

Dinâmica Hamiltoniana Aplicada

Capítulo 2

Equações de Hamilton

Prof. Ricardo Luiz Viana
rlv640@gmail.com



Conteúdo da aula

Transformada de Legendre

Equações de Hamilton

Partícula num campo de forças conservativas

Oscilador harmônico

Hamiltoniana e energia

Pêndulo

Partícula num potencial central

Partícula carregada num campo eletromagnético

Espaço de fase

Transformada de Legendre

- ▶ função de duas variáveis: $f(x, y)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

- ▶ definimos uma nova função $g(x, y, u) = ux - f(x, y)$, onde u é uma nova variável, cuja diferencial é

$$dg = u dx + x du - \frac{\partial f}{\partial x} dx - \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

- ▶ escolhamos a nova variável tal que $u(x, y) = \partial f / \partial x$, tal que

$$dg = x du - \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

- ▶ de modo que g é uma função apenas de u e y .
- ▶ invertemos obtemos $x = x(u, y)$ de modo que resulta a transformada de Legendre da função $f(x, y)$

$$g(u, y) = ux(u, y) - f(x(u, y), y),$$

Transformada de Legendre

- ▶ a transformada de Legendre nos fornece uma função $g(u, y)$ da variável $u = \partial f / \partial x$, sem perda da informação dada por f
- ▶ podemos sempre recuperar $f(x, y)$ a partir de $g(u, y)$, usando

$$\left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_y = x(u, y), \quad \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_u = \frac{\partial f}{\partial y},$$

- ▶ transformada inversa de Legendre de g .

$$f = u \frac{\partial g}{\partial u} - g$$

- ▶ significado geométrico da transformada de Legendre: gráficos de uma função qualquer $f(x)$ monotonicamente crescente (convexa, na verdade) e da função linear ux
- ▶ para cada valor de u , $g(u) = ux - f(x)$ representa a máxima distância entre os dois gráficos, pois

$$\frac{d}{dx}(uf - f(x)) = 0 \Rightarrow u = \frac{\partial f}{\partial x},$$

Equações de Hamilton

- ▶ a função de Hamilton, ou Hamiltoniana, é a transformada de Legendre da sua Lagrangiana
- ▶ momenta generalizados: p_1, p_2, \dots, p_n

$$H(p_i, q_i, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t).$$

- ▶ diferenciando esta expressão

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - dL.$$

- ▶ calculando a diferencial total de H e L

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} dt =$$
$$\sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right\} - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Equações de Hamilton

- ▶ o termo sublinhado, em vista das equações de Lagrange, é

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right).$$

- ▶ definimos o momentum generalizado como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

- ▶ comparando termos semelhantes em ambos os membros da expressão acima obtemos as chamadas equações canônicas ou equações de Hamilton

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Equações de Hamilton

- ▶ p_i é o momentum canonicamente conjugado à coordenada generalizada q_i , de modo que (p_i, q_i) será um par canônico
- ▶ o número de graus de liberdade é o número de pares canônicos do sistema
- ▶ num sistema com n graus de liberdade, as equações de Lagrange representam um conjunto de n equações diferenciais de segunda ordem em relação ao tempo. Já as equações de Hamilton formam um conjunto de $2n$ equações de primeira ordem em relação ao tempo.
- ▶ se a Hamiltoniana não depender explicitamente de uma dada coordenada generalizada q_i (coordenada ignorável, ou cíclica), o momentum canonicamente conjugado é uma constante do movimento ($dp_i/dt = 0$)

Partícula num campo de forças conservativas

- ▶ Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i^2 - U(q_i)$$

- ▶ momenta generalizados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i = m\dot{x}_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

- ▶ Hamiltoniana = transformada de Legendre da Lagrangiana

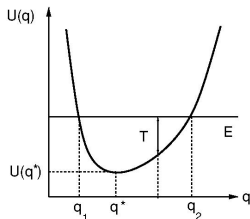
$$H = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i p_i - L = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{m} - \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i^2 + U(q_i) = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m} + U(q_i).$$

- ▶ coincide com a energia total do sistema: $H = T + U = E$
- ▶ equações de Hamilton

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m},$$

- ▶ derivando em relação ao tempo a segunda equação e substituindo na primeira obtemos $\dot{p}_i = m\ddot{q}_i$,

Movimento em uma dimensão



- ▶ energia total da partícula

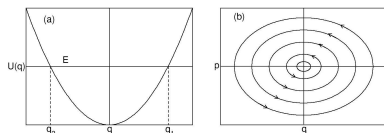
$$H(p, q) = T(p) + U(q) = \frac{1}{2m} p^2 + U(q) = E$$

- ▶ pontos de retorno $q_{1,2}$: dados por $T = 0$ ou $U(q) = E$
- ▶ para $q_1 < q < q_2$ o movimento é governado pelas equações

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -U'(q), \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}.$$

- ▶ ponto de equilíbrio q^* é um extremo da energia potencial: $U'(q^*) = 0$. Se for um mínimo local, $U''(q^*) > 0$, q^* é um equilíbrio estável; caso contrário, $U''(q^*) < 0$, será instável

Oscilador harmônico



- ▶ Hamiltoniana ($G = 1/m, F = m\omega^2$)

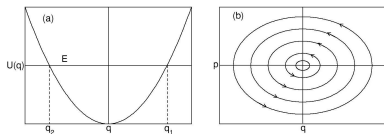
$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 = G \frac{p^2}{2} + F \frac{q^2}{2} = E,$$

- ▶ equações de Hamilton

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -Fq, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = Gp,$$

- ▶ pontos de retorno: $q_{1,2} = \pm\sqrt{2E/F}$
- ▶ ponto de equilíbrio: $q^* = 0$. Como $U''(q^*) > 0$, é estável

Plano de fase do oscilador harmônico



- ▶ dadas condições iniciais $p_0 = p(t = 0)$ e $q_0 = q(t = 0)$

$$E = G \frac{p_0^2}{2} + F \frac{q_0^2}{2} = G \frac{p^2}{2} + F \frac{q^2}{2}.$$

- ▶ as trajetórias no plano de fase serão elipses dadas por

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1,$$

- ▶ cujos semi-eixos são

$$a = \sqrt{\frac{2E}{G}}, \quad b = \sqrt{\frac{2E}{F}},$$

- ▶ para cada valor de E haverá uma trajetória de fase diferente
- ▶ $E = 0$: ponto de equilíbrio estável na origem ($p^* = 0, q^* = 0$)

Hamiltoniana e Energia

- ▶ sua derivada total da Hamiltoniana em relação ao tempo

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

- ▶ usando as equações de Hamilton

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

- ▶ se a Lagrangiana não depende explicitamente do tempo, o segundo membro é nulo $dH/dt = 0$: a Hamiltoniana é uma constante do movimento (condição necessária e suficiente)
- ▶ para um sistema de partículas que interagem por meio de forças conservativas, a energia potencial não depende das velocidades generalizadas: $\partial U / \partial \dot{q}_i = 0$
- ▶ como a Lagrangiana do sistema é $L = T - U$, os momenta generalizados são

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}.$$

Hamiltoniana e Energia

- ▶ energia cinética de uma partícula, em função das coordenadas e velocidades generalizadas, e tempo

$$T(q_i, \dot{q}_i; t) = \sum_{k,\ell} \frac{1}{2} A_{k\ell}(q_i, t) \dot{q}_k \dot{q}_\ell + \sum_k B_k(q_i, t) \dot{q}_k + T_0(q_i, t),$$

- ▶ momenta generalizados: derivando em relação a \dot{x}_i

$$p_i = \sum_k A_{ik} \dot{q}_k + B_i.$$

- ▶ se as equações de transformação entre coordenadas cartesianas das partículas e as coordenadas generalizadas não dependem explicitamente do tempo $B_k = 0$ e $T_0 = 0$

$$T(q_i, \dot{q}_i; t) = \sum_{k,\ell} \frac{1}{2} A_{k\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \quad \Rightarrow \quad p_i = \sum_k A_{ik} \dot{q}_k.$$

- ▶ multiplicando por \dot{q}_i e somando sobre o índice i

$$\sum_i \dot{q}_i p_i = \sum_{i,k} A_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T,$$

Hamiltoniana e Energia

- ▶ é um caso particular do Teorema de Euler: se f é uma função homogênea de grau n , então

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f.$$

- ▶ a Hamiltoniana, dada como uma transformação de Legendre, é

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L = 2T - (T - U) = T + U = E,$$

que é a energia total do sistema

- ▶ condições (suficientes, mas não necessárias) para que a Hamiltoniana H seja igual à energia total do sistema E :
 1. o sistema é conservativo;
 2. a transformação de coordenadas é independente do tempo.
- ▶ resumindo, podemos supor que $H = E$, a menos que o sistema de coordenadas esteja em movimento em relação a um sistema de referência fixo

Pêndulo

- ▶ Lagrangiana

$$L = \frac{m}{2} a^2 \dot{\theta}^2 - m g a (1 - \cos \theta),$$

- ▶ momentum conjugado à variável θ

$$p = \partial L / \partial \dot{\theta} = m a^2 \dot{\theta},$$

- ▶ a transformação de Legendre leva-nos à Hamiltoniana

$$H = p\dot{\theta} - L = \frac{p^2}{2ma^2} - m g a \cos \theta + m g a.$$

- ▶ tirando a constante e definindo $F = m g a$ e $G = 1/m a^2$

$$H = G p^2 / 2 - F \cos \theta = E.$$

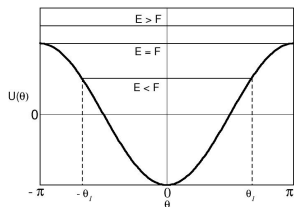
- ▶ equações de Hamilton

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -F \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = G p$$

- ▶ derivando a segunda equação e usando a primeira temos

$$\ddot{\theta} = G \dot{p} = -F G \sin \theta = -\omega_0^2 \sin \theta$$

Análise qualitativa do pêndulo

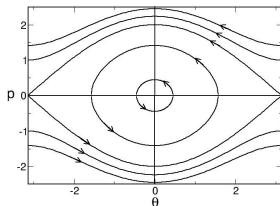


- ▶ energia potencial: $U(\theta) = -F \cos \theta$
- ▶ se $-F \leq E < F$ há dois pontos de retorno $\theta_2 = -\theta_1$, onde $\theta_1 = \arccos(-E/F)$: o pêndulo tem oscilações limitadas ao intervalo $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$ ("librações"). O período destas oscilações aumenta com a amplitude θ_1

$$\tau = 4 \sqrt{a/g} \mathbf{K}(\sin \theta_1/2),$$

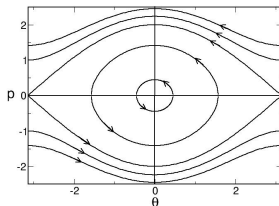
- ▶ se $E > F$ não há pontos de retorno, e o movimento do pêndulo consiste de rotações não-uniformes
- ▶ se $E = F$ os pontos de retorno são $\theta_1 = \pi$ e $\theta_2 = -\pi$. O período tende a infinito nesse caso, pois $\mathbf{K}(1) \rightarrow \infty$.

Análise no plano de fase



- ▶ se $-F \leq E < F$ as librações do pêndulo correspondem a trajetórias fechadas no plano de fase em torno do ponto de equilíbrio estável na origem, e no sentido anti-horário. Na vizinhança desse ponto as trajetórias de fase são elipses (oscilador harmônico). A origem ($\theta^* = 0, p^* = 0$) é um ponto de equilíbrio estável
- ▶ se $E > F$ as rotações do pêndulo correspondem a trajetórias abertas no plano de fase. Na verdade, como identificamos os pontos $+\pi$ e $-\pi$, as trajetórias fecham-se numa superfície de fase cilíndrica.

Análise no plano de fase



- ▶ se $E = F$ temos curvas que interceptam-se nos pontos $\theta = \pm\pi$, que são dois ramos de uma separatriz, que segrega trajetórias fechadas das abertas
- ▶ os pontos de equilíbrio ($\theta^* = \pm\pi, p^* = 0$) são instáveis
- ▶ equação para os ramos da separatriz

$$p_s = \pm\sqrt{2F(1 + \cos\theta_s)/G} = \pm(2\omega_0/G) \cos(\theta_s/2),$$

- ▶ como $\dot{\theta}_s = Gp_s$, temos que $\theta_s(t) = 4 \arctg(e^{\omega_0 t}) - \pi$. Logo $\theta_s(0) = 0$ e $\theta_s \rightarrow \pi$ no limite em que $t \rightarrow \infty$: sobre a separatriz, o movimento conduz assintoticamente aos pontos $\theta = \pm\pi$, mas leva um tempo infinitamente grande

Partícula num potencial central: revisão

- ▶ o movimento sistema de duas partículas m_1 e m_2 é separado no movimento do centro de massa e no movimento relativo
- ▶ Lagrangiana do movimento relativo (com a massa reduzida $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$)

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - U(r).$$

- ▶ para uma força central o torque é identicamente nulo, de modo que o momentum angular $\ell = m r^2 \dot{\theta}$ é conservado
- ▶ o movimento ocorre no plano perpendicular à direção do momentum angular ℓ : coordenadas (r, θ) em relação ao centro de força
- ▶ problema de Kepler: $U(r) = -k/r$, onde $k = G m_1 m_2 > 0$
- ▶ para $E < 0$ as trajetórias são elipses (seções cônicas) com foco no centro de força, de semi-eixo a (proporcional à energia $|E|$) e excentricidade $0 < \varepsilon < 1$

Partícula num potencial central

- ▶ momenta canonicamente conjugados às coordenadas (r, θ, ϕ)

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}, p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

- ▶ Hamiltoniana como transformada de Legendre da Lagrangiana

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - L = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r),$$

- ▶ por ser independente do tempo, é igual à energia E
- ▶ equações canônicas

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2}, \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m r^2 \sin^2 \theta}$$

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{m r^3} \left(p_\theta^2 - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right) - \frac{dU}{dr}$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\cos \theta p_\phi^2}{m r^2 \sin^3 \theta}, \frac{dp_\phi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0.$$

Partícula num potencial central

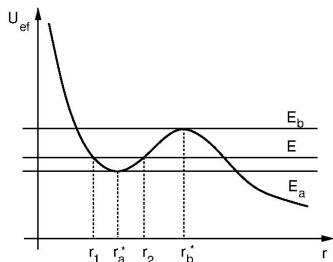
- ▶ como H não depende explicitamente de ϕ , ela é uma coordenada ignorável e p_ϕ é uma constante do movimento
- ▶ $p_\phi = 0$ então ϕ também é uma constante
- ▶ isso reforça nossa observação de que o movimento se restringe ao plano $\phi = \text{const.}$ Escolhemos $\phi = 0$ por simplicidade.
- ▶ mas H também não depende explicitamente de θ , de modo que p_θ é uma constante do movimento, igual ao momentum angular $\ell = mr^2\dot{\theta}$
- ▶ Hamiltoniana efetiva contém apenas a coordenada radial

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{\ell^2}{r^2} \right) + U(r) = \frac{p_r^2}{2m} + U_{ef} = E.$$

- ▶ representa a redução a um problema unidimensional equivalente, com o potencial reduzido

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2},$$

Estabilidade de órbitas circulares



- ▶ dois pontos de equilíbrio no movimento radial, correspondentes a extremos do potencial efetivo:
 - ▶ para $E = E_a$ existe uma órbita circular em $r = r_a^*$, que é um mínimo local de U_{ef}

$$U'_{ef}(r_a^*) = 0, \quad U''_{ef}(r_a^*) > 0,$$

- ▶ para $E = E_b$ existe uma órbita circular em $r = r_b^*$, que é um máximo local de U_{ef} :

$$U'_{ef}(r_b^*) = 0, \quad U''_{ef}(r_b^*) < 0,$$

- ▶ potencial do tipo lei de potência $U(r) = -kr^{n-1}/(n-1)$
- ▶ potencial efetivo associado

$$U_{ef}(r) = -\frac{k}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

- ▶ extremo: órbita circular de raio

$$r^* = \left(\frac{mk}{\ell^2} \right)^{1/(n-3)}$$

- ▶ será estável, em relação a pequenas perturbações radiais, se $n < 3$, pois

$$(3-n) \left(\frac{\ell^2}{m} \right) > 0,$$

- ▶ equação de movimento radial

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + U'(r) = 0 \Rightarrow \ddot{r} - \frac{\ell^2}{m^2r^3} = -g(r) \equiv -\frac{U'(r)}{m}.$$

- ▶ a órbita circular é tal que $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, com frequência

$$\omega_0 = \dot{\theta} = \sqrt{U'(r^*)/mr^*}$$

Oscilações radiais para uma órbita estável

- ▶ definindo os desvios radiais de uma órbita estável $r = r^* + x$
- ▶ equação de evolução temporal dos desvios radiais:

$$\ddot{x} - \frac{\ell^2}{m^2(r^* + x)^3} = -g(r^* + x).$$

- ▶ usando as aproximações ($|x| \ll r^*$)

$$\frac{1}{(r^* + x)^3} = \frac{1}{r^{*3}} \left(1 - \frac{3x}{r^*}\right), \quad g(r^* + x) = g(r^*) + xg'(r^*) + \dots,$$

$$\ddot{x} - \frac{\ell^2}{m^2 r^{*3}} \left(1 - \frac{3x}{r^*}\right) = -g(r^*) - xg'(r^*).$$

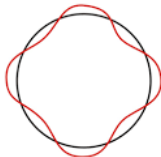
- ▶ para a órbita circular não-perturbada $\dot{x} = \ddot{x} = 0$, donde

$$g(r^*) = \ell^2/m^2 r^{*3},$$

- ▶ equação de um oscilador harmônico $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, onde

$$\omega^2 = \frac{3g(r^*)}{r^*} + g'(r^*).$$

- ▶ solução geral para $\omega^2 > 0$: $x(t) = A \cos(\omega t + \vartheta)$,



This wave fits perfectly on the circle



This wave, however, doubles over on itself

- ▶ corresponde a uma oscilação harmônica com frequência ω , indicando uma órbita cujo raio é alternadamente maior ou menor que r^* .
- ▶ se $\omega^2 < 0$ a solução não é mais oscilatória, pois irá tender a zero ou infinito com o passar do tempo: órbita instável
- ▶ para verificarmos se a órbita é aberta ou fechada computamos

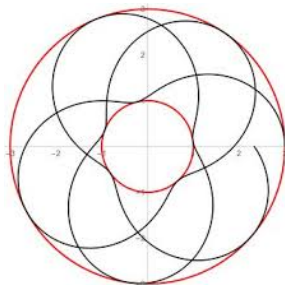
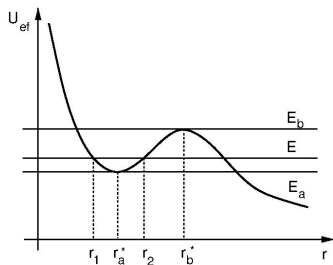
$$\frac{\omega}{\omega_0} = \left\{ 3 + \frac{r^* U''(r^*)}{U'(r^*)} \right\}^{1/2} .$$

- ▶ se $\omega/\omega_0 = p/q$ (número racional) a órbita correspondente irá fechar-se sobre si mesma após um dado número de oscilações completas.
- ▶ se ω/ω_0 for um número irracional, a órbita nunca irá se fechar

Teorema de Bertrand

- ▶ para o potencial do tipo lei de potência $\omega/\omega_0 = \sqrt{3-n}$
- ▶ a condição para órbitas fechadas é satisfeita para os seguintes expoentes:
 - ▶ $n = 2$, para o qual $\omega = \omega_0$, correspondendo ao problema de Kepler;
 - ▶ $n = -1$, para o qual $\omega = 2\omega_0$, que corresponde ao oscilador harmônico isotrópico, para o potencial central é $U(r) = kr^2/2$.
- ▶ estes resultados foram obtidos linearizando a equação das órbitas, para pequenas perturbações radiais
- ▶ Bertrand (1873): estas são as únicas soluções possíveis para órbitas fechadas no caso geral
- ▶ na demonstração, ele empregou termos de ordens mais altas na expressão da perturbação radial. Ver apêndice do Goldstein, 2a. ed.

Órbitas limitadas

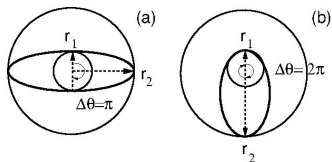


- ▶ $E_b < E_c < E_a$: haverá dois pontos de retorno r_1 e r_2 , obtidos pelas soluções reais e positivas de

$$U(r_{1,2}) = E - \frac{\ell^2}{2mr_{1,2}^2}.$$

- ▶ no intervalo $r_1 \leq r \leq r_2$ a partícula realizará oscilações radiais em torno do ponto de equilíbrio estável r^* .
- ▶ a trajetória da partícula estará limitada ao anel de raios interno e externo iguais a r_1 e r_2 (pontos apsidais)

Órbitas limitadas e fechadas

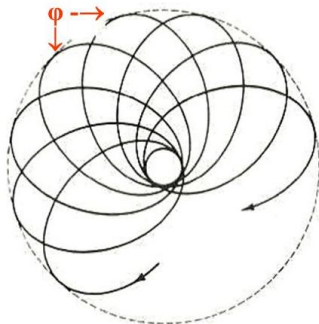


- ▶ $\Delta\theta$: ângulo entre as direções de um mesmo ponto apsidal, após uma oscilação radial completa
- ▶ da conservação do momentum linear (para um potencial central) $\dot{\theta} = \ell/mr^2$, donde

$$\Delta\theta = \int d\theta = \frac{2\ell}{m} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left\{ \frac{2}{m} \left[E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right] \right\}^{-1/2},$$

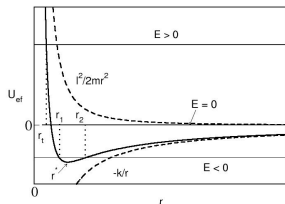
- ▶ para que a trajetória seja fechada após uma oscilação radial completa $\Delta\theta = 2\pi(p/q)$: a órbita fecha-se sobre si mesma após q oscilações radiais $r_1 \rightarrow r_2 \rightarrow r_1$ e após p voltas em torno da origem
- ▶ por exemplo, se $p/q = 1/2$, temos que $\Delta\theta = \pi$ e a órbita é uma elipse, se $p/q = 1$, então $\Delta\theta = 2\pi$ e a trajetória é a elipse

Órbitas limitadas e abertas



- ▶ se $\Delta\theta$ for um número irracional, a trajetória passará um número infinito de vezes pelos pontos apsidais r_1 e r_2 , mas nunca se fechará sobre si própria, ou seja, será uma trajetória aberta que preenche densamente o anel $r_1 \leq r \leq r_2$

Problema de Kepler



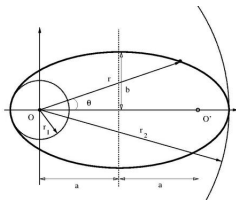
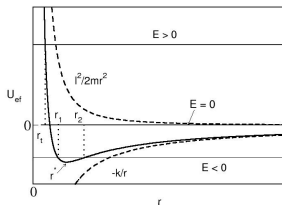
- ▶ potencial central $U(r) = -k/r$ (força é atrativa para $k > 0$)
- ▶ energia potencial efetiva

$$U_{ef}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}.$$

- ▶ análise qualitativa do movimento na direção radial
- ▶ há um ponto de equilíbrio estável no mínimo local de $U_{ef}(r)$

$$r_0 = \frac{\ell^2}{mk}, \quad \Rightarrow \quad E_0 = U_{ef}(r_0) = -\frac{mk^2}{2\ell^2}.$$

Problema de Kepler

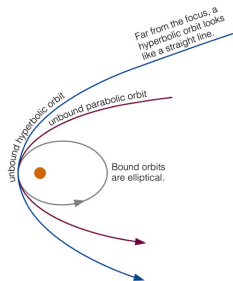
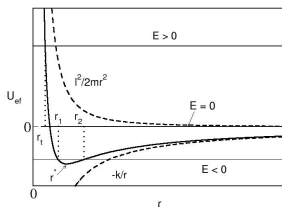


- ▶ pontos de retorno: soluções de $2mEr^2 + 2mkr - \ell^2 = 0$
- ▶ se $E_0 < E < 0$ haverá dois pontos de retorno

$$r_{1,2} = \frac{k}{2|E|} \pm \left[\left(\frac{k}{2|E|} \right)^2 - \frac{\ell^2}{2m|E|} \right]^{1/2}.$$

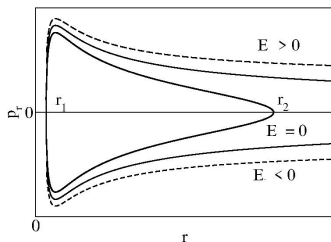
- ▶ a coordenada radial irá executar oscilações entre os pontos de retorno, que podem ser encarados como os raios de dois círculos concêntricos
- ▶ a trajetória da partícula (elipse) está limitada pelo anel $r_1 \leq r \leq r_2$, tais que $r_1 = a(1 - \varepsilon)$ e $r_2 = a(1 + \varepsilon)$.

Problema de Kepler



- ▶ se $E = E_0$ os dois pontos de retorno coalescem no ponto de equilíbrio r_0 , que será o raio de uma trajetória circular.
- ▶ se $E > 0$ haverá apenas um ponto de retorno r_1 , que corresponde ao ponto de máxima aproximação entre a partícula e o centro de força, para uma trajetória ilimitada (hipérbole)
- ▶ se $E = 0$ um dos pontos de retorno está no infinito, e a trajetória continua ilimitada (parábola)

Plano de fase radial para um potencial central



- ▶ plano de fase radial do problema de Kepler (p_r versus r)
- ▶ o tipo de trajetória também depende da energia do sistema
 1. se $E_0 \leq E < 0$ as trajetórias de fase são fechadas, tendo r_1 e r_2 como pontos de máxima e mínima aproximação, respectivamente. As trajetórias orbitam em torno de um centro em $r = r_0$ (equilíbrio estável)
 2. se $E > 0$ as trajetórias de fase são abertas, com um único ponto de retorno
 3. se $E = 0$ temos uma separatriz entre as duas situações anteriores, que se aproxima assintoticamente do eixo horizontal, quando $r \rightarrow \infty$.

Partícula carregada num campo eletromagnético

- ▶ Lagrangiana de uma partícula de massa m e carga e , sob a ação de um campo eletromagnético

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = mv^2/2 - e\Phi(\mathbf{r}, t) + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}.$$

- ▶ momenta canonicamente conjugados

$$\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{v}}L = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}.$$

- ▶ a transformação de Legendre fornece a Hamiltoniana

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2/2m + e\Phi(\mathbf{r}, t).$$

- ▶ equações de Hamilton

$$\dot{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{p}}H = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla H = \frac{e}{m} [(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot \nabla] \mathbf{A} + \frac{e}{m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla\Phi$$

- ▶ usando a derivada total do potencial vetorial

$$d\mathbf{A}/dt = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \partial\mathbf{A}/\partial t$$

Partícula num campo magnético uniforme

- ▶ $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{i}}$: os potenciais eletromagnéticos são $\mathbf{A} = -B_0 y \hat{\mathbf{i}}$ e $\Phi = 0$
- ▶ Hamiltoniana (girofreqüência $\Omega = eB_0/m$)

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + eB_0 y \hat{\mathbf{i}} \right)^2 = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Omega y p_x + \frac{1}{2} m \Omega^2 y^2.$$

- ▶ equações de Hamilton

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x + \Omega y}{m}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\Omega p_x - m\Omega^2 y, \quad \frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

- ▶ como a Hamiltoniana é cíclica nas coordenadas x e y , os respectivos momenta são conservados: $p_x = \mathcal{A}$ e $p_z = \mathcal{C}$
- ▶ a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, ela é igual à energia E , que também é conservada no movimento

Campos elétrico e magnético uniformes

- ▶ $\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)$ e $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$, com os potenciais $\Phi = -E_x x - E_z z$ e $\mathbf{A} = -B_0(y, 0, 0)$

- ▶ Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Omega y p_x + \frac{1}{2} m \Omega^2 y^2 - q E_x x - q E_z z,$$

- ▶ equações de Hamilton

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m} p_x + \Omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m} p_y$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{1}{m} p_z, \quad \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = q E_x,$$

$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\Omega p_x - m \Omega^2 y, \quad \frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} = q E_z$$

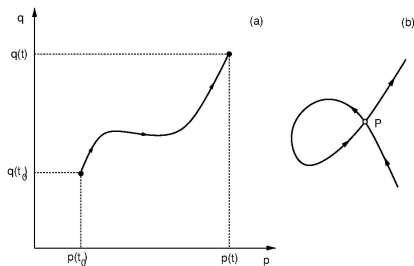
Plano de fase

- ▶ as variáveis que especificam o estado de um sistema Hamiltoniano no espaço de fase são as coordenadas e os momenta generalizados
- ▶ para um sistema tem n graus de liberdade, o seu espaço de fase terá dimensão $2n$.
- ▶ se $n = 1$ espaço de fase, neste caso, é bidimensional e tem como coordenadas a posição q e o momentum p
- ▶ em cada instante de tempo, o estado do sistema é representado por um ponto (p, q) no plano de fase
- ▶ a evolução temporal dos ponto no plano de fase é governada pelas equações de Hamilton

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

- ▶ dada uma condição inicial $(p(t=0), q(t=0))$, e resolvendo estas equações, a sequência de pontos $(p(t), q(t))$ define uma trajetória no plano de fase

Plano de fase

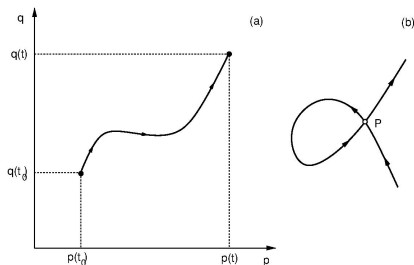


- ▶ teorema de existência e unicidade para equações diferenciais: caso H e suas derivadas sejam funções diferenciáveis então, dada uma condição inicial $(p(t = 0), q(t = 0))$ existirá uma e somente uma trajetória passando por este ponto
- ▶ se H não depende explicitamente do tempo, é igual à energia E (constante do movimento)

$$H(p, q) = \frac{1}{2m}p^2 + U(q) = \frac{1}{2m}p_0^2 + U(q_0) = E,$$

- ▶ para um dado valor da energia, haverá uma única trajetória de fase

Plano de fase



- ▶ as trajetórias podem ser abertas ou fechadas, dependendo da natureza do movimento
- ▶ duas trajetórias jamais poderão se cruzar no plano de fase
- ▶ caso elas o fizessem, o suposto ponto de interseção entre elas poderia ser considerado uma condição inicial no plano de fase
- ▶ como deste ponto emanariam duas trajetórias, haveria uma violação do teorema de existência e unicidade
- ▶ limitações severas aos tipos de trajetória possíveis no plano de fase

Pontos de equilíbrio

- ▶ pontos de equilíbrio (q^*, p^*) são pontos singulares do campo vetorial definido pelas equações de Hamilton

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{(q^*, p^*)} = 0, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{(q^*, p^*)} = 0,$$

- ▶ partícula de massa m movendo-se em uma dimensão sob a ação de uma força conservativa
- ▶ Hamiltoniana $H = p^2/2m + U(q)$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{dU}{dq}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m},$$

- ▶ pontos de equilíbrio $p^* = 0$ e $U'(q^*) = 0$: partícula em repouso num extremo da energia potencial, que pode ser um máximo, mínimo ou um ponto de inflexão.

Estabilidade dos pontos de equilíbrio

- ▶ equações de Hamilton

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \equiv f(p, q), \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \equiv g(p, q),$$

- ▶ pontos de equilíbrio (p^*, q^*) : $f(p^*, q^*) = 0$ e $g(p^*, q^*) = 0$
- ▶ para investigar a estabilidade linear dos pontos de equilíbrio, consideramos pequenos deslocamentos em relação a eles

$$p(t) = p^* + \delta p(t), \quad (|\delta p| \ll |p^*|),$$

$$q(t) = q^* + \delta q(t), \quad (|\delta q| \ll |q^*|),$$

- ▶ expandindo em séries de Taylor em torno do ponto de equilíbrio (até termos de segunda ordem)

$$\dot{\delta p} = \delta p \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_{(q^*, p^*)} + \delta q \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)_{(q^*, p^*)} + \dots$$

$$\dot{\delta q} = \delta p \left(\frac{\partial g}{\partial p} \right)_{(q^*, p^*)} + \delta q \left(\frac{\partial g}{\partial q} \right)_{(q^*, p^*)} + \dots,$$

Estabilidade dos pontos de equilíbrio

- ▶ elementos da matriz Jacobiana, calculadas no ponto de equilíbrio

$$a = \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_{(q^*, p^*)} = - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \right)_{(q^*, p^*)}$$

$$b = \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)_{(q^*, p^*)} = - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \right)_{(q^*, p^*)}$$

$$c = \left(\frac{\partial g}{\partial p} \right)_{(q^*, p^*)} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \right)_{(q^*, p^*)}$$

$$d = \left(\frac{\partial g}{\partial q} \right)_{(q^*, p^*)} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \right)_{(q^*, p^*)} = -a$$

- ▶ equação linearizada para os deslocamentos: $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estabilidade dos pontos de equilíbrio

- ▶ procuramos soluções de $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}$ na forma

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u} e^{\lambda t},$$

- ▶ onde \mathbf{u} é um vetor constante. Derivando e substituindo

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{u} = \xi \mathbf{u},$$

- ▶ \mathbf{u} é um autovetor da matriz \mathbf{J} , correspondendo ao autovalor ξ
- ▶ equação de autovetores

$$(\mathbf{J} - \xi \mathbf{I}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

- ▶ é um sistema linear homogêneo: tem soluções não-triviais se e somente se o determinante dos seus coeficientes for nulo, o que nos leva à chamada equação secular

$$\det(\mathbf{J} - \xi \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a - \xi & b \\ c & -a - \xi \end{vmatrix} = \xi^2 + \Delta = 0$$

- ▶ onde definimos o coeficiente $\Delta = \det \mathbf{J} = -a^2 - bc$
- ▶ as raízes da equação quadrática são os autovalores da matriz Jacobiana \mathbf{J} : $\xi_1 = \sqrt{-\Delta}$ e $\xi_2 = -\sqrt{-\Delta}$

Autovalores complexos

- ▶ se $\Delta > 0$ então $\xi_{1,2} = \pm i\omega$, onde $\omega = \sqrt{\Delta}$: autovalores imaginários puros, complexos conjugados entre si
- ▶ autovetores complexos, que escreveremos como

$$\mathbf{u}_1 = \boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{u}_2 = \boldsymbol{\alpha} - i\boldsymbol{\beta},$$

- ▶ onde $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ são vetores reais e ortonormais,

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1, \quad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0.$$

- ▶ procuramos soluções na forma

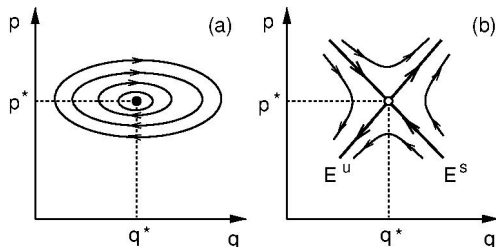
$$\begin{aligned} e^{\xi t} \mathbf{u} &= e^{i\omega t} (\boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{\beta}) = (\cos \omega t + i \sin \omega t) (\boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{\beta}) \\ &= (\boldsymbol{\alpha} \cos \omega t - \boldsymbol{\beta} \sin \omega t) + i(\boldsymbol{\alpha} \sin \omega t + \boldsymbol{\beta} \cos \omega t). \end{aligned}$$

- ▶ as partes real e imaginária da expressão acima são soluções linearmente independentes: a solução geral será uma combinação linear delas

$$\mathbf{v}(t) = c_1 (\boldsymbol{\alpha} \cos \omega t - \boldsymbol{\beta} \sin \omega t) + c_2 (\boldsymbol{\alpha} \sin \omega t + \boldsymbol{\beta} \cos \omega t),$$

- ▶ onde $c_{1,2}$ são constantes de integração, definidas a partir das condições iniciais $\delta q(t=0)$ e $\delta p(t=0)$.

Pontos elípticos



- ▶ usando as relações de ortonormalidade obtemos

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = c_1^2 + c_2^2, \quad (\delta p)^2 + (\delta q)^2 = R^2,$$

- ▶ as trajetórias no plano de fase em torno do ponto de equilíbrio (p^*, q^*) (que corresponde a $\delta p = \delta q = 0$) são círculos concêntricos de raio R
- ▶ o ponto de equilíbrio é chamado *centro* ou *ponto elíptico*
- ▶ como as trajetórias não se afastam nem se aproximam do ponto de equilíbrio com o passar do tempo, (q^*, p^*) é marginalmente estável, ou estável no sentido de Lyapunov

Autovalores reais

- ▶ se $\Delta < 0$ então $\xi_{1,2} = \pm\lambda$, onde $\lambda = |\Delta|^{1/2} > 0$: autovalores reais e distintos
- ▶ há duas soluções linearmente independentes: a solução geral será a combinação linear

$$\mathbf{v}(t) = c_1 \mathbf{u}_1 e^{\lambda t} + c_2 \mathbf{u}_2 e^{-\lambda t},$$

- ▶ onde $c_{1,2}$ são constantes de integração, e $\mathbf{u}_{1,2}$ os autovetores, que determinam duas direções no plano de fase:
 1. escolhendo $c_2 = 0$ os desvios afastam-se assintoticamente do ponto de equilíbrio ao longo de \mathbf{u}_1 (direção instável E^i) tal que

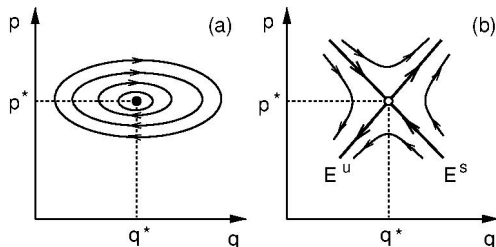
$$|\mathbf{v}(t)| \propto e^{\lambda t} \rightarrow \infty, \quad (t \rightarrow \infty),$$

2. escolhendo $c_1 = 0$ os desvios aproximam-se assintoticamente do ponto de equilíbrio ao longo de \mathbf{u}_2 (direção estável E^e) pois

$$|\mathbf{v}(t)| \propto e^{-\lambda t} \rightarrow 0, \quad (t \rightarrow \infty),$$

- ▶ com exceção da direção determinada por \mathbf{u}_2 , todos os demais pontos afastam-se do ponto de equilíbrio na origem
($\delta p = 0, \delta q = 0$)

Pontos hiperbólicos



- ▶ o ponto de equilíbrio (q^*, p^*) é instável, e também chamado *ponto de sela* ou *ponto hiperbólico* (devido à forma das trajetórias cujas assíntotas são as direções estável e instável)
- ▶ as direções estável e instável são invariantes em relação à dinâmica gerada pelas equações de Hamilton: se uma dada condição inicial $(q(0), p(0))$ é escolhida sobre elas, todos os demais pontos $(q(t), p(t))$ pertencerão às direções E^i ou E^u
- ▶ as direções invariantes **não são** trajetórias, já que as direções invariantes se cruzam transversalmente no ponto de sela, e trajetórias no plano de fase não podem se cruzar

Pontos de equilíbrio para o pêndulo

- ▶ Hamiltoniana (com $F = G = 1$)

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \cos \theta,$$

- ▶ derivadas parciais relevantes

$$\frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial \theta} = 0,$$

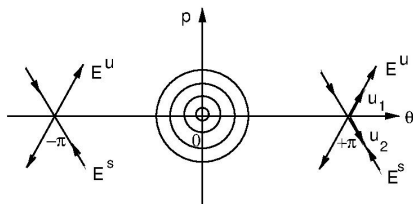
$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = \sin \theta, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = \cos \theta, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \theta \partial p} = 0.$$

- ▶ pontos de equilíbrio são determinados pelas condições

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_{(p^*, \theta^*)} = p^* = 0, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)_{(p^*, \theta^*)} = \sin \theta^* = 0,$$

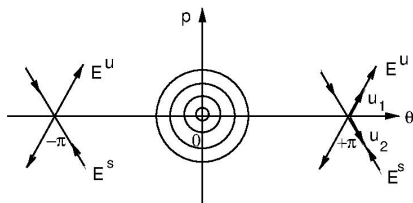
$$(p_1^*, \theta_1^*) = (0, 0), \quad (p_2^*, \theta_2^*) = (0, \pm\pi),$$

Estabilidade dos pontos de equilíbrio para o pêndulo



- ▶ estabilidade de $(p_1^*, \theta_1^*) = (0, 0)$: elementos de sua matriz Jacobiana: $a = 0$, $b = -1$, $c = 1$, com determinante $\Delta = 1 > 0$
- ▶ os autovalores da matriz Jacobiana são imaginários puros $\xi_{1,2} = \pm i$, e $(0, 0)$ é um ponto elíptico (ou centro), estável no sentido de Lyapunov
- ▶ as trajetórias em torno da origem, e em sua vizinhança próxima, são círculos concêntricos, que correspondem a librações do pêndulo de pequena amplitude
- ▶ estabilidade de $(p_1^*, \theta_1^*) = (0, \pm\pi)$. Os elementos de sua matriz Jacobiana são $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, tal que $\Delta = -1 < 0$

Estabilidade dos pontos de equilíbrio para o pêndulo

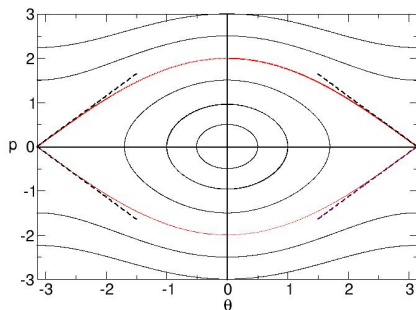


- ▶ os autovalores são reais $\xi_{1,2} = \pm 1$, e $(0, \pm\pi)$ é um ponto hiperbólico (ou ponto de sela), instável em relação a pequenas perturbações em sua vizinhança.
- ▶ Os autovetores correspondentes a $\xi_1 = 1$ e $\xi_2 = -1$ são

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

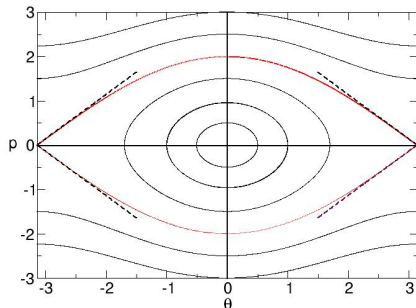
- ▶ \mathbf{u}_1 define a direção instável que emana do ponto de sela, enquanto \mathbf{u}_2 define a direção estável
- ▶ ambas são direções invariantes pela dinâmica do sistema linearizado nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio

Variedades invariantes



- ▶ retrato de fase do pêndulo, levando em conta os termos não-lineares: trajetórias fechadas e abertas
- ▶ o ponto $(0,0)$ é um ponto elíptico (centro) também quando os termos não-lineares são considerados
- ▶ os análogos às direções invariantes, considerando agora os termos não-lineares das equações de Hamilton, são as chamadas curvas ("variedades") invariantes

Variedades invariantes



- ▶ dos pontos hiperbólicos $(0, \pm\pi)$ emanam as variedades invariantes estável e instável, que correspondem aos ramos da separatriz que conecta os pontos de sela
- ▶ as variedades estável e instável são tangentes às direções estável e instável nos pontos hiperbólicos
- ▶ teorema das variedades invariantes