

# Dinâmica Hamiltoniana Aplicada

## Capítulo 7

### Órbitas caóticas

Prof. Ricardo Luiz Viana  
rlv640@gmail.com



# Conteúdo da aula

Caos determinístico

Caos em mapas bidimensionais conservativos

Emaranhado homoclínico e camada estocástica

Dinâmica do mapa padrão

Transição entre caos local e caos global

Rotor periodicamente chutado

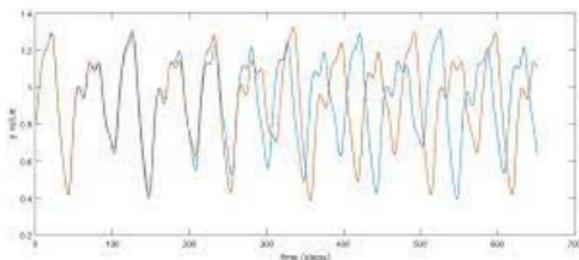
Transporte caótico

Sistemas fortemente caóticos

Recorrências

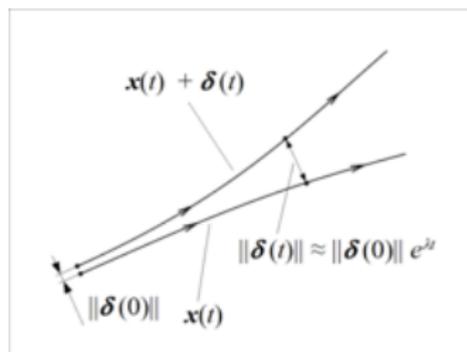
Ergodicidade

# Caos determinístico



- ▶ caracterizado por duas propriedades
  1. aperiodicidade: comportamento irregular, sem periodicidade aparente
  2. dependência sensível às condições iniciais: duas condições iniciais, originalmente muito próximas, levam a trajetórias que se separam exponencialmente com o passar do tempo ("efeito borboleta"), impedindo a previsibilidade para tempos grandes
- ▶ comportamento caótico é determinístico pois é uma propriedade intrínseca do sistema dinâmico
- ▶ ruído: caos extrínseco (também aperiódico mas sem dependência sensível às condições iniciais)
- ▶ instabilidade: dependência sensível às condições iniciais existe mas o comportamento é periódico

# Expoente de Lyapunov



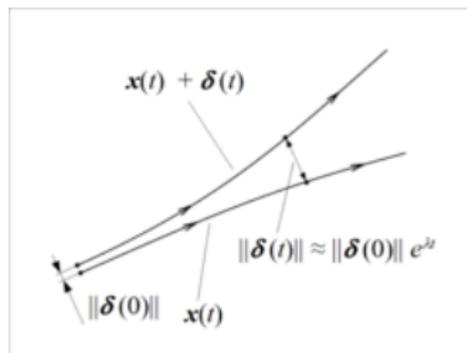
- ▶ mapa unidimensional:  $x_{n+1} = f(x_n)$
- ▶ iterações sucessivas:  $x_1 = f(x_0)$ ,  
 $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^{[2]}(x_0), \dots x_n = f^{[n]}(x_0)$
- ▶  $x_0$  e  $x'_0$ : condições iniciais muito próximas:

$$d_0 = |x_0 - x'_0| \ll |x_0|.$$

- ▶ após  $n$  iterações do mapa  $f(x)$  os pontos da órbita serão  $x_n$  e  $x'_n$ , respectivamente, distantes de

$$d_n = |x_n - x'_n| = \left| f^{[n]}(x_0) - f^{[n]}(x'_0) \right|.$$

# Expoente de Lyapunov



- ▶ expoente de Lyapunov  $\lambda$ : taxa de variação exponencial das distâncias a tempos diferentes

$$d_n \sim d_0 e^{\lambda n},$$

- ▶ comportamento caótico:  $\lambda > 0$
- ▶ na definição rigorosa do expoente de Lyapunov
  1. devemos tomar o limite do tempo  $n$  infinitamente grande,
  2. é necessário tomar o limite quando  $d_0 \rightarrow 0$ , indicando que as duas condições iniciais devem ser infinitamente próximas,

$$\lambda = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{d_n}{d_0} \right).$$

## Expoente de Lyapunov

- ▶ substituindo as distâncias nos tempos  $n$  e  $0$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{d_0 \rightarrow 0} \ln \left| \frac{f^{[n]}(x_0) - f^{[n]}(x'_0)}{d_0} \right|$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{f^{[n]}(x_0) - f^{[n]}(x'_0)}{x_0 - x'_0} \right|$$

- ▶ aplicando a definição de derivada à  $n$ -ésima iterada da função

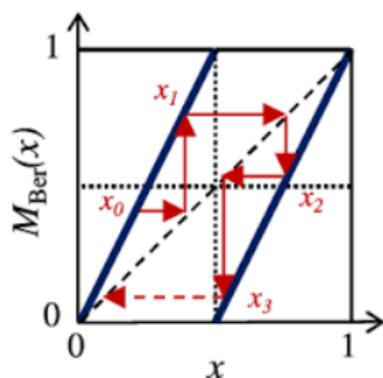
$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^{[n]}(x)}{dx_0} \right|,$$

- ▶ usando a regra da cadeia e o princípio de indução

$$\left( f^{[n]}(x_0) \right)' = f'(x_0) f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i),$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

## Expoente de Lyapunov para o mapa do deslocamento



- ▶ mapa do deslocamento:  $x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}$
- ▶ ex.:  $2 \times 0,6 = 1,2 \pmod{1} = 0,2$ , donde  $0 \leq x < 1$
- ▶ ponto fixo  $x^* = 0$ , um número infinitamente grande de órbitas periódicas instáveis
- ▶ como  $f'(x) = 2$  para “quase todo”  $x$ , então  $\lambda = \ln 2 > 0$
- ▶ “quase todo”: todos os pontos do intervalo  $[0, 1)$ , com exceção dos pontos pertencentes a órbitas instáveis
- ▶ são pontos atípicos: se escolhermos ao acaso um ponto em  $[0, 1)$ , a probabilidade de obtê-los é nula

# Órbitas periódicas e quase-periódicas

- ▶ mapa unidimensional definido no intervalo  $[0, 1]$ :  
 $x_{n+1} = x_n + k, \pmod{1}$  e  $k \in [0, 1]$  é um número real
- ▶ se  $k$  for um número racional da forma  $m/n$ , então  $x_0$  pertence a uma órbita de período  $n$ , pois

$$x_n = x_0 + nk = x_0 + m, \pmod{1} = x_0,$$

- ▶ se  $k$  for um número irracional, os valores de  $x_n$  preenchem densamente o intervalo  $[0, 1]$  (órbita quase-periódica)
- ▶ dadas duas condições iniciais  $x_0$  e  $x'_0$ , após  $n$  iterações temos

$$d_n = x_n - x'_n = x_0 + nk - x'_0 - nk = d_0,$$

- ▶ logo o expoente de Lyapunov é nulo pois

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{d_n}{d_0} \right) = \ln 1 = 0$$

## Mapas bidimensionais conservativos

- ▶ forma geral:  $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{v}_n)$

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{v}_n) = \begin{pmatrix} f(p_n, q_n) \\ g(p_n, q_n) \end{pmatrix}$$

- ▶ condição de conservação de áreas

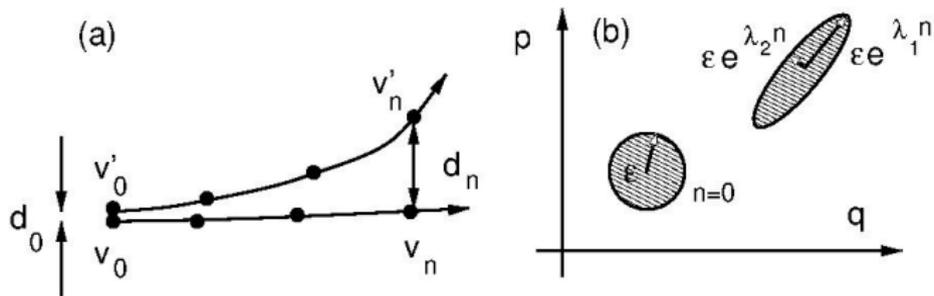
$$|\mathcal{J}| = \left| \begin{vmatrix} \partial f / \partial p_n & \partial f / \partial q_n \\ \partial g / \partial p_n & \partial g / \partial q_n \end{vmatrix} \right| = 1$$

- ▶ sistemas quase-integráveis com dois graus de liberdade são descritos, na superfície de seção de Poincaré, pelo mapa twist perturbado
- ▶ localmente este mapa é equivalente ao mapa padrão

$$f(p_n, q_n) = p_n + K \sin q_n, \quad g(p_n, q_n) = q_n + p_{n+1}$$

- ▶ em geral há dois expoentes de Lyapunov:  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 < \lambda_1$

# Exponentes de Lyapunov para mapas bidimensionais

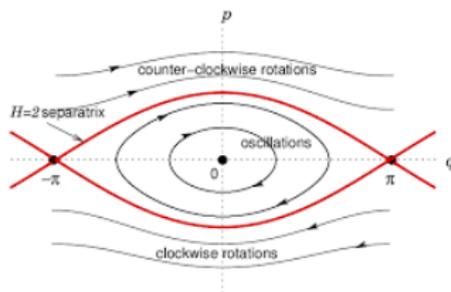
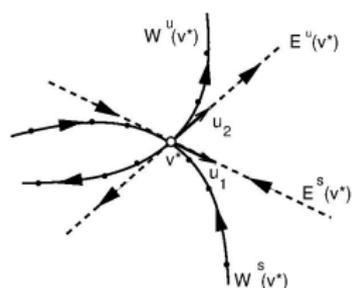


- ▶ disco de condições iniciais no plano de fase, centrado na condição inicial  $v_0$ , e com raio igual  $\epsilon$ , que representa a separação inicial entre as condições iniciais, dada por  $d_0$
- ▶ área inicial do disco é  $A_0 = \pi\epsilon^2$ .
- ▶ a imagem do disco, após  $n$  iterações do mapa  $\mathbf{F}$ , é uma elipse cujos semi-eixos são dados por  $a_n = \epsilon e^{\lambda_1}$ ,  $b_n = \epsilon e^{-\lambda_1}$
- ▶ e cuja área é  $A_n = \pi a_n b_n = \pi\epsilon^2 e^{\lambda_1 + \lambda_2} = A_0 e^{\lambda_1 + \lambda_2}$
- ▶ como o mapa é conservativo  $A_n = A_0$ , logo  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , donde  $\lambda_2 = -\lambda_1$
- ▶ se a órbita for caótica,  $\lambda_1 > 0$ , de maneira que  $\lambda_2 < 0$ .

## Caos e previsibilidade

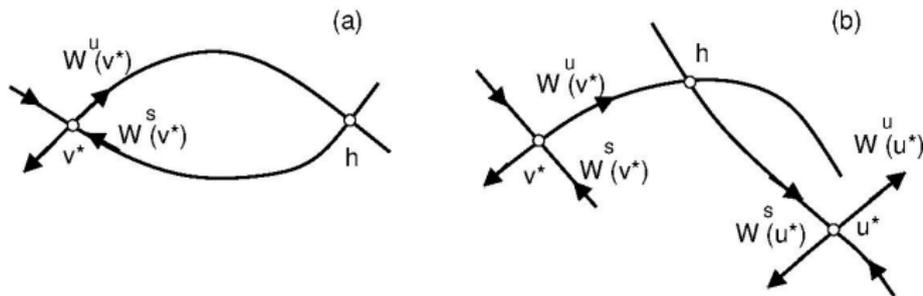
- ▶ se  $\lambda_1 > 0$ , qualquer incerteza na determinação da condição inicial será amplificada com o passar do tempo a uma taxa exponencial, podendo levar a uma indeterminação tão grande que impeça, na prática, uma previsão do estado futuro para tempos arbitrariamente grandes
- ▶ “efeito borboleta”: uma minúscula (portanto indetectável) perturbação da condição inicial levará o sistema para um estado separado de uma distância da ordem do domínio da própria variável, tornando o estado final imprevisível.
- ▶ tempo característico de predição  $t_l$ : quando a distância entre os pontos de duas órbitas inicialmente separadas por uma distância  $d_0$  (identificada como a incerteza na determinação da condição inicial) crescer para um número da ordem de  $d_n \sim 1$ , temos  $t_l = \ln(1/d_0)/\lambda_1$
- ▶ por exemplo, se  $\delta_0 \sim 10^{-8}$  (aritmética de ponto flutuante) e  $\lambda_1 = 0,1$  então  $t_l = \ln(10^8)/0,1 \sim 184$  (limite de previsibilidade)

# Variedades invariantes



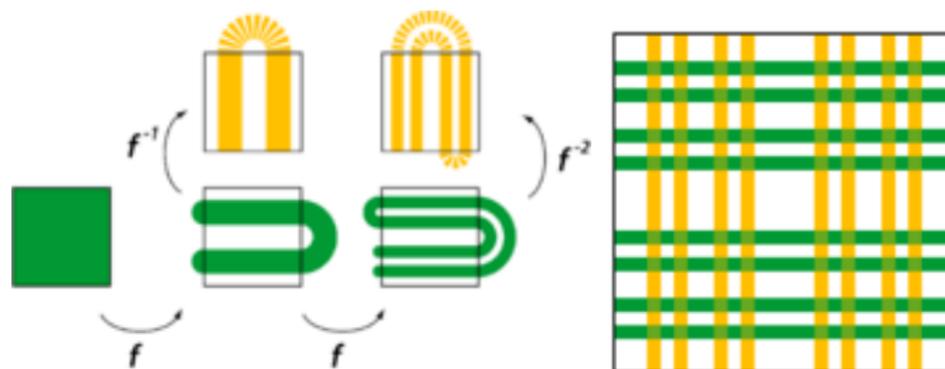
- ▶ ponto hiperbólico  $v^*$  é um ponto fixo instável (ponto de sela) ou pertence a uma órbita periódica instável
- ▶ dele emanam duas curvas: variedades estável  $W^u$  e instável  $W^s$ , que interceptam-se transversalmente em  $v^*$
- ▶ estas variedades são invariantes pois uma condição inicial que pertença a alguma delas, terá iteradas diretas e inversas que continuam pertencendo às variedades
- ▶ num sistema integrável, como o pêndulo, as variedades invariantes que emanam dos pontos hiperbólicos interceptam-se suavemente (ramos da separatrix)

# Pontos homoclínicos



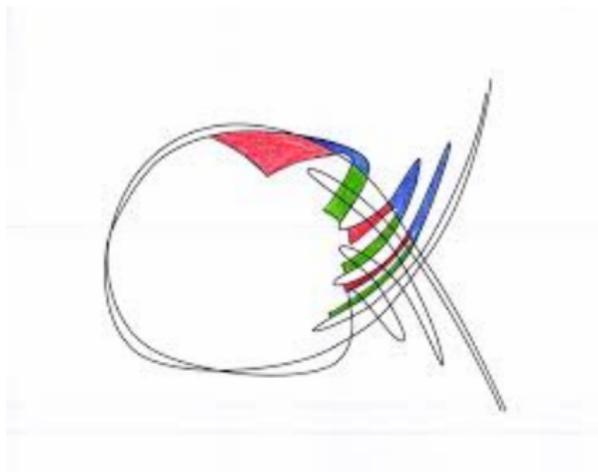
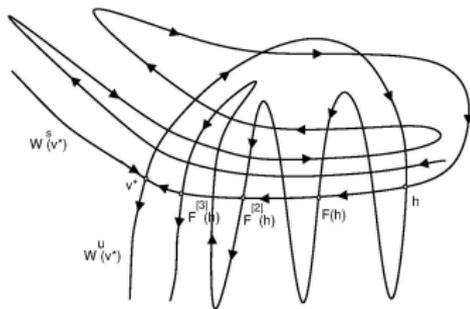
- ▶ para um sistema não-integrável, no entanto, as variedades instável e estável interceptam-se em pontos homoclínicos (se as variedades emanam do mesmo ponto) ou heteroclínicos (se são de pontos distintos)
- ▶ havendo um ponto homoclínico, suas infinitas imagens também serão pontos homoclínicos
- ▶ devido à propriedade conservativa dos mapas, as variedades interceptam-se de modo bastante complicado, formando o chamado emaranhado homoclínico (ou heteroclínico).

# Ferradura de Smale



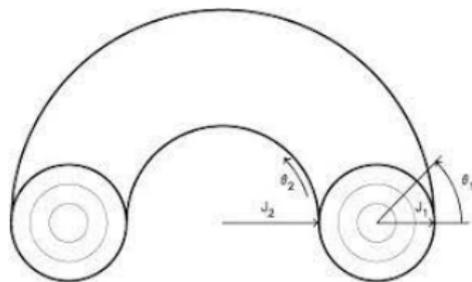
- ▶ mapa da ferradura aplicada a um quadrado unitário
- ▶ ferradura de Smale ( $\Lambda$ ): é um conjunto invariante não-atrativo que aparece no limite de infinitas imagens diretas e inversas do mapa da ferradura
- ▶  $\Lambda$  contém um conjunto enumerável de órbitas periódicas de períodos arbitrariamente grandes,
- ▶  $\Lambda$  contém um conjunto não-enumerável de órbitas não-periódicas limitadas,
- ▶  $\Lambda$  contém uma órbita densa (caótica)

# Emaranhado homoclínico



- ▶ teorema de Birkhoff-Smale: se houver um ponto homoclínico  $h$  para um mapa  $F$  (e, por extensão, um emaranhado homoclínico associado), então existe um inteiro  $n$  para o qual  $F^{[n]}$  terá uma ferradura  $\Lambda$ .
- ▶ uma órbita do mapa  $F$ , cuja condição inicial esteja numa vizinhança do emaranhado homoclínico, será caótica.

# Toros no espaço de fase



- ▶ mapa twist perturbado (sistema quase-integrável)

$$J_{1,n+1} = J_{1,n} + \varepsilon \mathcal{F}(J_{1,n+1}, \theta_{1,n})$$

$$\theta_{1,n+1} = \theta_{1,n} + 2\pi\alpha(J_{1,n+1}) + \varepsilon \mathcal{G}(J_{1,n+1}, \theta_{1,n}).$$

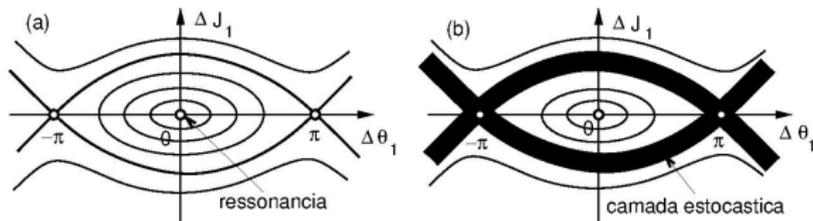
- ▶  $\varepsilon = 0$  o sistema torna-se integrável, e as respectivas trajetórias no espaço de fase têm a topologia de toros
- ▶ conforme o valor do número de rotação  $\alpha$  o toro é racional ou irracional, e o comportamento de ambos é diferente sob a influência de uma perturbação relativamente fraca ( $\varepsilon \ll 1$ )

# Estrutura de toros racionais e irracionais perturbados



- ▶ os toros irracionais são, em sua maioria, preservados pela perturbação, com alterações de forma (teorema KAM)
- ▶ os toros racionais são todos destruídos: nas suas posições aparece um número par de pontos fixos, metade elípticos e metade hiperbólicos (teorema de Poincaré-Birkhoff)
- ▶ as variedades invariantes que emanam de pontos hiperbólicos adjacentes interceptam-se em um número infinito de pontos homoclínicos (emaranhado homoclínico)

# Ilhas periódicas



2

- ▶ ponto fixo elíptico  $(J_1^*, \theta_1^*)$  do mapa twist perturbado
- ▶ provém do toro racional cujo número de rotação é um racional

$$\alpha(J_1^*) = \omega_1/\omega_2 = m/n$$

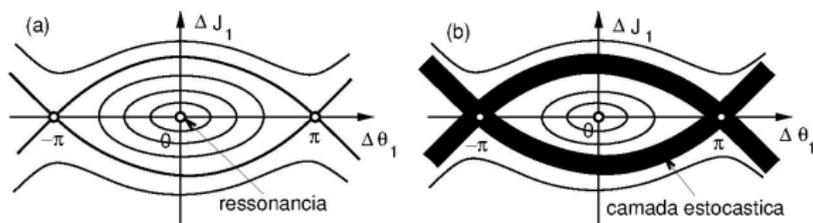
- ▶ configura uma ressonância, pois as frequências são comensuráveis:  $n\omega_1 - m\omega_2 = 0$ ,
- ▶ expandimos a Hamiltoniana em torno da ressonância exata

$$J_1 = J_1^* + \Delta J_1, \quad \theta_1 = \theta_1^* + \Delta \theta_1$$

- ▶ obtemos a Hamiltoniana do pêndulo

$$\Delta H = G(\Delta J_1)^2/2 - F \cos(\Delta \theta_1),$$

# Largura das ilhas periódicas



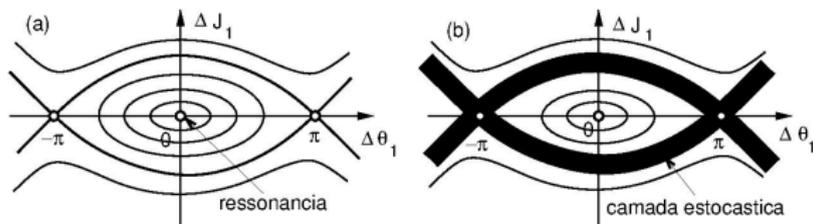
2

- ▶ a separatriz conecta suavemente as variedades estável e instável que emanam dos pontos fixos hiperbólicos que ladeiam o ponto elíptico  $(J_1^*, \theta_1^*)$ : ilha periódica
- ▶ semi-largura de uma ilha centrada nesta ressonância

$$(\Delta J_1)_{max} = 2\sqrt{F/G},$$

- ▶ como  $F \sim \varepsilon$ , a semi-largura da ilha aumenta como  $\varepsilon^{1/2}$
- ▶ na vizinhança do ponto elíptico as trajetórias fechadas correspondem a librações com uma frequência  $\Delta\omega = \sqrt{FG}$

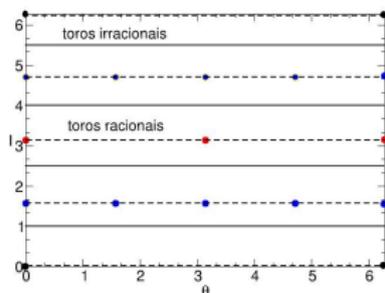
# Camada estocástica



2

- ▶ a não-integrabilidade do sistema leva ao emaranhado homoclínico, resultante dos infinitos cruzamentos entre as variedades estável e instável dos pontos fixos hiperbólicos
- ▶ no lugar da separatriz do pêndulo surge uma fina camada onde os pontos do mapa preenchem uma região finita, e cuja espessura aumenta com a intensidade da perturbação  $\varepsilon$
- ▶ essa região (camada estocástica) contém o emaranhado homoclínico resultante das interseções entre as variáveis estável e instável do ponto fixo hiperbólico

# Dinâmica do mapa padrão

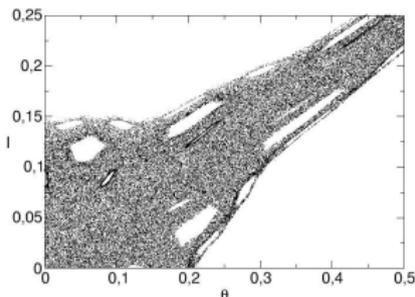
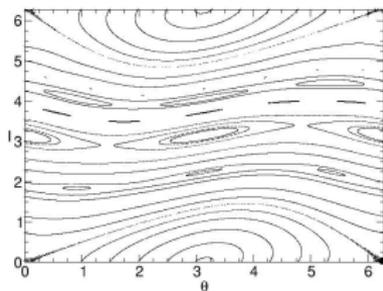


- ▶  $(I_n, \theta_n)$ : variáveis de ação e ângulo

$$I_{n+1} = I_n + K \sin \theta_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}$$

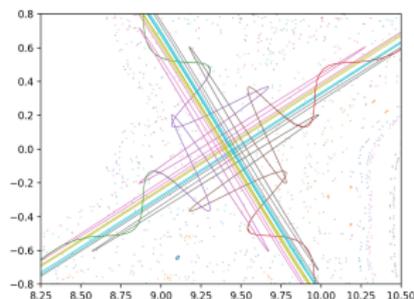
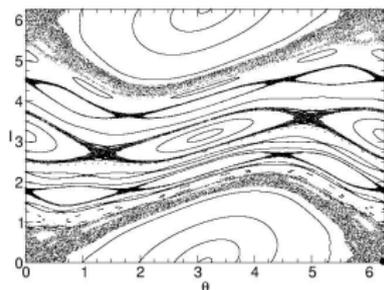
- ▶  $K = 0$ : mapa twist - toros racionais e irracionais com número de rotação  $\alpha = I/2\pi$
- ▶  $I_0 = 0$ : toro racional com  $\alpha = 0 \rightarrow$  ponto fixo
- ▶  $I_0 = \pi$ : toro racional com  $\alpha = 1/2 \rightarrow$  órbita de período 2
- ▶  $I_0 = \pi/2$  e  $3\pi/2$ : toros racionais com  $\alpha = 1/4$  e  $3/4 \rightarrow$  órbitas de período 4
- ▶  $I_0 = 1$ : toro irracional com  $\alpha = 1/2\pi \rightarrow$  órbita quaseperiódica

# Dinâmica do mapa padrão



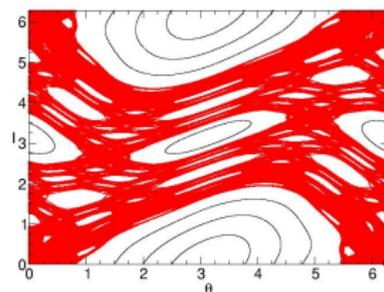
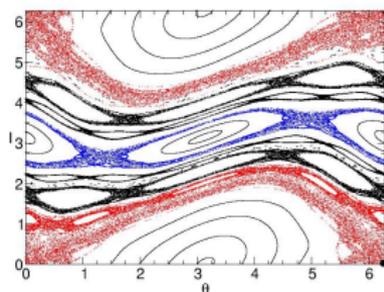
- ▶  $K = 0, 5$ : o toro racional com  $\alpha = 1/1$  será destruído e restarão dois pontos fixos: um elíptico e outro hiperbólico
- ▶ ilha periódica: estrutura pendular em torno do ponto elíptico
- ▶ como a camada estocástica é muito fina, confunde-se com uma separatriz
- ▶ o toro racional com  $\alpha = 1/2$  desaparece, deixando 4 pontos fixos: 2 elípticos e 2 hiperbólicos (duas órbitas de período 2)
- ▶ o toro irracional com  $\alpha = 1/2\pi$  sobrevive à perturbação, mas com deformação (curvas invariantes, ou curvas KAM)

# Dinâmica do mapa padrão



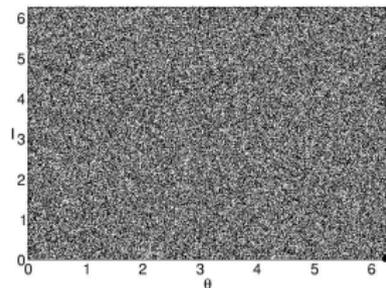
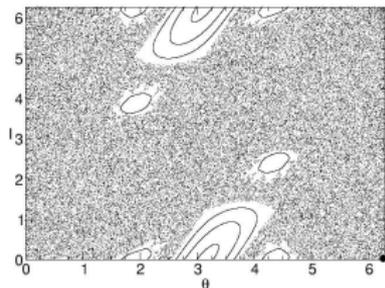
- ▶  $K = 0,97$ : as cadeias de uma, duas e três ilhas periódicas aumentam suas larguras, bem como as espessuras das suas camadas estocásticas
- ▶ nas camadas estocásticas as órbitas do mapa são caóticas devido à presença do emaranhamento homoclínico
- ▶ as curvas invariantes (KAM) representam barreiras à difusão das trajetórias caóticas das camadas estocásticas

# Dinâmica do mapa padrão



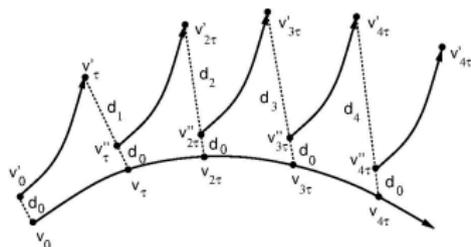
- ▶  $K = 0,97$ : caos local: excursão na ação limitada pela largura da ilha periódica - as camadas estocásticas não se misturam
- ▶  $K = 1,0$ : desaparecem todas as curvas invariantes (toros irracionais) entre as duas metades da ilha periódica principal
- ▶ as camadas estocásticas intermediárias fundem-se numa única órbita caótica
- ▶ caos global: a excursão na ação não é mais limitada pelas larguras das ilhas periódicas
- ▶ transição entre caos local e global ocorre para  $K = K_c = 0,971635\dots$

## Dinâmica do mapa padrão



- ▶  $K = 2, 6$ : aumento significativo da órbita caótica com remanescentes de ilhas periódicas
- ▶ condições iniciais no interior das ilhas não dão origem a órbitas caóticas
- ▶  $K = 7, 0$ : praticamente toda a região energeticamente acessível do espaço de fase é ergodicamente preenchida por uma órbita caótica

# Expoente de Lyapunov máximo para o mapa padrão



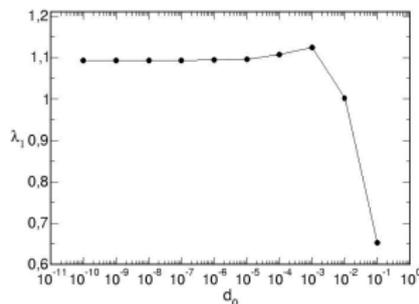
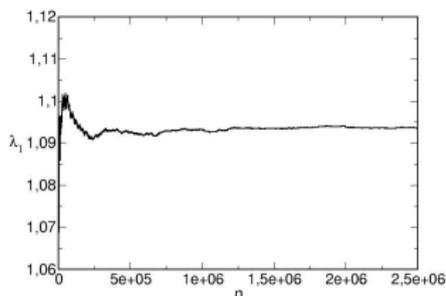
- ▶ duas condições iniciais  $\mathbf{v}_0 = (I_0, \theta_0)$  e  $\mathbf{v}'_0 = (I'_0, \theta'_0)$  separadas por uma distância  $d_0$
- ▶ após  $n$  iterações do mapa os pontos  $\mathbf{v}_n$  e  $\mathbf{v}'_n$  terão se distanciado por  $d_n$
- ▶ expoente de Lyapunov máximo dado por

$$\lambda_1(\mathbf{v}_0) = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \ln(d_n/d_0)$$

- ▶ a cada  $\tau$  iterações a órbita gerada por  $\mathbf{v}'_0$  é interrompida e é determinada a sua distância  $d_i$
- ▶ a condição inicial da segunda órbita é renormalizada a  $d_0$

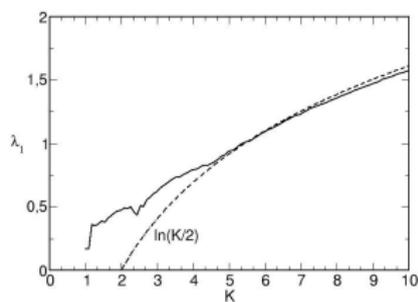
$$\lambda_1(\mathbf{v}_0, m, d_0) = (1/m\tau) \sum_{i=1}^m \ln(d_i/d_0)$$

# Expoente de Lyapunov máximo para o mapa padrão



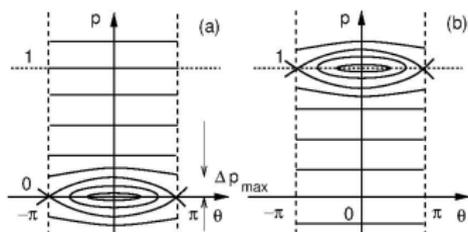
- ▶ mapa padrão para  $K = 6,0$
- ▶ condição inicial:  $(I_0 = 0,5, \theta_0 = 1,0)$
- ▶ parâmetros do cálculo:  $\tau = 5, d_0 = 10^{-10}$ ,
- ▶ convergência para  $\lambda_1 = 1,093$  quando o tempo  $n = m\tau$  é maior que  $10^6$
- ▶ convergência é satisfatória para  $d_0 \leq 10^{-5}$
- ▶  $\lambda_2 = -\lambda_1 = -1,093$

# Expoente de Lyapunov máximo para o mapa padrão



- ▶  $\lambda_1$  aumenta com o parâmetro  $K$
- ▶ para  $K \gg 1$  temos  $\lambda_1 \approx \ln(K/2)$
- ▶ concordância a partir de  $k = 5,0$

## Hamiltoniana de duas ondas



- ▶ partícula carregada sob a ação de duas ondas eletrostáticas com velocidades de fase e frequências diferentes

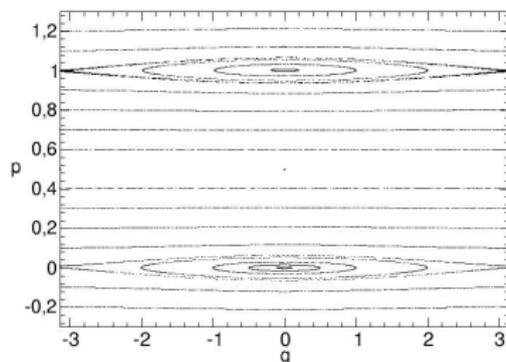
$$H(p, q, t) = p^2/2 - M \cos q - P \cos[k(q - t)]$$

- ▶  $M \neq 0, P = 0$ : Hamiltoniana do pêndulo  $\rightarrow$  ilha periódica com semi-largura  $(\Delta p)_{max} = 2\sqrt{M}$  ancorada em  $p = 0$
- ▶  $M = 0, P \neq 0$ : fazendo uma transformação canônica  $(p, q) \rightarrow (\tilde{p}, \tilde{q})$  obtemos a Kamiltoniana

$$K(\tilde{p}, \tilde{q}) = (\tilde{p} - 1)^2/2 - P \cos(k\tilde{q})$$

- ▶ ilha com semi-largura  $(\Delta\tilde{p})_{max} = 2\sqrt{P}$  ancorada em  $\tilde{p} = 1$

# Hamiltoniana de duas ondas



- ▶  $M \neq 0, P \neq 0$ : equivalente a um sistema independente do tempo com dois graus de liberdade  $\rightarrow$  não-integrável
- ▶ equações de Hamilton

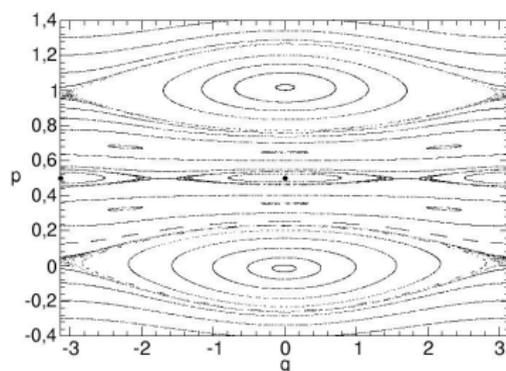
$$\dot{p} = -M \sin q - kP \sin[k(q - t)], \quad \dot{q} = p$$

- ▶ mapa de Poincaré estroboscópico: variáveis discretas

$$p_n = p(t - n\tau), \quad q_n = q(t - n\tau), \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

- ▶ retrato de fase para  $M = P = 0,001$  e  $k = 1$

# Hamiltoniana de duas ondas

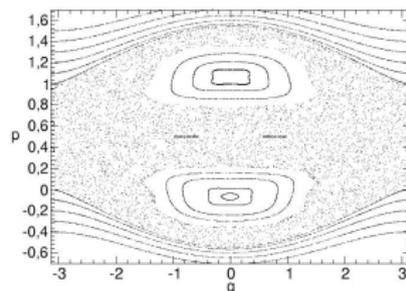
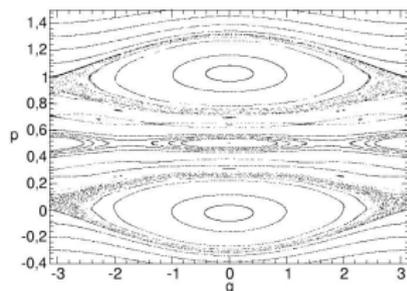


- ▶ retrato de fase para  $M = P = 0,015625$  e  $k = 1$
- ▶ distância entre as ilhas principais:  $\delta p = 1$
- ▶ parâmetro de Chirikov

$$S = [(\Delta p)_{max} + (\Delta \tilde{p})_{max}] / \delta p = 2\sqrt{M} + 2\sqrt{P}$$

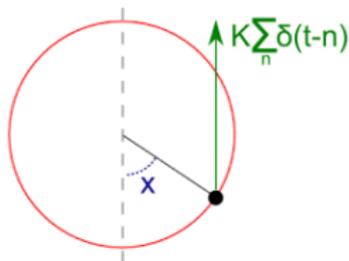
- ▶  $S = 0,6$  neste caso: não há sobreposição de ressonâncias (ilhas principais), somente caos local

# Hamiltoniana de duas ondas



- ▶ retratos de fase para  $M = P = 0,0225$  e  $0,0625$
- ▶ no primeiro caso ainda temos caos local (existem curvas invariantes entre as ressonâncias)
- ▶ no segundo caso já temos caos global (limitado às duas ilhas)
- ▶ a transição entre caos local e global ocorre para  $M = P \approx 0,028$
- ▶ corresponde a  $S = 0,67 \approx 2/3$  ("regra dos dois terços")

## Rotor periodicamente chutado



- ▶ partícula de massa  $m$  presa a uma haste rígida e leve de comprimento  $a$ , com momento de inércia  $ma^2$
- ▶ energia cinética:  $T(\dot{\theta}) = m a^2 \dot{\theta}^2 / 2$
- ▶ forças impulsivas de intensidade  $N_0/a$ , aplicadas nos instantes de tempo  $t = 0, \pm\tau, \pm 2\tau, \dots \pm n\tau$ , com torque

$$N(\theta, t) = N_0 \operatorname{sen} \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau),$$

- ▶ energia potencial dependente do tempo

$$U(\theta, t) = - \int N(\theta, t) d\theta = N_0 \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau),$$

## Rotor periodicamente chutado

- ▶ Lagrangiana

$$L = T - U = m a^2 \dot{\theta}^2 / 2 - K \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau).$$

- ▶ coordenada  $\theta$  e momentum conjugado (angular)

$$p_{\theta} = \partial L / \partial \dot{\theta} = m a^2 \dot{\theta}.$$

- ▶ Hamiltoniana: transformação de Legendre

$$H(p_{\theta}, \theta, t) = \frac{p_{\theta}^2}{2ma^2} + N_0 \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\tau).$$

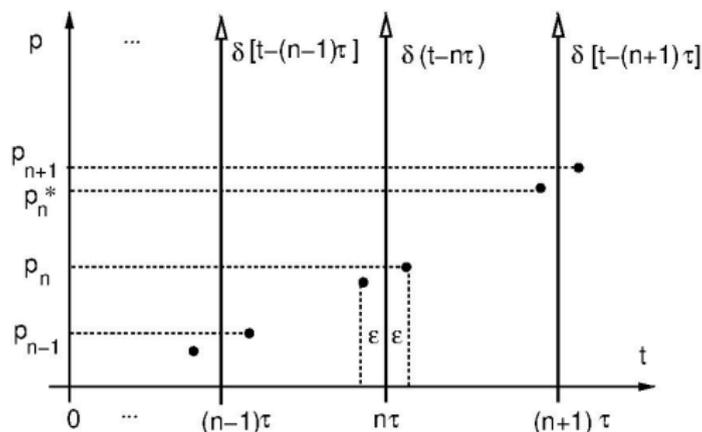
- ▶ equações de Hamilton

$$\frac{dI}{dt} = K \operatorname{sen} \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau), \quad \frac{d\theta}{dt} = I.$$

- ▶ redefinição de variáveis

$$I = \frac{p_{\theta}}{ma^2}, \quad K = \frac{N_0}{ma^2}.$$

# Rotor periodicamente chutado e o mapa padrão



- ▶ variáveis discretas

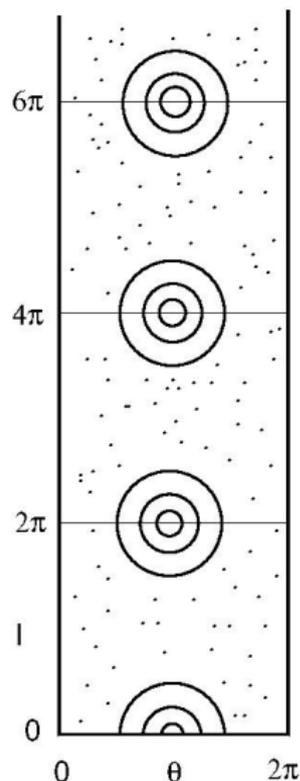
$$I_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(t = n\tau - \epsilon), \quad \theta_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \theta(t = n\tau - \epsilon),$$

- ▶ integrando as equações de Hamilton com  $\tau = 1$  obtemos o mapa padrão

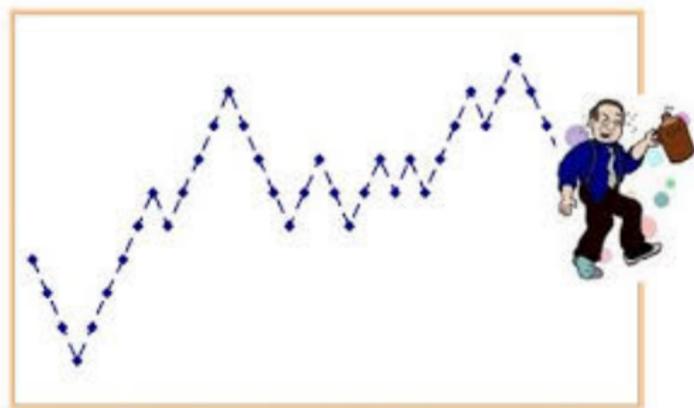
$$I_{n+1} = I_n + K \sin \theta_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}, \quad (\text{mod } 2\pi),$$

## Rotor periodicamente chutado e o mapa padrão

- ▶ As variáveis discretas do mapa padrão  $(I_n, \theta_n)$  correspondem aos valores de  $(I, \theta)$  imediatamente antes da aplicação de uma força impulsiva no tempo  $t = n$ , e o parâmetro de estocasticidade  $K$  é proporcional à amplitude da força
- ▶  $I$  e  $I + 2\pi m$  ( $m$  inteiro) *não são* fisicamente equivalentes, pois correspondem em geral a diferentes energias cinéticas do rotor.
- ▶ fazemos um número infinito de cópias do retrato de fase para valores da ação que diferem de  $2\pi$

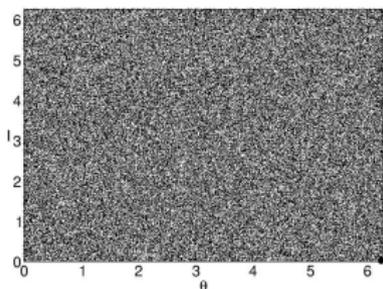


## Passaio aleatório



- ▶ passeio do bêbado: cada passo é totalmente independente do anterior (random walk)
- ▶ em uma dimensão, a probabilidade de um deslocamento para a direita ou esquerda é a mesma  $p = 0,5$
- ▶ o deslocamento médio do bêbado é zero:  $\overline{\Delta x} = 0$
- ▶ o deslocamento quadrático médio aumenta linearmente com o tempo:  $\overline{(\Delta x)^2} \sim 2Dt \rightarrow$  difusão Gaussiana, onde  $D$  é o coeficiente de difusão

## Passeio aleatório na órbita caótica do mapa padrão



- ▶ passeio do bêbado: processo estocástico (aleatório) a tempo discreto  $n$
- ▶ órbitas caóticas do mapa padrão: processo determinístico
- ▶ o comportamento fortemente caótico para  $K$  alto tem propriedades estatísticas semelhantes ao passeio aleatório
- ▶ deslocamento da ação:  $\Delta I = I_{n+1} - I_n = K \sin \theta_n$
- ▶ supondo que as fases estejam aleatoriamente distribuídas no intervalo  $[0, 2\pi)$ , a média temporal é uma média sobre as fases

$$\overline{\Delta I} = K \langle \sin \theta_n \rangle = \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$$

## Difusão caótica no mapa padrão

- ▶ coeficiente de difusão (quase-linear)

$$\frac{\overline{(\Delta I)^2}}{2} = \frac{K^2}{2} \langle \sin^2 \theta_n \rangle = \frac{K^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{K^2}{4}$$

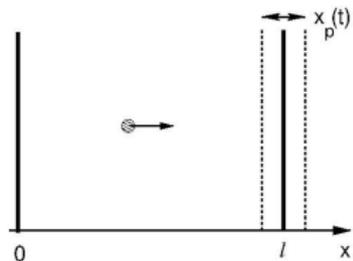
- ▶ conjunto de condições iniciais aleatoriamente distribuídas em  $I$  e em  $\theta$ : função de distribuição Gaussiana

$$f(I, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi nD}} e^{-I^2/2nD}$$

- ▶ segundo momento da função de distribuição

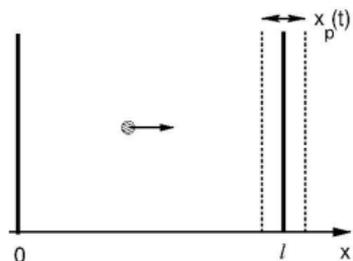
$$\langle I^2/2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dI f(I, n) I^2/2 = nD$$

# Aceleração de Fermi



- ▶ mecanismo para o ganho de energia de raios cósmicos, pelas reflexões sucessivas com nuvens magnéticas galácticas
- ▶ modelo de Ulam: uma parede fixa em  $x = 0$  e outra móvel em  $x = \ell$ , que oscila de acordo com a função  $x_p(t)$
- ▶  $\omega$ : frequência de oscilação da parede  $\rightarrow \psi = \omega t$
- ▶ supomos  $x_p(t) = aF(\psi)$  e colisões perfeitamente elásticas
- ▶ velocidade da partícula: antes da colisão é  $v$ , após a colisão é  $v' = -v + 2V_p$ , onde  $V_p$  é a velocidade da parede móvel
- ▶  $v_n$  velocidade da partícula imediatamente antes da  $n$ -ésima colisão com a parede móvel
- ▶ a partícula atinge a parede móvel quando esta tem um fase  $\psi_n$ , e é refletida com velocidade  $-v_n + 2V_p(\psi_n)$

## Modelo simplificado de Ulam



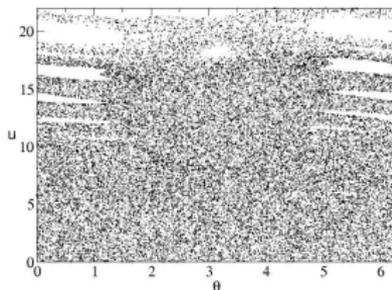
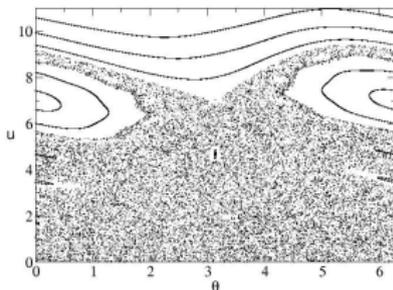
- ▶ a partícula move-se em direção à parede fixa, é refletida e retorna com velocidade  $v_{n+1} = v_n - 2(dx_p(t_n)/dt)$
- ▶ pela regra da cadeia

$$v_{n+1} - v_n = -2a(dF/dt) = -2a(dF/d\psi)(d\psi/dt) = -2a\omega F'(\psi_n)$$

- ▶ entre duas colisões sucessivas com a parede móvel:  
 $\psi_{n+1} - \psi_n = \omega\tau$
- ▶ modelo simplificado de Ulam: a parede móvel transmite momentum à partícula na colisão, mas ocupa uma posição fixa, tal que o tempo entre colisões sucessivas é  $\tau = 2\ell/v_{n+1}$
- ▶ definindo as variáveis  $u_n = v_n/2\omega a$  e  $M = \ell/2\pi a$  temos

$$u_{n+1} = u_n - F'(\psi_n), \quad \psi_{n+1} = \psi_n + (2\pi M/u_{n+1})$$

# Mapa de Ulam simplificado

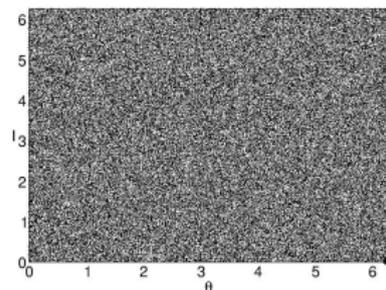
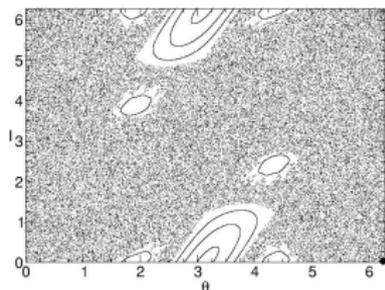


- ▶ escolhendo  $F(\psi) = \cos \psi$  temos o mapa de Ulam simplificado

$$u_{n+1} = |u_n + \sin \psi_n|, \quad \psi_{n+1} = \psi_n + (2\pi M/u_{n+1})$$

- ▶ que é conservativo:  $\mathcal{J} = 1$
- ▶ pontos fixos:  $\psi_1^* = 0$  (elíptico),  $\psi_2^* = \pi$  (hiperbólico),  $u_m^* = M/m$ , ( $m = 0, 1, 2, \dots$ )
- ▶ região de caos global para baixos valores de  $u$ : difusão caótica limitada pelas curvas invariantes acima
- ▶ limitação ao ganho de energia cinética das partículas

# Sistemas fortemente caóticos



- ▶ mapa padrão tipicamente tem uma variedade de órbitas possíveis: periódicas, quase-periódicas e caóticas, misturadas de forma extremamente complicada
- ▶ para  $K \gg 1$  o plano de fase é quase totalmente ocupado por uma órbita caótica, mas ainda existem órbitas periódicas estáveis com uma estrutura de ilhas periódicas à sua volta
- ▶ em sistemas fortemente caóticos não há pontos elípticos: todas as órbitas periódicas são hiperbólicas, portanto instáveis
- ▶ para eles, há uma órbita caótica que preenche densamente o plano de fase

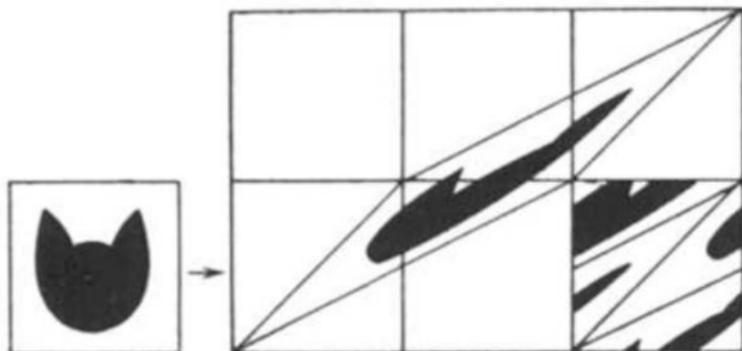
## O mapa do gato de Arnold

- ▶ mapa bidimensional conservativo definido no toro  $[0, 1) \times [0, 1)$

$$J_{n+1} = 2J_n + \theta_n, \quad (\text{mod } 1), \quad \theta_{n+1} = J_n + \theta_n, \quad (\text{mod } 1),$$

- ▶ o único ponto fixo do mapa é a origem; qualquer ponto no toro para o qual  $x_0$  e  $y_0$  sejam números racionais é um ponto fixo da  $n$ -ésima iterada do mapa, para algum valor de  $n$
- ▶ autovalores da matriz Jacobiana constantes:  $\xi_1 > 1$  e  $\xi_2 < 1$  - todos os pontos fixos são hiperbólicos (pontos de sela)
- ▶ as variedades invariantes instável  $W^u$  e estável  $W^s$  coincidem com as direções invariantes (autovetores da Jacobiana)
- ▶ as variedades invariantes preenchem densamente o toro: elas se interceptam em um número infinito de pontos heteroclínicos que também estão densamente distribuídas
- ▶ cenário similar ao do emaranhado homoclínico: o mapa do gato é fortemente caótico  $\rightarrow$  qualquer condição inicial típica  $(x_0, y_0)$  irá produzir uma trajetória que irá cobrir densamente o toro para um número infinitamente grande de iterações

## Mapa do gato



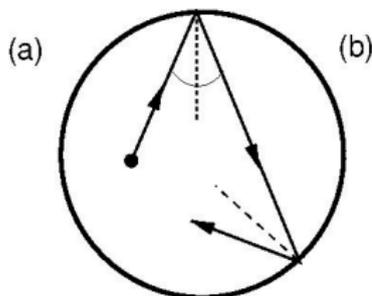
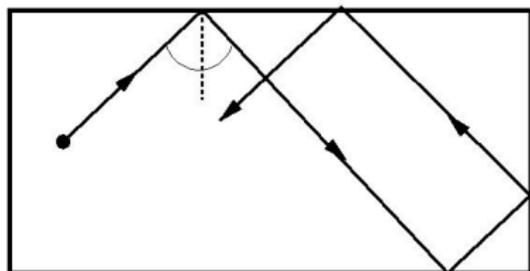
- ▶  $f$ : razão entre a área ocupada pela cara do gato e a área do quadrado unitário
- ▶ o mapa transforma uma região, em cada iteração, num mosaico das suas partes, produzindo uma figura bastante complicada com o passar do tempo
- ▶ dada uma pequena região fixa  $\mathcal{R}$  no quadrado unitário, após um grande número de iterações do mapa resulta que a fração da área de  $\mathcal{R}$  ocupada pelos pixels correspondentes à cara do gato tende a  $f$ .

# Sistema misturador



- ▶ o mapa do gato é um exemplo de sistema misturador: fortemente caótico
- ▶ cuba-libre: 80% de coca-cola e 20% de rum: misturamos muito bem os dois líquidos, de tal forma que qualquer gota da bebida contenha a mesma proporção original de coca-cola e rum ( $f = 0,2$  de rum)
- ▶ após muitas iterações do mapa do gato (mistura), uma pequena área do quadrado unitário conterá a mesma fração ocupada pela cara do gato

# Bilhares



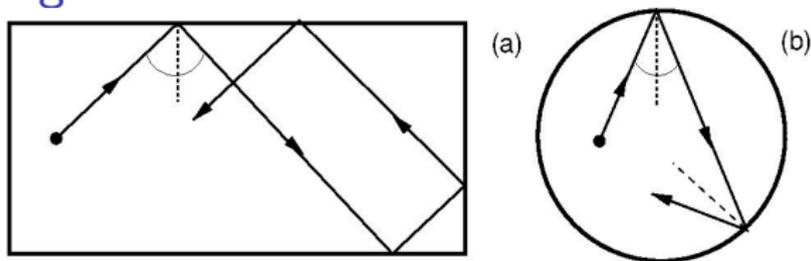
- ▶ domínios bidimensionais limitados por paredes rígidas, dentro dos quais uma partícula move-se com velocidade constante em trajetórias retilíneas, refletindo-se elasticamente nas paredes
- ▶ bilhar retangular: Hamiltoniana

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m}, \quad (0 < x < a, 0 < y < b).$$

- ▶ supondo colisões elásticas, os momenta  $|p_x|$  e  $|p_y|$  são constantes do movimento. Variáveis de ação:

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_x dx = \frac{|p_x|a}{\pi}, \quad J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_y dy = \frac{|p_y|b}{\pi},$$

## Bilhares integráveis



- ▶ Hamiltoniana em termos das variáveis de ação

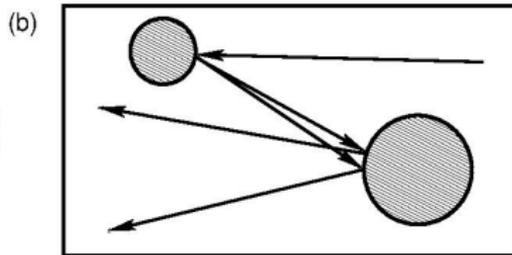
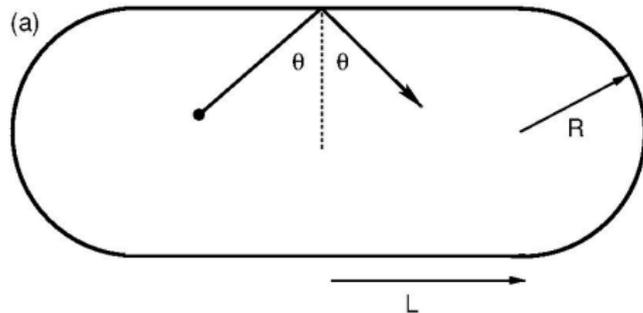
$$H(J_1, J_2) = \frac{\pi^2}{2m} \left( \frac{J_1^2}{a^2} + \frac{J_2^2}{b^2} \right).$$

- ▶ o bilhar rectangular é integrável, com frequências

$$\omega_1 = \frac{\partial H}{\partial J_1} = \frac{\pi^2}{ma^2} J_1, \quad \omega_2 = \frac{\partial H}{\partial J_2} = \frac{\pi^2}{mb^2} J_2.$$

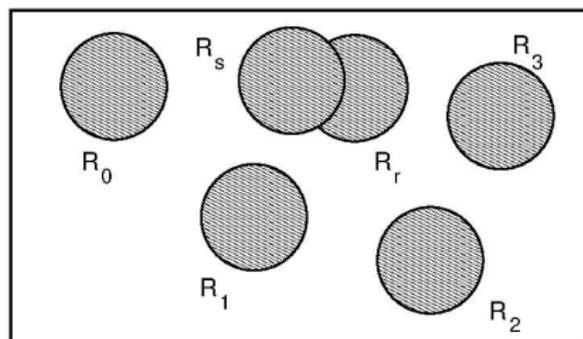
- ▶ bilhar circular:  $H = E$  é uma constante do movimento. Devido à lei da reflexão, a força de reação da parede do bilhar sobre a partícula numa colisão é central
- ▶ o momentum angular é conservado: as duas constantes do movimento tornam o sistema integrável.

## Bilhares caóticos



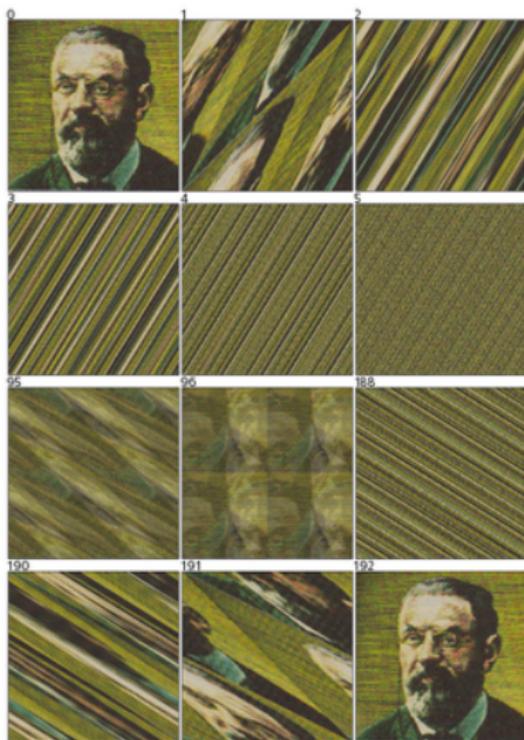
- ▶ bilhar do tipo estádio: não-integrável e fortemente caótico (misturador)
- ▶ sensibilidade às condições iniciais: uma pequena incerteza na determinação da primeira trajetória incidente leva, após apenas duas reflexões pelos discos, a trajetórias cujos ângulos diferem apreciavelmente
- ▶ com o passar das sucessivas reflexões - pelos discos e pelas paredes do bilhar - a incerteza é cada vez maior.

## Recorrências



- ▶ considerando uma região limitada do plano de fase
- ▶ condição inicial típica  $\mathbf{v}_0$  e a envolvemos por um pequeno disco  $R_0$  de raio  $\epsilon > 0$
- ▶ todos pontos deste disco são iterados pelo mapa bidimensional conservativo  $\mathbf{F}$  e deixam a região correspondente ao disco
- ▶ teorema de recorrência de Poincaré: sempre haverá pontos das órbitas que retornam à vizinhança do disco inicial se esperarmos um tempo suficientemente longo
- ▶ não importando quão pequeno o raio  $\epsilon$  do disco seja.
- ▶ cada retorno de um ponto da órbita ao disco inicial  $R_0$  é denominado uma recorrência do sistema

# Recorrências



- ▶ o teorema de recorrência de Poincaré não diz quantas iterações serão necessárias para isso
- ▶ quando menor for o raio  $\epsilon$  do disco inicial, maior será em média o tempo necessário para obter uma recorrência.
- ▶ recorrências no mapa do gato: após 192 iterações a imagem correspondente à face de Poincaré é reobtida de forma aproximada

# Paradoxo de Zermelo

- ▶ Boltzmann definiu uma grandeza  $\mathcal{H}$  a partir da função de distribuição de velocidades de um gás de esferas rígidas
- ▶ teorema H: sob determinadas condições, o valor de  $\mathcal{H}$  é constante ou decrescerá com o tempo
- ▶ Zermelo argumentou que a grandeza  $\mathcal{H}(t)$  não poderia decrescer sempre pois, devido ao teorema de recorrência de Poincaré, seu valor deveria sempre aproximar-se do valor inicial  $\mathcal{H}(0)$  após um intervalo de tempo finito: crítica à Teoria Cinética dos Gases
- ▶ explicação: para um gás de  $N \sim 10^{23}$  esferas rígidas o tempo de recorrência é tão grande que é praticamente impossível a observação de intervalos de tempo onde a função  $\mathcal{H}(t)$  seja crescente.

# Ergodicidade

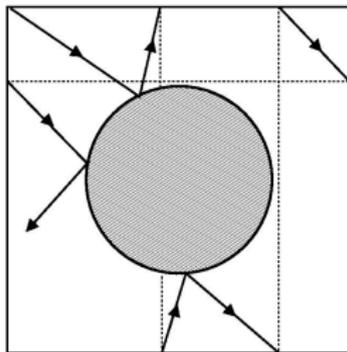
- ▶ sistema Hamiltoniano:  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E$
- ▶ se ele for ergódico então, dada uma condição inicial  $\mathbf{v}_0$  a órbita subsequente dada pelas iterações sucessivas do mapa  $\mathbf{F}$  irá visitar todas as regiões da superfície de energia de uma maneira aleatória e uniforme.
- ▶ propriedade ergódica: igualdade entre médias sobre condições iniciais no espaço de fase e médias temporais sobre uma trajetória produzida por uma única condição inicial

$$\overline{f(\theta)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^T f(\theta_n) = \langle f(\theta) \rangle$$

- ▶ onde a média sobre condições iniciais uniformemente distribuídas no intervalo  $0 \leq \theta < 2\pi$  é

$$\langle f(\theta) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta.$$

## Ergodicidade na física



- ▶ a hipótese ergódica é um dos fundamentos da Mecânica Estatística e, nos sistemas em que ela é usualmente aplicada (como gases, sólidos, cadeias de spins, etc.) presume-se que haja ergodicidade na região de interesse do espaço de fase
- ▶ porém, como exemplificado pelo mapa padrão, a ergodicidade só é válida em determinadas regiões do espaço de fase
- ▶ gás monatômico: sistema de esferas rígidas que interagem por colisões de curto alcance → é um dos poucos casos onde a ergodicidade foi estabelecida de maneira rigorosa (bilhar de Sinai)