Dinâmica Hamiltoniana Aplicada
Capítulo 4
A equação de Hamilton-Jacobi

Prof. Ricardo Luiz Viana
rlv640@gmail.com

Instituto de Física da USP

Conteúdo da aula

Equação de Hamilton-Jacobi dependente do tempo

Variáveis de ação e ângulo

Invariantes adiabáticos

Equação de Hamilton-Jacobi dependente do tempo

- transformação canônica $(p_i, q_i, t) \to (P_i, Q_i, t)$ efetuada por meio da função geratriz de segunda espécie $F_2(q_i, P_i, t)$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \qquad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

- escolhemos a transformação canônica tal que $K \equiv 0$. As equações de Hamilton correspondentes são

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0, \qquad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0,$$

- tanto P_i como Q_i são constantes do movimento, que podem ser escolhidas como as condições iniciais: $P_i = p_i(t = 0)$ e $Q_i = q_i(t = 0)$
- aplicando as equações da transformação canônica

$$p_i = p_i(q_i, p_i(0), t), \qquad Q_i = Q_i(q_i, p_i(0), t).$$

Função principal de Hamilton

- invertendo formalmente a segunda expressão

$$q_i = q_i(q_i(0), p_i(0), t), \qquad p_i = p_i(q_i(0), p_i(0), t),$$

que é a própria solução do problema.
- equação de Hamilton-Jacobi dependente do tempo: como $K = 0$,

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

- $F_2 = S$: função principal de Hamilton
- os novos momenta são constantes de movimento: $P_i \equiv \alpha_i = const. \qquad (i = 1, 2, \dots n)$,

$$p_i = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

- as novas coordenadas são também constantes do movimento.

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i} \equiv \beta_i, \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

Função Principal de Hamilton

- invertendo, obtemos a solução do problema nas variáveis antigas

$$q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t), \qquad p_i = p_i(\alpha_i, \beta_i, t).$$

- a função principal de Hamilton é, a menos de uma constante aditiva, igual à integral de ação do sistema

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \frac{d\alpha_i}{dt} \right) + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

- como α_i são constantes do movimento

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \dot{q}_i - H = L,$$

- que, integrada, fornece

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt + const.,$$

Equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo

- se H não depende explicitamente do tempo

$$H\left(\frac{\partial S(q_i,\alpha_i,t)}{\partial q_i}, q_i\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

- usando separação de variáveis (E é a energia total)

$$S(q_i,\alpha_i,t) = W(q_i,\alpha_i) - Et,$$

- equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo

$$H\left(\frac{\partial W(q_i,\alpha_i)}{\partial q_i}, q_i\right) = E,$$

- onde W é chamada *função característica de Hamilton*: ela é a função geratriz de uma transformação canônica $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to (\mathbf{P},\mathbf{Q})$, para a qual a Kamiltoniana é função apenas dos novos momenta: $K = K(P_i) = E$
- equações de Hamilton nas novas variáveis

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0, \qquad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_i}.$$

Equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo

- os novos momenta são constantes de movimento: $P_i \equiv \alpha_i = const.$, e as novas coordenadas são tais que

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i}.$$

- a energia é, ela própria, uma constante de movimento: $\alpha_1 = E$

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{\partial K}{\partial E} = 1$$

$$Q_1(t) = t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}.$$

- se $i \neq 1$

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = 0$$

$$Q_i(t) = \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$$

Partícula num campo de forças conservativas

- partícula de massa m sujeita a uma energia potencial tridimensional $U(\mathbf{r})$

$$H(\mathbf{p},\mathbf{r}) = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + U(\mathbf{r}).$$

- componentes do momentum

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{p} = \nabla S.$$

- equação de Hamilton-Jacobi dependentes do tempo

$$H(\nabla S,\mathbf{r}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \Rightarrow \frac{1}{2m}|\nabla S|^2 + U(\mathbf{r}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

- separação de variáveis: $S = W - Et$

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{p} = \nabla W,$$

- função característica de Hamilton

$$W = p_x\, x + p_y\, y + p_z\, z = \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}.$$

Oscilador harmônico

- Hamiltoniana
$$H(p,q) = G\,\frac{p^2}{2} + F\,\frac{q^2}{2}.$$
- equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo
$$\frac{G}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{F}{2}\,q^2 = E,$$
- função característica de Hamilton
$$W = \int dq \sqrt{\frac{2}{G}\left(E - \frac{F}{2}\,q^2\right)}.$$

$$t + \beta = \frac{\partial W}{\partial E} = \int dq\,\frac{\partial}{\partial E}\sqrt{\frac{2}{G}\left(E - \frac{F}{2}\,q^2\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{FG}}\int \frac{dq}{\sqrt{(2E/F) - q^2}},$$

Oscilador harmônico

- usando a integral elementar

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C,$$

$$\beta + t = \frac{1}{\sqrt{FG}} \text{arcsen}\left(\sqrt{\frac{F}{2E}}\, q\right),$$

- onde β é uma constante de integração. Invertendo obtemos

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{F}} \,\text{sen}\left[\sqrt{FG}\,(\beta + t)\right].$$

- momentum generalizado em termos da função de Hamilton

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{\frac{2}{G}\left(E - \frac{F}{2}\, q^2\right)}.$$

$$p(t) = \sqrt{\frac{2E}{G}} \cos\left[\sqrt{FG}\,(\beta + t)\right].$$

- dadas as condições iniciais $q(0)$ e $p(0)$, é possível exprimir as constantes $\alpha = E$ e β em função delas.

Pêndulo

- Hamiltoniana
$$H(p,\theta) = G\,\frac{p^2}{2} - F\,\cos\theta,$$
- equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo
$$\frac{G}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 - F\cos\theta = E,$$
- função característica de Hamilton
$$W = -\int d\theta \sqrt{\frac{2}{G}\,(E + F\cos\theta)}.$$
- momentum canonicamente conjugado a θ
$$p = \frac{\partial W}{\partial \theta} = -\sqrt{\frac{2}{G}}\,\sqrt{E + F\cos\theta},$$
$$t + \beta = \frac{\partial W}{\partial E} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{G}}\int \frac{d\theta}{\sqrt{E + F\cos\theta}}.$$

Pêndulo

- como a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, ela é igual à energia E

$$G\,\frac{p^2}{2} - F\;\cos\theta = E$$

- amplitude das oscilações θ_0

$$-F\cos\theta_0 = E$$

$$E + F\cos\theta = F(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

- donde o radicando na expressão do slide anterior fica

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = -\sqrt{FG}\,(\beta + t).$$

- que é a mesma quadratura resolvida no Capítulo 1 para obter a solução do pêndulo $\theta(t)$ em termos de funções elípticas de Jacobi

Partícula num potencial central

- Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \text{ sen }^2\theta}\right) + U(r),$$

- equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \text{ sen }^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2\right\} + U(r) = E.$$

- método de separação de variáveis:

$$W(r,\theta,\phi) = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi),$$

$$\underbrace{r^2 \text{sen }^2\theta\left\{\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2 + 2m[U(r)-E]\right\} + \text{ sen }^2\theta\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2}_{\text{só dependem de } r \text{ e } \theta}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{dW_\phi}{d\phi}\right)^2}_{\text{só depende de } \phi} = 0.$$

- se a soma destes dois termos é identicamente nula, ambos devem ser iguais a constantes

$$\frac{dW_\phi}{d\phi} = \alpha_\phi \Rightarrow W_\phi(\phi) = \alpha_\phi\, \phi.$$

$$\underbrace{r^2 \left\{ \left(\frac{dW_r}{dr} \right)^2 + 2m[U(r) - E] \right\}}_{\text{só depende de } r} + \underbrace{\left(\frac{dW_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}_{\text{só dependem de } \theta} = 0.$$

$$\left(\frac{dW_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = \alpha_\theta^2,$$

$$W_\theta(\theta) = \pm \int d\theta \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}.$$

$$\left(\frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2m[E - U(r)],$$

$$W_r(r) = \pm \int dr \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}.$$

Partícula num potencial central

- $\alpha_1 = E$ reflete a conservação de energia
- $\alpha_\phi = p_\phi$ é a componente do momentum angular ao longo do eixo polar z (perpendicular ao plano da órbita)
- substituindo $p_\theta = \partial W_\theta / \partial \theta$ obtemos

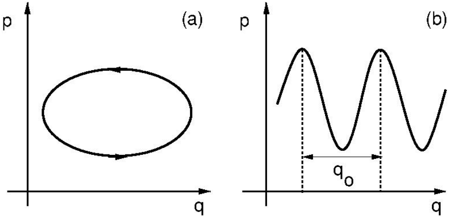
$$\alpha_\theta^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

- Hamiltoniana em função das constantes de movimento

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}\right) + U(r) = \alpha_1.$$

- α_θ: módulo do momentum angular ℓ da partícula
- a constância de $\alpha_\theta = \ell$ assegura que a órbita jaz sobre um plano para todos os tempos, a constância de $\alpha_\phi = \ell_z$ garante que este plano não tenha sua orientação espacial alterada (por exemplo, não sofra uma precessão).

Variáveis de ação e ângulo



- sistema com $n = 1$ grau de liberdade: $H(p, q) = E$.
- dois tipos básicos de movimento periódico no plano de fase:
  1. librações: oscilações com amplitude limitada, que correspondem no plano de fase a trajetórias fechadas: $p(t) = p(t + \tau)$, $q(t) = q(t + \tau)$
  2. rotações: o momentum p é uma função periódica de q: $p(q) = p(q + q_0)$, correspondendo a trajetórias abertas no plano de fase
- equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo

$$H\left(\frac{\partial W(q, \alpha)}{\partial q}, q\right) = E,$$

Variáveis de ação e ângulo

- a função característica de Hamilton W gera uma transformação canônica $(p, q) \to (P, Q)$, para a qual a Kamiltoniana só depende do novo momento, que é uma constante do movimento: $K = K(P) = E$
- temos a liberdade de escolher essa constante de movimento como seja mais conveniente. Para sistemas periódicos, ela é a integral de ação
$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq,$$
- variável de ângulo θ: canonicamente conjugada à ação J
- equações da transformação canônica $(p, q) \to (J, \theta)$

$$\theta = \frac{\partial W(q, J)}{\partial J}, \qquad p = \frac{\partial W(q, J)}{\partial q}.$$

Variáveis de ação e ângulo

- integrando ao longo de um ciclo completo de oscilação, a variação da variável angular é

$$\Delta\theta = \oint dq \frac{\partial \theta}{\partial q} = \oint dq \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial W}{\partial J}$$

$$= \oint dq \frac{\partial}{\partial J} \frac{\partial W}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial J} \oint dqp = 2\pi,$$

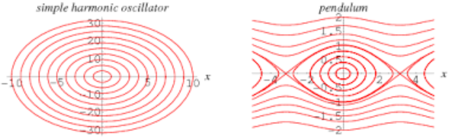
- Kamiltoniana em termos da variável de ação: $K = K(J) = E$, com as equações de Hamilton

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial K}{\partial J} = \frac{\partial E}{\partial J} \equiv \omega(J),$$

- soluções para as variáveis de ação e ângulo

$$J(t) = J(0) = const. \qquad \theta(t) = \theta(0) + \omega(J(0))t.$$

Variáveis de ação e ângulo para o oscilador harmônico



- trajetórias no plano de fase: elipses cujos semi-eixos maiores correspondem às amplitudes de oscilação q_1, com $p_1 = 0$ (pontos de retorno)

$$q_1 = \sqrt{\frac{2E}{F}}.$$

- um ciclo completo do oscilador corresponde a tomar 4 vezes o percurso desde $q = 0$ até $q = q_1$

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p\, dq = \frac{4}{2\pi} \int_0^{q_1} p\, dq.$$

- é proporcional à área limitada pela elipse de semi-eixo maior q_1 no plano de fase

Variáveis de ação e ângulo para o oscilador harmônico

- momentum do oscilador harmônico em função da coordenada e da energia é

$$p = \sqrt{\frac{2}{G}}\,\sqrt{E - \frac{F}{2}\,q^2},$$

- variável de ação dada por

$$J = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{G}}\int_0^{q_1} dq\,\sqrt{E - \frac{F}{2}\,q^2} = \frac{E}{\sqrt{FG}},$$

- onde usamos

$$\int dx\,\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) + C.$$

- a Kamiltoniana será função apenas da variável de ação: $K(J) = \sqrt{FG}\,J$
- frequência das oscilações

$$\omega = \frac{\partial K}{\partial J} = \sqrt{FG} \Rightarrow K(J) = \omega\,J = E.$$

Variáveis de ação e ângulo para o oscilador harmônico

- função característica de Hamilton: $W(q,J) = \int dq\, p(q,J)$, onde
$$p(q,J) = \left[2\sqrt{\frac{F}{G}}\,J - \frac{F}{G}\,q^2\right]^{1/2}.$$
- a variável de ângulo conjugada a J será
$$\theta = \frac{\partial W}{\partial J} = \int dq\,\frac{\partial}{\partial J}\left[2\sqrt{\frac{F}{G}}\,J - \frac{F}{G}\,q^2\right]^{1/2}$$
$$= \int dq \left[2J\sqrt{\frac{G}{F}} - q^2\right]^{-1/2} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{q}{\sqrt{2J\sqrt{G/F}}}\right).$$
- invertendo determinamos a coordenada e o momentum em função das variáveis de ação e ângulo:
$$q = \sqrt{2J\sqrt{\frac{G}{F}}}\,\operatorname{sen}\theta, \qquad p = \sqrt{2J\sqrt{\frac{F}{G}}}\,\cos\theta.$$

Partícula num potencial central

- função característica de Hamilton

$$W(r,\theta,\phi) = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi),$$

- onde

$$W_\phi(\phi;\alpha_\phi) = \alpha_\phi \phi,$$

$$W_\theta(\theta;\alpha_\theta,\alpha_\phi) = \int d\theta \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\operatorname{sen}^2\theta}},$$

$$W_r(r;E,\alpha_\theta) = \int dr \sqrt{2m[E-U(r)] - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}.$$

- variáveis de ação na direção azimutal: rotação símples

$$J_\phi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\phi \, d\phi = \frac{1}{2\pi}\oint d\phi \, \frac{dW_\phi}{d\phi} = \frac{\alpha_\phi}{2\pi}\oint d\phi = \alpha_\phi$$

Partícula num potencial central

- variável de ação na direção polar (libração)

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint p_\theta\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\oint d\theta\, \frac{dW_\theta}{d\theta}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint d\theta\, \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\phi^2}{\operatorname{sen}^2\theta}} = |\alpha_\theta| - \alpha_\phi$$

- variável de ação na direção radial (libração)

$$J_r = \frac{1}{2\pi}\oint p_r\, dr = \frac{1}{2\pi}\oint dr\, \frac{dW_r}{dr}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint dr\, \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}.$$

- problema de Kepler: $U(r) = -k/r$

$$J_r(r) = \frac{1}{2\pi}\oint dr\, \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}$$

Problema de Kepler

- libração radial entre os pontos de retorno r_- e r_+

$$J_r(r) = \frac{2}{2\pi} \int_{r_-}^{r_+} dr \, \frac{\sqrt{2mEr^2 + 2mkr - \alpha_\theta^2}}{r} \, dr$$

$$J_r = -(J_\theta + J_\phi) + \frac{k}{2} \sqrt{-\frac{2m}{E}}.$$

- Kamiltoniana em termos das variáveis de ação

$$K = E = -\frac{mk^2}{2(J_r + J_\theta + J_\phi)^2},$$

- frequências associadas a cada grau de liberdade

$$\omega_r = \frac{\partial K}{\partial J_r} = \frac{mk^2}{(J_r + J_\theta + J_\phi)^3}$$

$$\omega_\theta = \frac{\partial K}{\partial J_\theta} = \omega_r, \qquad \omega_\phi = \frac{\partial K}{\partial J_\phi} = \omega_r.$$

Problema de Kepler

- variáveis de ângulo conjugadas às variáveis de ação

$$\theta_r = \frac{\partial W}{\partial J_r} = \frac{dW_r}{dJ_r}, \quad \theta_\theta = \frac{\partial W}{\partial J_\theta} = \frac{dW_\theta}{dJ_\theta}, \quad \theta_\phi = \frac{\partial W}{\partial J_\phi} = \frac{dW_\phi}{dJ_\phi}.$$

- a degenerescência tripla pode ser eliminada por meio de uma transformação canônica

$$(J_r, J_\theta, J_\phi; \theta_r, \theta_\theta, \theta_\phi) \to (J_1, J_2, J_3; \theta_1, \theta_2, \theta_3),$$

- função geratriz de segunda espécie:

$$F_2 = (\theta_\phi - \theta_\theta)\, J_1 + (\theta_\theta - \theta_r)\, J_2 + \theta_r\, J_3.$$

- equações da transformação canônica são

$$\theta_1 = \frac{\partial F_2}{\partial J_1} = \theta_\phi - \theta_\theta, \qquad \theta_2 = \frac{\partial F_2}{\partial J_2} - \theta_\theta - \theta_r,$$

$$\theta_3 = \frac{\partial F_2}{\partial J_3} = \theta_r, \qquad J_r = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_r} = -J_2 + J_3,$$

$$J_\theta = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_\theta} = -J_1 + J_2, \qquad J_\phi = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_\phi} = J_1.$$

Problema de Kepler

- novas variáveis de ação em função das antigas

$$J_1 = J_\phi = \alpha_\phi$$

$$J_2 = J_\theta + J_\phi = \alpha_\theta - \alpha_\phi + \alpha_\phi = \alpha_\theta$$

$$J_3 = J_r + J_\theta + J_\phi = J_r + \alpha_\theta,$$

- Hamiltoniana em termos das novas variáveis de ação

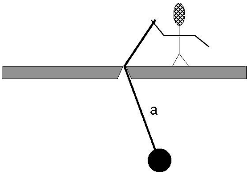
$$\overline{H} = -\frac{mk^2}{2J_3^2},$$

- novas frequências (a degenerescência é parcialmente removida)

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 = \omega_\phi - \omega_\theta = 0$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}_2 = \omega_\theta - \omega_r = 0, \qquad \omega_3 = \dot{\theta}_3 = \omega_r,$$

Invariantes adiabáticos



- o comprimento do pêndulo a é diminuído lentamente

$$da/dt \ll a/\tau, \qquad \tau = 2\pi/\omega$$

- a frequência ω irá aumentar a uma taxa

$$d\omega/da = -\omega/2a \sim a^{-1/2}.$$

- a energia do pêndulo também irá aumentar

$$E(a) \approx E(a_0)\sqrt{a_0/a} \sim a^{-1/2},$$

- a razão E/ω permanece aproximadamente constante
- E/ω é um invariante adiabático pois é constante apenas de forma aproximada ao longo de um ciclo completo de oscilação, desde que a variação do parâmetro seja lenta o suficiente

Invariantes adiabáticos

- sistema oscilante com um grau de liberdade: $H(q,p) = E$
- λ: parâmetro do sistema que tenha uma variação lenta
$$\frac{d\lambda}{dt} \ll \frac{\lambda}{\tau}.$$
onde τ é o período de oscilação.
- se λ não se altera, a energia E do sistema permanece constante e a trajetória do sistema no plano de fase é um caminho fechado $\mathcal{C}$
- se λ varia, a energia deixa de ser constante e a trajetória não é mais fechada
- mas, se λ varie lentamente, a taxa de variação da energia dE/dt pode ser considerada suficientemente pequena
$$\frac{dH}{dt} = \{H,H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t},$$
- como $H = E$, pela regra da cadeia,
$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial t}.$$

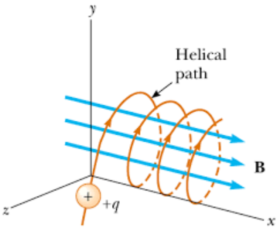
Invariantes adiabáticos

- tomamos uma média sobre um período τ do sistema
$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \approx \frac{\partial \lambda}{\partial t} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle,$$
$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt\, \frac{\partial H}{\partial \lambda}.$$
- como $\dot{q} = \partial H/\partial p$, então $dt = dq/(\partial H/\partial p)$, o período do movimento é
$$\tau = \int_0^\tau dt = \oint_{\mathcal{C}} \frac{dq}{\partial H/\partial p},$$
onde $\mathcal{C}$ é a trajetória fechada do oscilador no plano de fase
$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle = \frac{\oint \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{dq}{\partial H/\partial p}}{\oint \frac{dq}{\partial H/\partial p}}.$$
- para um dado ponto fixo q deste ciclo $\mathcal{C}$, nós derivamos a relação $H(q,p,\lambda) = E$:
$$\frac{dH}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \lambda} = -\frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p}.$$

Invariantes adiabáticos

- o valor médio de dE/dt é, portanto
$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \approx -\frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint dq(\partial p/\partial \lambda)}{\oint dq(\partial p/\partial H)},$$
$$\oint dq \left\{ \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \frac{\partial p}{\partial E} + \frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right\} = 0.$$
- derivando em relação ao tempo a variável de ação
$$J = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}} p dq,$$
onde a curva fechada $\mathcal{C}$ é caracterizada por E e λ fixos,
$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}} dq \frac{dp}{dt} = \frac{1}{2\pi}\oint dq \left\{ \frac{dE}{dt}\frac{\partial p}{\partial E} + \frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right\},$$
$$\left\langle \frac{dJ}{dt} \right\rangle \approx 0.$$
- a variável de ação J é um invariante adiabático: ela permanece aproximadamente constante mesmo que os parâmetros do sistema variem lentamente.

Invariantes adiabáticos na giração de partículas carregadas

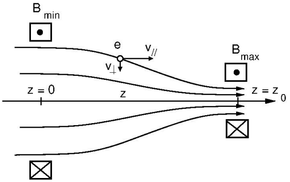


- Hamiltoniana de uma partícula num campo magnético uniforme $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$

$$H(P_Z, P_\phi) = \frac{P_Z^2}{2m} + \Omega P_\phi.$$

- onde P_Z é o momentum na direção paralela ao campo magnético e P_ϕ é o momentum conjugado à girofase ϕ, e $\Omega = eB_0/m$ é a girofrequência.
- a giração é um movimento periódico, P_ϕ é uma variável de ação: para B uniforme, P_ϕ é uma constante de movimento

Momento magnético como invariante adiabático



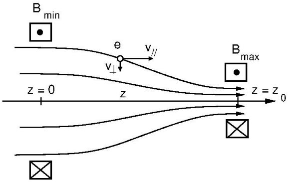
- caso $\mathbf{B}$ varie lentamente ao longo da direção z, então $P_\phi = m\mu/e$ será um invariante adiabático do sistema.

$$dB/dz \ll (B_{max} - B_{min})/z_0$$

- efeito espelho magnético: duas bobinas produzem regiões de campo magnético forte B_{max} e fraco B_{min} nos pontos z_0 e 0
- uma partícula carregada é injetada na região de campo fraco com velocidades paralela $v_{\parallel}^0$ e perpendicular $v_{\perp}^0$ ao campo
- raio de giração $\rho = mv_\perp/eB$ diminui se B aumenta
- pela invariância do momento magnético

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B} = \frac{m{v_\perp^0}^2}{2B_{min}} \approx const.$$

Espelho magnético



- como a força magnética sobre a partícula não realiza trabalho, a energia cinética é (exatamente) conservada:

$$T = m(v_\perp^2 + v_\parallel^2)/2 = T_0 = const.$$

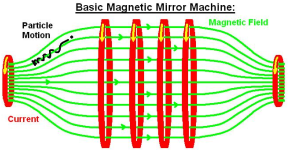
- partícula se move para a direita: $T_\perp = mv_\perp^2/2$ aumenta para que o momento magnético permaneça constante
- quando $T_\perp$ atinge o valor máximo T_0, toda a energia cinética estará no movimento perpendicular ($v_\parallel = 0$) e a partícula será refletida para a esquerda (campo forte)
- a reflexão ocorrerá se

$$\mu = \frac{m{v_\perp^0}^2}{2B_{min}} > \frac{T_0}{B_{max}} = \frac{m}{2B_{max}}\left({v_\perp^0}^2 + {v_\parallel^0}^2\right),$$

Espelho magnético

- definindo a razão do espelho $\mathcal{R} = B_{max}/B_{min}$, a condição de reflexão é
$$\frac{{v_\perp^0}^2}{{v_\perp^0}^2 + {v_\parallel^0}^2} > \frac{B_{min}}{B_{max}} = \frac{1}{\mathcal{R}}.$$
- ângulo de passo do movimento helicoidal das partículas
$$v_\parallel = v_0 \cos\alpha, \qquad v_\perp = v_0 \sin\alpha,$$
- condição de reflexão
$$\sin\alpha > \sqrt{\frac{1}{\mathcal{R}}}.$$
- as partículas cujos ângulos de passo satisfaçam à essa condição no ponto $z = 0$ serão refletidas em $z = z_0$. Caso contrário, escaparão pelo espelho magnético

Garrafa magnética

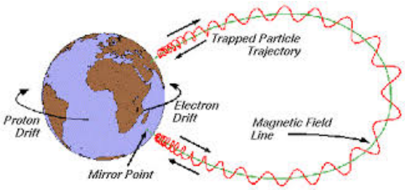


- combinação de dois espelhos magnéticos: confina magneticamente partículas carregadas em seu interior
- supondo que haja espelhos magnéticos nas posições z_1 e z_2, uma partícula que seja refletida em ambos irá oscilar entre estes pontos de retorno.
- a variável de ação correspondente

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_{\|} dz = \frac{1}{\pi} \int_{z_1}^{z_2} m v_{\|} dz$$

- também será um invariante adiabático para este movimento, ou seja, J_2 será aproximadamente constante mesmo que o campo magnético varie lentamente com o tempo ou que não seja exatamente axissimétrico.

Cinturão de radiação de Van Allen



- campo magnético Terrestre é mais intenso nas proximidades dos polos geomagnéticos: garrafa magnetosférica
- as partículas do vento solar são capturadas produzindo o chamado cinturão de radiação de Van Allen
- partículas de altas energias que escapam dos espelhos magnéticos ionizam as moléculas do ar, produzindo as auroras boreais e austrais
- há um terceiro invariante adiabático, ligado à deriva das partículas, no sentido circular (diferente para elétrons e íons)

Limite clássico da Mecânica Quântica

- a função de onda $\Psi(\mathbf{r},t)$ de um sistema fornece a informação quanto-mecânica disponível sobre ele
- sua evolução temporal é dada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\,\Psi(\mathbf{r},t),$$

- para uma partícula de massa m sob a ação de uma energia potencial $U(\mathbf{r})$ o operador Hamiltonian**o** é

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\,\hat{\mathbf{p}}^2 + U(\hat{\mathbf{r}}),$$

- onde $\hat{\mathbf{r}}$ é o operador de posição, e $\hat{\mathbf{p}} = \hbar\mathbf{k} \rightarrow i\hbar\nabla$ é o operador de momentum.

$$i\hbar\,\frac{\partial\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t) + U(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r},t).$$

- representando a função de onda na forma (não-normalizada)

$$\Psi(\mathbf{r},t) = e^{(i/\hbar)S(\mathbf{r},t)}.$$

Limite clássico da Mecânica Quântica

- a equação de Schrödinger é expressa como

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 S + \frac{1}{2m}|\nabla S|^2 + U(\mathbf{r}).$$

- limite clássico: $\hbar \to 0$

$$\frac{1}{2m}|\nabla S|^2 + U(\mathbf{r}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

- que é a equação de Hamilton-Jacobi: a fase da função de onda $S(\mathbf{r}, t)$ corresponde à função principal de Hamilton
- $S = W - Et$, onde W é a função característica de Hamilton,

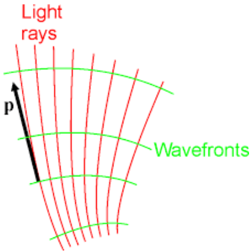
$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}W(\mathbf{r}) - \frac{i}{\hbar}Et\right\} \equiv \psi(\mathbf{r})\, e^{-(i/\hbar)Et}.$$

- a parte dependente da posição representa uma onda plana

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right),$$

- logo $W = \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}$, donde $\mathbf{p} = \nabla W$: o momentum clássico $\mathbf{p}$ corresponde a ∇S, onde S é a fase da função de onda.

Analogia ótica-mecânica



- as frentes de onda são superfícies de fase constante, de modo que ∇S é sempre normal às frentes de onda.
- as trajetórias clássicas das partículas são associadas às normais às frentes de onda.
- a velocidade associada à partícula no limite clássico é $\nabla S/m$
- analogia: os raios luminosos estão para as frentes de onda luminosa assim como as trajetórias clássicas da partícula estão para as superfícies da respectiva onda de matéria
- a ótica geométrica está para a ótica física assim como a Mecânica Clássica está para a Mecânica Quântica

Aproximação semi-clássica

- usando $S = W - Et$ a equação de Schrödinger fica

$$-i\hbar \frac{d^2W}{dx^2} + \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 = p^2(x),$$

- onde o momentum é $p^2(x) = 2m[E - U(x)]$
- aproximação semi-clássica: $\hbar$ é pequena o suficiente para que $W(x)$ seja uma série de potências em $\hbar$

$$W(x) = W_0(x) + \hbar\, W_1(x) + \hbar^2\, W_2(x) + \ldots$$

- substituindo e separando termos de mesma ordem obteremos

$$(W_0')^2 - p^2(x) = 0 \Rightarrow W_0(x) = \pm \int_{x_0}^{x} p(x')\, dx',$$

$$-i\,\hbar\, W_0'' + 2\,\hbar\, W_0' W_1' = 0 \Rightarrow i\, W_1 = -\frac{1}{2}\, \ln p,$$

- função de onda na aproximação WKB

$$\psi(x) \approx \frac{A_\pm}{\sqrt{p(x)}} \exp\left\{\pm \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^{x} p(x')\, dx'\right\},$$

Regra de quantização semi-clássica

- partícula num poço de potencial $U(x)$ com pontos de retorno clássicos x_1 e x_2
- condição de validade da aproximação WKB

$$\frac{h}{p(x)}\left|\frac{dU}{dx}\right| \ll \frac{p^2}{2m},$$

- casando as soluções WKB à direita e à esquerda de cada ponto de retorno clássico obtemos a regra de quantização

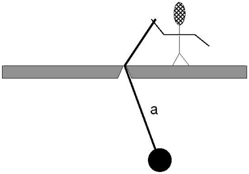
$$J = \frac{1}{2\pi}\oint p(x')dx' = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar.$$

- oscilador harmônico: $H = \omega J$

$$J = \frac{E}{\omega} = n\,\hbar \Rightarrow E = n\hbar\omega = nh\nu$$

- que é a relação de quantização original proposta por Planck em 1900 para as energias dos osciladores de cavidade de corpo negro

Invariantes adiabáticos e regra de quantização



- primeira conferência Solway (1911): Lorentz levantou a questão de como quantizar a energia de um pêndulo, cujo comprimento era lentamente alterado.
- Einstein respondeu que, se o comprimento do pêndulo for alterado de forma infinitamente lenta, se a sua energia é originalmente $h\nu$, então ela permanecerá igual a $h\nu$
- no limite de pequenas oscilações, o comportamento do pêndulo reduz-se ao de um oscilador harmônico
- invariantes adiabáticos são usados na regra de quantização que vem da aproximação semi-clássica

Regras de quantização no átomo de Hidrogênio

- átomo de Hidrogênio: problema de Kepler com $k = e^2$, onde e é a carga do elétron, e m_e a sua massa (unidades Gaussianas)
- regras de quantização semi-clássica aplicadas às variáveis de ação

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r \, dr = n_r \, \hbar, \qquad (n_r \in \mathbb{Z})$$

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint p_\theta \, d\theta = n_\theta \, \hbar, \qquad (n_\theta \in \mathbb{Z})$$

$$J_\phi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\phi \, d\phi = m \, \hbar, \qquad (n_\phi \in \mathbb{Z})$$

- relação de quantização da componente z do momentum angular do elétron: $\alpha_\phi = \ell_z = m \, \hbar$, onde $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ é chamado número quântico magnético

$$\alpha_\theta - \alpha_\phi = n_\theta \, \hbar.$$

Regras de quantização no átomo de Hidrogênio

- usando a expressão deduzida anteriormente

$$J_r = -J_\theta - J_\phi + \frac{e^2}{2}\sqrt{\frac{-2m_e}{E}}$$

- como α_θ é o momentum angular ℓ do elétron, a relação de quantização é $\alpha_\theta = \ell = k\,\hbar$, onde definimos o chamado número quântico azimutal $k \equiv n_\theta + m$, sendo $k = 1, 2, \ldots$.

$$-\alpha_\theta + \frac{e^2}{2}\sqrt{\frac{2m_e}{|E|}} = n_r\,\hbar.$$

- definindo o número quântico total $n = n_r + k$, com $n = 1, 2, \ldots$, a relação de quantização de energia do elétron

$$E_n = -|E| = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{2\pi^2 m_e e^4}{h^2 n^2},$$