da giração dos elétrons é da ordem de $r_e \sim 2 \times 10^{-4}\text{ m}$.
- ▶ se houver um campo elétrico uniforme \mathbf{E} haverá uma deriva do movimento de giração com velocidade $\mathbf{v}_d = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$

Confinamento magnético de plasmas



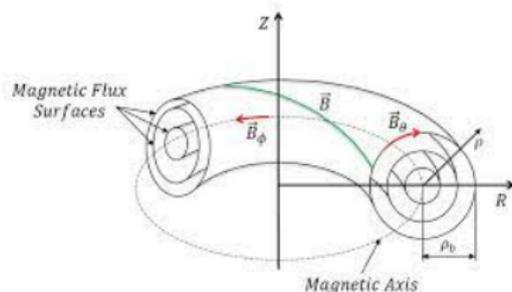
- ▶ plasmas, sendo essencialmente gases, têm uma tendência natural à expansão
- ▶ numa estrela como o Sol, formado por um plasma de alta temperatura, e que gera energia por meio de reações de fusão nuclear, o plasma é confinado pelo intenso campo gravitacional produzido pela sua gigantesca massa.
- ▶ em plasmas astrofísicos e de laboratório, são usados campos magnéticos para o confinamento
- ▶ sistemas de confinamento aberto: empregam o princípio do espelho magnético (garrafa magnética)
- ▶ sistemas fechados de confinamento: linhas de campo magnético fechadas

Geometria de um tokamak



- ▶ raio maior (R_0) e menor (a) da câmara toroidal
- ▶ coordenadas locais: (r, θ, ϕ) , com $0 \leq r \leq a$
- ▶ θ : ângulo poloidal, ϕ : ângulo toroidal
- ▶ $r = 0$: eixo geométrico do toróide
- ▶ se a razão de aspecto R_0/a for suficientemente alta podemos usar a aproximação de cilindro periódico (comprimento $2\pi R_0$)
- ▶ coordenadas cilíndricas: $(r, \theta, z = R_0 \phi)$

Superfícies magnéticas



- ▶ um plasma de fusão pode ser descrito como um fluido ideal com velocidade \mathbf{v} , pressão p , e densidade ρ
- ▶ equação de movimento de um fluido condutor de eletricidade

$$\rho (\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla p + \mathbf{f}.$$

- ▶ \mathbf{j} : densidade de corrente elétrica do plasma
- ▶ $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$: força magnética por unidade de volume
- ▶ no equilíbrio magnetohidrodinâmico $\mathbf{v} = 0$: $\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = 0.$$

- ▶ as linhas de campo magnético jazem sobre superfícies de pressão constante (superfícies magnéticas).

Fator de segurança

- ▶ campo magnético no equilíbrio: $\mathbf{B}_T = B_\phi \hat{e}_\phi$, $\mathbf{B}_P = B_\theta \hat{e}_\theta$
- ▶ campo toroidal: produzido por bobinas posicionadas externamente ao vaso toroidal (como num solenóide)

$$B_\phi = \frac{B_0}{1 + (r/R_0) \cos \theta} \approx B_0, \quad (R_0 \gg a)$$

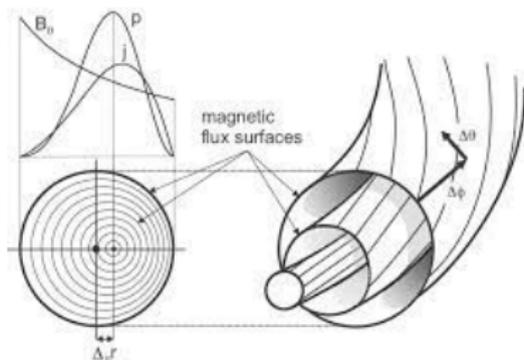
onde B_0 é o campo toroidal no eixo magnético

- ▶ campo poloidal: produzido pela corrente de plasma,

$$B_\theta = \frac{B_0 r}{q(r) R_0},$$

- ▶ onde $q(r)$ é chamado fator de segurança.
- ▶ as linhas do campo magnético no Tokamak jazem sobre toróides coaxiais com o eixo magnético
- ▶ se uma dada linha de campo está inicialmente numa dada superfície magnética $r = \text{const.}$, após uma volta completa toroidal ela percorreu um ângulo na direção toroidal dado por $\iota(r) = 2\pi/q(r)$ (transformada rotacional)

Superfícies racionais e irracionais



- ▶ se o fator de segurança for um número racional da forma m/n , onde m e n são inteiros primos entre si, a transformada rotacional será $\iota = 2\pi n/m$
- ▶ a linha de campo fechar-se sobre si mesma após m voltas na direção toroidal e n voltas na direção poloidal
- ▶ se $q(r)$ for um número irracional, as linhas de campo preenchem densamente a superfície magnética
- ▶ uma superfície racional com $q = m/n$ terá (na superfície de seção $\phi = 0$) n pontos num círculo de raio r . Uma superfície irracional terá um círculo completo na superfície de seção.

Hamiltoniana de deriva

- ▶ usamos coordenadas cartesianas (x, y, z) : x : direção radial, y : direção poloidal, z : direção toroidal no Tokamak
- ▶ giração das partículas carregadas ocorre na direção de um campo magnético uniforme: $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$
- ▶ na presença de um campo elétrico o centro de guia sofre uma deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \rightarrow$ coordenadas $(x(t), y(t))$ num plano perpendicular ao campo magnético
- ▶ se $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, onde $\Phi(x, y, t)$ é o potencial elétrico

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = -\frac{\nabla\Phi \times \hat{\mathbf{z}}}{B_0},$$

- ▶ equações de movimento para a deriva do centro de guia

$$\frac{dx}{dt} = v_{dx} = -\frac{1}{B_0} \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = v_{dy} = \frac{1}{B_0} \frac{\partial\Phi}{\partial x},$$

- ▶ coordenada: y , momentum canonicamente conjugado: x

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x},$$

- ▶ Hamiltoniana de deriva: $H = \Phi/B_0$

Hamiltoniana de deriva

- ▶ se Φ for independente do tempo, o sistema terá um grau de liberdade: integrável.
- ▶ ondas eletrostáticas (ondas de deriva) são longitudinais e seu campo elétrico é obtido a partir de um potencial
- ▶ N ondas eletrostáticas, de amplitudes Φ_j , vetores de onda $\mathbf{k}_j = (k_{jx}, k_{jy})$ e frequências ω_j

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0(x) + \sum_{j=1}^N \Phi_j \sin(k_{jx}x) \cos(k_{jy}y - \omega_j t),$$

- ▶ as ondas são estacionárias na direção radial (x) e progressivas na direção poloidal (y)
- ▶ as partículas do plasma executam giração ao longo do campo magnético uniforme B_0 na direção z
- ▶ um plano perpendicular ao campo magnético é uma seção reta deste cilindro $z = 0$.
- ▶ como o cilindro é periódico, as partículas em giração passam um grande número de vezes pelo plano $z = 0$.

Hamiltoniana de duas ondas

- ▶ supondo um campo elétrico radial de módulo E_0 constante $\Phi_0(x) = -E_0x + \text{const.}$
- ▶ Hamiltoniana para N ondas de deriva

$$H(x, y, t) = -\frac{E_0}{B_0}x + \sum_{j=1}^N \frac{\Phi_j}{B_0} \sin(k_{jx}x) \cos(k_{jy}y - \omega_j t),$$

- ▶ $v_E = -E_0/B_0$ é a velocidade de deriva devido ao campo elétrico uniforme
- ▶ caso de $N = 2$ ondas: $H = -v_E x + \frac{\Phi_1}{B_0} \sin(k_{1x}x) \cos(k_{1y}y - \omega_1 t) + \frac{\Phi_2}{B_0} \sin(k_{2x}x) \cos(k_{2y}y - \omega_2 t)$,
- ▶ fazemos uma transformação canônica $(x, y, t) \rightarrow (x', y', t)$

$$F_2(y, x', t) = x' (y - \omega_1/k_{1y}),$$

- ▶ equações da transformação canônica

$$x = \frac{\partial F_2}{\partial y} = x', \quad y' = \frac{\partial F_2}{\partial x'} = y - \frac{\omega_1}{k_{1y}} t$$

Hamiltoniana de duas ondas

- ▶ Hamiltoniana transformada

$$H'(x', y', t) = H(x, y, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H - \frac{\omega_1}{k_{1y}} x' = (v_E - u_1)x' + \frac{A_1}{B_0} \sin(k_{1x}x') \cos(k_{1y}y') + \frac{A_2}{B_0} \sin(k_{2x}x') \cos[k_{2y}(y' - ut)],$$

- ▶ onde $u_1 = \omega_1/k_{1y}$ e $u_2 = \omega_2/k_{2y}$ são as velocidades de fase da primeira e segunda ondas, e definimos

$$u = u_2 - u_1 = \omega_2/k_{2y} - \omega_1/k_{1y}$$

- ▶ variáveis adimensionais

$$X = k_{1x}x', \quad Y = k_{1y}y', \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{k_{1x}k_{1y}\Phi_1}{B_0}.$$

- ▶ Hamiltoniana normalizada: $\mathcal{H} = B_0 H' / \Phi_1$

$$\mathcal{H}(X, Y, \tau) = UX + \sin X \cos Y + \varepsilon \sin(kX) \cos[q(Y - \Omega\tau)],$$

$$k = \frac{k_{2x}}{k_{1x}}, \quad q = \frac{k_{2y}}{k_{1y}}, \quad \varepsilon = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}, \quad U = \frac{(v_e - u_1)B_0}{k_{1x}\Phi_1}, \quad \Omega = \frac{uB_0}{k_{1x}\Phi_1},$$

Hamiltoniana de duas ondas

- ▶ a transformação canônica representa a passagem para o referencial da primeira onda
- ▶ tanto k como q são razões entre números de onda, que podem ser tanto racionais como irracionais
- ▶ considerando a segunda onda como uma perturbação não-integrável da primeira, a constante ε é uma medida da intensidade da perturbação
- ▶ $q\Omega$: frequência normalizada da segunda onda, de forma que a perturbação por ela causada tem um período $\tau = 2\pi/q\Omega$
- ▶ parâmetro de aprisionamento U : proporcional à diferença entre a velocidade de deriva e a velocidade de fase da primeira onda.
- ▶ equações de Hamilton

$$\frac{dX}{d\tau} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial Y} = \sin X \sin Y + \varepsilon q \sin(kX) \sin[q(Y - \Omega\tau)],$$

$$\frac{dY}{d\tau} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial X} = U + \cos X \cos Y + \varepsilon k \cos(kX) \cos[q(Y - \Omega\tau)].$$

Caso integrável

- ▶ caso de $N = 1$ onda: $\varepsilon = 0$ (integrável)

$$\mathcal{H}_0(X, Y) = UX + \sin X \cos Y,$$

- ▶ pontos de equilíbrio

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial Y} \right)_{(X^*, Y^*)} = -\sin X^* \sin Y^* = 0$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial X} \right)_{(X^*, Y^*)} = U + \cos X^* \cos Y^* = 0.$$

- ▶ como $-\pi < X \leq \pi$ e $-\pi < Y \leq \pi$, e definindo $\alpha = \arccos U$, com $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, temos, para $0 \leq U \leq 1$,

$$C_1 : (0, \pi + \alpha), \quad C_2 : (0, \pi - \alpha), \quad C_3 : (\pi, \alpha), \quad C_4 : (\pi, -\alpha)$$

$$A_1 : (\pi - \alpha, 0), \quad A_2 : (\pi + \alpha, 0), \quad A_3 : (\alpha, \pi), \quad A_4 : (-\alpha, \pi),$$

- ▶ matriz Jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial Y \partial X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos X \sin Y & \sin X \cos Y \\ -\sin X \cos Y & \cos X \sin Y \end{pmatrix}.$$

Caso integrável

- ▶ definindo o parâmetro

$$\sin \alpha = \sin(\arccos U) = \sqrt{1 - U^2} \equiv \beta,$$

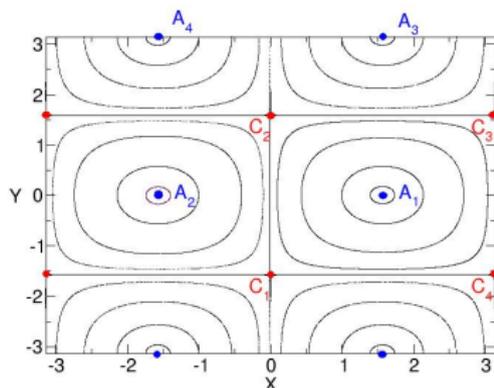
- ▶ matrizes Jacobianas nos pontos de equilíbrio

$$\mathbf{J}(C_{1,2}) = \begin{pmatrix} \mp\beta & 0 \\ 0 & \pm\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}(C_{3,4}) = \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}(A_{1,3}) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}(A_{2,4}) = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

- ▶ matrizes Jacobianas para $C_{1,2,3,4}$ têm como autovalores os seus elementos diagonais
- ▶ como $0 \leq \beta \leq 1$ para $U \leq 1$, para todos os pontos desta família, se um dos autovalores for positivo o outro será negativo, e *vice-versa*
- ▶ estes pontos de equilíbrio serão instáveis (pontos de sela)
- ▶ os autovalores das matrizes Jacobianas para $A_{1,2,3,4}$ são imaginários puros, da forma $\pm i\beta$: são estáveis (centros lineares).

Trajatórias de deriva no plano de fase



- ▶ consideramos $U = 0$, de forma que $\alpha = \pi/2$
- ▶ células: os centros de guia giram em torno dos pontos elípticos

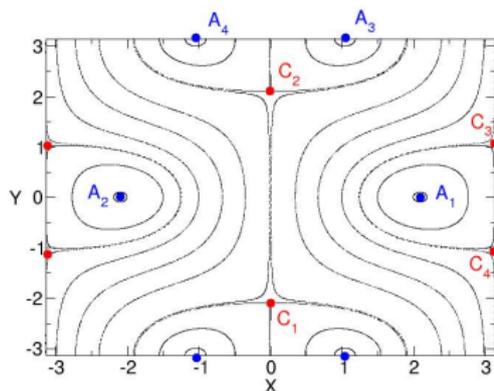
$$A_1 : \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right), A_2 : \left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right), A_3 : \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right), A_4 : \left(-\frac{\pi}{2}, \pi \right),$$

- ▶ as células são separadas por trajetórias heteroclínicas que ligam os pontos hiperbólicos

$$C_1 : \left(0, -\frac{\pi}{2} \right), C_2 : \left(0, \frac{\pi}{2} \right), C_3 : \left(\pi, \frac{\pi}{2} \right), C_4 : \left(\pi, -\frac{\pi}{2} \right).$$

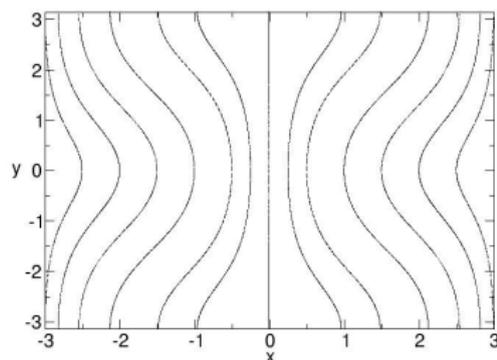
- ▶ trajetórias elípticas no interior das células

Trajatórias de deriva no plano de fase



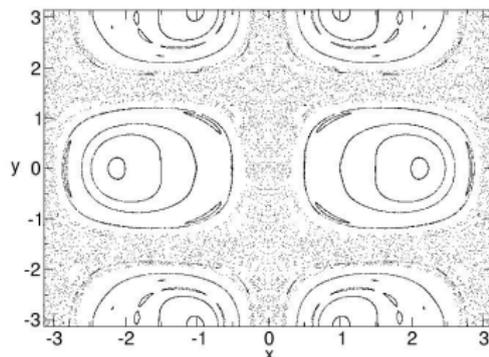
- ▶ $U = 0, 5$, para o qual $\alpha = 1, 0472$: células onde as trajetórias são fechadas em seu interior, orbitando em torno dos pontos elípticos A_i
- ▶ formato diferente das trajetórias heteroclínicas que conectam os pontos hiperbólicos C_i . Duas dessas curvas são compartilhadas por duas células adjacentes.
- ▶ há, também, a presença de trajetórias ilimitadas ao longo da direção poloidal Y , indicando que há partículas que derivam na direção da propagação das ondas

Trajétórias de deriva no plano de fase



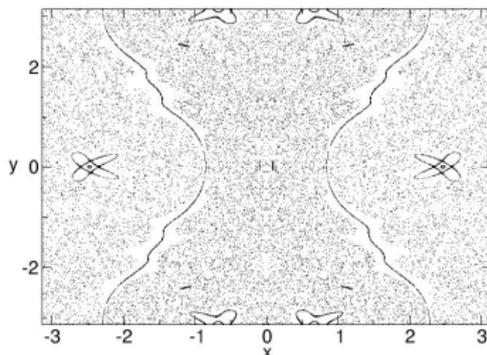
- ▶ $U = 1,5$: como a área ocupada pelas células diminui com o aumento do parâmetro de aprisionamento, esperamos que a quantidade (relativa) de trajetórias ilimitadas aumente à medida em que nos aproximamos de $U = 1$
- ▶ para $U > 1$ só há trajetórias abertas, e não existem mais células

Trajatórias de deriva no plano de fase



- ▶ caso não-integrável: $U = 0$ e $\varepsilon = 0, 1$, com $k = q = \Omega = 1$.
- ▶ mapa estroboscópico: registra os valores de X e Y em tempos que são múltiplos do período da perturbação $\tau_0 = 2\pi/q\Omega$
- ▶ as variedades invariantes que emanam dos pontos hiperbólicos deixam de formar trajetórias heteroclínicas, interceptando-se num número infinito de pontos homoclínicos, no lugar das separatrizes que observamos no caso de uma onda
- ▶ há uma camada de órbitas caóticas que preenchem uma área finita, com remanescentes das células

Trajatórias de deriva no plano de fase



- ▶ $U = 0,5$: as células são progressivamente erodidas pelo aumento na região caótica, que vai também absorvendo trajetórias abertas, das quais apenas um pequeno número é ainda visível
- ▶ as células remanescentes praticamente limitam-se à vizinhança dos pontos elípticos, com uma cadeia próxima de quatro ilhas secundárias.

Descrição Hamiltoniana para linhas de campo magnético

- ▶ a configuração das linhas de campo magnético no equilíbrio magnetohidrodinâmico é estritamente estática
- ▶ em configurações axisimétricas, como os Tokamaks, uma coordenada ignorável desempenha o papel de tempo nas equações canônicas: ângulo toroidal ϕ
- ▶ as equações das linhas de campo magnético podem ser escritas na forma de equações de Hamilton, após definir um par canônico coordenada-momentum
- ▶ como o tempo físico não aparece nas equações, a dinâmica nesta refere-se à estrutura espacial das linhas de campo, onde o tempo passa a ser representado por uma coordenada que nos permite parametrizar uma linha de campo magnético num instante de tempo fixo

Descrição Hamiltoniana para Tokamaks

- ▶ Tokamaks de grande razão de aspecto: aproximação de cilindro periódico
- ▶ coordenadas cilíndricas: $(r, \theta, z = R_0\phi)$
- ▶ equações das linhas de campo magnético: $\mathbf{B} \times \mathbf{ds} = \mathbf{0}$

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} = \frac{R_0 d\phi}{B_\phi},$$

- ▶ fator de segurança

$$q(r) = \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{r B_\phi}{R_0 B_\theta(r)}.$$

- ▶ reescrevemos as equações das linhas de campo

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{R_0 B_r}{B_\phi}, \quad \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{B_\theta R_0}{r B_\phi} = \frac{1}{q(r)} = \mathcal{L}(r),$$

- ▶ onde $\mathcal{L} = \iota/2\pi$ é a transformada rotacional normalizada
- ▶ momentum $J = r^2/2$ canonicamente conjugado à coordenada θ . ϕ faz o papel do tempo.

Descrição Hamiltoniana para Tokamaks

- ▶ equações de Hamilton

$$\frac{dJ}{d\phi} = \frac{R_0 B_r \sqrt{2J}}{B_\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \quad \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{B_\theta R_0}{\sqrt{2J} B_\phi} = \mathcal{L}(J) = \frac{\partial H}{\partial J},$$

- ▶ campo de equilíbrio na aproximação de grande razão de aspecto para o Tokamak: $B_r = 0, B_\theta = B_\theta(r), B_\phi = B_0$
- ▶ Hamiltoniana de linhas de campo magnético

$$H_0(J) = \int \mathcal{L}(J) dJ,$$

- ▶ como (J, θ) formam um par canônico, a configuração de equilíbrio representa um sistema com um grau de liberdade
- ▶ a Hamiltoniana acima não depende explicitamente do “tempo” ϕ : H é constante do movimento, e o sistema é integrável. (J, θ) são variáveis de ação e ângulo
- ▶ o espaço de fase coincide com o espaço de configuração.
- ▶ encarando as linhas de campo como trajetórias de fase do sistema, elas jazem sobre toros no espaço de fase, que coincidem com as superfícies magnéticas toroidais

Descrição Hamiltoniana para Tokamaks

- ▶ equações de Hamilton para o equilíbrio

$$\frac{dJ}{d\phi} = 0, \quad \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\iota(J)}{2\pi},$$

- ▶ as trajetórias de fase estão em toros com raio J constante, e $\iota(J)$ é a transformada rotacional associada ao toro, que pode ser racional ou irracional dependendo do seu valor.
- ▶ perturbações dependentes do “tempo” ϕ : devido à periodicidade em θ e ϕ , a Hamiltoniana correspondente à perturbação pode ser expressa numa série dupla de Fourier

$$\varepsilon H_1(J, \theta, \phi) = \sum_{m', n'} a_{m', n'}(J) \cos(m'\theta - n'\phi),$$

- ▶ onde $\varepsilon \ll 1$ para sistema quase-integrável
- ▶ superfície de seção de Poincaré: plano $\phi = 0$
- ▶ mapa de Poincaré (estroboscópico): registramos os valores de (J_n, θ_n) após um ângulo $\phi = 2\pi n$, com $n = 0, 1, 2, \dots$
- ▶ o mapa é conservativo: devido a $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Sistema quase-integrável

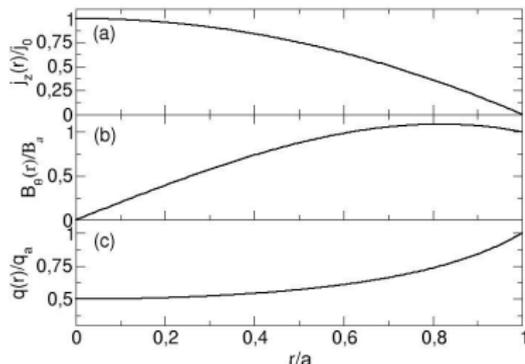
- ▶ Hamiltoniana do equilíbrio + perturbação fraca

$$H(J, \theta, \phi) = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta, \phi),$$

- ▶ resultados da teoria Hamiltoniana

1. a perturbação destrói os toros racionais para os quais $q(J) = m/n$, onde m e n são inteiros primos entre si, deixando em seu lugar um número par de pontos de equilíbrio elípticos e hiperbólicos (Teorema de Poincaré-Birkhoff);
2. a perturbação, desde que suficientemente fraca, mantém uma certa fração de toros irracionais (valores irracionais de $q(J)$), ainda que com deformações (Teorema KAM). Alguns toros irracionais também serão destruídos, dependendo do seu fator de segurança;
3. a existência de pontos homoclínicos (interseções de variedades estáveis e instáveis de pontos hiperbólicos) permite órbitas caóticas, no sentido Lagrangiano do termo: duas linhas de campo magnético, originalmente muito próximas, afastam-se exponencialmente na medida em que as linhas de campo executam revoluções ao longo do Tokamak.

Modelo para o campo magnético de equilíbrio



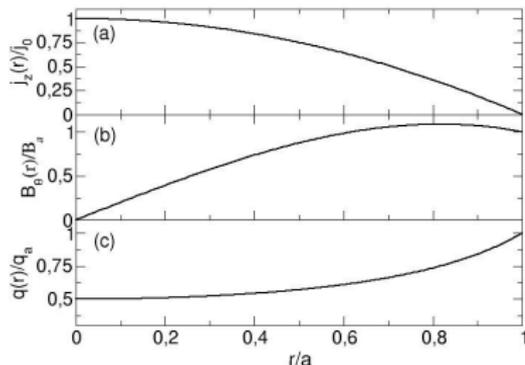
- ▶ na aproximação de grande razão de aspecto, a corrente de plasma é um cilindro de raio a , para o qual a densidade de corrente é não-uniforme, mas tem simetria radial,

$$\mathbf{j} = j_z(r)\hat{\mathbf{z}} = j_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \hat{\mathbf{z}}$$

- ▶ corrente de plasma que flui através de um círculo de raio r

$$I(r) = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{z}} dA = \int_0^r j_z(r') (2\pi r') dr' = \frac{\pi J_0 r^2}{2} \left(2 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

Modelo para o campo magnético de equilíbrio



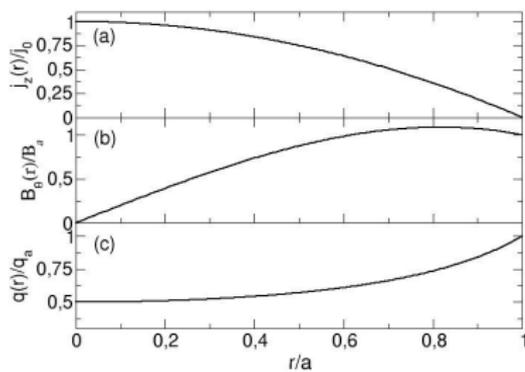
- ▶ corrente total de plasma: $I_p = \pi J_0 a^2 / 2$
- ▶ campo poloidal: pela Lei de Ampère:

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 J_0 r}{4} \left(2 - \frac{r^2}{a^2} \right) = B_{\theta a} \frac{r}{a} \left(2 - \frac{r^2}{a^2} \right),$$

- ▶ campo poloidal na borda do plasma

$$B_{\theta a} = \frac{\mu_0 J_0 a}{4} = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi a}$$

Modelo para o campo magnético de equilíbrio



- ▶ fator de segurança das superfícies magnéticas

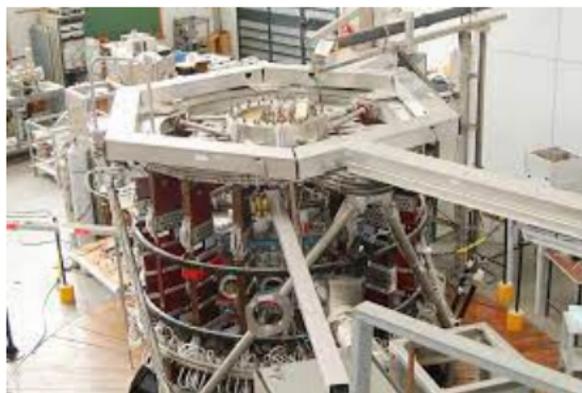
$$q(r) = \frac{r B_0}{R_0 B_\theta(r)} = q_a \left(2 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1},$$

$$q_a = q(r = a) = \frac{a}{R_0} \frac{B_0}{B_{\theta a}} = \frac{2\pi a^2 B_0}{\mu_0 R_0 I_P}, \quad q_0 = q(0) = q_a/2$$

- ▶ Hamiltoniana de equilíbrio

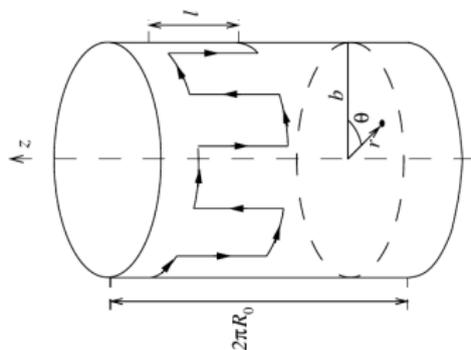
$$H_0(J) = \frac{2}{q_a} \int dJ \left(1 - \frac{J}{a^2} \right) = \frac{2J}{q_a} \left(1 - \frac{J}{2a^2} \right),$$

Tokamak TCABR



- ▶ razão de aspecto: $A = R_0/a = (0,61m)/(0,18m) = 3,4$
- ▶ corrente de plasma (máxima): $I_p = 0,1MA$ logo $j_0 \sim 2MA/m^2$
- ▶ campo poloidal na borda do plasma: $B_{\theta a} = 0,11T$, ou 10% do valor do campo toroidal no eixo magnético $B_0 = 1,1T$
- ▶ fator de segurança na borda do plasma é $q_a = 2,95 \approx 3$, enquanto no eixo magnético é $q_0 = 1,5 > 1$ (limite de Kruskal-Shafranov)

Limitador magnético



- ▶ anel de correntes filamentosas de comprimento ℓ , e enroladas em torno do vaso cilíndrico de raio a
- ▶ segmentos retilíneos paralelos ao longo da direção $z = R_0\phi$, e segmentos curvos na direção θ
- ▶ existem m pares de segmentos retilíneos: dois segmentos adjacentes conduzem a mesma corrente em sentidos opostos.
- ▶ campo magnético produzido pelo limitador ($B_\phi^{(1)} \ll B_0$)

$$B_r^{(1)}(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 m I_L}{\pi a^m} r^{m-1} \sin(m\theta) f(\phi),$$

$$B_\theta^{(1)}(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 m I_L}{\pi a^m} r^{m-1} \cos(m\theta) f(\phi),$$

Hamiltoniana do limitador magnético

- ▶ fator dependente do “tempo” ϕ

$$f(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \phi < \ell/R_0, \\ 0, & \text{se } \ell/R_0 \leq \phi < 2\pi. \end{cases} = \frac{\ell}{2\pi R_0} \left\{ 1 + 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \cos(n\phi) \right\}.$$

- ▶ a Hamiltoniana relativa ao campo magnético do limitador satisfaz as equações canônicas

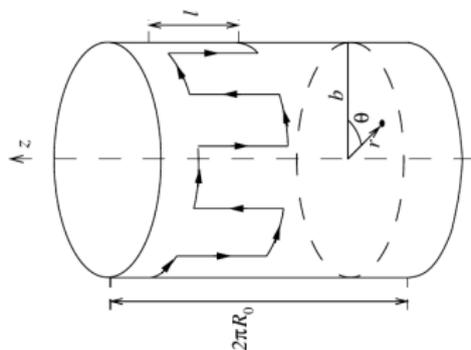
$$\frac{\partial H_1}{\partial \theta} \approx \frac{R_0 B_r^{(1)}(J, \theta, \phi) \sqrt{2J}}{B_0} \quad \frac{\partial H_1}{\partial J} \approx \frac{B_\theta^{(1)}(J, \theta, \phi) R_0}{\sqrt{2J} B_0}.$$

- ▶ em termos da variável de ação $J = r^2/2$,

$$\begin{aligned} H_1(J, \theta, \phi) &= -\frac{\mu_0 R_0 I_L}{B_0 \pi a^m} (2J)^{m/2} \cos(m\theta) f(\phi). \\ &= -\sigma A_m(J) \left\{ \cos(m\theta) + 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \cos(m\theta) \cos(n\phi) \right\}, \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{\mu_0 I_L \ell}{2\pi^2 B_0}, \quad A_m(J) = \frac{(2J)^{m/2}}{a^m}.$$

Limitador magnético no TCABR



- ▶ limitador magnético de comprimento $\ell = 0,1 \text{ m}$ com $m = 3$ pares de fios
- ▶ cada fio conduz uma corrente $I_L = 2500 \text{ A}$
- ▶ parâmetros "pequenos" normalizados

$$\epsilon = \frac{I_L}{I_P} \ll 1, \quad \xi = \frac{\ell}{R_0} \ll 1, \quad \sigma = \epsilon \xi \left(\frac{a^2}{q_a \pi} \right),$$

- ▶ usando os valores para o TCABR, $R_0 = 0,615 \text{ m}$ e $I_P = 100 \text{ kA}$, os coeficientes são $\epsilon = 0,025$ e $\xi = 0,163$
- ▶ σ é pequeno para valores típicos de a e q_a .

Ressonâncias

- ▶ usando a identidade trigonométrica

$$\cos(m\theta) \cos(l\phi) = \frac{1}{2} \{ \cos(m\theta - l\phi) + \cos(m\theta + l\phi) \},$$

- ▶ a Hamiltoniana do equilíbrio mais perturbação

$$H(J, \theta, \phi) = H_0(J) - \sigma A_m(J) \times \left\{ \cos(m\theta) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} [\cos(m\theta - l\phi) + \cos(m\theta + l\phi)] \right\}.$$

- ▶ uma ressonância ocorre quando a fase $m\theta - n\phi$ é constante, de modo que sua derivada “temporal” é nula:

$$m \frac{d\theta}{d\phi} - n = 0 \rightarrow \frac{d\phi}{d\theta} = q(r^*) = \frac{m}{n},$$

- ▶ numa ressonância o fator de segurança é um número racional: o toro correspondente tem raio r^*
- ▶ este toro racional (assim como todos os demais) será destruído pela perturbação H_1 .

Ressonâncias

- ▶ variável de ação na posição da ressonância exata

$$J^* = a^2 \left(1 - \frac{m}{2q_a n} \right),$$

- ▶ o termo $\cos(m\theta - n\phi)$, nesta ressonância, é constante, e portanto oscila lentamente nas suas proximidades.
- ▶ os demais termos, incluindo $\cos(m\theta + n\phi)$ oscilam rapidamente com o “tempo” e anulam-se se fizermos uma média em ϕ
- ▶ separando o termo ressonante da Hamiltoniana

$$H_{res}(J, \theta, \phi) = H_0(J) - \sigma A_m(J) \cos(m\theta - \ell\phi).$$

- ▶ nas vizinhanças da ressonância exata: $\Delta J = J - J^*$, expandindo em séries

$$\begin{aligned} H_{res}(J, \theta, \phi) &= H_0(J^* + \Delta J) - \sigma A_m(J^* + \Delta J) \cos(m\theta - \ell\phi) \\ &= H_0(J^*) + \Delta J \left(\frac{\partial H_0}{\partial J} \right)_{J^*} + \frac{(\Delta J)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} \right)_{J^*} - \sigma A_m(J^*) \cos(m\theta - \ell\phi) + \dots \end{aligned}$$

Hamiltoniana da ressonância

- ▶ Hamiltoniana nas vizinhanças da ressonância exata

$$\begin{aligned}\Delta H(\Delta J, \theta, \phi) &= H_{res}(J, \theta, \phi) - H_0(J^*) \\ &= \Delta J \left(\frac{\partial H_0}{\partial J} \right)_{J^*} + \frac{1}{2} (\Delta J)^2 \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} \right)_{J^*} - \sigma A_m(J^*) \cos(m\theta - \ell\phi).\end{aligned}$$

- ▶ na posição da ressonância exata

$$\left(\frac{dH_0}{dJ} \right)_{J^*} = \mathcal{L}(J^*) = \frac{n}{m}, \quad \left(\frac{d^2 H_0}{dJ^2} \right)_{J^*} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J} \right)_{J^*} = -\frac{2}{q_a a^2}.$$

- ▶ fazemos transformação canônica $(\Delta J, \theta, \phi) \rightarrow (I, \psi)$ com a função geratriz de segunda espécie

$$F_2(I, \theta, \phi) = (m\theta - n\phi)I,$$

- ▶ equações de transformação

$$\psi = \frac{\partial F_2}{\partial I} = m\theta - n\phi, \quad \Delta J = \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = mI,$$

$$\mathcal{H}(I, \psi) = \Delta H(\Delta J, \theta, \phi) + \frac{\partial F_2}{\partial \phi} = \Delta H - nI,$$

- ▶ Hamiltoniana nas vizinhanças da ressonância exata

$$\mathcal{H}(I, \psi) = \frac{1}{2} m^2 I^2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J} \right)_{J^*} I^2 - \sigma A_m(J^*) \cos \psi,$$

- ▶ que tem a forma da Hamiltoniana do pêndulo

$$\mathcal{H}(I, \psi) = \frac{1}{2} G I^2 - F \cos \psi,$$

$$F = \sigma A_m(J^*) = \frac{\sigma}{a^m} (2J^*)^{m/2} = \sigma \left\{ 2 \left(1 - \frac{m}{2q_a n} \right) \right\}^{m/2}$$

$$G = m^2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J} \right)_{J^*} = -\frac{2m^2}{q_a a^2},$$

- ▶ pontos de equilíbrio: elíptico ($I^* = 0, \theta^* = \pi$) e hiperbólico ($I^* = 0, \theta^* = 0, \pi$)
- ▶ semi-largura da ilha periódica

$$I_{max} = 2 \left| \frac{F}{G} \right|^{1/2} = \frac{2a^2}{m} \sqrt{\frac{\epsilon \xi}{2\pi}} \left\{ 2 \left(1 - \frac{m}{2q_a n} \right) \right\}^{m/4}$$

- ▶ frequência das oscilações em torno do ponto elíptico é dada por $\omega_0 = |FG|^{1/2}$

Equações das linhas de campo magnético

- ▶ Hamiltoniana do Tokamak com limitador magnético.

$$H(J, \theta, \phi) = \frac{2J}{q_a} \left(1 - \frac{J}{2a^2} \right) - \frac{\mu_0 R_0 I_L}{B_0 \pi a^m} (2J)^{m/2} \cos(m\theta) f(\phi).$$

- ▶ variáveis normalizadas: $\mathcal{I} = 2J/a^2$, $\mathcal{H} = Hq_a/a^2$

$$\mathcal{H}(\mathcal{I}, \theta, \phi) = \mathcal{I}(1 - \mathcal{I}) + 2\varepsilon \mathcal{I}^{m/2} \cos(m\theta) f(\phi),$$

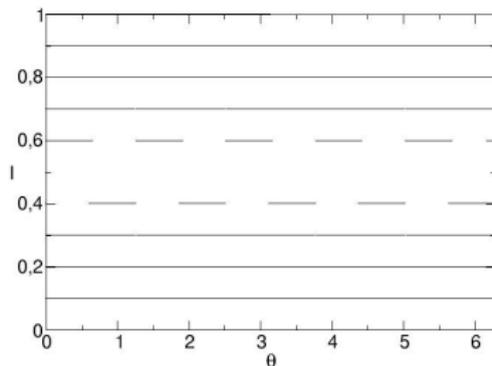
$$f(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \phi < \xi, \\ 0, & \text{se } \xi \leq \phi < 2\pi. \end{cases}, \quad \varepsilon = \frac{I_L}{I_P}, \quad \xi = \frac{\ell}{R_0}$$

- ▶ equações de Hamilton

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\phi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 2\varepsilon m \mathcal{I}^{m/2} \sin(m\theta) f(\phi),$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{I}} = 1 - 2\mathcal{I} + \varepsilon m \mathcal{I}^{(m/2)-1} \cos(m\theta) f(\phi),$$

Mapas de Poincaré para as linhas de campo magnético

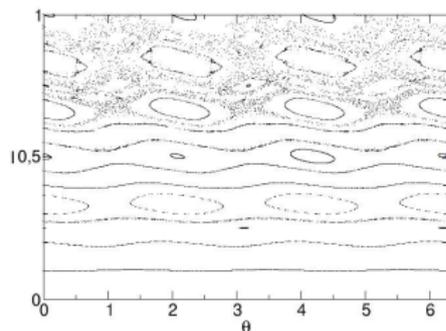
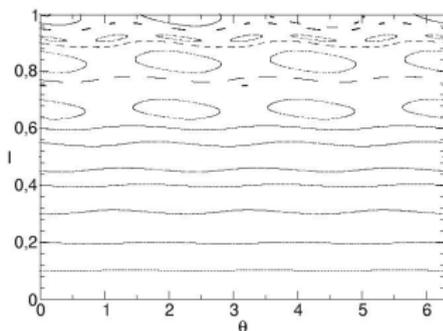


- ▶ TCABR: $\varepsilon \sim 0,025$, $m = 3$ e $\xi = 0,163$
- ▶ mapa estroboscópico: variáveis discretas

$$\mathcal{I}_n = \mathcal{I}(\phi = 2\pi n), \quad \theta_n = \theta(\phi = 2\pi n).$$

- ▶ retrato de fase para o caso não-perturbado ($\varepsilon = 0$): mapa do twist \rightarrow toros racionais e irracionais = superfícies magnéticas

Mapas de Poincaré para as linhas de campo magnético



- ▶ $\varepsilon = 0,025$ e $0,050$: casos não-integráveis
- ▶ toros racionais: desaparecem, deixando ilhas periódicas
- ▶ toros irracionais: a maioria é preservada, com deformações
- ▶ pontos homoclínicos: emaranhado e órbita caótica (preenchedora de áreas)
- ▶ como o campo da perturbação decai exponencialmente com o raio, a região caótica é mais pronunciada próximo à borda do plasma

Sobre modelos na física - I



Pablo Picasso, Bull (plates I - XI) 1945

- ▶ estudos sobre um touro (Pablo Picasso, 1945)
- ▶ do desenho original (totalmente figurativo) até o esboço que mostra a essência do objeto
- ▶ procuramos frequentemente modelos simples que capturem os aspectos essenciais do problema
- ▶ nem sempre os detalhes importam (às vezes sim!)

Sobre modelos na física - II



- ▶ "A traição das imagens", René Magritte (1929)
- ▶ este não é um cachimbo: é a representação bidimensional de um cachimbo
- ▶ um modelo físico não é igual à realidade que ele se propõe a representar