

# Dinâmica Hamiltoniana Aplicada

## Capítulo 8

### O problema de três corpos

Prof. Ricardo Luiz Viana  
rlv640@gmail.com



# Conteúdo da aula

O problema de N corpos

O problema restrito de três corpos no plano

Hamiltoniana nos referenciais siderais e sinóticos

Integral de Jacobi

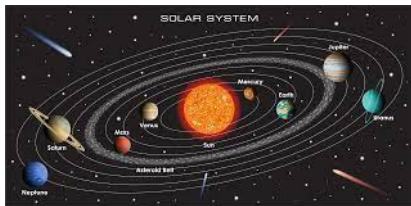
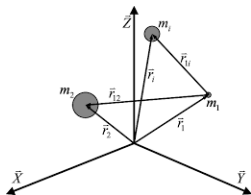
Pontos Lagrangianos

Equações de Hill

Estabilidade dos pontos Lagrangianos

Sistema quase-integrável

# O problema de $N$ corpos



- | sistema de  $N$  partículas interagindo por forças gravitacionais
- | equação Newtoniana do movimento da  $i$ -ésima partícula

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}; \quad (i = 1; 2; \dots; N):$$

- | componentes cartesianas

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_j (x_j - x_i)}{[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2]^{3/2}}$$

- | com expressões análogas para  $y_i$  e  $z_i$ : sistema de ordem  $6N$

## Integrais do movimento do problema de $N$ corpos

- | a cada integral de movimento, a ordem do sistema de equações diferenciais é reduzida de uma unidade
- | como as forças gravitacionais são internas (e obedecem à terceira lei de Newton) e não há forças externas, o momentum total do sistema de partículas é conservado:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = 0 \quad ) \quad \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{a};$$

- | as componentes cartesianas desta equação produzem três integrais do movimento.

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i = a_x; \quad \sum_{i=1}^N m_i \dot{y}_i = a_y; \quad \sum_{i=1}^N m_i \dot{z}_i = a_z;$$

- | como as massas das partículas são constantes

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{a} \quad ) \quad \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{a}t + \mathbf{b};$$

componentes cartesianas (mais três integrais do movimento)

$$\sum_{i=1}^N m_i x_i = a_x t + b_x \quad \sum_{i=1}^N m_i y_i = a_y t + b_y \quad \sum_{i=1}^N m_i z_i = a_z t + b_z;$$

fazendo  $t = 0$ , resulta que  $\mathbf{b}$  é o vetor de posição inicial do centro de massa do sistema de partículas.

não havendo torques externos sobre o sistema, seu momentum angular total também será conservado

$$\ell = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{c};$$

projetando o resultado sobre os eixos cartesianos, obtemos mais três integrais do movimento.

$$\sum_{i=1}^N m_i (y_i z_i - z_i y_i) = c_x \quad \sum_{i=1}^N m_i (z_i x_i - x_i z_i) = c_y$$

$$\sum_{i=1}^N m_i (x_i y_i - y_i x_i) = c_z;$$

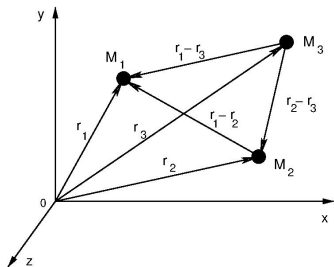
## Integrais do movimento do problema de $N$ corpos

- como a Hamiltoniana do sistema não depende explicitamente do tempo, ela é uma integral do movimento, numericamente igual à energia total do sistema:

$$T + U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = E;$$

- há  $3 + 3 + 3 + 1 = 10$  integrais clássicas do problema de  $N$ -corpos.
- Bruns (1887) e Poincaré (1890) demonstraram que não há outras integrais para o problema de  $N$  corpos
- a ordem do sistema de equações diminui de  $6N$  para  $6N - 10$
- problema de dois corpos ( $N = 2$ ): a ordem diminui de 12 para  $12 - 10 = 2$ . Um sistema de segunda ordem é integrável pois a solução do problema pode ser reduzida a quadraturas (problema de Kepler)
- problema de três corpos ( $N = 3$ ): o sistema será de oitava ordem ( $18 - 10 = 8$ ) e não-integrável, em geral.

## O problema geral de três corpos no espaço



| Hamiltoniana do sistema é

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2M_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2M_2} + \frac{\mathbf{p}_3^2}{2M_3} + U(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3)$$

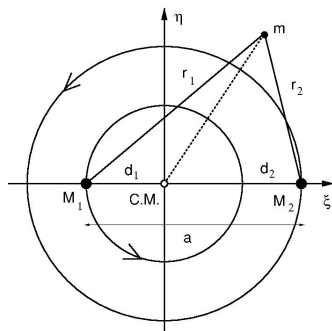
| energia potencial gravitacional

$$U = -\frac{GM_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{GM_2 M_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} - \frac{GM_1 M_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|}$$

| equações canônicas

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}; \quad (i = 1; 2; 3) \quad \dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i}$$

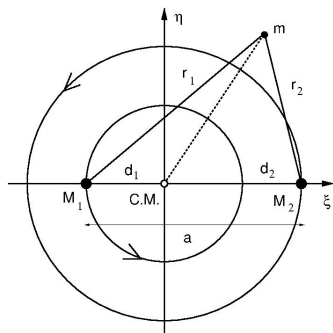
## O problema restrito de três corpos no plano



- | duas partículas de massas  $M_1$  (primária) e  $M_2$  (secundária), que giram em torno do seu centro de massa com velocidade angular constante num plano
- | uma partícula (teste) de massa  $M_3 = m$ , com  $m \ll M_{1,2}$ : a partícula-teste não altera significativamente o movimento das duas partículas em movimento circular uniforme
- | o movimento da partícula-teste é determinado pelo campo gravitacional produzido por  $M_1$  e  $M_2$



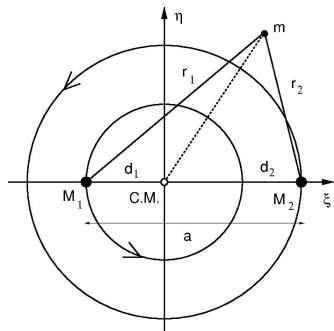
## O problema restrito de três corpos no plano



- |  $a$ : distância entre a massa primária e a secundária, que orbitam em torno do centro de massa comum
- | a força centrípeta sobre a massa reduzida  $M_1 M_2 = (M_1 + M_2)$  é igual à força gravitacional entre  $M_1$  e  $M_2$ ,

$$\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \omega^2 a = G \frac{M_1 M_2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}$$

## O problema restrito de três corpos no plano



- colocando a origem no centro de massa do sistema, as posições das partículas  $M_1$  e  $M_2$  em relação à origem são

$$d_1 = \frac{M_2 a}{M_1 + M_2}; \quad d_2 = \frac{M_1 a}{M_1 + M_2};$$

- variáveis adimensionais  $d_1 = r_1/a = \dots$ ,  $d_2 = r_2/a = 1$

$$= \frac{M_2}{M_1 + M_2}; \quad 1 \quad = \frac{M_1}{M_1 + M_2};$$

## Hamiltoniana no referencial sideral

| referencial inercial: sistema de coordenadas siderais no plano  
( ; ; = 0).

| coordenadas das massas primária e secundária

$$x_1 = d_1 \cos t = \cos t; \quad y_1 = d_1 \sin t = \sin t$$

$$x_2 = d_2 \cos t = (1 - \mu) \cos t; \quad y_2 = d_2 \sin t = (1 - \mu) \sin t$$

| Hamiltoniana da partícula-teste no referencial inercial

$$H(p_x; p_y; p_z; x; y; z; t) = \frac{1}{2m} p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{(1 - \mu)m}{r_1} - \frac{\mu m}{r_2};$$

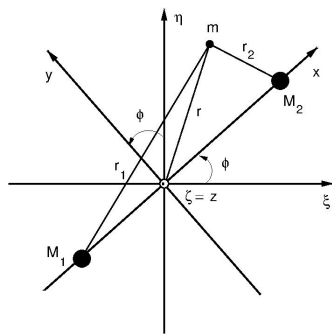
| distâncias da partícula-teste às massas primária e secundária

$$r_1(t) = \sqrt{(x + \cos t)^2 + (y + \sin t)^2 + z^2};$$

$$r_2(t) = \sqrt{[(1 - \mu) \cos t]^2 + [(1 - \mu) \sin t]^2 + z^2};$$

| a Hamiltoniana depende explicitamente de  $t$ , logo não é uma constante do movimento

## Hamiltoniana no referencial sinótico



- | referencial (não-inercial) que gira com velocidade angular em torno do eixo
- | sistema de coordenadas sinóticas ( $x; y; z = \zeta$ ): as massas primária e secundária estão fixas nas posições

$$x_1 = a_1 = \zeta_1; \quad y_1 = 0; \quad z_1 = 0;$$

$$x_2 = a_2 = 1 - \zeta_2; \quad y_2 = 0; \quad z_2 = 0;$$

## Hamiltoniana no referencial sinótico

- a mudança de coordenadas é uma transformação canônica de segunda espécie, implementada pela função geratriz

$$F_2 = (\cos t + \sin t)p_x + (\sin t + \cos t)p_y + p_z;$$

- equações da transformação canônica

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial t} = p_x \cos t - p_y \sin t;$$

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial x} = p_x \cos t - p_y \sin t; \quad p = \frac{\partial F_2}{\partial y} = p_x \sin t + p_y \cos t;$$

$$x = \frac{\partial F_2}{\partial p_x} = \cos t + \sin t;$$

$$y = \frac{\partial F_2}{\partial p_y} = \sin t + \cos t; \quad z = \frac{\partial F_2}{\partial p_z} = z;$$

- correspondem a uma rotação dos eixos  $(x; y)$  de um ângulo  $t$  em torno do eixo  $Z$

## Hamiltoniana no referencial sinótico

- das equações que descrevem a rotação dos eixos

$$p^2 + p^2 + p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2:$$

- transformações inversas:

$$x = x' \cos t - y' \sin t; \quad y = x' \sin t + y' \cos t; \quad z = z'$$

- Hamiltoniana no referencial girante

$$K(p_x; p_y; x; y) = H(p_x; p_y; x; y; t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H + (y p_x - x p_y)$$

$$K = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + (y p_x - x p_y) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{m}{r_2} \right);$$

- distâncias da partícula teste às massas primária e secundária

$$r_1 = \sqrt{(x + a)^2 + y^2 + z^2}; \quad r_2 = \sqrt{[x - (1 - \mu)a]^2 + y^2 + z^2};$$

- energia potencial gravitacional no referencial girante

$$V(r_1; r_2) = - \frac{(1 - \mu)m}{r_1} - \frac{m}{r_2};$$

## Hamiltoniana no referencial sinótico

- como  $Z$  é o eixo de rotação,  $\hat{z} = \hat{Z}$ , donde

$$(y p_x - x p_y) = \mathbf{p} \cdot (\hat{z} \times \mathbf{r});$$

- forma alternativa da Hamiltoniana no referencial girante

$$K = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + \mathbf{p} \cdot (\hat{z} \times \mathbf{r}) + m \phi(\mathbf{r});$$

- transformação não-canônica

$$p_x = \frac{p_x'}{m}; \quad p_y = \frac{p_y'}{m}; \quad p_z = \frac{p_z'}{m}; \quad K = \frac{K'}{m};$$

- equações de Hamilton no referencial girante

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}; \quad \frac{dp_y}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}; \quad \frac{dp_z}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_z};$$

| Hamiltoniana rescalonada

$$H = \frac{1}{2} p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + (y p_x - x p_y) + (r_1; r_2):$$

| equações de Hamilton

$$p_x = \dot{x} - y; \quad p_y = \dot{y} + x; \quad p_z = \dot{z}$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -p_y \frac{\partial}{\partial x}; \quad \frac{dp_y}{dt} = p_x \frac{\partial}{\partial y}; \quad \frac{dp_z}{dt} = \dot{z}$$

| derivando em relação ao tempo

$$\dot{x} = 2 \dot{y} + 2x \frac{\partial U}{\partial x} = 2 \dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\dot{y} = 2 \dot{x} + 2y \frac{\partial U}{\partial y} = 2 \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

| energia potencial efetiva,

$$U = \frac{1}{2} x^2 + y^2 \quad ;$$

|  $2(x^2 + y^2)$  termo associado à força centrífuga 



# Integral de Jacobi

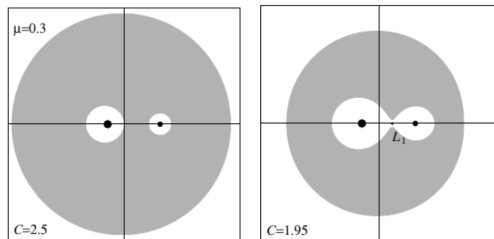
- | no referencial girante a Hamiltoniana  $H$  não depende do tempo, portanto é uma constante do movimento
- | integral de Jacobi:  $C = 2H$

$$C = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2(x^2 + y^2) - 2$$

$$C = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2U:$$

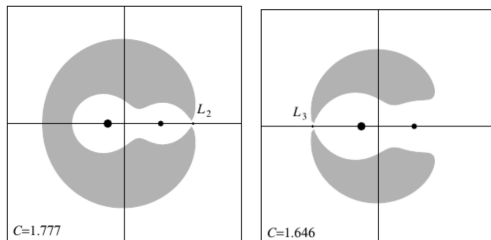
- | como  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \geq 0$  então  $U \geq C=2$ , logo  $U \geq 0$
- | curvas de velocidade zero no plano  $xy$ : se  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  então  $C = 2U$
- | regiões permitidas para o movimento da partícula-teste:  $U > C=2$ ; regiões proibidas:  $U < C=2$ .
- | estabilidade no sentido de Hill: se as regiões permitidas envolvem as massas primária e secundária

## Curvas de velocidade zero



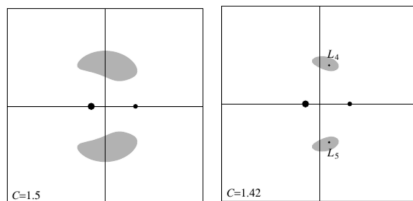
- |  $C = 0; 3$ : as curvas de velocidade zero são as fronteiras entre as regiões proibidas (hachureadas) e permitidas (em branco), para diferentes valores da integral de Jacobi
- |  $C = 2; 5$ : regiões permitidas concentradas na vizinhança das massas primária e secundária, e no exterior do círculo hachureado (sistema é estável no sentido de Hill)
- |  $C = 1; 95$ : regiões internas se tocam num ponto Lagrangiano  $L_1$ , formando uma curva em formato de número oito (lóbulo de Hill)

## Curvas de velocidade zero



- |  $C = 1;777$ : tanto a região permitida interior quanto a exterior aumentam de tamanho: as duas regiões permitidas se tocam no ponto Lagrangiano  $L_2$
- |  $C = 1;646$ : há um outro contato destas regiões no ponto Lagrangiano  $L_3$ . Além disso, aumenta o tamanho da abertura próxima à massa secundária permitindo uma excursão maior das trajetórias da partícula-teste que, em tese, pode “escapar” da proximidade das outras partículas

## Curvas de velocidade zero



- |  $C = 1;5$ : aumento da abertura próxima à massa primária
- |  $C = 1;42$  praticamente toda a região é permitida, com exceção das vizinhanças dos pontos Lagrangianos  $L_4$  e  $L_5$ .
- | aplicações: Sol (massa primária), Júpiter (massa secundária), asteróide (partícula-teste)
- | se  $C$  tem um valor alto, o asteróide pode orbitar tanto o Sol como Júpiter, nunca saindo destas vizinhanças
- | se  $C$  diminui, um asteróide que inicialmente esteja orbitando em torno do Sol poder ser capturado para uma órbita em torno de Júpiter. O contrário também pode ocorrer: um planeta pode perder um satélite para uma órbita Solar

## Pontos Lagrangianos

- são pontos de equilíbrio de uma partícula-teste movendo-se no potencial efetivo  $U(x; y)$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x; y) = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x; y) = 0:$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x \frac{\partial}{\partial x}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = y \frac{\partial}{\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y};$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{x}{r_1}; \quad \frac{\partial r_1}{\partial y} = \frac{y}{r_1}; \quad \frac{\partial r_2}{\partial x} = \frac{x}{r_2} \left(1 - \frac{y^2}{r_2^2}\right); \quad \frac{\partial r_2}{\partial y} = \frac{y}{r_2} \left(1 - \frac{x^2}{r_2^2}\right);$$

$$x \frac{(1 - \frac{y^2}{r_2^2})(x + \frac{y^2}{r_2^2})}{r_1^3} - \frac{(x - \frac{1}{r_2^2})}{r_2^3} = 0;$$

$$y \frac{(1 - \frac{x^2}{r_2^2})}{r_1^3} - \frac{y}{r_2^3} = 0;$$

- duas famílias de soluções:  $y = 0$  (pontos colineares) e  $y \neq 0$  (pontos triangulares).

## Pontos colineares

- |  $y = 0$ : encontram-se sobre a reta que contém as massas primária e secundária.

$$x \frac{1}{(x + )^2} + \frac{x}{jx + j} - \frac{x}{(x - 1 + )^2} - \frac{1}{jx - 1 + j} = 0:$$

- | há três casos possíveis onde esta expressão se aplica:

1.  $x < 0$  :  $x$  está à esquerda de ambas as massas, com

$$x + \frac{1}{(x + )^2} + \frac{x}{(x - 1 + )^2} + \frac{1}{jx - 1 + j} = 0;$$

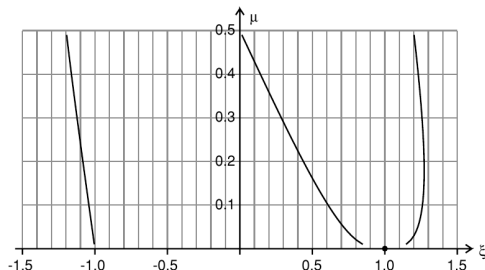
2.  $0 < x < 1$  :  $x$  está entre a massa primária e a secundária, tal que

$$x \frac{1}{(x + )^2} + \frac{x}{(x - 1 + )^2} = 0:$$

3.  $x > 1$  :  $x$  está à direita de ambas as massas, de modo que

$$x \frac{1}{(x + )^2} - \frac{x}{(x - 1 + )^2} = 0:$$

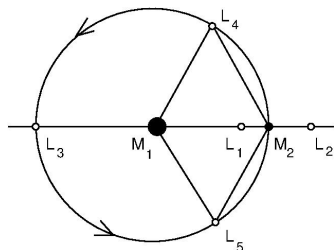
## Pontos colineares



- | todas estas são equações algébricas de quinto grau, e devem ser resolvidas numericamente para um dado valor de
- | cada uma delas só possui uma raiz real no intervalo para o qual ela é válida. Estas soluções reais identificam os pontos Lagrangianos colineares denotados por  $L_1$  (entre as massas),  $L_2$  (à direita) e  $L_3$  (à esquerda)
- | por exemplo, para  $\mu = 0;3$

$$x_{L_1} = 0;3; \quad x_{L_2} = 1;25; \quad x_{L_3} = 1;12$$

# Pontos triangulares



- | pontos Lagrangianos para os quais  $y \neq 0$ .

$$1 - \frac{(1 - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0 \quad ; \quad r_1 = r_2 = 1$$

- | como a distância entre as massas primária e secundária também é igual a 1, o ponto Lagrangiano não-colinear é o terceiro vértice de um triângulo equilátero cujos demais vértices são as outras massas
- | há dois pontos Lagrangianos triangulares, denotados por  $L_4$  e  $L_5$ , com  $y = \pm \sqrt{3}/2$ .



## Equações de Hill

- se a órbita da partícula-teste é essencialmente Kepleriana em relação à massa primária  $M_1$ , desde que a partícula-teste esteja longe da massa secundária  $M_2$
- equações de movimento da partícula-teste

$$x + 2y \quad x = \frac{(1 - \mu)(x + \frac{a_2}{a_1})}{r_1^3} - \frac{[x - (1 - \mu)]}{r_2^3}$$

$$y + 2x \quad y = \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{y}{r_2^3};$$

$$r_1^2 = (x + \frac{a_2}{a_1})^2 + y^2; \quad r_2^2 = [x - (1 - \mu)]^2 + y^2;$$

- transformação de variáveis:  $x^0 = x - \frac{a_2}{a_1}$  e  $y^0 = y$

$$x^0 + 2y^0 \quad x^0 = \frac{(1 - \mu)(x^0 + 1)}{r_1^0{}^3} - \frac{x^0}{r_2^0{}^3}$$

$$y^0 + 2x^0 = y^0 \quad \frac{(1 - \mu)y^0}{r_1^0{}^3} - \frac{y^0}{r_2^0{}^3};$$

$$r_1^0{}^2 = (x^0 + 1)^2 + y^0{}^2; \quad r_2^0{}^2 = x^0{}^2 + y^0{}^2 + 2x^0 + 1;$$

# Equações de Hill

| se temos que  $1 + 1 = 1$

$$x'' - 2y'' = x'' + 1 = \frac{x'' + 1}{r_1^3} = \frac{x''}{r_2^3}$$

$$y'' + 2x'' = y'' = \frac{y''}{r_1^3} = \frac{y''}{r_2^3};$$

| expandindo em série em torno do ponto  $(x'' = 0; y'' = 0)$

$$\frac{x'' + 1}{r_1^3} = 1 + 2x''; \quad \frac{y''}{r_1^3} = y'';$$

| equações de Hill

$$x'' - 2y'' = 3 - \frac{3}{3} x'' = \frac{\partial U_H}{\partial x''}$$

$$y'' + 2x'' = \frac{y''}{3} = \frac{\partial U_H}{\partial y''};$$

| onde definimos o potencial de Hill

$$U_H = \frac{3}{2} x''^2 + \frac{1}{3};$$

# Determinação aproximada dos pontos Lagrangianos

- | posição dos pontos  $L_1$  e  $L_2$  quando  $\mu = 1$
- | condições de equilíbrio:  $\dot{x}^0 = \dot{y}^0 = 0$ ;  $\ddot{x}^0 = \ddot{y}^0 = 0$
- | substituindo nas equações de Hill

$$\dot{x}^0 = 0; \quad \dot{y}^0 = 0; \quad H = \frac{1}{3};$$

- | estão simetricamente posicionados em relação à massa secundária, que é o centro de uma esfera de raio  $H$  (esfera de Hill).

## Estabilidade dos pontos Lagrangianos

- perturbações das posições  $(x, y)$  dos pontos Lagrangianos:  
 $x = x_0 + \delta x, y = y_0 + \delta y$ , com  $|\delta x|, |\delta y| \ll 1$
- equações de movimento da partícula-teste

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$U(x; y) = \frac{1}{2} x^2 + y^2 + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} + \frac{1}{(x-1)^2 + y^2};$$

- expansão em série dos segundos membros das equações

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}(x_0; y_0) + x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_0; y_0) + y \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x_0; y_0);$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}(x_0; y_0) + x \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x_0; y_0) + y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x_0; y_0);$$

- equações linearizadas de primeira ordem

$$\dot{x} = v_x; \quad \dot{v}_x = a x + b y + 2 \dot{y}$$

$$\dot{y} = v_y; \quad \dot{v}_y = b x + d y + 2 \dot{x}$$

## Coefficientes das equações linearizadas

$$a = \frac{\partial U}{\partial x}(x; y) = 1 + a; \quad d = \frac{\partial U}{\partial y}(x; y) = \epsilon y$$

$$b = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x; y) = 1 + by^2;$$

$$a = \frac{1}{(r_1^3)_0} + \frac{1}{(r_2^3)_0}; \quad b = 3 \frac{1}{(r_1^5)_0} + \frac{1}{(r_2^5)_0}$$

$$\epsilon = 3 \frac{(1)(x + )}{(r_1^5)_0} + \frac{(x + 1)}{(r_2^5)_0}$$

$$d = 3 \frac{(1)(x + )^2}{(r_1^5)_0} + \frac{(x + 1)^2}{(r_2^5)_0} \#$$

$$(r_1^3)_0 = \frac{h}{(x + )^2 + y^2} \Big|_{3=2}; \quad (r_2^3)_0 = \frac{h}{(x + 1)^2 + y^2} \Big|_{3=2};$$

## Forma matricial das equações linearizadas

- o sistema de equações linearizadas  $\dot{v} = J v$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- o estabilidade linear dos pontos de equilíbrio determinada pelos autovalores da matriz Jacobiana: raízes da equação secular

$$\det(J - \lambda I) = \lambda^4 + (4 - a - d)\lambda^2 + (ad - b^2) = 0;$$

- o raízes da equação biquadrática ( $\lambda = 1; 2; 3; 4$ )

$$\lambda_i = \pm \frac{1}{2}(4 - a - d) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4 - a - d)^2 - 4(ad - b^2)}$$

1. autovalores imaginários puros: centro (estável) trajetórias próximas executam pequenas oscilações em torno do ponto
2. autovalores reais: ponto de sela (instável) as trajetórias afastam-se do ponto Lagrangiano a uma taxa exponencial igual ao autovalor correspondente

## Estabilidade dos pontos colineares

| fazendo  $y = 0$ , como  $(r_1)_0 = x + 1$  e  $(r_2)_0 = x + 1$

$$a = \frac{1}{(x + 1)^3} + \frac{1}{(x + 1)^3}; \quad d = 3a$$

$$a = 1 + 2a; \quad b = 0; \quad d = 1 - a$$

| equação secular  $(s^2 + 2as + (1 + 2a)(1 - a) = 0)$

$$s^2 + (2 - a)s + (1 + 2a)(1 - a) = 0;$$

| os pontos de equilíbrio serão estáveis (centros) se forem imaginários puros. Pelas relações de Girard

$$\frac{2}{1} \frac{2}{3} = (1 + 2a)(1 - a) > 0:$$

| como  $a > 0$ , então  $a < 1$  para estabilidade

$$\frac{(x + 1)^2}{x} - \frac{(x + 1)^2}{x} = \frac{2(x + 1) + 1}{x} > 0;$$

| os três pontos colineares nunca poderão satisfazer simultaneamente a condição de estabilidade  $a < 1$ , portanto todos serão instáveis, com tempo característico  $\frac{1}{\max}$

## Estabilidade dos pontos triangulares

- os pontos triangulares  $L_4$  e  $L_5$  estão localizados em  $x = 1/2$  e  $y = \sqrt{3}/2$ , e formam os vértices de triângulos equiláteros de lado unitário com as massas primária e secundária. Logo  $(r_1)_0 = (r_2)_0 = 1$

$$a = 1; \quad b = 3; \quad \epsilon = \frac{3}{2}(1 - 2); \quad d = \frac{3}{4};$$

$$a = 3/4; \quad b = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2); \quad d = \frac{9}{4};$$

- equação secular

$$s^4 + s^2 + \frac{27}{4}(1 - 2) = s^2 + s + \frac{27}{4}(1 - 2) = 0;$$

- razes:  $s_{1;2} = \left( \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{27}{4}(1 - 2)} \right)^{1/2}$ , onde  $\frac{1}{4} - \frac{27}{4}(1 - 2)$

- para que os pontos triangulares  $L_4$  e  $L_5$  sejam estáveis devemos ter  $\text{Re}(s) < 0$  ou  $\frac{1}{2} + \frac{1}{27} > 0$ , donde temos que

$$0 = \frac{1}{2} - 1 + \frac{23}{27} = 0; \quad 03852$$



# Estabilidade dos pontos triangulares

- no intervalo de estabilidade  $\theta < \theta_0$  os autovalores são

$$\lambda_{1;2;3;4} = \rho \frac{h}{s_1} = \left( 1 - \rho \frac{1}{1 + 27(1 - \rho)} \right)^{i_{1=2}}$$

- se  $\rho$  é pequeno  $\rho \frac{1}{1 + 27(1 - \rho)} \approx \rho$  ( $27=2$ )

$$\lambda_{1;2} \approx \rho \frac{1}{1 + (27=4)} ; \quad \lambda_{3;4} \approx \rho \frac{1}{(27=4)} :$$

- as trajetórias nas vizinhanças dos pontos estáveis são curvas fechadas em torno deles, com períodos característicos

$$T_{1;2} = 2\pi / \omega_{1;2}; \quad T_{3;4} = 2\pi / \omega_{3;4}$$

# Estabilidade dos pontos triangulares

- |  $j = 1, 2$  tal que as oscilações têm período curto  $T_{1,2} \ll 2\pi$ , correspondente a um movimento epicíclico
- |  $j = 3, 4$  implica em oscilações de longo período  $T_{3,4} \gg 2\pi$ , que correspondem a órbitas fechadas (librações) em torno do ponto triangular
- | no referencial girante, as trajetórias da partícula-teste nas vizinhanças dos pontos triangulares são combinações destes dois movimentos, ou seja, são epiciclos cujos centros executam órbitas do tipo libração

# Orbitas do tipo girino

- | ponto Lagrangiano  $L_4$ , situado em  $x = 0;5$  e  $y = \sqrt{3}/2$ , com  $z = 0;001$
- | trajetórias obtidas numericamente em torno de  $L_4$ , para condições iniciais diferentes
  1. (a)  $x_0 = x + 0;0065$ ,  $y_0 = y + 0;0065$ ,  $x_0 = y_0 = 0$ ;
  2. (b)  $x_0 = x + 0;008$ ,  $y_0 = y + 0;008$ ,  $x_0 = y_0 = 0$ .
- | orbitas do tipo girino: epíclis superpostos a uma órbita fechada
- | podem envolver tanto  $L_4$  como  $L_5$

# Orbitas do tipo ferradura

- | a orbita envolve ambos os pontos triangulares
- | e conhecida como orbita ferradura, com  $\mu_2 = 0;000953875e$   
condições iniciais diferentes
  1. (a)  $x_0 = 0;97668$   $y_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0, \dot{y}_0 = 0;06118$
  2. (b)  $x_0 = 1;02745$   $y_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $\dot{y}_0 = 0;04032$
- | aumentando o valor de  $\mu$ , podemos passar de uma orbita do tipo girino para outra do tipo ferradura vice-versa

# Asteroides Troianos

- | sistema Sol-Jupiter-asteroide

$$M_1 = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}; \quad M_2 = 2,0 \cdot 10^{27} \text{ kg}; \quad m = 3,0 \cdot 10^{21} \text{ kg};$$

- | a orbita elptica Sol-Jupiter tem semi-eixo maior  $a = 778,34 \cdot 10^9 \text{ m}$  e excentricidade  $e = 0,0487$ , com periodo orbital de 11,862 anos.

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2} = 0,001 \quad 1; \quad m = \frac{M_2}{M_1 + M_2} = 10^{-6} \quad 1;$$

- | os pontos  $L_4$  e  $L_5$  são populados por asteroides chamados Troianos todos movem-se em orbitas do tipo girino.

# Sistema Sol-Terra-asteroide

| a orbita da Terra tem raio  $a = 1$  U:A:

$$M_1 = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}; \quad M_2 = 6 \cdot 10^{25} \text{ kg} \quad 10^6$$

| posicao dos pontos colineares se  $\mu = 1$

$$d_1 = d_2 = r_H = \left( \frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^{1/3} a = 1,49 \cdot 10^9 \text{ km}$$

|  $L_1$  é instável, com tempo característico da ordem de 23 dias: correções de orbita são necessárias

| como  $L_1$  está entre o Sol e a Terra, permite uma observação aprimorada do Sol (sonda espacial não-tripulada SOHO)

# Sistema Sol-Terra-asteroide

- | o ponto  $L_2$  tem o mesmo tempo caracterstico de 23 dias, e e considerado ideal para a observacao astronômica
- | esta su cientemente proximo a Terra para permitir uma comunicacao rapida, e porque deixa para tras o Sol, a Terra e a Lua, permitindo uma visao mais ntida do espaco.
- | sonda WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) cuja missao foi estudar aspectos da radiao cosmica de fundo.
- | Telescópio Espacial James Webb, lancado pela NASA no Natal de 2021.

# Sistema quase-integrável

- | consideramos o movimento da partícula-teste em torno da massa primária  $M_1$  como uma órbita Kepleriana (sistema integrável)
- | desde que a partícula-teste esteja suficientemente longe da massa secundária  $M_2$  podemos considerar a influência gravitacional entre elas como uma perturbação de fraca intensidade
- |  $r_1^0$  e  $r_2^0$ : posições das massas primária e secundária em relação ao centro de massa

$$r = r_1^0 + r_1 = r_2^0 + r_2;$$



## Sistema quase-integrável

- Hamiltoniana da partícula-teste no referencial girante

$$H = \frac{1}{2m} p^2 - \mu \left( \frac{1}{r} - \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} \right);$$

- como  $\frac{m_1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{m_1}{r_1} - \frac{1}{r}$ , se  $\frac{m_1}{r_1} = \frac{1}{r}$ , de modo que a Hamiltoniana correspondente ao movimento integrável em torno da massa primária seja

$$H_0(p; r) = \frac{1}{2m} p^2 - \mu \left( \frac{1}{r} \right);$$

- problema de Kepler mais um termo de força centrífuga: força resultante central, para o qual a órbita é limitada a um plano
- usamos coordenadas polares  $(r, \theta)$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre o vetor posição da partícula-teste e a reta que liga as massas primária e secundária
- perturbação da massa secundária

$$H_1 = \frac{m_2}{r_2};$$

## Hamiltoniana do problema de Kepler

- problema de Kepler: momenta canonicamente conjugados

$$p_r = m\dot{r}; \quad p_\phi = m r^2 \dot{\phi} = j \quad p_\theta = x p_y - y p_x = \frac{1}{r} p_\phi$$

- Hamiltoniana não-perturbada no referencial girante

$$H_0(p_r; p_\phi; r) = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{2r^2} - \frac{m}{r} = E;$$

- e cíclica em  $\phi$ , donde  $j$  é uma constante do movimento
- como  $H_0$  não depende explicitamente do tempo, ela é igual a energia  $E$ , a qual também é uma constante de movimento
- variáveis de ação do problema de Kepler

$$J_\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\phi d\phi = j; \quad J_r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_r dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dr \frac{\partial W}{\partial r};$$

- isolando o momentum radial

$$p_r = \sqrt{2m \left( E + \frac{m}{r} \right) - \frac{j^2}{r^2}};$$

## Hamiltoniana não-perturbada

- de modo as quantidades

$$A = 2m(E + \dots); \quad B = m^2(1 \dots); \quad C = \dots^2;$$

- variável de ação radial

$$J_r = \frac{1}{2} \int dr \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}} = \dots + p \frac{m^2(1 \dots)}{2m(E + \dots)};$$

- Hamiltoniana não-perturbada expressa em variáveis de ação

$$H_0(J_r; J) = \frac{m^3(1 \dots)^2}{2(J_r + J)^2} J;$$

- frequências do problema não-perturbado

$$\dot{r} = \frac{\partial H_0}{\partial J} = \frac{m^3(1 \dots)^2}{(J_r + J)^3} \dot{T}$$

$$\dot{J} = \frac{\partial H_0}{\partial J} = \dots + \frac{m^3(1 \dots)^2}{(J_r + J)^3} = \dots + \dot{T};$$

## Toros do sistema integrável

- cada toro do sistema integrável  $\mathbb{T}^n$  é identificado pelo seu número de rotação, que é a razão entre as frequências das variáveis angulares:

$$(J_r) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

- se o número de rotação for igual a razão entre dois inteiros, primos entre si,  $\frac{m_1}{m_2}$ , então o toro correspondente é racional, e as trajetórias fecham-se sobre si mesmas após um certo número de voltas nas duas direções do toro
- caso contrário, teremos um toro irracional, e as trajetórias nunca fecham-se sobre si próprias, preenchendo densamente o toro.
- sob uma perturbação não-integrável suavemente fraca
  - toros racionais desaparecem, deixando um número par de pontos fixos (metade elípticos, metade hiperbólicos): Teorema de Poincaré-Birkhoff
  - a maioria dos toros irracionais são mantidos, ainda que com alterações de forma (teorema KAM)

## Toros racionais

- os toros racionais correspondem a ressonâncias entre as frequências da massa primaria e da partcula-teste

$$(J_r) = 1 \quad \neq \tau = m_1 = m_2$$

- não haverá movimento da partcula-teste nas vizinhanças dos toros para os quais  $\neq \tau = m = n$ , onde  $m = m_2$  e  $n = m_1$  são inteiros positivos.
- cinturão de asteroides entre as orbitas de Marte e Jupiter a uma distância da ordem de 8 UA do Sol
- milhões de objetos, desde asteroides com centenas de quilômetros de diâmetro até partículas de poeira. Os asteroides giram em torno do Sol e suas trajetórias são perturbadas pela orbita de Jupiter
- a influência da orbita de Marte é desprezível, visto que Jupiter tem massa 2960 vezes maior que a de Marte.

# Hiatos de Kirkwood

- | frequências das orbitas dos asteroides: diferem entre si devido as suas massas e semi-eixos maiores diferentes, o que altera os valores das energias e momenta angulares e, por conseguinte, os valores das variáveis de ação  $J$
- | ha muito poucos asteroides com semi-eixos maiores proximos a 2; 50 unidades astronômicas e periodos orbitais de 5 anos
- | tais asteroides executam três orbitas para cada orbita completa de Jupiter. Assim a razão entre suas frequências e

$$\omega = 3 \nu = 3 \omega_J = 3 \nu_J;$$

- | o que configura uma ressonância orbital: 1:3

# Hiatos de Kirkwood

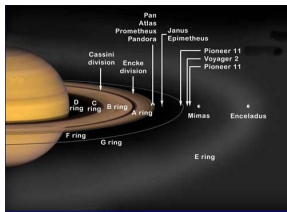
- | histograma mostrando o número de asteroides em função do semi-eixo maior de suas orbitas
- | há um hiato para o valor do semi-eixo maior de 50 UA que corresponde a uma ressonância 1
- | outros hiatos correspondem a ressonâncias 2 (em 2; 82 UA), 7 : 3 (em 2; 95 UA) e 2 : 1 (em 3; 27 UA).
- | exceção: ressonância orbital 1, situada a uma distância de 3; 4 UA: asteroides troianos
- | como esta frequência é aproximadamente igual a frequência orbital de Júpiter, então !  $\tau$  e forma-se um pequeno pico

# Anéis de Saturno

- | podemos tratar o sistema formado pelo planeta Saturno e um dos seus satélites interiores, como Mimas e Encelado, como um problema restrito de três corpos, onde a partícula-teste seria um grão pertencente ao anel de Saturno
- | haverá toros racionais nas posições correspondentes a ressonâncias entre as frequências orbitais de Saturno e seu satélite (Mimas ou Encelado), com número de rotação  $\neq T$  igual a um número racional.
- | os anéis de Saturno exibem hiatos: o anel de Crepe e os anéis A e B, separados pela divisão de Cassini.



# Anéis de Saturno e ressonâncias



- | o anel de Crepe inicia a  $74;6$  unidades e termina a  $88;9$  unidades. O anel B, que o sucede, começa a  $90;5$  unidades, e termina a  $117;1$  unidades. Existe, assim, um hiato entre o anel de Crepe e o anel B.
- | no interior deste primeiro hiato, a  $89;2$  unidades do centro, existe um toro racional devido a uma ressonância entre a frequência de Saturno e  $1/T$  de Mimas:  $\omega = 1/T = 3=1$
- | nas proximidades da divisão de Cassini encontramos um toro racional, correspondentes a uma ressonância entre Júpiter e Encelado, com  $\omega = 1/T = 2=1$ ; e outra entre Júpiter e Mimas, com  $\omega = 1/T = 2=1$ .