Dinâmica Hamiltoniana Aplicada
Capítulo 5
Teoria de perturbações

Prof. Ricardo Luiz Viana
rlv640@gmail.com

Instituto de Física da USP

Conteúdo da aula

Integrabilidade

Teoria de perturbações dependentes do tempo

Problema de Kepler com perturbação central

Teoria de perturbações independentes do tempo

O oscilador harmônico perturbado como aproximação do pêndulo

Teoria de perturbação para vários graus de liberdade

Oscilador harmônico bidimensional perturbado

Remoção das ressonâncias

Aproximação do pêndulo

Integrabilidade

- $\alpha(p_i, q_i)$ é uma integral do movimento se $\partial\alpha/\partial t = 0$ e $\{\alpha, H\} = 0$
- um sistema com n graus de liberdade é integrável (no sentido de Liouville) se há n integrais de movimento independentes α_i, $i = 1, 2, \ldots n$
- as integrais devem ser independentes pois os colchetes de Poisson de duas constantes do movimento também são integrais do movimento. Logo devemos ter que $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$
- se a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo ela própria é uma das integrais do movimento com $i = 1$: $\alpha_1 = H$ (numericamente igual à energia)
- as demais, se existirem, devem ser encontradas a partir de considerações físicas (como leis de conservação) ou outros métodos
- um sistema com $n = 1$ grau de liberdade cuja Hamiltoniana não dependa do tempo, é sempre integrável (ex.: oscilador harmônico, pêndulo)

Integrabilidade

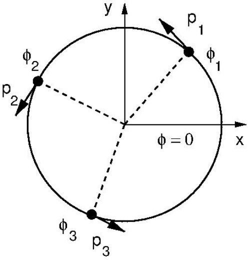
- espaço de fase estendido: a dinâmica de um sistema com n graus de liberdade e dependente do tempo equivale a um sistema com $n+1$ graus de liberdade e independente do tempo
- logo, mesmo no caso $n=1$, se H depender do tempo o sistema poderá não ser mais integrável, de maneira geral
- problema de Kepler: sistema integrável com $n=3$ graus de liberdade. Há três integrais de movimento independentes:

$$\alpha_1 = H = E, \qquad \alpha_2 = \alpha_\theta = \ell, \qquad \alpha_3 = \alpha_\phi = \ell_z,$$

- a equação de Hamilton-Jacobi é separável em coordenadas esféricas, mas não em cartesianas: a separabilidade implica integrabilidade mas não *vice-versa*!
- partícula carregada sob a ação de um campo magnético uniforme na direção z: sistema integrável com $n=3$. As integrais do movimento são

$$\alpha_1 = H = E, \qquad \alpha_2 = p_x = \mathcal{A}, \qquad \alpha_3 = p_z = \mathcal{C}.$$

Integrabilidade

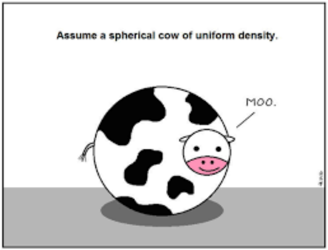


- rede de Toda: sistema de três partículas de massa unitária que se movem sobre um círculo interagindo por forças repulsivas cuja intensidade decai exponencialmente com a distância (angular) entre as partículas

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + e^{-(\phi_1-\phi_3)} + e^{-(\phi_2-\phi_1)} + e^{-(\phi_3-\phi_2)} - 3.$$

- integrais do movimento: $\alpha_1 = E$, $\alpha_2 = p_1 + p_2 + p_3$, devido à invariância por rotação. A terceira constante foi encontrada por Hénon em 1974.

Teoria de perturbações



- "vaca esférica": imaginamos a vaca como uma esfera perfeita de raio R e densidade uniforme
- a cabeça, as patas e o rabo da vaca saem por teoria de perturbações...
- como na Mecânica Quântica: $H = H_0 + \varepsilon H_1$
- H_0: Hamiltoniana de um sistema integrável do qual conhecemos a solução
- H_1: Hamiltoniana perturbadora não-integrável
- $\varepsilon \ll 1$: parâmetro "pequeno": solução procurada em séries de potências de ε

Teoria de perturbações dependentes do tempo

- $H_0(p_i, q_i, t)$: Hamiltoniana do sistema não-perturbado
- é possível achar uma função principal de Hamilton $S(q_i, \alpha_i, t)$ que gera uma transformação canônica, para a qual a Kamiltoniana é identicamente nula: $K_0 \equiv 0$
- S é uma solução de equação de Hamilton-Jacobi dependente do tempo
$$H_0\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$
- as novas variáveis canônicas, $P_i = \alpha_i$ e $Q_i = \beta_i$ são constantes do movimento para o problema não-perturbado.
- $\epsilon H_1(p_i, q_i, t)$: Hamiltoniana perturbadora
$$H(p_i, q_i, t) = H_0(p_i, q_i, t) + \epsilon\, H_1(p_i, q_i, t).$$
- procuramos uma transformação canônica $(p_i, q_i) \to (\alpha_i, \beta_i)$ para o problema perturbado tal que a função principal de Hamilton S seja a função geratriz

Teoria de perturbações dependentes do tempo

- a Kamiltoniana não será mais identicamente nula, e as novas variáveis (α_i, β_i) não mais serão constantes do movimento

$$K(\alpha_i, \beta_i, t) = H(p_i, q_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = H_0 + \epsilon\, H_1 + \frac{\partial S}{\partial t} = \epsilon\, H_1(p_i, q_i, t),$$

- equações de Hamilton exatas para as novas variáveis

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial K}{\partial \beta_i} = -\epsilon\, \frac{\partial H_1}{\partial \beta_i}, \qquad \dot{\beta}_i = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \epsilon\, \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i}.$$

- se $\epsilon \ll 1$ então α_i e β_i variam lentamente com o tempo
- em primeira ordem de perturbação nós calculamos os segundos membros das equações de Hamilton usando os valores não-perturbados de α_i e β_i:

$$\dot{\alpha}_{i1} = -\epsilon \left(\frac{\partial H_1}{\partial \beta_i} \right)_{\alpha_i = \alpha_{i0}, \beta_i = \beta_{i0}} \equiv -\epsilon \left(\frac{\partial H_1}{\partial \beta_i} \right)_0,$$

$$\dot{\beta}_{i1} = \epsilon \left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i} \right)_{\alpha_i = \alpha_{i0}, \beta_i = \beta_{i0}} \equiv \epsilon \left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i} \right)_0,$$

Correção relativística ao oscilador harmônico

- relação relativística entre o momentum e a energia

$$E = \sqrt{c^4 m^2 + c^2 p^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2 m^2}}.$$

- se $v \ll c$ então ($p \ll mc$) e expandimos em série

$$E \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{c^2 m^2} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{c^4 m^4} + \frac{1}{16} \frac{p^6}{c^6 m^6} + \dots \right).$$

- correção de ordem mais baixa para a energia cinética

$$T = E - mc^2 \approx \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2}.$$

- Hamiltoniana do oscilador harmônico não-relativístico

$$H_0(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = \frac{1}{2} G p^2 + \frac{1}{2} F q^2,$$

- solução para H_0 em termos das variáveis de ação e ângulo

$$q_0 = \sqrt{2J_0 \sqrt{\frac{G}{F}}} \operatorname{sen}\theta_0, \qquad p_0 = \sqrt{2J_0 \sqrt{\frac{F}{G}}} \cos\theta_0,$$

- Hamiltoniana não-perturbada: $H_0(J) = \sqrt{FG}\, J_0 = \omega_0\, J_0$
- variável de ângulo conjugada

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\partial H_0}{\partial J_0} = \omega_0 \Rightarrow \theta_0(t) = \omega_0\, t + \beta_0,$$

- Hamiltoniana perturbadora em termos das variáveis de ação e ângulo do sistema não-perturbado (fazendo $\epsilon = 1$)

$$\epsilon\, H_1(p) = -\frac{p^4}{8m^3c^2} = -\frac{1}{4}\,\frac{FG^2}{c^2}\, J_0^2\, \cos^4(\omega_0\, t + \beta_0).$$

- em primeira ordem de perturbação,

$$\dot{J}_1 = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_0} = -\frac{1}{2c^2}\, FG^2\, J_0^2\, \operatorname{sen}(\omega_0 t + \beta_0)\, \cos(\omega_0\, t + \beta_0)$$

$$\dot{\beta}_1 = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_0} = -\frac{1}{2c^2}\, FG^2\, J_0\, \cos^4(\omega_0 t + \beta_0).$$

- média temporal sobre um ciclo completo de oscilação do sistema não-perturbado

$$\langle f(t) \rangle = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} f(t)\, dt.$$

- equações médias em primeira ordem de perturbação

$$\overline{\dot{J}_1} = -\frac{1}{2c^2}\, FG^2\, J_0^2 \underbrace{\langle\, \mathrm{sen}\, (\omega_0\, t + \beta_0)\ \cos(\omega_0\, t + \beta_0)\rangle}_{=0} = 0,$$

$$\overline{\dot{\beta}_1} = -\frac{1}{2c^2}\, FG^2\, J_0 \underbrace{\langle \cos^4(\omega_0\, t + \beta_0)\rangle}_{=3/8} = -\frac{3}{16c^2}\, FG^2\, J_0.$$

- logo $\overline{\dot{J}_1}$ é constante, e usando que $E_0 = \omega_0\, J_0$ é a energia do oscilador não-perturbado, a correção em primeira ordem na frequência é
$$\overline{\dot{\beta}_1} = -\frac{3G}{16c^2}\, \omega_0\, E_0.$$
- como este termo é negativo, a frequência do oscilador pertubado é ligeiramente menor do que ω_0

Perturbação central do problema de Kepler

- variáveis de ação para o problema de Kepler

$$J_1 = \alpha_\phi = \ell_z, \qquad J_2 = \alpha_\theta = \ell, \qquad J_3 = J_r + J_\theta + J_\phi,$$

- Hamiltoniana do problema não-perturbado: órbitas elípticas

$$H_0 = -mk^2/2J_3^2$$

- perturbação hamiltoniana causada por um potencial central

$$\epsilon\, H_1 = -h/r^n$$

- como $J_{20} = \ell = const.$ para o problema não-perturbado, o ângulo conjugado, em primeira ordem, é

$$\dot{\theta}_{21} = \epsilon\, \frac{\partial H_1}{\partial J_{20}} = \epsilon\, \frac{\partial H_1}{\partial \ell}.$$

- média temporal ao longo da órbita elíptica do planeta

$$\overline{\dot{\theta}_{21}} = \left\langle \frac{\partial H_1}{\partial \ell} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\partial H_1}{\partial \ell}\, dt.$$

- onde o período orbital é $\tau = \sqrt{\frac{m}{2}}\, \frac{\pi k}{E_0{}^{3/2}} = \frac{2}{k^2}\, J_{30}^2$

Perturbação central do problema de Kepler

- como τ só depende de J_{30} a derivada $\partial/\partial\ell = \partial/\partial J_{20}$ não atua sobre τ,

$$\overline{\dot{\theta}_{21}} = \frac{\partial\langle H_1\rangle}{\partial\ell} \Rightarrow \langle H_1\rangle = -\frac{h}{\tau}\int_0^\tau \frac{dt}{r^n}.$$

- o momentum angular $\ell = mr^2\dot{\theta}$ é conservado para o sistema não-perturbado

$$dt = \frac{mr^2}{\ell}\,d\theta,$$

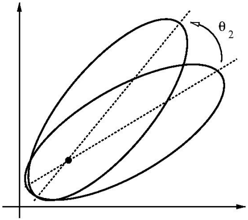
$$\langle H_1\rangle = -\frac{mh}{\ell\tau}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{r^{n-2}}.$$

- usando a equação da órbita (ε é a excentricidade)

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{\ell^2}\left[1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)\right],$$

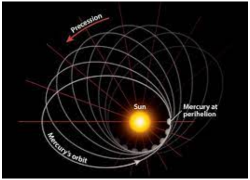
$$\langle H_1\rangle = -\frac{mh}{\ell\tau}\left(\frac{mk}{\ell^2}\right)^{n-2}\int_0^{2\pi} d\theta\,\left[1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)\right]^{n-2}.$$

Precessão do periélio de uma órbita elíptica



- na presença da perturbação o momentum angular ℓ bem como sua projeção ℓ_z não mais serão constantes do movimento
- a órbita do planeta pode ser considerada, em primeira aproximação, como uma elipse cujo semi-eixo maior precessiona lentamente com velocidade $\dot{\theta}_2$, onde θ_2 é a variável de ângulo conjugada a $J_2 = \ell$
- esta precessão do periélio pode ser devida à perturbação gravitacional de outros planetas, ou a uma deformação do espaço-tempo (relatividade geral)

Deformação relativística do espaço-tempo



- o espaço-tempo nas vizinhanças de uma estrela sofre uma deformação devido à sua massa M
- usando a métrica de Schwarzschild

$$H_1 = -\frac{h}{r^3}, \qquad h = \frac{GM\ell^2}{mc^2} = \frac{k\ell^2}{m^2c^2}.$$

- valor médio da perturbação

$$\langle H_1 \rangle = -\frac{m^2hk}{\ell^3\tau} \int_0^{2\pi} d\theta \left[1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)\right] = -\frac{2\pi m^2 hk}{\ell^3\tau}.$$

- frequência de precessão do plano da órbita, em primeira ordem

$$\overline{\dot{\theta}_{21}} = \frac{\partial}{\partial \ell}\left(-\frac{2\pi m^2hk}{\ell^3\tau}\right) = \frac{6\pi m^2hk}{\ell^4\tau}.$$

Precessão do periélio de Mercúrio

- usando $k = GMm$ para o problema de Kepler

$$\overline{\dot{\theta}_{21}} = \frac{6\pi}{\ell^2\,\tau}\left(\frac{GMm}{c}\right)^2 = \frac{6\pi}{\tau}\,\frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}\,\left(\frac{GM}{c^2}\right).$$

- Sol: $GM/c^2 = 1,4766\ km$; órbita de Mercúrio: $a = 5,79 \times 10^7$ km, $\varepsilon = 0,2056$, $\tau = 0,2409 \times \tau(Terra)$ obtemos $\overline{\dot{\theta}_{21}} = 42,95$ segundos de arco por século.
- a perturbação gravitacional causada pelos outros planetas, como Vênus e Terra, é responsável por uma frequência de precessão igual a $531,54$ segundos de arco por século
- descontando este efeito, os dados astronômicos referentes à órbita de Mercúrio revelam uma diferença residual de $43,1$ segundos de arco por século, que concorda (dentro dos limites de erro) com a previsão relativística
- a precessão da órbita de Mercúrio é considerada um dos testes experimentais clássicos da Teoria da Relatividade Geral

Teoria de perturbações independentes do tempo

- $H_0 = H_0(J)$: problema com solução conhecida

$$J(t) = J(0) = const. \qquad \theta(t) = \theta(0) + \omega(J)\, t,$$

- frequência: $\omega = \partial H_0 / \partial J$
- Hamiltoniana do problema perturbado:
  $H(J, \theta) = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta)$
- procuramos uma transformação canônica $(J, \theta) \to (\overline{J}, \overline{\theta})$, de modo que a nova Hamiltoniana seja uma função apenas da nova ação: $\overline{H} = \overline{H}(\overline{J})$
- $S = S(\overline{J}, \theta)$: função geratriz dessa transformação

$$J = \frac{\partial S(\overline{J}, \theta)}{\partial \theta}, \qquad \overline{\theta} = \frac{\partial S(\overline{J}, \theta)}{\partial \overline{J}}.$$

- escrevendo como uma série de potências no parâmetro ϵ:

$$S(\overline{J}, \theta) = \overline{J}\theta + \epsilon\, S_1(\overline{J}, \theta) + \epsilon^2\, S_2(\overline{J}, \theta) + \ldots,$$

- o termo de ordem zero $S_0(\overline{J}, \theta) = \overline{J}\theta$ gera a transformação identidade ($J = \overline{J}$, $\overline{\theta} = \theta$)

- a nova Hamiltoniana também é representada por uma série

$$\overline{H}(\overline{J},\overline{\theta}) = \overline{H}_0 + \epsilon\,\overline{H}_1 + \epsilon^2\,\overline{H}_2 + \ldots.$$

- equações da transformação canônica procurada

$$J = \overline{J} + \epsilon\,\frac{\partial S_1(\overline{J},\theta)}{\partial\theta} + \ldots = \overline{J} + \epsilon\,\frac{\partial S_1(\overline{J},\overline{\theta})}{\partial\overline{\theta}}\,\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\theta} + \ldots$$

$$\overline{\theta} = \theta + \epsilon\,\frac{\partial S_1(\overline{J},\theta)}{\partial\overline{J}} + \ldots$$

- substituindo as séries dentro das dependências delas próprias

$$J = \overline{J} + \epsilon\,\frac{\partial S_1(\overline{J},\overline{\theta})}{\partial\overline{\theta}}\left\{1 + \epsilon\,\frac{\partial S_1}{\partial\overline{J}} + \ldots\right\} + \ldots$$

$$\theta = \overline{\theta} - \epsilon\,\frac{\partial}{\partial\overline{J}}\,S_1\left(\overline{J},\overline{\theta} - \epsilon\,\frac{\partial S_1}{\partial\overline{J}}\right) + \ldots$$

- retendo termos até primeira ordem em ϵ

$$J = \overline{J} + \epsilon\,\frac{\partial S_1(\overline{J},\overline{\theta})}{\partial\overline{\theta}} + \ldots, \qquad \theta = \overline{\theta} - \epsilon\,\frac{\partial S_1(\overline{J},\overline{\theta})}{\partial\overline{J}} + \ldots$$

- nova Hamiltoniana

$$\overline{H}(\overline{J},\overline{\theta}) = H(J(\overline{J},\overline{\theta}),\theta(\overline{J},\overline{\theta}))$$

$$\overline{H}_0(\overline{J}) + \epsilon\,\overline{H}_1(\overline{J},\overline{\theta}) = H_0(J(\overline{J},\overline{\theta})) + \epsilon\, H_1(J(\overline{J},\overline{\theta}),\theta(\overline{J},\overline{\theta}))$$

$$= H_0\left(\overline{J} + \epsilon\,\frac{\partial S_1}{\partial\overline{\theta}}\right) + \epsilon H_1\left(\overline{J} + \epsilon\,\frac{\partial S_1}{\partial\overline{\theta}}, \overline{\theta} - \epsilon\,\frac{\partial S_1}{\partial\overline{J}}\right)$$

$$= H_0(\overline{J}) + \epsilon\,\frac{\partial S_1}{\partial\overline{\theta}}\,\frac{\partial H_0}{\partial\overline{J}} + \epsilon H_1(\overline{J},\overline{\theta}) + \ldots,$$

- comparando termos de mesma ordem em ϵ

$$\overline{H}_0 = H_0(\overline{J}),$$

$$\overline{H}_1 = \omega(\overline{J})\,\frac{\partial S_1}{\partial\overline{\theta}} + H_1(\overline{J},\overline{\theta}),$$

- frequência do problema não-perturbado

$$\omega(\overline{J}) = \frac{\partial H_0(\overline{J})}{\partial\overline{J}}.$$

- valor médio de H_1 em relação ao novo ângulo $\overline{\theta}$

$$\langle H_1(\overline{J},\overline{\theta})\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\overline{\theta}\, H_1(\overline{J},\overline{\theta}),$$

- parte oscilante da perturbação

$$\{H_1\} = H_1 - \langle H_1 \rangle.$$

- desejamos que a nova hamiltoniana $\overline{H}$ dependa apenas da nova ação $\overline{J}$
- escolhemos S_1 de maneira a eliminar a dependência no novo ângulo $\overline{\theta}$

$$\omega(\overline{J})\,\frac{\partial S_1}{\partial \overline{\theta}} = -\{H_1\},$$

- nova hamiltoniana (não depende do novo ângulo)

$$\overline{H}(\overline{J}) = H_0(\overline{J}) + \epsilon\,\langle H_1(\overline{J},\overline{\theta})\rangle,$$

- nova frequência

$$\overline{\omega}(\overline{J}) = \frac{\partial \overline{H}(\overline{J})}{\partial \overline{J}}.$$

Oscilador harmônico como aproximação do pêndulo

- Hamiltoniana do pêndulo, expandindo em série,

$$H = \frac{1}{2}\,Gp^2 - F\cos\phi = \frac{1}{2}\,Gp^2 - F\left\{1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots\right\}.$$

- considerando H_0 o oscilador harmônico, em ordem mais baixa

$$H = H_0(p,\phi) + \varepsilon H_1(\phi) = \frac{1}{2}\,Gp^2 + \frac{1}{2}\,F\phi^2 - \frac{1}{24}\,F\phi^4,$$

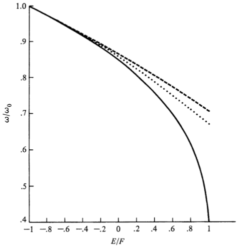
- solução do oscilador harmônico em variáveis de ação-ângulo

$$\phi = \sqrt{2J\sqrt{\frac{G}{F}}}\,\operatorname{sen}\theta, \qquad p = \sqrt{2J\sqrt{\frac{F}{G}}}\,\cos\theta,$$

- Hamiltoniana não-perturbada: $H_0(J) = \sqrt{FG}\,J = \omega_0\,J$, onde $\omega_0 = \sqrt{FG}$. Logo $H_0(\overline{J}) = \omega_0\,\overline{J}$
- perturbação em termos das variávies de ação e ângulo do oscilador harmônico

$$H_1(J,\theta) = -\frac{1}{6}\,GJ^2\,\operatorname{sen}^4\theta.$$

Frequência do oscilador harmônico perturbado



- valor médio da perturbação

$$\overline{H}_1 = \langle H_1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\overline{\theta}\, H_1(\overline{J}, \overline{\theta}) = -\frac{1}{16}\, G\overline{J}^2.$$

- nova hamiltoniana do pêndulo em primeira ordem

$$\overline{H}(\overline{J}) = \omega_0 \overline{J} - G\overline{J}^2/16$$

- nova frequência

$$\overline{\omega} = \omega_0 - G\overline{J}/8 < \omega_0$$

- sua determinação não necessita do conhecimento da TC

Transformação canônica

- parte oscilante da perturbação

$$\{H_1\} = G\,\overline{J}^2 \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{6}\,\mathrm{sen}^{\,4}\overline{\theta} \right).$$

- termo de primeira ordem da função geratriz

$$\frac{\partial S_1}{\partial \overline{\theta}} = -\frac{\{H_1\}}{\omega(\overline{J})} = -\frac{G\overline{J}^2}{\omega_0} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{6}\,\mathrm{sen}^{\,4}\overline{\theta} \right),$$

$$S_1(\overline{J}, \overline{\theta}) = \frac{G\overline{J}^2}{192\omega_0} \left(-8\,\mathrm{sen}\,2\overline{\theta} + \mathrm{sen}\,4\overline{\theta} \right).$$

- relações entre variáveis ação-ângulo novas e antigas

$$J = \overline{J} - \epsilon \frac{G\overline{J}^2}{12\omega_0} \left(-\cos 2\overline{\theta} + \frac{1}{4}\cos 4\overline{\theta} \right)$$

$$\theta = \overline{\theta} + \epsilon \frac{G\overline{J}^2}{96\omega_0} \left(-8\,\mathrm{sen}\,2\overline{\theta} + \mathrm{sen}\,4\overline{\theta} \right).$$

Teoria de perturbação para vários graus de liberdade

- Hamiltoniana perturbada

$$H(J_i,\theta_i) = H_0(J_i) + \epsilon\, H_1(J_i,\theta_i), \qquad (i = 1,2,\dots n)$$

- solução da parte não perturbada é conhecida *a priori*

$$J_i(t) = J_i(0), \qquad \theta_i(t) = \omega_i\, t + \beta_i,$$

- frequências não-perturbadas: $\omega_i = \dot{\theta}_i = \partial H_0/\partial J_i$
- supondo a perturbação seja periódica em todas as variáveis de ângulo, fazemos uma expansão de Fourier

$$H_1 = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\cdots\sum_{m_n} H_{1m}(J_i)\, e^{i(m_1\theta_1+m_2\theta_2+\dots m_n\theta_n)},$$

- procuramos uma transformação canônica $(J_i,\theta_i) \to (\overline{J}_i,\overline{\theta}_i)$ tal que a nova Hamiltoniana $\overline{H} = \overline{H}(\overline{J}_i)$ seja independente dos novos ângulos
- função geratriz em primeira ordem de perturbação

$$S(\overline{J}_i,\theta_i) = \sum_{j=1}^{n} \overline{J}_j\theta_j + \epsilon\, S_1(\overline{J}_i,\theta_i).$$

Teoria de perturbação para vários graus de liberdade

- por analogia com o caso de um grau de liberdade temos

$$\overline{H}_0 = H_0(\overline{J}_i)$$

$$\overline{H}_1 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j(\overline{J}_i) \frac{\partial S_1(\overline{J}_i, \overline{\theta}_i)}{\partial \overline{\theta}_j} + H_1(\overline{J}_i, \overline{\theta}_i).$$

- escolhemos S_1 de maneira a eliminar a dependência em $\overline{\theta}_i$

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j(\overline{J}_i) \frac{\partial S_1}{\partial \overline{\theta}_j} = -\{H_1\},$$

- $\{H_1\} = H_1 - \langle H_1 \rangle$ é a parte oscilante da perturbação em relação ao seu valor médio

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\overline{\theta}_1 \cdots \int_0^{2\pi} d\overline{\theta}_n \, H_1(\overline{J}, \overline{\theta}).$$

- nova Hamiltoniana nas novas variáveis de ação e ângulo

$$\overline{H} = H_0(\overline{J}_i) + \epsilon \, \langle H_1(\overline{J}_i, \overline{\theta}_i) \rangle.$$

Teoria de perturbação para vários graus de liberdade

- derivada total de $S_1(\bar{J}_i, \bar{\theta}_i)$

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{\partial S_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S_1}{\partial \bar{J}_j}\frac{d\bar{J}_j}{dt} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}_j}\frac{d\bar{\theta}_j}{dt}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}_j} \cdot \frac{d}{dt}\left(\theta_j + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \bar{J}_j} + \ldots\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}_j}\omega_j(\bar{J}) = -\{H_1\},$$

- integrando no tempo obteremos

$$S_1 = -\int^t dt' \,\{H_1(\bar{J}_i, \bar{\theta}_i(t'))\}.$$

- supondo que S_1 seja periódica nas variáveis de ângulo

$$S_1(\bar{J}_i, \bar{\theta}_i) = \sum_m S_{1m}(\bar{J}_i) e^{i(m_1\theta_1 + m_2\theta_2 + \ldots m_n\theta_n)},$$

- derivando em relação aos novos ângulos $\bar{\theta}_i$

$$\{H_1\} = -i\sum_m S_{1m}(\bar{J}_i)\,(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega})\,e^{i\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\theta}}$$

O problema dos pequenos denominadores

- onde introduzimos as seguintes abreviações

$$\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega} = \sum_{j=1}^{n} m_j \omega_j(\overline{\theta}_i), \qquad \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\theta} = \sum_{j=1}^{n} m_j \overline{\theta}_j$$

- comparando com H_1 os coeficientes estão relacionados por

$$H_{1m}(\overline{J}_i) = -i\,(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega})\, S_{1m}(\overline{J}_i),$$

$$S(\overline{J},\theta) = \sum_{j=1}^{n} \overline{J}_j \theta_j + \epsilon i \sum_{m}^{*} \frac{H_{1m}(\overline{J})}{\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega}} e^{i\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\theta}}$$

- $\sum_m^*$: a somatória exclui o termo com $m_1 = m_2 = \ldots m_n = 0$.
- ressonâncias: caso em que as frequências são comensuráveis

$$\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\omega} = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots m_n\omega_n = 0,$$

  para inteiros $m_1, \ldots m_n$
- para uma ressonância exata o denominador anula-se e a série perturbativa diverge (problema dos “pequenos denominadores)

Oscilador harmônico bidimensional perturbado

- Hamiltoniana não-perturbada

$$H_0(p_i, q_i) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{m}{2}\left(\omega_x^2\, x^2 + \omega_y^2\, y^2\right),$$

- frequências não perturbadas (diferentes)

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}, \qquad \omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}.$$

- variáveis de ângulo e ação

$$x = \sqrt{\frac{2J_x}{m\omega_x}}\,\operatorname{sen}\theta_x, \qquad p_x = \sqrt{2m\omega_x J_x}\,\cos\theta_x,$$

$$y = \sqrt{\frac{2J_y}{m\omega_y}}\,\operatorname{sen}\theta_y, \qquad p_y = \sqrt{2m\omega_y J_y}\,\cos\theta_y,$$

$$H_0(J_i) = \omega_x J_x + \omega_y J_y.$$

- Hamiltoniana perturbadora

$$\epsilon\, H_1 = \frac{bm^2}{4}\,\omega_x^2\omega_y^2 x^2 y^2,$$

- perturbação nas variáveis de ação e ângulo

$$H_1 = b\omega_x\omega_y\, J_x J_y\, \mathrm{sen}^{\,2}\theta_x\, \mathrm{sen}^{\,2}\theta_y.$$

- nova Hamiltoniana (média no novo ângulo)

$$\overline{H} = \omega_x\, \overline{J}_x + \omega_y\, \overline{J}_y + b\,\omega_x\omega_y \overline{J}_x \overline{J}_y \langle\, \mathrm{sen}^{\,2}\overline{\theta}_x\rangle\, \langle\, \mathrm{sen}^{\,2}\overline{\theta}_y\rangle.$$

$$\langle\, \mathrm{sen}^{\,2}\overline{\theta}_x\rangle = \langle\, \mathrm{sen}^{\,2}\overline{\theta}_y\rangle = 1/2$$

$$\overline{H} = \omega_x\, \overline{J}_x + \omega_y\, \overline{J}_y + \frac{b}{4}\,\omega_x\,\omega_y\, \overline{J}_x\, \overline{J}_y.$$

- função geratriz em primeira ordem

$$\omega_x\, \frac{\partial S_1}{\partial \overline{\theta}_x} + \omega_y\, \frac{\partial S_1}{\partial \overline{\theta}_y} = -\{H_1\} = b\,\omega_x\omega_y \overline{J}_x \overline{J}_y \left(-\,\mathrm{sen}^{\,2}\overline{\theta}_x\, \mathrm{sen}^{\,2}\overline{\theta}_y + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{b}{4}\,\omega_x\omega_y \overline{J}_x \overline{J}_y \left\{ -\cos(2\overline{\theta}_x + 2\overline{\theta}_y)/2 - \cos(2\overline{\theta}_x - 2\overline{\theta}_y)/2 + \cos 2\overline{\theta}_x + \cos 2\overline{\theta}_y \right\}.$$

$$S_1(\overline{J},\overline{\theta}) = -\frac{b}{16}\,\omega_x\omega_y \overline{J}_x \overline{J}_y \left\{ -\frac{\mathrm{sen}\,(2\overline{\theta}_x + 2\overline{\theta}_y)}{\omega_x + \omega_y} - \frac{\mathrm{sen}\,(2\overline{\theta}_x - 2\overline{\theta}_y)}{\omega_x - \omega_y} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,2\overline{\theta}_x}{\omega_x} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,2\overline{\theta}_y}{\omega_y} \right\}.$$

- diverge se houver ressonâncias ($\omega_x = \pm\omega_y$)

Remoção das ressonâncias

- Hamiltoniana para $n = 2$ graus de liberdade

$$H(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(J_1, J_2) + \varepsilon H_1(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2),$$

- perturbação é periódica em ambos os ângulos

$$H_1 = \sum_{m_1, m_2} H_{m_1 m_2}(J_1, J_2) e^{i(m_1\theta_1 + m_2\theta_2)}.$$

- frequências não-perturbadas

$$\omega_1(J_1, J_2) = \dot{\theta}_1 = \frac{\partial H_0}{\partial J_1}, \qquad \omega_2(J_1, J_2) = \dot{\theta}_2 = \frac{\partial H_0}{\partial J_2},$$

- ressonâncias: frequências comensuráveis

$$\omega_2/\omega_1 = r/s$$

- removemos cada ressonância individualmente fazendo uma transformação canônica que elimina uma das ações antigas (J_1 ou J_2):

$$(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) \to (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2),$$

- função geratriz da transformação canônica

$$F_2(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \theta_1, \theta_2) = (r\theta_1 - s\theta_2)\hat{J}_1 + \theta_2 \hat{J}_2,$$

- equações da transformação canônica

$$J_1 = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_1} = r\hat{J}_1, \qquad J_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_2} = -s\hat{J}_1 + \hat{J}_2,$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\partial F_2}{\partial \hat{J}_1} = r\theta_1 - s\theta_2, \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \hat{J}_2} = \theta_2, \qquad \hat{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H.$$

- na ressonância exata o novo ângulo $\hat{\theta}_1$ é constante, pois

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = r\omega_1 - s\omega_2 = 0,$$

- nas proximidades da ressonância $\hat{\theta}_1$ terá uma variação lenta em comparação com $\hat{\theta}_2$
- $\hat{\theta}_1$: ângulo lento, $\hat{\theta}_2$: ângulo rápido

$$\hat{H} = \hat{H}_0(\hat{J}_1, \hat{J}_2) + \varepsilon \hat{H}_1(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$$

$$\hat{H}_1 = \sum_{m_1, m_2} H_{m_1 m_2}(\hat{J}_1, \hat{J}_2) \exp\left\{ \frac{i}{r} \left[m_1 \hat{\theta}_1 + (m_1 s + m_2 r)\hat{\theta}_2 \right] \right\}.$$

- fazemos uma média sobre o ângulo rápido:

$$\overline{H} = \langle \hat{H} \rangle_{\hat{\theta}_2} = \overline{H}_0(\hat{J}_1, \hat{J}_2) + \varepsilon \overline{H}_1(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{\theta}_1),$$

- onde $\overline{H}_0 = \hat{H}_0(\hat{J}_1, \hat{J}_2)$ e $\langle \cos(...) \rangle = \langle \sin(...) \rangle = 0$

$$\overline{H}_1 = \sum_{m_1, m_2} H_{m_1 m_2}(\hat{J}_1, \hat{J}_2) e^{i m_1 \hat{\theta}_1 / r}.$$

- fazemos $m_1 = -pr$ e $m_2 = ps$, tal que

$$\overline{H}_1 = \sum_{p} H_{-pr,ps}(\hat{J}_1, \hat{J}_2) e^{-ip\hat{\theta}_1}.$$

- equações de Hamilton

$$\dot{\hat{J}}_1 = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \hat{\theta}_1} = i\varepsilon \sum_{p=-\infty}^{\infty} p\, H_{-pr,ps}(\hat{J}_1, \hat{J}_2)\, e^{-ip\hat{\theta}_1}, \quad \dot{\hat{J}}_2 = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \hat{\theta}_2} = 0$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \hat{J}_1} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{J}_1} + o(\varepsilon), \qquad \dot{\hat{\theta}}_2 = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \hat{J}_2} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{J}_2} + o(\varepsilon),$$

- $\hat{J}_2$ é uma constante do movimento nas variáveis novas.

$$\hat{J}_1 = J_1/r, \qquad \hat{J}_2 = J_2 + sJ_1/r = const.$$

Hamiltoniana truncada nas variáveis lentas

- Hamiltoniana completa nas variáveis lentas $(\hat{J}_1, \hat{\theta}_2)$

$$\overline{H} = \hat{H}_0(\hat{J}_1, \hat{J}_2) + \varepsilon \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_{-pr,ps}(\hat{J}_1, \hat{J}_2) e^{-ip\hat{\theta}_1},$$

- os coeficientes $H_{-pr,ps}$ decaem rapidamente com p: conservamos apenas os termos com $p = 0, \pm 1$:

$$\overline{H} = \hat{H}_0 + \varepsilon H_{0,0} + \varepsilon H_{-r,s} e^{-i\hat{\theta}_1} + \varepsilon H_{r,-s} e^{i\hat{\theta}_1} + \ldots$$

- supondo que $H_{r,-s} = H_{-r,s}$, a Hamiltoniana truncada será

$$\overline{H} = \hat{H}_0(\hat{J}_1, \hat{J}_2) + \varepsilon H_{0,0}(\hat{J}_1, \hat{J}_2) + 2\varepsilon H_{r,-s}(\hat{J}_1, \hat{J}_2) \cos \hat{\theta}_1.$$

- pontos de equilíbrio $(\hat{J}_1^*, \hat{\theta}_1^*)$: dados pelas condições

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \hat{J}_1^*} \right)_{(\hat{J}_1^*, \hat{\theta}_1^*)} = 0, \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial \hat{\theta}_1^*} \right)_{(\hat{J}_1^*, \hat{\theta}_1^*)} = 0.$$

- como $\sin \hat{\theta}_1^* = 0$, como $-\pi < \theta \leq \pi$,

$$\hat{\theta}_{1a}^* = 0, \qquad \hat{\theta}_{1b}^* = \pm\pi,$$

- considerando a Hamiltoniana truncada com $p = 0, \pm 1$

$$\left(\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_1}\right)_{\hat{J}_1^*} + \varepsilon \left(\frac{\partial H_{0,0}}{\partial \hat{J}_1}\right)_{\hat{J}_1^*} \pm 2\varepsilon \left(\frac{\partial H_{r,-s}}{\partial \hat{J}_1}\right)_{\hat{J}_1^*} = 0,$$

- sinal superior: $\hat{\theta}_{1a}^* = 0$, sinal inferior: $\hat{\theta}_{1b}^* = \pm\pi$
- para a ressonância exata

$$\left(\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_1}\right)_{\hat{J}_1^*} = \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial \hat{J}_1} + \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \hat{J}_1} = r\omega_1 - s\omega_2 = 0.$$

- em primeira ordem de perturbação, o ponto de equilíbrio será a raiz da equação

$$\left(\frac{\partial H_{0,0}}{\partial \hat{J}_1}\right)_{\hat{J}_1^*} \pm 2 \left(\frac{\partial H_{r,-s}}{\partial \hat{J}_1}\right)_{\hat{J}_1^*} = 0.$$

  1. degenerescência acidental: a condição de ressonância $\omega_2/\omega_1 = r/s$ é satisfeita apenas para valores particulares das variáveis $\hat{J}_1$ e $\hat{J}_2$
  2. degenerescência intrínseca: a condição é satisfeita para todos os valores das novas ações

Aproximação do pêndulo

- considerando degenerescência acidental, em ordem mais baixa

$$\dot{\hat{J}}_1 = o(\varepsilon H_{r,-s}), \qquad \dot{\hat{\theta}}_1 = o(1),$$

- nas vizinhanças da ressonância exata $\hat{J}_1^*$ definimos

$$\Delta \hat{J}_1 = \hat{J}_1 - \hat{J}_1^*$$

- expansão da Hamiltoniana truncada

$$\overline{H} = \underline{\hat{H}_0(\hat{J}_1^*)} + \frac{1}{2}(\Delta\hat{J}_1)^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_1^2}\right)_{\hat{J}_1^*} + \underline{\varepsilon H_{0,0}(\hat{J}_1^*)} + 2\varepsilon H_{r,-s}(\hat{J}_1^*)\cos\hat{\theta}_1$$

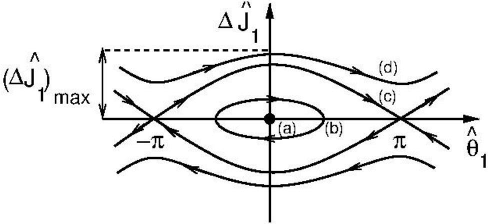
- ignorando os termos sublinhados (por serem constantes) chegamos à Hamiltoniana do pêndulo

$$\Delta\overline{H} = \frac{1}{2}G(\Delta\hat{J}_1)^2 - F\cos\hat{\theta}_1,$$

- onde os coeficientes são definidos como

$$G \equiv \left(\frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_1^2}\right)_{\hat{J}_1^*}, \qquad F \equiv -2\varepsilon H_{r,-s}(\hat{J}_1^*).$$

Hamiltoniana do pêndulo



- pontos de equilíbrio
  1. centro ou ponto elíptico: $\Delta\hat{J}_1^* = 0$ e $\hat{\theta}_1^* = 0$: posição da ressonância. Nas suas vizinhanças as trajetórias são elipses (librações) com frequência $\hat{\omega}_1 = \sqrt{FG} = o[(\varepsilon H_{r,-s})^{1/2}]$
  2. ponto de sela ou hiperbólico: $\Delta\hat{J}_1^* = 0$ e $\hat{\theta}_1^* = \pm\pi$: conectados pela separatriz. Temos que $\hat{\omega}_1 = \dot{\hat{\theta}}_1 \ll \hat{\omega}_2 = \dot{\hat{\theta}}_2$
- excursão máxima do deslocamento da ação, em relação ao seu valor nos pontos de equilíbrio

$$\Delta\overline{H}((\Delta\hat{J}_1)_{max}, \hat{\theta}_1^* = 0) = \Delta\overline{H}(\Delta\hat{J}_1 = 0, \hat{\theta}_1^* = \pm\pi)$$

- semi-largura da ilha: $(\Delta\hat{J}_1)_{max} = 2\sqrt{F/G} = o[(\varepsilon H_{r,-s})^{1/2}]$