

Dinâmica Hamiltoniana Aplicada

Capítulo 10

Aplicações em plasmas

Prof. Ricardo Luiz Viana
rlv640@gmail.com



Conteúdo da aula

Introdução

Tokamaks

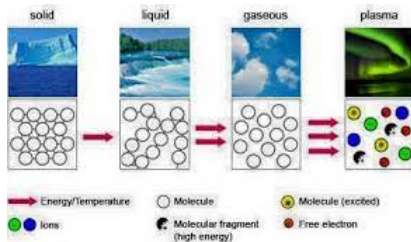
Hamiltoniana de deriva

Linhas de campo magnético em Tokamaks

Limitadores magnéticos em Tokamaks

Conclusões

Plasmas



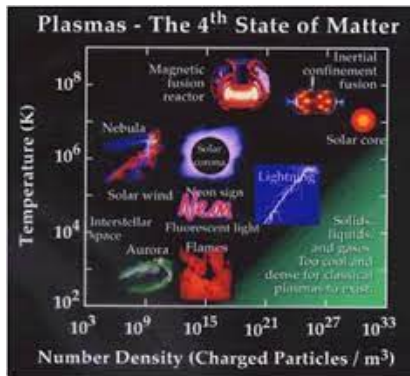
um plasma é um gás ionizado que possui propriedades coletivas devido às interações eletromagnéticas (de longo alcance) entre suas partículas

plasmas totalmente ionizados: elétrons livres e íons positivos

quantidades macroscópicas básicas:

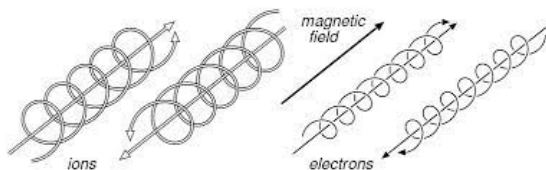
1. densidade de partículas: número por unidade de volume:
 $n_s = N_s/V$, onde $s = e$ (elétrons), $s = i$ (íons)
2. temperatura: para um plasma em equilíbrio térmico a energia cinética média das partículas é $(3/2)k_B T_s$, onde k_B é a constante de Boltzmann, e T_s é a temperatura (1eV ! 11604K)

Plasmas de fusão



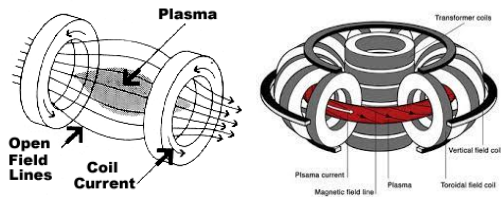
- | plasmas de fusão: $n_s \approx 10^{20} \text{ m}^{-3}$ e $T_s \approx 10^3 \text{ eV}$,
- | velocidades térmicas dos íons são da ordem de 10^5 m/s , enquanto que, para elétrons, elas são da ordem de 10^7 m/s
- | podem ser tratadas no regime não-relativístico

Giração num campo magnético externo



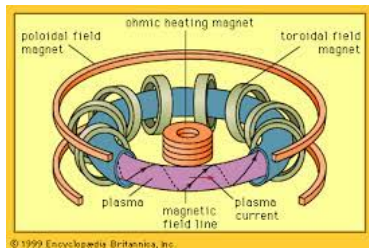
- | plasmas de fusão e astrofísicos estão tipicamente sujeitos a campos magnéticos externos
- | giração: trajetórias helicoidais de frequência $\omega_s = j q_s j B = m_s$ e raio $r_s = v_{\perp} / \omega_s$, onde $q_s =$ carga e $m_s =$ massa
- | o centro de guia move-se com velocidade constante v_k ao longo das linhas de campo magnético
- | plasmas de fusão: campos magnéticos são da ordem de $1 T$ - a girofrequência eletrônica é da ordem de $\omega_e \approx 2 \cdot 10^{11} s^{-1}$
- | com o valor da velocidade térmica correspondente em v_{\perp} , o raio da giração dos elétrons é da ordem de $r_e \approx 2 \cdot 10^{-4} m$.
- | se houver um campo elétrico uniforme \mathbf{E} haverá uma deriva do movimento de giração com velocidade $\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$

Confinamento magnético de plasmas



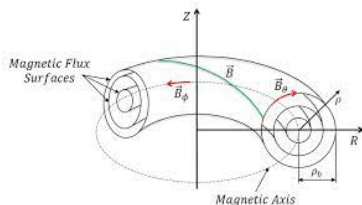
- | plasmas, sendo essencialmente gases, têm uma tendência natural à expansão
- | numa estrela como o Sol, formado por um plasma de alta temperatura, e que gera energia por meio de reações de fusão nuclear, o plasma é confinado pelo intenso campo gravitacional produzido pela sua gigantesca massa.
- | em plasmas astrofísicos e de laboratório, são usados campos magnéticos para o confinamento
- | sistemas de confinamento aberto: empregam o princípio do espelho magnético (garrafa magnética)
- | sistemas fechados de confinamento: linhas de campo magnético fechadas

Tokamaks



- | vaso toroidal onde uma corrente de plasma é produzida por efeito indutivo (aquecimento ôhmico) pela descarga de um banco de capacitores
- | a corrente de plasma toroidal é confinada pela ação combinada de dois campos magnéticos
 1. campo toroidal \mathbf{B}_T , produzido por espiras posicionadas externamente ao vaso toroidal, como num solenóide
 2. campo poloidal \mathbf{B}_P produzido pela própria corrente de plasma
- | as linhas de campo magnético produzido pela superposição destes dois campos, $\mathbf{B}_T + \mathbf{B}_P$, são hélices sobre superfícies toroidais

Superfícies magnéticas



- | um plasma de fusão pode ser descrito como um fluido ideal com velocidade \mathbf{v} , pressão p , e densidade
- | equação de movimento de um fluido condutor de eletricidade

$$(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla p + \mathbf{f}:$$

- | \mathbf{j} : densidade de corrente elétrica do plasma
- | $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$: força magnética por unidade de volume
- | no equilíbrio magnetohidrodinâmico $\mathbf{v} = 0$: $\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \Rightarrow \nabla p \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = 0:$$

- | as linhas de campo magnético jazem sobre superfícies de pressão constante (superfícies magnéticas).

Fator de segurança

- | campo magnético no equilíbrio: $\mathbf{B}_T = B \hat{e}_\phi$, $\mathbf{B}_P = B \hat{e}_\theta$
- | campo toroidal: produzido por bobinas posicionadas externamente ao vaso toroidal (como num solenóide)

$$B = \frac{B_0}{1 + (r/R_0) \cos \theta} \quad B_0; \quad (R_0 \text{ a})$$

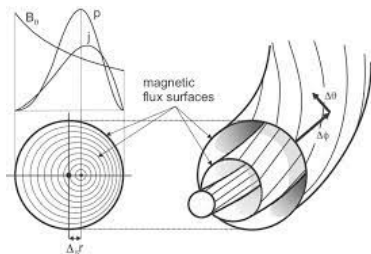
onde B_0 é o campo toroidal no eixo magnético

- | campo poloidal: produzido pela corrente de plasma,

$$B = \frac{B_0 r}{q(r) R_0};$$

- | onde $q(r)$ é chamado fator de segurança.
- | as linhas do campo magnético no Tokamak jazem sobre toróides coaxiais com o eixo magnético
- | se uma dada linha de campo está inicialmente numa dada superfície magnética $r = \text{const.}$; após uma volta completa toroidal ela percorreu um ângulo na direção toroidal dado por $\Delta\phi = 2\pi q(r)$ (transformada rotacional)

Superfícies racionais e irracionais



- | se o fator de segurança for um número racional da forma m/n , onde m e n são inteiros primos entre si, a transformada rotacional será $\Delta z = 2\pi n/m$
- | a linha de campo fechar-se sobre si mesma após m voltas na direção toroidal e n voltas na direção poloidal
- | se $q(r)$ for um número irracional, as linhas de campo preenchem densamente a superfície magnética
- | uma superfície racional com $q = m/n$ terá (na superfície de seção $\Delta z = 0$) n pontos num círculo de raio r . Uma superfície irracional terá um círculo completo na superfície de seção.

Hamiltoniana de deriva

- | usamos coordenadas cartesianas $(x; y; z)$: x : direção radial, y : direção poloidal, z : direção toroidal no Tokamak
- | giração das partículas carregadas ocorre na direção de um campo magnético uniforme: $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$
- | na presença de um campo elétrico o centro de guia sofre uma deriva $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$! coordenadas $(x(t); y(t))$ num plano perpendicular ao campo magnético
- | se $\mathbf{E} = -\nabla \phi$, onde $\phi(x; y; t)$ é o potencial elétrico

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{r}{B_0} \hat{z};$$

- | equações de movimento para a deriva do centro de guia

$$\frac{dx}{dt} = v_{dx} = \frac{1}{B_0} \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad \frac{dy}{dt} = v_{dy} = \frac{1}{B_0} \frac{\partial \phi}{\partial x};$$

- | coordenada: y , momentum canonicamente conjugado: x

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x};$$

- | Hamiltoniana de deriva: $H = \frac{1}{2} m v_d^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{r}{B_0} \right)^2$

Hamiltoniana de deriva

- | se ϕ for independente do tempo, o sistema terá um grau de liberdade: integrável.
- | ondas eletrostáticas (ondas de deriva) são longitudinais e seu campo elétrico é obtido a partir de um potencial
- | N ondas eletrostáticas, de amplitudes A_j , vetores de onda $\mathbf{k}_j = (k_{jx}; k_{jy})$ e frequências ω_j

$$\phi(x; y; t) = \phi_0(x) + \sum_{j=1}^N A_j \sin(k_{jx}x) \cos(k_{jy}y - \omega_j t);$$

- | as ondas são estacionárias na direção radial (x) e progressivas na direção poloidal (y)
- | as partículas do plasma executam giração ao longo do campo magnético uniforme B_0 na direção z
- | um plano perpendicular ao campo magnético é uma seção reta deste cilindro $z = 0$.
- | como o cilindro é periódico, as partículas em giração passam um grande número de vezes pelo plano $z = 0$.

Hamiltoniana de duas ondas

- supondo um campo elétrico radial de módulo E_0 constante
 $\phi_0(x) = E_0 x + \text{const}$:

- Hamiltoniana para N ondas de deriva

$$H(x; y; t) = \frac{E_0}{B_0} x + \sum_{j=1}^N \frac{j}{B_0} \sin(k_{j,x} x) \cos(k_{j,y} y - \omega_j t);$$

- $v_E = E_0/B_0$ é a velocidade de deriva devido ao campo elétrico uniforme

- caso de $N = 2$ ondas: $H = v_E x +$

$$+ \frac{1}{B_0} \sin(k_{1,x} x) \cos(k_{1,y} y - \omega_1 t) + \frac{2}{B_0} \sin(k_{2,x} x) \cos(k_{2,y} y - \omega_2 t);$$

- fazemos uma transformação canônica $(x; y; t) \rightarrow (x'; y'; t)$

$$F_2(y; x'; t) = x' (y - \omega_1/k_{1,y});$$

- equações da transformação canônica

$$x = \frac{\partial F_2}{\partial y} = x'; \quad y = \frac{\partial F_2}{\partial x'} = y - \frac{\omega_1}{k_{1,y}} t$$

Hamiltoniana de duas ondas

- Hamiltoniana transformada

$$H^0(x^0; y^0; t) = H(x; y; t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H \frac{\omega_1}{k_{1y}} x^0 = (v_E - u_1) x^0 + \frac{A_1}{B_0} \sin(k_{1x} x^0) \cos(k_{1y} y^0) + \frac{A_2}{B_0} \sin(k_{2x} x^0) \cos[k_{2y} (y^0 - ut)];$$

- onde $u_1 = \omega_1/k_{1y}$ e $u_2 = \omega_2/k_{2y}$ são as velocidades de fase da primeira e segunda ondas, e definimos

$$u = u_2 - u_1 = \omega_2/k_{2y} - \omega_1/k_{1y}$$

- variáveis adimensionais

$$X = k_{1x} x^0; \quad Y = k_{1y} y^0; \quad \tau = \omega_0 t; \quad \omega_0 = \frac{k_{1x} k_{1y} \omega_1}{B_0};$$

- Hamiltoniana normalizada: $H = B_0 H^0 = 1$

$$H(X; Y; \tau) = UX + \sin X \cos Y + \frac{1}{\omega} \sin(kX) \cos[q(Y - \tau)];$$

$$k = \frac{k_{2x}}{k_{1x}}; \quad q = \frac{k_{2y}}{k_{1y}}; \quad \frac{1}{\omega} = \frac{\omega_2}{\omega_1}; \quad U = \frac{(v_E - u_1) B_0}{k_{1x} \omega_1}; \quad \frac{1}{\omega} = \frac{u B_0}{k_{1x} \omega_1};$$

Hamiltoniana de duas ondas

- | a transformação canônica representa a passagem para o referencial da primeira onda
- | tanto k como q são razões entre números de onda, que podem ser tanto racionais como irracionais
- | considerando a segunda onda como uma perturbação não-integrável da primeira, a constante $''$ é uma medida da intensidade da perturbação
- | q : frequência normalizada da segunda onda, de forma que a perturbação por ela causada tem um período $= 2\pi/q$
- | parâmetro de aprisionamento U : proporcional à diferença entre a velocidade de deriva e a velocidade de fase da primeira onda.
- | equações de Hamilton

$$\frac{dX}{d} = \frac{\partial H}{\partial Y} = \sin X \sin Y + ''q \sin(kX) \sin[q(Y \quad)];$$

$$\frac{dY}{d} = \frac{\partial H}{\partial X} = U + \cos X \cos Y + ''k \cos(kX) \cos[q(Y \quad)];$$

Caso integrável

- caso de $N = 1$ onda: " $\omega = 0$ (integrável)

$$H_0(X; Y) = UX + \sin X \cos Y;$$

- pontos de equilíbrio

$$\frac{\partial H_0}{\partial Y}(X; Y) = \sin X \sin Y = 0$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial X}(X; Y) = U + \cos X \cos Y = 0;$$

- como $0 < X < \pi$ e $0 < Y < \pi$, e definindo $\theta = \arccos U$, com $0 < \theta < \pi/2$, temos, para $0 < U < 1$,

$$C_1 : (0; +\pi); \quad C_2 : (0; -\pi); \quad C_3 : (\pi; +\pi); \quad C_4 : (\pi; -\pi)$$

$$A_1 : (\theta; 0); \quad A_2 : (\pi - \theta; 0); \quad A_3 : (\theta; \pi); \quad A_4 : (\pi - \theta; \pi);$$

- matriz Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial Y \partial X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos X \sin Y & \sin X \cos Y \\ \sin X \cos Y & \cos X \sin Y \end{pmatrix} :$$

Caso integrável

- definindo o parâmetro

$$\sin \theta = \sin(\arccos U) = \sqrt{1 - U^2} \quad ;$$

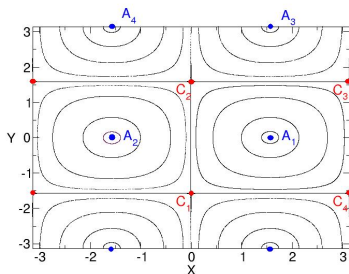
- matrizes Jacobianas nos pontos de equilíbrio

$$J(C_{1;2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad J(C_{3;4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$J(A_{1;3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad J(A_{2;4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

- matrizes Jacobianas para $C_{1,2;3,4}$ têm como autovalores os seus elementos diagonais
- como 0 e ± 1 para $U = \pm 1$, para todos os pontos desta família, se um dos autovalores for positivo o outro será negativo, e *vice-versa*
- estes pontos de equilíbrio serão instáveis (pontos de sela)
- os autovalores das matrizes Jacobianas para $A_{1,2;3,4}$ são imaginários puros, da forma $\pm i$: são estáveis (centros lineares).

Trajatórias de deriva no plano de fase



- | consideramos $U = 0$, de forma que $\dot{x} = \dot{y} = 2$
- | células: os centros de guia giram em torno dos pontos elípticos

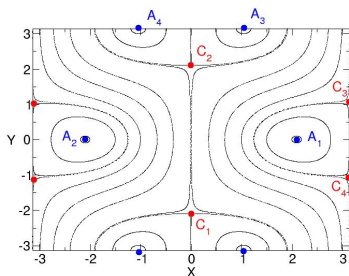
$$A_1 : \frac{\pi}{2}; 0 \quad ; A_2 : \frac{\pi}{2}; 0 \quad ; A_3 : \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \quad ; A_4 : \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \quad ;$$

- | as células são separadas por trajetórias heteroclínicas que ligam os pontos hiperbólicos

$$C_1 : 0; \frac{\pi}{2} \quad ; C_2 : 0; \frac{\pi}{2} \quad ; C_3 : \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \quad ; C_4 : \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \quad ;$$

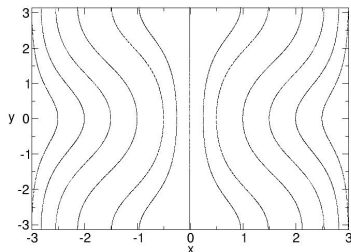
- | trajetórias elípticas no interior das células

Trajetoórias de deriva no plano de fase



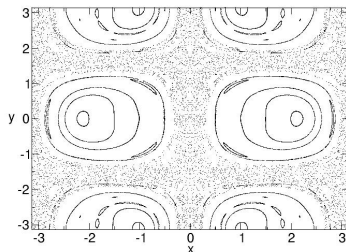
- | $U = 0;5$, para o qual $\omega = 1;0472$: células onde as trajetórias são fechadas em seu interior, orbitando em torno dos pontos elípticos A_i
- | formato diferente das trajetórias heteroclínicas que conectam os pontos hiperbólicos C_i . Duas dessas curvas são compartilhadas por duas células adjacentes.
- | há, também, a presença de trajetórias ilimitadas ao longo da direção poloidal Y , indicando que há partículas que derivam na direção da propagação das ondas

Trajétórias de deriva no plano de fase



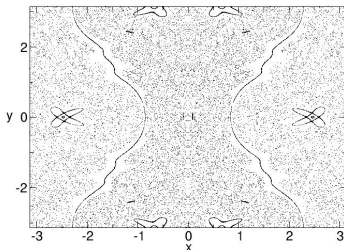
- | $U = 1;5$: como a área ocupada pelas células diminui com o aumento do parâmetro de aprisionamento, esperamos que a quantidade (relativa) de trajetórias ilimitadas aumente à medida em que nos aproximamos de $U = 1$
- | para $U > 1$ só há trajetórias abertas, e não existem mais células

Trajatórias de deriva no plano de fase



- | caso não-integrável: $U = 0$ e $\epsilon = 0;1$, com $k = q = 1$.
- | mapa estroboscópico: registra os valores de X e Y em tempos que são múltiplos do período da perturbação $t_0 = 2\pi/q$
- | as variedades invariantes que emanam dos pontos hiperbólicos deixam de formar trajetórias heteroclínicas, interceptando-se num número infinito de pontos homoclínicos, no lugar das separatrizes que observamos no caso de uma onda
- | há uma camada de órbitas caóticas que preenchem uma área finita, com remanescentes das células

Trajétórias de deriva no plano de fase



- | $U = 0;5$: as células são progressivamente erodidas pelo aumento na região caótica, que vai também absorvendo trajetórias abertas, das quais apenas um pequeno número é ainda visível
- | as células remanescentes praticamente limitam-se à vizinhança dos pontos elípticos, com uma cadeia próxima de quatro ilhas secundárias.

Descrição Hamiltoniana para linhas de campo magnético

- | a configuração das linhas de campo magnético no equilíbrio magnetohidrodinâmico é estritamente estática
- | em configurações axisimétricas, como os Tokamaks, uma coordenada ignorável desempenha o papel de tempo nas equações canônicas: ângulo toroidal
- | as equações das linhas de campo magnético podem ser escritas na forma de equações de Hamilton, após definir um par canônico coordenada-momentum
- | como o tempo físico não aparece nas equações, a dinâmica nesta refere-se à estrutura espacial das linhas de campo, onde o tempo passa a ser representado por uma coordenada que nos permite parametrizar uma linha de campo magnético num instante de tempo fixo

Descrição Hamiltoniana para Tokamaks

- | Tokamaks de grande razão de aspecto: aproximação de cilindro periódico
- | coordenadas cilíndricas: $(r; \theta; z = R_0 \theta)$
- | equações das linhas de campo magnético: $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B} = \frac{R_0 d\theta}{B};$$

- | fator de segurança

$$q(r) = \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{rB}{R_0 B_r(r)};$$

- | reescrevemos as equações das linhas de campo

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{R_0 B_r}{B}; \quad \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{B}{r B_r} = \frac{1}{q(r)} = \mathcal{I}(r);$$

- | onde $\mathcal{I} = \int \frac{1}{q} d\theta$ é a transformada rotacional normalizada
- | momentum $J = r^2 \dot{\theta}$ canonicamente conjugado à coordenada θ .
faz o papel do tempo.

Descrição Hamiltoniana para Tokamaks

- | equações de Hamilton

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{R_0 B_r \rho}{2J} = \frac{\partial H}{\partial J} \quad \frac{d}{dt} = \rho \frac{B R_0}{2JB} = \mathcal{H}(J) = \frac{\partial H}{\partial J};$$

- | campo de equilíbrio na aproximação de grande razão de aspecto para o Tokamak: $B_r = 0; B = B(r); B = B_0$
- | Hamiltoniana de linhas de campo magnético

$$H_0(J) = \int \mathcal{H}(J) dJ;$$

- | como $(J; \theta)$ formam um par canônico, a configuração de equilíbrio representa um sistema com um grau de liberdade
- | a Hamiltoniana acima não depende explicitamente do “tempo” : H é constante do movimento, e o sistema é integrável. $(J; \theta)$ são variáveis de ação e ângulo
- | o espaço de fase coincide com o espaço de configuração.
- | encarando as linhas de campo como trajetórias de fase do sistema, elas jazem sobre toros no espaço de fase, que coincidem com as superfícies magnéticas toroidais

Descrição Hamiltoniana para Tokamaks

- equações de Hamilton para o equilíbrio

$$\frac{dJ}{dt} = 0; \quad \frac{d}{dt} = \frac{(J)}{2};$$

- as trajetórias de fase estão em toros com raio J constante, e (J) é a transformada rotacional associada ao toro, que pode ser racional ou irracional dependendo do seu valor.
- perturbações dependentes do “tempo” : devido à periodicidade em θ e ϕ , a Hamiltoniana correspondente à perturbação pode ser expressa numa série dupla de Fourier

$$H_1(J; \theta; \phi) = \sum_{m^0; n^0} a_{m^0; n^0}(J) \cos(m^0 \theta - n^0 \phi);$$

- onde “ ϵ ” = 1 para sistema quase-integrável
- superfície de seção de Poincaré: plano $\theta = 0$
- mapa de Poincaré (estroboscópico): registramos os valores de $(J_n; \phi_n)$ após um ângulo $\theta = 2\pi n$, com $n = 0; 1; 2; \dots$
- o mapa é conservativo: devido a $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Sistema quase-integrável

- | Hamiltoniana do equilíbrio + perturbação fraca

$$H(J; \dots) = H_0(J) + \epsilon H_1(J; \dots);$$

- | resultados da teoria Hamiltoniana

1. a perturbação destrói os toros racionais para os quais $q(J) = m/n$, onde m e n são inteiros primos entre si, deixando em seu lugar um número par de pontos de equilíbrio elípticos e hiperbólicos (Teorema de Poincaré-Birkhoff);
2. a perturbação, desde que suficientemente fraca, mantém uma certa fração de toros irracionais (valores irracionais de $q(J)$), ainda que com deformações (Teorema KAM). Alguns toros irracionais também serão destruídos, dependendo do seu fator de segurança;
3. a existência de pontos homoclínicos (interseções de variedades estáveis e instáveis de pontos hiperbólicos) permite órbitas caóticas, no sentido Lagrangiano do termo: duas linhas de campo magnético, originalmente muito próximas, afastam-se exponencialmente na medida em que as linhas de campo executam revoluções ao longo do Tokamak.

Modelo para o campo magnético de equilíbrio

- na aproximação de grande razão de aspecto, a corrente de plasma é um cilindro de raio a , para o qual a densidade de corrente é não-uniforme, mas tem simetria radial,

$$\mathbf{j} = j_z(r)\hat{\mathbf{z}} = j_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \hat{\mathbf{z}}$$

- corrente de plasma que flui através de um círculo de raio r

$$I(r) = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{z}} dA = \int_0^r j_z(r') (2\pi r') dr' = \frac{J_0 r^2}{2} \left(2 - \frac{r^2}{a^2}\right) :$$

Modelo para o campo magnético de equilíbrio

- | corrente total de plasma: $I_p = J_0 a^2 = 2$
- | campo poloidal: pela Lei de Ampère:

$$B(r) = \frac{0I(r)}{2r} = \frac{0J_0 r}{4} \cdot \frac{r^2}{a^2} = B_a \frac{r}{a} \cdot \frac{r^2}{a^2} ;$$

- | campo poloidal na borda do plasma

$$B_a = \frac{0J_0 a}{4} = \frac{0I_p}{2a}$$

Modelo para o campo magnético de equilíbrio

- fator de segurança das superfícies magnéticas

$$q(r) = \frac{rB_0}{R_0 B(r)} = q_a \left(\frac{r^2}{a^2} \right)^{-1};$$

$$q_a = q(r = a) = \frac{a B_0}{R_0 B_a} = \frac{2 a^2 B_0}{0 R_0 I_P}; \quad q_0 = q(0) = q_a = 2$$

- Hamiltoniana de equilíbrio

$$H_0(J) = \frac{2}{q_a} \int dJ \left(1 - \frac{J}{a^2} \right) = \frac{2J}{q_a} \left(1 - \frac{J}{2a^2} \right);$$

Tokamak TCABR

- | razão de aspecto $A = R_0/a = (0;61\text{m})/(0;18\text{m}) = 3;4$
- | corrente de plasma (maxima) $I_p = 0;1\text{MA}$ logo
 $j_0 = 2\text{MA}/\text{m}^2$
- | campo poloidal na borda do plasma $B_a = 0;11\text{T}$, ou 10%
do valor do campo toroidal no eixo magnetico $B_0 = 1;1\text{T}$
- | fator de segurança na borda do plasma $q_a = 2;95 \approx 3$,
enquanto no eixo magnetico $q_0 = 1;5 > 1$ (limite de
Kruskal-Shafranov)

Limitador magnético

- | anel de correntes laminares de comprimento l e enroladas em torno do vaso cilíndrico de raio a
- | segmentos retilíneos paralelos ao longo da direção \hat{z} , e segmentos curvos na direção $\hat{\phi}$
- | existem pares de segmentos retilíneos: dois segmentos adjacentes conduzem a mesma corrente em sentidos opostos.
- | campo magnético produzido pelo limitador $(B^{(1)} = B_0)$

$$B_r^{(1)}(r; \theta) = \frac{0ml_L}{a^m} r^{m-1} \sin(m\theta) f(\theta);$$

$$B_\theta^{(1)}(r; \theta) = \frac{0ml_L}{a^m} r^{m-1} \cos(m\theta) f(\theta);$$

Hamiltoniana do limitador magnético

- fator dependente do tempo

$$f(\theta) = \begin{cases} 1; & \text{se } 0 < \theta < R_0; \\ 0; & \text{se } \theta = R_0 < 2\pi: \end{cases} = \frac{1}{2R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n}{\cos(n\theta)} :$$

- a Hamiltoniana relativa ao campo magnético do limitador satisfaz as equações canônicas

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{R_0 B_r^{(1)}(J; \theta)}{B_0} \frac{\partial}{\partial J} \frac{B^{(1)}(J; \theta) R_0}{2JB_0} :$$

- em termos da variável de ação $\alpha = r^2 = 2$,

$$\begin{aligned} H_1(J; \theta) &= \frac{R_0 B_r^{(1)}(J; \theta)}{B_0} (2J)^{m=2} \cos(m\theta) f(\theta) : \\ &= A_m(J) \cos(m\theta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n}{\cos(n\theta)} \cos(m\theta) \cos(n\theta) ; \\ &= \frac{R_0 B_r^{(1)}}{2 B_0} ; \quad A_m(J) = \frac{(2J)^{m=2}}{a^m} : \end{aligned}$$

Limitador magretico no TCABR

- | limitador magretico de comprimento $l = 0,1$ m com $m = 3$ pares de os
- | cada o conduz uma corrente $i_L = 2500$ A
- | parâmetros "pequenos" normalizados

$$= \frac{i_L}{i_P} \ll 1; \quad = \frac{l}{R_0} \ll 1; \quad = \frac{a^2}{q_a} \ll 1;$$

- | usando os valores para o TCABR, $R_0 = 0,615$ m e $i_P = 100$ kA, os coeficientes são $= 0,025$ e $= 0,163$
- | e pequeno para valores típicos de i_L e q_a .

Ressonâncias

- usando a identidade trigonométrica

$$\cos(m\theta) \cos(\theta) = \frac{1}{2} [\cos(m-\theta) + \cos(m+\theta)]$$

- a Hamiltoniana do equilíbrio mais perturbação

$$H(J; \theta) = H_0(J) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(J) \cos(m\theta)$$

- uma ressonância ocorre quando a fase $n\theta$ é constante, de modo que sua derivada "temporal" é nula:

$$\frac{d}{dt} n\theta = 0 \quad \frac{d}{dt} \theta = \omega(r) = \frac{m}{n}$$

- numa ressonância o fator de segurança é um número racional: o toro correspondente tem raio
- este toro racional (assim como todos os demais) será destruído pela perturbação H_1 .

Ressonâncias

- variável de ação na posição da ressonância exata

$$J = a^2 \left(1 - \frac{m}{2\alpha n} \right);$$

- o termo $\cos(m \dot{\phi} - n \dot{\theta})$, nesta ressonância, é constante, e portanto oscila lentamente nas suas proximidades.
- os demais termos, incluindo $\cos(m \dot{\phi} + n \dot{\theta})$ oscilam rapidamente com o "tempo" e anulam-se se fizermos uma média em
- separando o termo ressonante da Hamiltoniana

$$H_{\text{res}}(J; \dot{\phi}, \dot{\theta}) = H_0(J) + A_m(J) \cos(m \dot{\phi} - n \dot{\theta});$$

- nas vizinhanças da ressonância exata $J = J_0 + \delta J$, expandindo em séries

$$\begin{aligned} H_{\text{res}}(J; \dot{\phi}, \dot{\theta}) &= H_0(J_0 + \delta J) + A_m(J_0 + \delta J) \cos(m \dot{\phi} - n \dot{\theta}) \\ &= H_0(J_0) + \delta J \frac{\partial H_0}{\partial J} \Big|_{J_0} + \frac{(\delta J)^2}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} \Big|_{J_0} + A_m(J_0) \cos(m \dot{\phi} - n \dot{\theta}) + \dots \end{aligned}$$

Hamiltoniana da ressonância

- Hamiltoniana nas vizinhanças da ressonância exata

$$H(J; \dots) = H_{\text{res}}(J; \dots) + H_0(J)$$

$$= J \frac{\partial H_0}{\partial J} + \frac{1}{2} (J)^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} + A_m(J) \cos(m \dots):$$

- na posição da ressonância exata

$$\frac{dH_0}{dJ} = \omega(J) = \frac{n}{m}; \quad \frac{d^2 H_0}{dJ^2} = \frac{\partial \omega}{\partial J} = \frac{2}{\omega a^2}:$$

- fazemos transformação canônica $(J; \dots) \rightarrow (I; \dots)$ com a função geratriz de segunda espécie

$$F_2(I; \dots) = (m - n)I;$$

- equações de transformação

$$I = \frac{\partial F_2}{\partial I} = m - n; \quad J = \frac{\partial F_2}{\partial J} = mI;$$

$$H(I; \dots) = H(J; \dots) + \frac{\partial F_2}{\partial I} = H - nI;$$

| Hamiltoniana nas vizinhanças da ressonância exata

$$H(I; \theta) = \frac{1}{2} m^2 I^2 \frac{\partial^2}{\partial J^2} I^2 A_m(J) \cos \theta;$$

| que tem a forma da Hamiltoniana do pêndulo

$$H(I; \theta) = \frac{1}{2} G I^2 - F \cos \theta;$$

$$F = A_m(J) = \frac{1}{a^m} (2J)^{m=2} = 2^{-1} \frac{m}{2 a^n} \quad m=2$$

$$G = m^2 \frac{\partial^2}{\partial J^2} = \frac{2m^2}{a^2};$$

| pontos de equilíbrio: elíptico ($I = 0; \theta = 0$) e hiperbólico ($I = 0; \theta = \pi$)

| semi-largura da ilha periódica

$$I_{\max} = 2 \frac{F}{G} = \frac{2a^2}{m} \frac{1}{2} = 2^{-1} \frac{m}{2 a^n} \quad m=4$$

| frequência das oscilações em torno do ponto elíptico dada por $\omega_0 = \sqrt{F G}$

Equações das linhas de campo magnético

- Hamiltoniana do Tokamak com limitador magnético.

$$H(J; \theta, \varphi) = \frac{2J}{qa} \left(1 - \frac{J}{2a^2} \frac{R_0 I_L}{B_0 a^m} (2J)^{m=2} \cos(m\theta) f(\varphi) \right);$$

- variáveis normalizadas $l = 2J/a^2$, $H = Hq_a/a^2$

$$H(l; \theta, \varphi) = l \left(1 - \frac{l}{2} \right) + 2 \frac{R_0 I_L}{B_0 a^m} l^{m=2} \cos(m\theta) f(\varphi);$$

$$f(\varphi) = \begin{cases} 1; & \text{se } 0 < \varphi < \pi; \\ 0; & \text{se } \pi < \varphi < 2\pi; \end{cases} \quad \frac{R_0 I_L}{B_0 a^m} = \frac{l_L}{l_P} = \frac{1}{R_0}$$

- equações de Hamilton

$$\frac{dl}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 2 \frac{R_0 I_L}{B_0 a^m} l^{m=2} \sin(m\theta) f(\varphi);$$

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 1 - 2l + \frac{R_0 I_L}{B_0 a^m} l^{(m=2)-1} \cos(m\theta) f(\varphi);$$

Mapas de Poincaré para as linhas de campo magnético

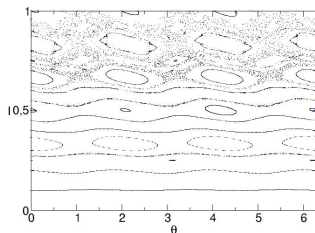
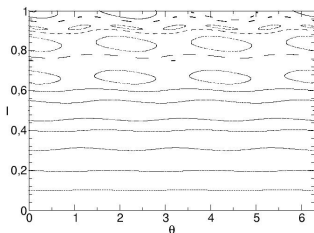
| TCABR: $\nu = 0;025$, $m = 3$ e $\nu = 0;163$

| mapa estroboscópico: variáveis discretas

$$I_n = I(\nu = 2/n); \quad n = (\nu = 2/n):$$

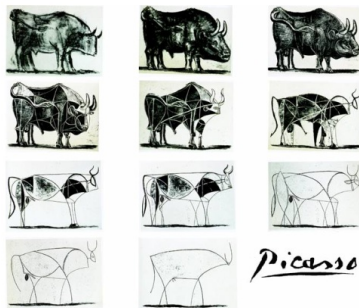
| retrato de fase para o caso não-perturbado ($\nu = 0$): mapa do twist / toros racionais e irracionais = superfícies magnéticas

Mapas de Poincaré para as linhas de campo magnético



- | $\nu = 0;025$ e $0;050$: casos não-integráveis
- | toros racionais: desaparecem, deixando ilhas periódicas
- | toros irracionais: a maioria é preservada, com deformações
- | pontos homoclínicos: emaranhado e órbita caótica (preenchedora de áreas)
- | como o campo da perturbação decai exponencialmente com o raio, a região caótica é mais pronunciada próximo à borda do plasma

Sobre modelos na física - I



Pablo Picasso, Bull (plates I - XI) 1945

- | estudos sobre um touro (Pablo Picasso, 1945)
- | do desenho original (totalmente figurativo) até o esboço que mostra a essência do objeto
- | procuramos frequentemente modelos simples que capturem os aspectos essenciais do problema
- | nem sempre os detalhes importam (às vezes sim!)

Sobre modelos na física - II



- | "A traição das imagens", René Magritte (1929)
- | este não é um cachimbo: é a representação bidimensional de um cachimbo
- | um modelo físico não é igual à realidade que ele se propõe a representar