

# Dinâmica Hamiltoniana Aplicada

## Capítulo 6

### Sistemas não-integráveis

Prof. Ricardo Luiz Viana  
rlv640@gmail.com



# Conteúdo da aula

Superfície de seção de Poincaré

O sistema de Hénon-Heiles

O mapa twist

Toros racionais e irracionais

O teorema KAM

O mapa twist perturbado

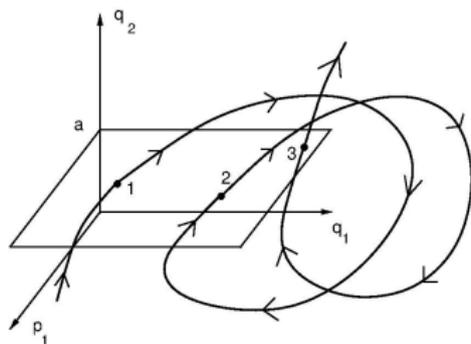
Pontos fixos e órbitas periódicas

O mapa padrão

Estabilidade de pontos fixos em mapas

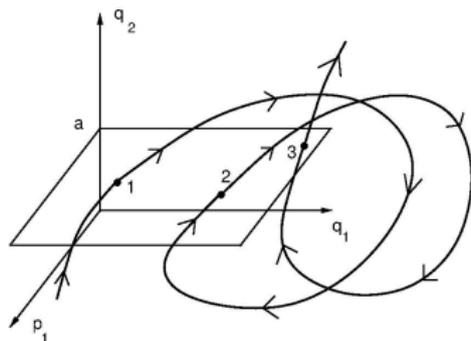
Pontos homoclínicos

# Superfície de energia



- ▶ espaço de fase: coordenadas e momenta generalizados
- ▶ para um sistema com  $n$  graus de liberdade, os pontos têm coordenadas  $(p_i, q_i)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$ : dimensão  $2n$
- ▶ evolução temporal do sistema: trajetória de fase com a condição inicial  $(p_i(0), q_i(0))$
- ▶ se a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, podemos identificá-la como a energia total do sistema  $H(p_i, q_i) = E$  (constante do movimento)
- ▶ superfície de energia: sub-espaço no qual estão restritas as trajetórias no espaço de fase, com dimensão  $2n - 1$ .

## Superfície de seção de Poincaré



- ▶ caso particular  $n = 2$ : superfície de energia é tridimensional

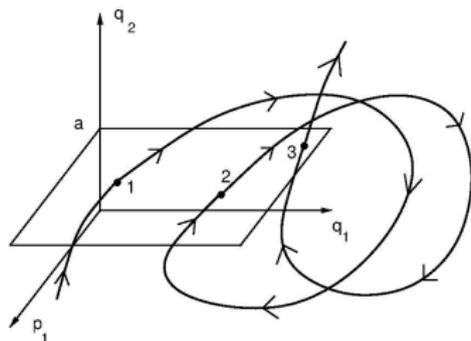
$$H(p_1, p_2; q_1, q_2) = E \rightarrow p_2 = p_2(p_1, q_1, q_2, E),$$

descrita pelas variáveis  $p_1$ ,  $q_1$  e  $q_2$ ,

- ▶ superfície de seção de Poincaré: registramos as interseções das trajetórias do sistema com uma superfície
- ▶ ex.: plano  $q_2 = a = \text{const.}$ : pontos sobre a superfície de seção serão identificados pelas coordenadas  $(p_1, q_1)$
- ▶ trajetórias: soluções das equações de Hamilton

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2)$$

## Superfície de seção de Poincaré

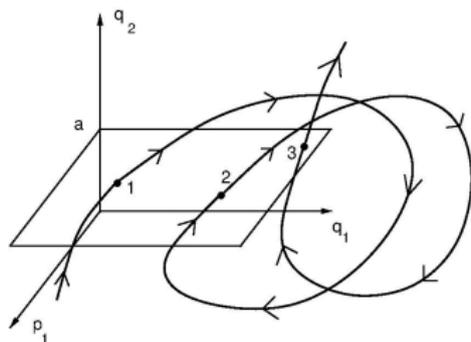


- ▶ dadas as condições iniciais  $(p_1(0), q_1(0), p_2(0), q_2(0))$  existe uma e somente uma trajetória correspondente  $(p_1(t), p_2(t), q_1(t), q_2(t))$  na superfície de energia
- ▶  $(p_{1,n}, q_{1,n})$  as coordenadas da  $n$ -ésima interseção entre uma dada trajetória e a superfície de seção de Poincaré

$$\mathbf{0} : (p_{1,0}, q_{1,0}) \rightarrow \mathbf{1} : (p_{1,1}, q_{1,1}) \rightarrow \mathbf{2} : (p_{1,2}, q_{1,2}) \rightarrow \dots$$

- ▶ devemos especificar o sentido em que a trajetória cruza a superfície de seção ( $q_2$  aumentando)
- ▶ as coordenadas de um ponto na superfície de seção são univocamente determinadas pelas coordenadas do anterior

# Mapa de Poincaré



- ▶ a condição inicial  $(p_{1,0}, q_{1,0})$  será mapeada no ponto 1

$$p_{1,1} = f(p_{1,0}, q_{1,0}), \quad q_{1,1} = g(p_{1,0}, q_{1,0}),$$

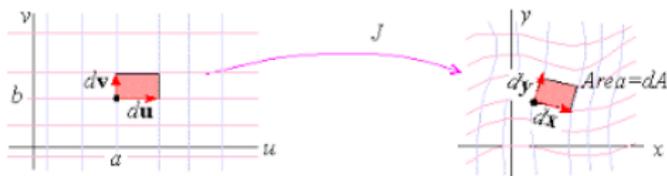
$$p_{1,2} = f(p_{1,1}, q_{1,1}), \quad q_{1,2} = g(p_{1,1}, q_{1,1}),$$

- ▶ mapa de Poincaré: as coordenadas de um ponto são mapeadas nas coordenadas do ponto seguinte na superfície de seção

$$p_{1,n+1} = f(p_{1,n}, q_{1,n}), \quad q_{1,n+1} = g(p_{1,n}, q_{1,n}),$$

ou seja, as coordenadas do  $n + 1$ -ésimo ponto na superfície de seção são funções das coordenadas do  $n$ -ésimo ponto.

# Mapas conservativos



- ▶ teorema de Liouville: as trajetórias obtidas pela solução das equações de Hamilton preservam volumes no espaço de fase
- ▶ para o caso de  $n = 2$  graus de liberdade, o mapa de Poincaré preserva áreas no plano de fase  $(p_1, q_1)$

$$dp_{1,n+1} dq_{1,n+1} = dp_{1,n} dq_{1,n}$$

- ▶ relação geral para a transformação de áreas

$$dp_{1,n+1} dq_{1,n+1} = |\mathcal{J}| dp_{1,n} dq_{1,n}$$

- ▶ determinante Jacobiano

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_{1,n+1}}{\partial p_{1,n}} & \frac{\partial p_{1,n+1}}{\partial q_{1,n}} \\ \frac{\partial q_{1,n+1}}{\partial p_{1,n}} & \frac{\partial q_{1,n+1}}{\partial q_{1,n}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_{1,n}} & \frac{\partial f}{\partial q_{1,n}} \\ \frac{\partial g}{\partial p_{1,n}} & \frac{\partial g}{\partial q_{1,n}} \end{vmatrix},$$

- ▶ condição para mapa conservativo:  $|\mathcal{J}| = 1$ .

## Tipos de mapas de Poincaré

$$p_{n+1} = f(p_n, q_n), \quad q_{n+1} = g(p_n, q_n),$$

- ▶ mapas obtidos pela integração numérica das equações de Hamilton;
- ▶ mapas obtidos analiticamente pela solução das equações de Hamilton na presença de funções delta de Dirac
- ▶ mapas úteis para discutir e exemplificar conceitos matemáticos, como por exemplo

$$p_{n+1} = p_n \cos \alpha - (q_n - p_n^2) \sin \alpha$$

$$q_{n+1} = p_n \sin \alpha + (q_n - p_n^2) \cos \alpha,$$

- ▶ verificação da conservatividade

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \begin{vmatrix} \partial p_{n+1} / \partial p_n & \partial p_{n+1} / \partial q_n \\ \partial q_{n+1} / \partial p_n & \partial q_{n+1} / \partial q_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha + 2p_n \sin \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha - 2p_n \cos \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \\ &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \end{aligned}$$

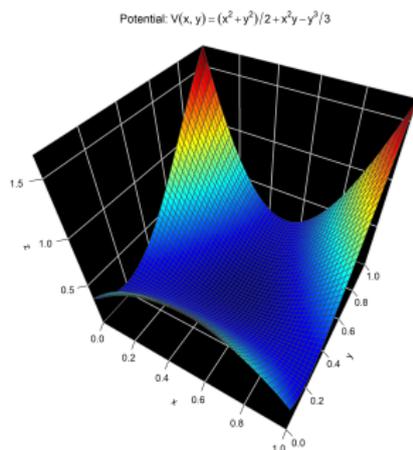
# Órbitas de sistemas integráveis

- ▶ Hamiltoniana com  $n = 2$  graus de liberdade:  
$$H(p_1, q_1; p_2, q_2) = E$$
- ▶ trajetórias confinadas a uma “superfície” de energia tridimensional, imersa no espaço de fase quadridimensional. Expressamos  $p_2 = p_2(p_1, q_1, q_2, E)$
- ▶ definindo uma superfície de seção  $q_2 = \text{const.}$ , construímos o mapa de Poincaré no plano com coordenadas  $(p_1, q_1)$ .
- ▶ vamos supor que o sistema tenha uma segunda constante do movimento, na forma  $C(p_1, q_1; p_2, q_2) = 0$ , que torna o sistema integrável
- ▶ podemos eliminar  $p_2$  desta expressão, obtendo uma nova constante do movimento  $C' = C'(p_1, q_1; q_2, E)$ , que é a equação de uma superfície no sub-espaço de coordenadas  $(p_1, q_1, q_2)$
- ▶ como  $C'$  é uma constante do movimento, toda solução cuja condição inicial esteja sobre esta superfície permanecerá sobre ela para todos os tempos.

# Órbitas de sistemas integráveis

- ▶ seja uma superfície de seção de Poincaré que corta o sub-espço tridimensional, onde registramos os pontos de interseção de uma dada trajetória.
- ▶ tais pontos devem estar localizados exclusivamente na interseção da superfície  $C' = C'(p_1, q_1, q_2, E)$  com este plano.
- ▶ portanto, num sistema integrável, os pontos registrados na superfície de seção devem estar situados numa curva.
- ▶ a ausência total ou parcial de curvas é uma evidência numérica de não-integrabilidade
- ▶ podem haver pontos que preenchem regiões de área finita na superfície de seção (órbitas aperiódicas: caóticas)

# O sistema de Hénon-Heiles



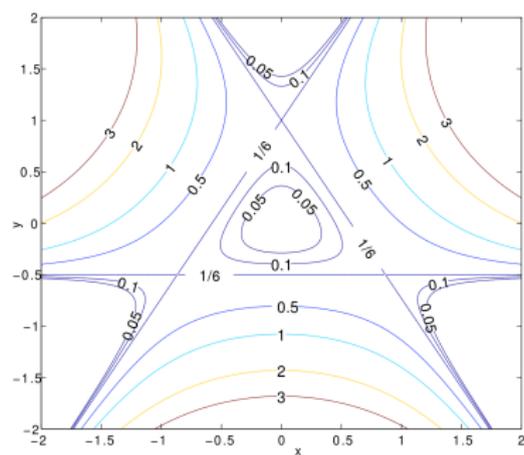
- ▶ Hamiltoniana [Astron. J. **69**, 73 (1964)]

$$H(p_x, p_y; x, y) = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + U(x, y) = E$$

- ▶ movimento bidimensional de uma partícula sob a ação da energia potencial ( $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ )

$$U(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 \sin(3\theta).$$

## O sistema de Hénon-Heiles



- ▶ como  $H$  não depende do tempo, a energia  $E$  é uma constante do movimento. Não há outra, logo o sistema não é integrável.
- ▶ se  $E < 1/6$  as curvas de nível são fechadas, indicando um poço de potencial bidimensional e portanto trajetórias limitadas, cuja borda é o triângulo no caso  $E = 1/6$
- ▶ Se  $E > 1/6$  as curvas de nível são abertas, indicando trajetórias ilimitadas

## Superfície de seção para o sistema de Hénon-Heiles

- ▶ equações de Hamilton

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y,$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x - 2xy, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -x^2 - y + y^2.$$

- ▶ superfície de seção de Poincaré: plano  $x = 0$ , considerando apenas pontos com  $p_x > 0$
- ▶ especificando o valor da energia  $E_0$ , as condições iniciais  $(p_{x0}, p_{y0}; x_0, y_0)$  satisfazem

$$E_0 = \frac{1}{2} (p_{x0}^2 + p_{y0}^2) + \frac{1}{2} (x_0^2 + y_0^2) + x_0^2 y_0 - \frac{1}{3} y_0^3.$$

- ▶ colocando a condição inicial na superfície de seção  $x_0 = 0$ , para qualquer ponto desta superfície, de coordenadas  $(y_0, p_{y0})$ , o valor de  $p_{x0}$  será dado

$$p_{x0} = \left\{ 2E_0 - p_{y0}^2 - y_0^2 + \frac{2}{3} y_0^3 \right\}^{1/2} > 0$$

# Mapa de Poincaré para o sistema de Hénon-Heiles

- ▶ usando as condições iniciais  $(p_{x0}, p_{y0}; x_0 = 0, y_0)$  integramos numericamente as equações de Hamilton, obtendo uma trajetória no espaço de fase  $(p_x(t), p_y(t); x(t), y(t))$  que acompanhamos até o momento em que ela atinge a superfície de seção  $x = 0$ , desde que  $p_x > 0$
- ▶ registramos as coordenadas deste ponto  $(p_{x1}, p_{y1}; x_1 = 0, y_1)$  e plotamos as coordenadas  $(y, p_y)$  num gráfico bidimensional
- ▶ como o passo de integração é finito, é improvável que algum ponto da trajetória caia *exatamente* no plano  $x = 0$
- ▶ condições de cruzamento da superfície de seção

$$x_n x_{n+1} < 0, \quad p_{xn} > 0, \quad p_{x,n+1} > 0.$$

- ▶ procedimentos para determinação do ponto de interseção
  1. extrapolar o valor de  $x_n$  (para frente) ou  $x_{n+1}$  (para trás)
  2. interpolação linear entre  $x_n$  e  $x_{n+1}$
  3. truque de Hénon

## Truque de Hénon [Physica D 5, 412 (1982) 412]

- ▶ interrompemos a integração numérica imediatamente após atravessarmos a superfície de seção  $x = 0$
- ▶ substituímos por um novo conjunto de equações, onde a variável independente é, agora,  $x$

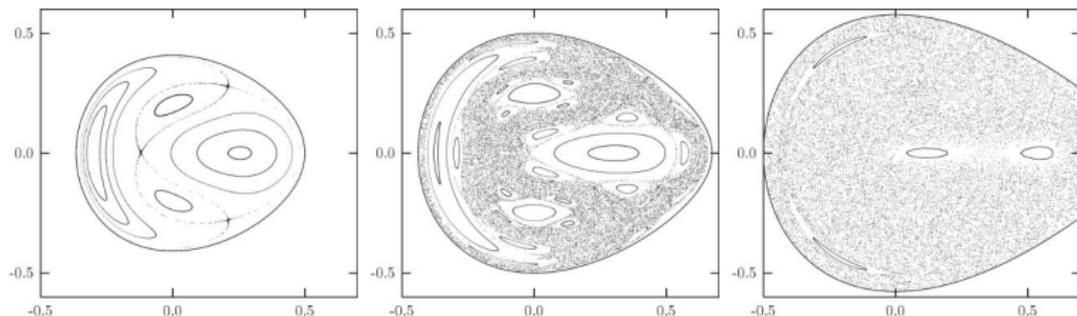
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{p_y}{p_x}, \quad \frac{dp_x}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{dp_x}{dt} = -\frac{1}{p_x} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dp_y}{dx} = -\frac{1}{p_x} \frac{\partial H}{\partial y},$$

- ▶ para o sistema de Hénon-Heiles

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p_y}{p_x}, \quad \frac{dp_x}{dx} = -\frac{x + 2xy}{p_x}, \quad \frac{dp_y}{dx} = -\frac{x^2 + y - y^2}{p_x}.$$

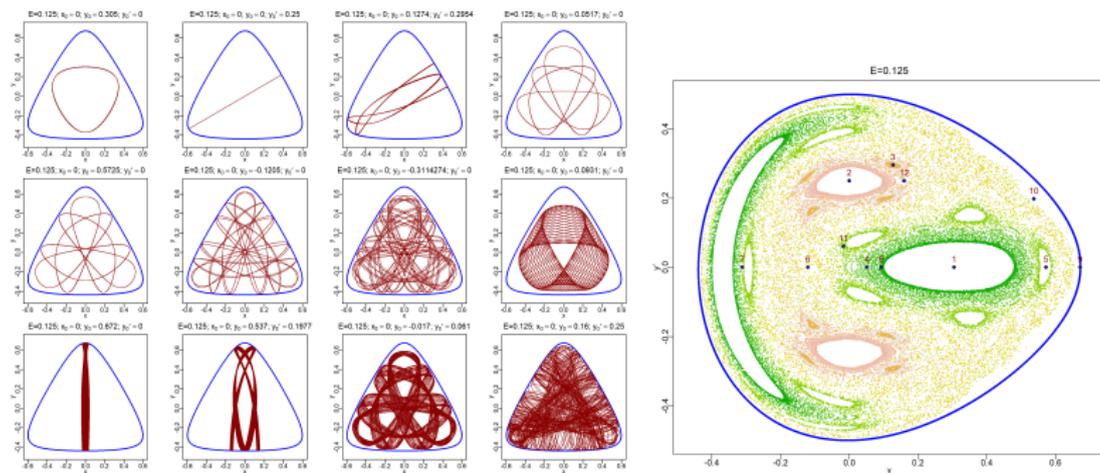
- ▶ iteramos “para trás” o novo sistema de equações usando como passo de integração exatamente o valor de  $x$  que extrapolou o plano  $x = 0$ , ou seja, usamos o passo  $h = -x_{n+1}$
- ▶ retomamos as equações originais do modelo (com  $t$  como variável independente) e voltamos a integrá-lo “para frente”, usando como condição inicial o ponto de interseção determinado.

# Mapas de Poincaré para o sistema de Hénon-Heiles



- ▶ superfície de seção é descrita por  $(p_y, y)$
- ▶  $E = 1/8$ : curvas fechadas
- ▶  $E = 1/12$ : pontos preenchendo áreas e curvas fechadas
- ▶  $E = 1/6$ : praticamente apenas pontos preenchendo áreas
- ▶ a presença de pontos preenchendo áreas é uma evidência numérica de não-integrabilidade

# Órbitas do sistema de Hénon-Heiles



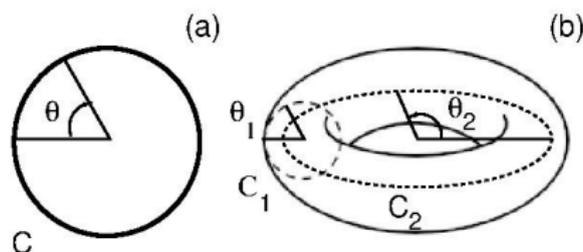
- ▶ projeção das trajetórias do espaço de fase no plano  $xy$ : órbita da partícula no espaço de configuração
- ▶ energia  $E = 1/8$  e condições iniciais diferentes
- ▶ órbitas fechadas (periódicas) e abertas (periódicas e caóticas)

# Teorema de Liouville-Arnold



- ▶ um sistema Hamiltoniano com  $n$  graus de liberdade tem um espaço de fase  $2n$  -dimensional: as trajetórias pertencem a uma “superfície” de energia  $(2n - 1)$ -dimensional
- ▶ a cada nova constante de movimento existente no sistema o movimento ficará restrito a uma “superfície” com uma dimensão a menos.
- ▶ se um sistema com  $n$  graus de liberdade for integrável, tendo  $n$  constantes de movimento, a dinâmica ficará restrita a uma “superfície” com  $2n - n = n$  dimensões
- ▶ a exigência que as  $n$  constantes do movimento sejam independentes restringe a topologia da superfície
- ▶ Teorema de Liouville-Arnold: a superfície de energia (desde que seja compacta) deve ser foliada em toros  $n$ -dimensionais,

# Toros no espaço de fase



- ▶ um círculo  $C$  é um toro unidimensional: tem raio constante e o movimento sobre ele é parametrizado por um ângulo  $\theta \in [0, 2\pi)$
- ▶ um toro bidimensional tem dois caminhos irredutíveis  $C_1$  e  $C_2$ , correspondentes às voltas maior e menor em torno dele
- ▶ o movimento ao longo de cada caminho irredutível pode ser parametrizado por dois ângulos independentes  $\theta_1$  e  $\theta_2$

## Variáveis de ação e ângulo nos toros

- ▶ para os toros bidimensionais, as variáveis de ação e ângulo são

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_i} p_i dq_i, \quad \theta_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}, \quad (i = 1, 2)$$

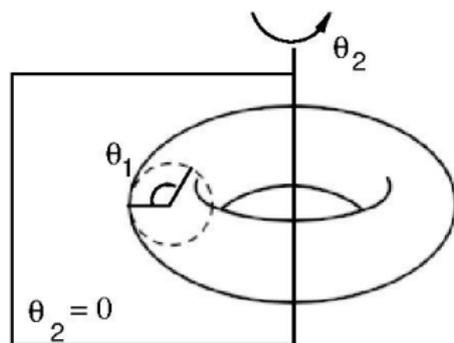
- ▶  $W(q, J)$ : função característica de Hamilton para a transformação canônica  $(p, q) \rightarrow (J, \theta)$
- ▶ num sistema integrável a Kamiltoniana depende apenas das ações,  $K = K(J_1, J_2)$  e o movimento sobre os toros é descrito pelas equações canônicas para as variáveis de ação e ângulo

$$\frac{dJ_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \theta_i} = 0, \quad \frac{d\theta_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial J_i} = \omega_i(J), \quad (i = 1, 2),$$

- ▶  $\omega_i$ : frequências do movimento sobre um toro  $n$ -dimensional

$$J_i(t) = J_i(0) = \text{const.} \quad \theta_i(t) = \omega_i(J(0))t + \theta_i(0), \quad (i = 1, 2)$$

## Superfície de seção para um toro bidimensional



- ▶ superfície de seção de Poincaré  $S$  que corta o toro num dado ângulo  $\theta_2 = 0$
- ▶ registramos as interseções das trajetórias sobre o toro com  $S$
- ▶ a interseção de um dado toro com  $S$  é um círculo, e os pontos sobre ele são parametrizados pelas variáveis  $J_1$  e  $\theta_1$
- ▶ mapa de Poincaré: relação entre as variáveis  $(J_1, \theta_1)$  para duas interseções sucessivas com a superfície de seção
- ▶ variáveis discretas na superfície de seção  $S$

$$J_{1n} = J_1(t = n(2\pi/\omega_2)), \quad \theta_{1n} = \theta_1(t = n(2\pi/\omega_2))$$

## Mapa twist

- ▶ como  $\theta_2(t) = \theta_2(0) + \omega_2 t$ , o tempo necessário para dar uma volta completa ao longo da direção  $\theta_2$  é  $2\pi/\omega_2$ .
- ▶ mapa twist

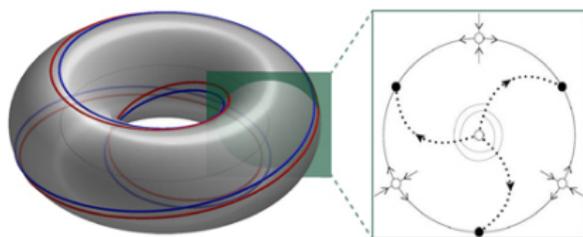
$$J_{1,n+1} = J_{1,n}, \quad \theta_{1,n+1} = \theta_{1,n} + 2\pi \alpha(J_{1,n+1}),$$

- ▶ número de rotação para o toro,

$$\alpha(J_{1,n+1}) = \omega_1/\omega_2$$

- ▶ a trajetória no espaço de fase é uma hélice sobre o toro, tendo um ângulo medido na superfície de seção  $\Delta\theta_1 = \theta_{1,n+1} - \theta_{1,n}$  que depende do valor de  $\alpha$ , e que por sua vez varia com  $J_1$
- ▶ como valores diferentes de  $J_1$  correspondem a círculos de raios diferentes, o ângulo varrido na superfície de seção em geral será diferente para cada toro (torção = twist)
- ▶ conserva áreas:  $\mathcal{J} = 1$  (verifique!)

# Toros racionais



- ▶ se há números inteiros  $m_1$  e  $m_2$  (primos entre si) tais que as frequências  $\omega_{1,2}$  são comensuráveis

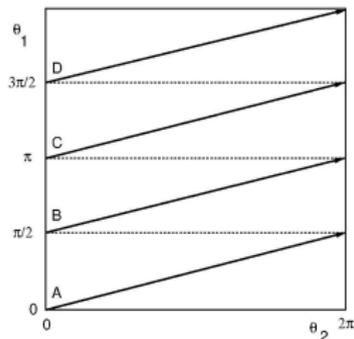
$$m_1 \omega_1 - m_2 \omega_2 = 0,$$

- ▶ o número de rotação é racional

$$\alpha(J_1) = \omega_1/\omega_2 = m_2/m_1$$

- ▶ toros racionais: uma dada trajetória fecha-se sobre si mesma após um certo número de voltas nas direções  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .
- ▶ a interseção de um toro racional com a superfície de seção de Poincaré é um número finito de pontos sobre um círculo

# Toros racionais



- ▶ toro bidimensional: quadrado duplamente periódico de lado  $2\pi$
- ▶ toro racional com  $m_2 = 1$  e  $m_1 = 4$ , com  $\alpha = 1/4$

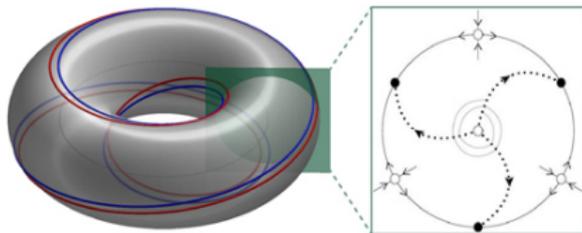
$$\theta_{1,n+1} = \theta_{1,n} + \pi/2$$

- ▶ dado  $\theta_{1,0} = 0$ , as sucessivas interseções entre a trajetória e a superfície de seção de Poincaré são

$$\theta_{1,1} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{1,2} = \pi, \quad \theta_{1,3} = \frac{3\pi}{2}, \quad \theta_{1,4} = 0 = \theta_{1,0}, \dots$$

- ▶ órbita de período 4 do mapa twist: 4 pontos sobre o círculo de raio  $J_1$ , denotados por  $(A, B, C, D)$

# Toros irracionais



- ▶ se as frequências forem incomensuráveis, a razão entre elas (o número de rotação) será irracional: toro irracional
- ▶ uma dada trajetória jamais se fechará sobre si mesma
- ▶ a trajetória consiste em hélices sobre o toro que o preenchem densamente quando o tempo vai a infinito
- ▶ na superfície de seção, um toro irracional tem como interseção um círculo completo

## Aproximação de números irracionais

- ▶ toros racionais têm números de rotação racionais  $\alpha = r/s$ , onde  $r$  e  $s$  são inteiros primos entre si
- ▶ o número de rotação para um toro irracional pode ser aproximado por valores racionais
- ▶ aproximações por frações decimais:  $\alpha = \pi = 3,141592654\dots$

$$\frac{r}{s} = \frac{3}{1}, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3142}{1000}, \frac{31416}{10000}, \dots$$

- ▶ para aproximação por frações decimais vale a desigualdade

$$|\alpha - (r/s)| < 1/s$$

- ▶ aproximações por frações continuadas

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots].$$

- ▶ exemplos de aproximações por frações continuadas:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots], \quad \sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, \dots],$$

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots], \quad e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots].$$

## Aproximação de números irracionais

- ▶ para  $\alpha$  irracional a fração continuada tem infinitos coeficientes  $a_n$ , mas podemos aproximá-lo por frações continuadas com um número finito de coeficientes (aproximações racionais)

$$\alpha_n = r_n/s_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

- ▶  $r_n/s_n$  são as melhores aproximações possíveis para um dado  $\alpha$  irracional: nenhum racional  $r/s$  com  $s \leq s_n$  está mais próximo de  $\alpha$  que a fração  $r_n/s_n$ .
- ▶ a sequência de coeficientes das frações continuadas  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge para  $\alpha$  tal que

$$|\alpha - (r_n/s_n)| < 1/(s_n s_{n+1})$$

- ▶ para  $\alpha = \pi$ , por exemplo, temos os aproximantes racionais

$$\alpha_0 = r_0/s_0 = a_0 = 3, \quad \alpha_1 = r_1/s_1 = [3; 7] = 22/7 \approx 3,1429,$$

$$\alpha_2 = r_2/s_2 = [3; 7, 15] = 333/106 \approx 3,14151,$$

$$\alpha_3 = r_3/s_3 = [3; 7, 15, 293] = 355/113 \approx 3,1415929,$$

# Aproximação de números irracionais

- ▶ a convergência da sequência de frações continuadas é mais rápida do que aquela obtida por frações decimais
- ▶ a sequência de frações racionais  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge tanto mais rápido ao irracional  $\alpha$  como quanto a sequência  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  diverge mais rápido
- ▶ a convergência mais lenta possível será aquela para a qual os coeficientes não divergem

$$\phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,618033989\dots = [1; 1, 1, 1, \dots],$$

- ▶  $\phi$  é o irracional “pior aproximado” por racionais  $r_n/s_n$  (é o número “mais irracional”).

## Problema dos pequenos denominadores

- ▶ sistema quase-integrável:  $H(J, \theta) = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta)$ , onde  $H_0(\mathbf{J})$  descreve um sistema integrável
- ▶ a perturbação  $\varepsilon H_1(J, \theta)$  irá destruir a integrabilidade
- ▶ Teoria Canônica de Perturbação: procuramos uma transformação canônica  $(J, \theta) \rightarrow (\bar{J}, \bar{\theta})$ , tal que a nova Hamiltoniana seja função apenas de  $\bar{H} = \bar{H}(\bar{J})$ .
- ▶ função geratriz que efetua a transformação em primeira ordem

$$S_1(J, \theta) = \varepsilon i \sum_m H_{1m}(\bar{J}) \frac{e^{i(m_1\theta_1 + \dots + m_n\theta_n)}}{m_1\bar{\omega}_1 + \dots + m_n\bar{\omega}_n}$$

- ▶ frequências do sistema não-perturbado:  $\omega_i = \partial H_0 / \partial J_i$
- ▶ ressonância: as frequências são comensuráveis

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_n\omega_n = 0,$$

- ▶ problema dos pequenos denominadores: divergências nas séries perturbativas

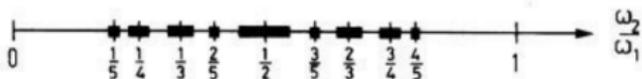
# Teorema KAM (= Kolmogorov + Arnold + Moser)

- ▶ garante que a maioria dos toros irracionais é preservada, se as seguintes condições forem satisfeitas
- ▶ 1. a razão entre as frequências não-perturbadas deve ser suficientemente irracional. Para  $n = 2$  graus de liberdade

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s} \right| < \frac{K(\epsilon)}{s^{2,5}},$$

- ▶ para todos os  $r$  e  $s$  inteiros. A constante  $K$  não depende de  $r$  ou  $s$  e tende a zero se  $\epsilon \rightarrow 0$
- ▶ 2. a perturbação  $\epsilon H_1$  deve ser suficientemente fraca ( $10^{-48}$ )
- ▶ 3. a perturbação  $H_1$  deve ter um número  $M$  suficientemente grande (3) de derivadas contínuas;
- ▶ demonstração: substituímos as séries perturbativas por uma sequência de aproximações sucessivas que convergem de forma rápida garantindo, para tempos infinitos, a existência de toros sobre os quais o movimento se desenvolve.

## Condição de suficiente irracionalidade



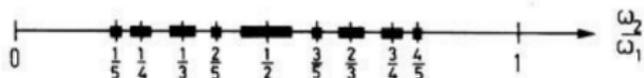
- ▶ sobrevivem à perturbação os toros irracionais cujos valores de  $\alpha$  são “mal-aproximados” por irracionais
- ▶ os toros irracionais para os quais

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s} \right| > \frac{K(\epsilon)}{s^{2,5}},$$

têm valores de  $\alpha$  “bem-aproximados” por frações racionais e serão destruídos pela perturbação, em sua maioria.

- ▶ a quantidade de toros irracionais não destruídos pela perturbação é significativa se  $\epsilon \ll 1$ ?
- ▶ SIM! vamos considerar todos os racionais  $r/s$  no intervalo  $0 \leq \alpha \leq 1$  e remover todos os intervalos centrados nestes racionais e de comprimento  $K/s^{2,5}$
- ▶ estes intervalos correspondem a valores do número de rotação de toros irracionais que são destruídos pela perturbação

## Condição de suficiente irracionalidade



- ▶ como há  $s$  valores do inteiro  $r$  tais que  $0 \leq r/s \leq 1$  o comprimento total dos intervalos removidos é

$$L(\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{K}{s^{2,5}} s = K \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{1,5}} = K \zeta \left( \frac{3}{2} \right) \approx 2,612K(\varepsilon),$$

- ▶ esta é uma super-estimativa para  $L$ , pois muitos destes intervalos considerados se sobrepõem
- ▶ como  $K(\varepsilon)$  tende a zero quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , então  $L \rightarrow 0$
- ▶ para  $\varepsilon$  o valor de  $L$  é finito e pequeno se  $\varepsilon \ll 1$ : o tamanho do intervalo de valores de  $\alpha$  para toros irracionais não-destruídos, que é  $1 - L$ , é também finito e relativamente grande
- ▶ a maioria dos toros irracionais é preservada pela perturbação, ainda que sofram deformações
- ▶ os toros irracionais destruídos formam um conjunto de tamanho pequeno (e que se anula quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ )

# Mapa twist perturbado

- ▶ sistema quase-integrável ( $\varepsilon \ll 1$ )

$$H(J_1, J_2; \theta_1, \theta_2) = H_0(J_1, J_2) + \varepsilon H_1(J_1, J_2; \theta_1, \theta_2),$$

- ▶ mapa twist perturbado

$$J_{1,n+1} = J_{1,n} + \varepsilon \mathcal{F}(J_{1,n+1}, \theta_{1,n})$$

$$\theta_{1,n+1} = \theta_{1,n} + 2\pi \alpha(J_{1,n+1}) + \varepsilon \mathcal{G}(J_{1,n+1}, \theta_{1,n})$$

- ▶  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  são funções periódicas em  $\theta_1$
- ▶ a evolução temporal governada pelo mapa twist perturbado  $\mathbf{F}_\varepsilon$  pode ser encarada como uma transformação canônica

$$(J_{1,n}, \theta_{1,n}) \rightarrow (J_{1,n+1}, \theta_{1,n+1}),$$

- ▶ função geratriz de segunda espécie

$$F_2(J_{1,n+1}, \theta_{1,n}) = J_{1,n+1} \theta_{1,n} + 2\pi \mathcal{A}(J_{1,n+1}) + \varepsilon \mathcal{B}(J_{1,n+1}, \theta_{1,n}).$$

## Mapa twist perturbado

- ▶ equações da transformação canônica

$$J_{1,n} = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_{1,n}} = J_{1,n+1} + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \theta_{1,n}}$$

$$\theta_{1,n+1} = \frac{\partial F_2}{\partial J_{1,n+1}} = \theta_{1,n} + 2\pi \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial J_{1,n+1}} + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial J_{1,n+1}},$$

- ▶ comparando com o mapa do twist perturbado

$$\alpha = \frac{d\mathcal{A}}{dJ_{1,n+1}}, \quad \mathcal{F} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \theta_{1,n}}, \quad \mathcal{G} = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial J_{1,n+1}}.$$

- ▶ condição para que a transformação seja canônica (e que o mapa conserve áreas na superfície de seção)

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial J_{1,n+1}} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta_{1,n}} = 0,$$

- ▶ se  $\mathcal{F}$  não depende de  $J_1$  e  $\mathcal{G} \equiv 0$  temos o mapa do twist radial

$$J_{1,n+1} = J_{1,n} + \varepsilon \mathcal{F}(\theta_{1,n}),$$

$$\theta_{1,n+1} = \theta_{1,n} + 2\pi \alpha(J_{1,n+1}).$$

# Mapas

- ▶ mapas bidimensionais conservativos são sistemas dinâmicos a tempo discreto  $n = 0, 1, 2, \dots$
- ▶ notação vetorial:  $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{v}_n)$

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} J_{1n} \\ \theta_{1n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} f(J_1, \theta_1) \\ g(J_1, \theta_1) \end{pmatrix},$$

- ▶ para o mapa twist perturbado  $\mathbf{F}_\varepsilon$

$$f(J_1, \theta_1) = J_1 + \varepsilon \mathcal{F}(\theta_1), \quad g(J_1, \theta_1) = \theta_1 + 2\pi \alpha(J_1),$$

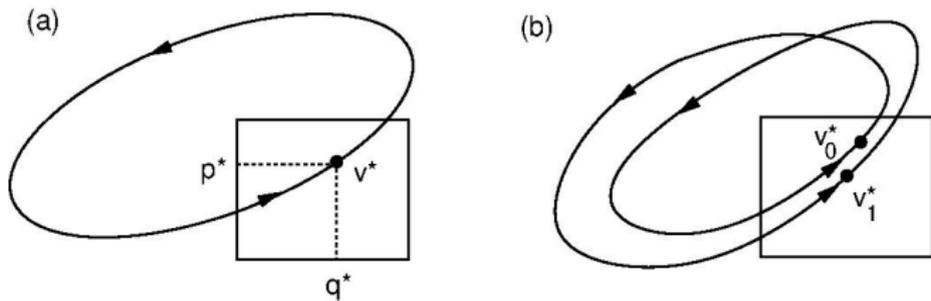
- ▶ iterações do mapa

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{v}_0), \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{v}_0)) = \mathbf{F}^{[2]}(\mathbf{v}_0), \dots$$
$$\mathbf{v}_n = \mathbf{F}^{[n]}(\mathbf{v}_0).$$

- ▶ mapa inverso  $\mathbf{F}^{[-1]}$ : sempre existe para mapas de Poincaré

$$\mathbf{v}_{-1} = \mathbf{F}^{[-1]}(\mathbf{v}_0), \quad \mathbf{v}_{-2} = \mathbf{F}^{[-1]}(\mathbf{v}_{-1}) = \mathbf{F}^{[-1]}(\mathbf{F}^{[-1]}(\mathbf{v}_0))$$
$$= \mathbf{F}^{[-2]}(\mathbf{v}_0), \dots \quad \mathbf{v}_{-n} = \mathbf{F}^{[-n]}(\mathbf{v}_0).$$

# Pontos fixos e órbitas periódicas



- ▶ ponto fixo  $\mathbf{v}^*$ :  $\mathbf{v}^* = \mathbf{F}(\mathbf{v}^*)$
- ▶ é a interseção de uma trajetória fechada com a superfície de seção de Poincaré
- ▶ órbita periódica de período 2:  $\mathbf{v}_1^* = \mathbf{F}(\mathbf{v}_0^*)$ ,  $\mathbf{v}_0^* = \mathbf{F}(\mathbf{v}_1^*)$
- ▶ corresponde às interseções de uma trajetória com a superfície de seção, que fecha sobre si mesma após duas revoluções
- ▶ pontos fixos da segunda iterada do mapa:  $\mathbf{v}_{0,1}^* = \mathbf{F}^{[2]}(\mathbf{v}_{0,1}^*)$
- ▶ órbita periódica de período  $m$ : conjunto de  $m$  pontos

$$\mathbf{v}_{i+1}^* = \mathbf{F}(\mathbf{v}_i^*), \quad (i = 0, 1, \dots, m-2), \quad \mathbf{v}_0^* = \mathbf{F}(\mathbf{v}_{m-1}^*).$$

- ▶ pontos fixos da  $m$ -ésima iterada  $\mathbf{v}_i^* = \mathbf{F}^{[m]}(\mathbf{v}_i^*)$

## Mapa padrão

- ▶ mapa do twist radial

$$J_{1,n+1} = J_{1,n} + \varepsilon \mathcal{F}(\theta_{1,n}), \quad \theta_{1,n+1} = \theta_{1,n} + 2\pi \alpha(J_{1,n+1}),$$

- ▶ pontos fixos  $(J_1^*, \theta_1^*)$ :  $\mathcal{F}(\theta_1^*) = 0$ ,  $\alpha(J_1^*) = m$ ,  
 $m = 0, 1, 2, \dots$

- ▶ pequenos deslocamentos da ação em relação ao seu valor num ponto fixo  $(J_1^*, \theta_1)$ :  $J_{1,n} = J_1^* + \Delta J_{1,n}$ ,  $(|J_{1,n}| \ll |J_1^*|)$
- ▶ expandindo o mapa do twist radial

$$\Delta J_{1,n+1} = \Delta J_{1,n} + \varepsilon \mathcal{F}(\theta_{1,n})$$

$$\theta_{1,n+1} = \theta_{1,n} + 2\pi m + 2\pi \alpha'(J_1^*) \Delta J_{1,n}.$$

- ▶ definindo  $I_n = 2\pi \alpha'(J_1^*) \Delta J_{1,n}$ ,  $\mathcal{F}^* = \mathcal{F} / \mathcal{F}_{max}$  e  
 $K = 2\pi \alpha'(J_1^*) \mathcal{F}_{max}$  obtemos o mapa padrão generalizado

$$I_{n+1} = I_n + K \mathcal{F}^*(\theta_n), \quad \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}, \quad (\text{mod } 2\pi),$$

- ▶ escolhendo  $\mathcal{F}^*(\theta) = \sin \theta$  obtemos o mapa padrão

$$I_{n+1} = I_n + K \sin \theta_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}, \quad (\text{mod } 2\pi).$$

# Propriedades do mapa padrão

- ▶ como a ação  $I$  também é definido módulo  $2\pi$ , o mapa padrão tem a simetria:  $I \rightarrow I + 2\pi m$ , onde  $m$  é um inteiro
- ▶ a dupla periodicidade em  $\theta$  e  $I$  faz com que as trajetórias do mapa padrão estejam sobre um toro
- ▶ o mapa padrão é conservativo

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \partial I_{n+1}/\partial I_n & \partial I_{n+1}/\partial \theta_n \\ \partial \theta_{n+1}/\partial I_n & \partial \theta_{n+1}/\partial \theta_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & K \cos \theta_n \\ 1 & 1 + K \cos \theta_n \end{vmatrix} = 1,$$

- ▶ mapa inverso

$$\theta_{n-1} = \theta_n - I_n, \quad (\text{mod } 2\pi), \quad I_{n-1} = I_n - K \text{ sen } \theta_{n-1}.$$

## Mapa bidimensional linear

- ▶ forma geral:  $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_n$
- ▶ a matriz dos coeficientes tem elementos constantes,

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- ▶ iterações sucessivas:  $\mathbf{v}_n = \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{v}_0$
- ▶ o ponto fixo é a origem:  $\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$ .
- ▶ distância ao ponto fixo:  $|\mathbf{v}_n| = \sqrt{p_n^2 + q_n^2}$
- ▶ o ponto fixo será atrativo (assintoticamente estável) se, dada uma condição inicial  $\mathbf{v}_0$ , temos que  $|\mathbf{v}_n| \rightarrow 0$ , se  $n \rightarrow \infty$
- ▶ o ponto fixo será repulsivo (instável) se  $|\mathbf{v}_n| \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ .
- ▶ procuramos soluções na forma  $\mathbf{v}_n = \xi^n \mathbf{u}$
- ▶ onde  $\xi$  é um escalar e  $\mathbf{u}$  e um vetor fixo a serem determinados, satisfazendo  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \xi \mathbf{u}$
- ▶  $\mathbf{u}$  é o autovetor da matriz  $\mathbf{A}$  correspondente ao autovalor  $\xi$ .

## Autovalores da matriz dos coeficientes

- ▶ os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  são as raízes da equação secular

$$\det(\mathbf{A} - \xi \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a - \xi & b \\ c & d - \xi \end{vmatrix} = \xi^2 - (a+d)\xi + (ad-bc) = 0.$$

- ▶ se o mapa linear é também conservativo,

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 1,$$

- ▶ autovalores da matriz dos coeficientes

$$\xi_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4}}{2}, \quad \xi_1 \xi_2 = 1$$

- ▶ traço da matriz dos coeficientes:  $\tau = a + d$ .

1.  $\tau^2 > 4$ : raízes reais e distintas ( $\xi_2 = \xi_1^{-1}$ );
2.  $\tau^2 = 4$ : raízes reais e iguais ( $\xi_1 = \xi_2$ );
3.  $\tau^2 < 4$ : raízes complexas ( $\xi_2 = \xi_1^*$ ).

## Autovalores reais e recíprocos

- ▶ escritos como  $|\xi_{1,2}| = e^{\pm\sigma}$  onde  $\sigma > 0$
- ▶ de modo que a condição  $\tau^2 > 4$  implica em

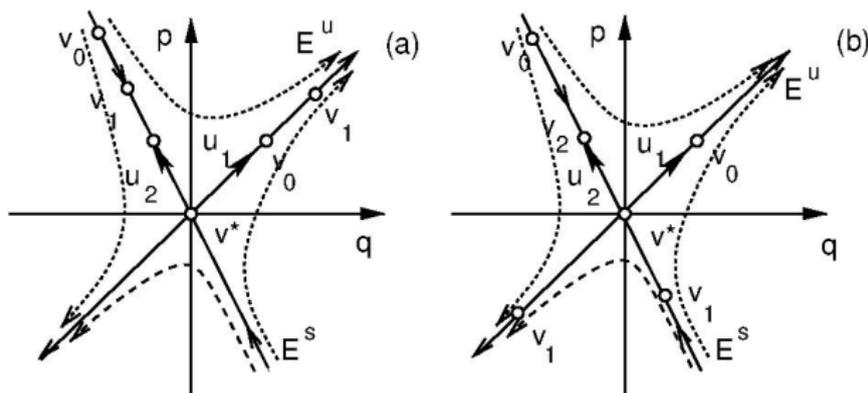
$$|\tau| = 2|\cosh \sigma| > 2 \quad \Rightarrow \quad \tau > 2 \quad \text{ou} \quad \tau < -2.$$

- ▶ logo  $|\xi_1| = e^\sigma > 1$  e  $|\xi_2| = e^{-\sigma} < 1$
- ▶ a solução geral do mapa linear será a combinação linear de duas soluções linearmente independentes

$$\mathbf{v}_n = c_1 \xi_1^n \mathbf{u}_1 + c_2 \xi_2^n \mathbf{u}_2,$$

- ▶ as constantes  $c_1$  e  $c_2$  são determinadas a partir da condição inicial:  $\mathbf{v}_0 = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2$
- ▶ escolhendo  $c_2 = 0$  temos  $|\mathbf{v}_n| = |c_1 \xi_1^n \mathbf{u}_1| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$
- ▶ o autovalor  $\mathbf{u}_1$  define uma direção invariante instável  $E^i$
- ▶ escolhendo  $c_1 = 0$  temos  $|\mathbf{v}_n| = |c_2 \xi_2^n \mathbf{u}_2| \rightarrow 0$  se  $n \rightarrow \infty$
- ▶ o autovalor  $\mathbf{u}_2$  define uma direção invariante estável  $E^e$

## Ponto de sela ou ponto hiperbólico



- ▶ direção invariante instável: se  $\tau > 2$  há uma divergência monotônica da origem;  $\tau < -2$  a divergência é oscilatória
- ▶ direção invariante estável: se  $0 < \tau < 2$  a convergência à origem é monotônica, enquanto se  $-2 < \tau < 0$  é oscilatória
- ▶ o ponto fixo na origem é um ponto de sela (instável)
- ▶ para condições iniciais fora das direções invariantes, as iterações subsequentes percorrerão caminhos hiperbólicos, tendo como assíntotas as direções invariantes

## Autovalores complexos conjugados

- ▶ como  $\xi_1 \xi_2 = 1$ , então  $\xi_2 = \xi_1^*$  são imaginários puros com módulo igual a um:  $\xi_{1,2} = e^{\pm i\sigma} = \cos \sigma \pm i \sin \sigma$

$$|\tau| = |\xi_1 + \xi_2| = 2|\cos \sigma| < 2, \quad -2 < \sigma < 2.$$

- ▶ desejamos duas soluções linearmente independentes

$$\xi_{1,2}^n = e^{\pm in\sigma} = \cos(n\sigma) \pm i \sin(n\sigma),$$

- ▶ os autovetores correspondentes também serão complexos,  $\mathbf{u}_{1,2} = \mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$ , onde  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são vetores reais

$$\xi_{1,2}^n \mathbf{u}_{1,2} = (\mathbf{a} \cos n\sigma - \mathbf{b} \sin n\sigma) \pm i(\mathbf{a} \sin n\sigma + \mathbf{b} \cos n\sigma),$$

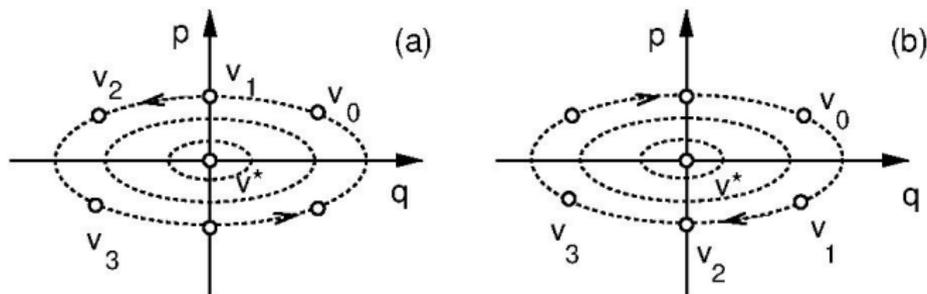
cujas partes real e imaginária são as soluções LI

- ▶ solução geral do mapa linear

$$\mathbf{v}_n = c_1(\mathbf{a} \cos n\sigma - \mathbf{b} \sin n\sigma) + c_2(\mathbf{a} \sin n\sigma + \mathbf{b} \cos n\sigma),$$

onde  $c_{1,2}$  são constantes determinadas por  $\mathbf{v}_0$ .

## Centro ou ponto elíptico



- ▶ as iterações sucessivas  $v_n$  circulam em torno do ponto fixo, posicionadas sobre elipses, em geral
- ▶ se  $\sigma$  é positivo (negativo) a rotação se dá no sentido anti-horário (horário)
- ▶ o ponto fixo na origem (centro ou ponto elíptico) é estável no sentido de Lyapunov, pois as iterações sucessivas não se aproximam do ponto fixo, mas também não se afastam dele com o passar do tempo

## Linearização

- ▶ mapa bidimensional geral  $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{v}_n)$
- ▶ nas vizinhanças do ponto fixo:  $\delta\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}^*$
- ▶ expandindo temos o mapa linearizado

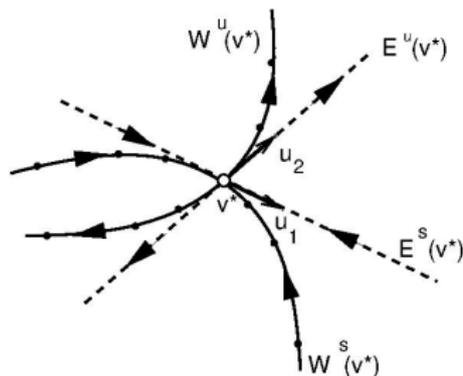
$$\delta\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{J}(\mathbf{v}^*) \cdot \delta\mathbf{v}_n,$$

- ▶ matriz Jacobiana do mapa calculada no ponto fixo

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial q_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial q_{n+1}}{\partial q_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_n} & \frac{\partial f}{\partial q_n} \\ \frac{\partial g}{\partial p_n} & \frac{\partial g}{\partial q_n} \end{pmatrix},$$

- ▶ o ponto fixo na origem  $\delta\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$  do mapa linearizado corresponde ao ponto fixo  $\mathbf{v}^*$  do mapa não-linear  $\mathbf{F}(\mathbf{v}_n)$
- ▶ se, para os autovalores da matriz Jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{v}^*)$ , tivermos  $|\xi_{1,2}| \neq 1$ , então a estabilidade do ponto fixo do mapa não-linear é a mesma do linearizado
- ▶ no caso de mapas bidimensionais conservativos, essa condição só é verdadeira para o ponto de sela, que é instável. Por exemplo, se  $|\xi_1| > 1$  e  $|\xi_2| < 1$  então o ponto fixo  $\mathbf{v}^*$  também será um ponto de sela.

# Variedades invariantes



- ▶ variedade invariante estável ( $W^e$ ): se  $v_0$  for colocada exatamente sobre ela, as iterações  $v_n$  aproximam-se de  $v^*$
- ▶ variedade invariante instável ( $W^i$ ): se  $v_0$  for posta sobre ela, os pontos  $v_n$  afastam-se com o passar do tempo
- ▶ sendo o mapa  $F$  inversível: as iterações inversas  $v_{-n}$  aproximam-se do ponto fixo quando  $n \rightarrow \infty$
- ▶ num ponto de sela (hiperbólico) as variedades invariantes interceptam-se transversalmente
- ▶ a variedade invariante estável (instável) é tangente à direção invariante estável (instável) no ponto fixo

# Estabilidade dos pontos fixos do mapa padrão

- ▶ mapa padrão

$$p_{n+1} = p_n + K \sin q_n, \quad q_{n+1} = q_n + p_{n+1}, \quad (\text{mod } 2\pi).$$

- ▶ pontos fixos

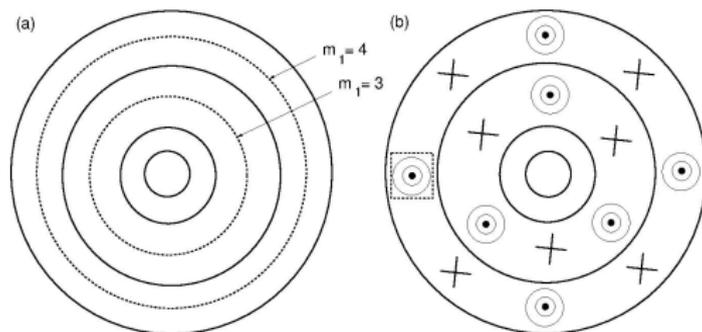
$$(p_m^* = 2\pi m, \theta_1^* = 0), \quad (p_m^* = 2\pi m, \theta_2^* = \pi),$$

- ▶ matriz Jacobiana calculada nestes pontos fixos, é

$$\mathbf{J}(\theta_{1,2}^*) = \begin{pmatrix} 1 + K \cos \theta_{1,2}^* & K \cos \theta_{1,2}^* \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \pm K & \pm K \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

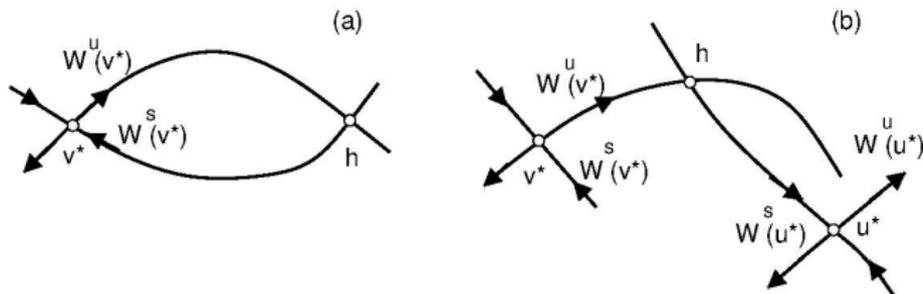
- ▶ condição de estabilidade dos pontos fixos:  $|\tau| = |2 \pm K| < 2$ .
- ▶ se  $K > 0$  então o  $\theta_1^* = 0$  é sempre instável (ponto de sela)
- ▶  $\theta_2^* = \pi$  será estável (centro) desde que  $0 < K < 4$
- ▶ caso  $K > 4$  ele tornar-se-á instável (ponto de sela com divergência oscilatória).

# O Teorema de Poincaré-Birkhoff



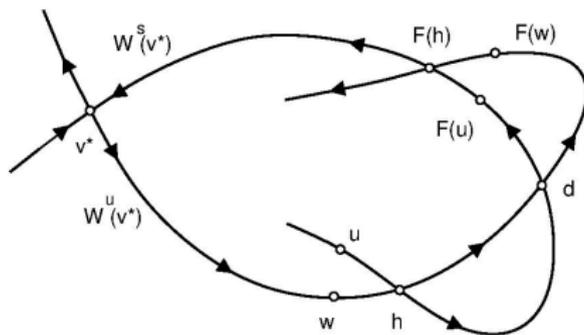
- ▶ num sistema quase-integrável **todos** os toros racionais desaparecem devido à perturbação
- ▶ sobram, no lugar de cada toro com número de rotação  $\alpha = m_2/m_1$ , um número  $2m_1$  par de pontos fixos remanescentes, metade elípticos (centros-estáveis) e metade hiperbólicos (pontos de sela-instáveis)
- ▶ entre os toros racionais (que são destruídos pela perturbação) desenhamos esquematicamente alguns toros irracionais que, pelo Teorema KAM, sobrevivem à perturbação (ao menos os “suficientemente irracionais”), ainda que possam sofrer pequenas deformações.

# Pontos homoclínicos e heteroclínicos



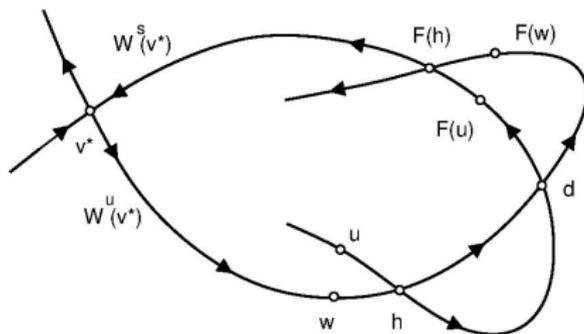
- ▶ na separatriz do pêndulo (sistema integrável) as variedades invariantes dos pontos hiperbólicos se unem de forma suave
- ▶ em sistemas quase-integráveis as variedades invariantes de dois pontos hiperbólicos cruzam-se de modo bastante complicado
- ▶ *pontos homoclínicos*: interseções transversais das variedades invariantes estável e instável que emanam de um mesmo ponto fixo hiperbólico  $v^*$
- ▶ *pontos heteroclínicos*: interseções entre as variedades estável e instável que emanam de pontos fixos diferentes  $v^*$  e  $u^*$

## Imagens de pontos homoclínicos



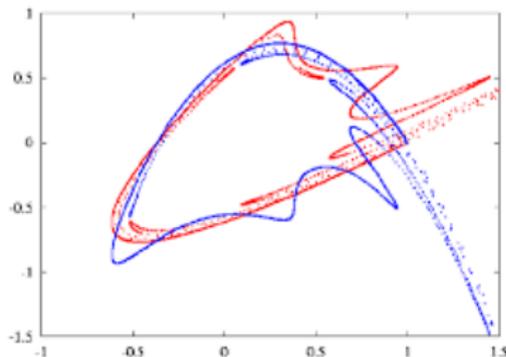
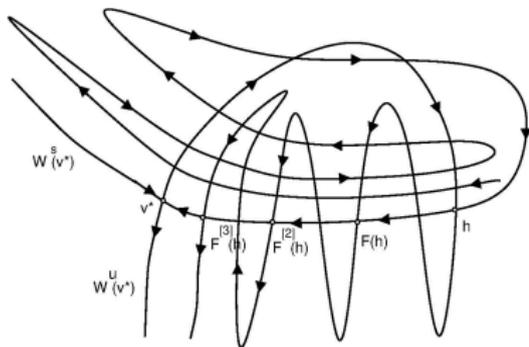
- ▶ o ponto homoclínico  $h$  pertence simultaneamente à variedade instável  $W^u$  e à variedade estável  $W^s$  de um ponto fixo hiperbólico  $v^*$
- ▶ como ambas as variedades são invariantes, a imagem do ponto homoclínico pelo mapa,  $F(h)$ , deve pertencer a ambas as curvas
- ▶ todas as imagens de um ponto homoclínico também serão pontos homoclínicos
- ▶ dois pontos que precedem o ponto homoclínico  $h$ :
  1.  $u$ , sobre a variedade estável  $W^s(v^*)$
  2.  $w$ , sobre a variedade instável  $W^u(v^*)$ .

## Imagens de pontos homoclínicos



- ▶ o mapa  $\mathbf{F}$  preserva orientações: se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  precedem o ponto homoclínico  $\mathbf{h}$ , então as imagens,  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$  e  $\mathbf{F}(\mathbf{w})$ , também devem preceder a imagem do ponto homoclínico  $\mathbf{F}(\mathbf{h})$
- ▶ o ponto  $\mathbf{d}$  *não* é homoclínico, a despeito de ser uma interseção entre as curvas invariantes
- ▶ como  $\mathbf{F}(\mathbf{h})$  é um ponto homoclínico, assim também serão as suas imagens diretas e inversas, de modo que  $\mathbf{F}^{[n]}(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{v}^*$  quando  $n \rightarrow \infty$  ao longo da variedade estável  $W^s(\mathbf{v}^*)$
- ▶ analogamente  $\mathbf{F}^{[-n]}(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{v}^*$  quando  $n \rightarrow \infty$  ao longo da variedade instável  $W^u(\mathbf{p})$ .

# Emaranhado homoclínico



- ▶ a existência de um único ponto homoclínico implica em um número infinito deles, que aproximam-se assintoticamente do ponto fixo ao longo de suas variedades invariantes
- ▶ como o mapa  $\mathbf{F}$  preserva áreas na superfície de seção de Poincaré, as áreas sobre estas curvas devem ser conservadas
- ▶ as variedades invariantes realizem complicados volteios, formando um entrelaçado de variedades ao qual chamamos figura homoclínica (ou emaranhado homoclínico)
- ▶ se um pequeno círculo tiver centro num certo ponto homoclínico, haverá infinitos pontos homoclínicos dentro dele