

# Dinâmica Hamiltoniana Aplicada

## Capítulo 8

### O problema de três corpos

Prof. Ricardo Luiz Viana  
rlv640@gmail.com



# Conteúdo da aula

O problema de  $N$  corpos

O problema restrito de três corpos no plano

Hamiltoniana nos referenciais siderais e sinóticos

Integral de Jacobi

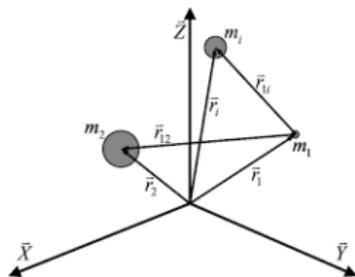
Pontos Lagrangianos

Equações de Hill

Estabilidade dos pontos Lagrangianos

Sistema quase-integrável

# O problema de $N$ corpos



- ▶ sistema de  $N$  partículas interagindo por forças gravitacionais
- ▶ equação Newtoniana do movimento da  $i$ -ésima partícula

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

- ▶ componentes cartesianas

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_j (x_j - x_i)}{[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2]^{3/2}}$$

- ▶ com expressões análogas para  $y_i$  e  $z_i$ : sistema de ordem  $6N$

## Integrais do movimento do problema de $N$ corpos

- ▶ a cada integral de movimento, a ordem do sistema de equações diferenciais é reduzida de uma unidade
- ▶ como as forças gravitacionais são internas (e obedecem à terceira lei de Newton) e não há forças externas, o momentum total do sistema de partículas é conservado:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{a},$$

- ▶ as componentes cartesianas desta equação produzem três integrais do movimento.

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i = a_x, \quad \sum_{i=1}^N m_i \dot{y}_i = a_y, \quad \sum_{i=1}^N m_i \dot{z}_i = a_z,$$

- ▶ como as massas das partículas são constantes

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right) = \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{a}t + \mathbf{b},$$

- ▶ componentes cartesianas (mais três integrais do movimento)

$$\sum_{i=1}^N m_i x_i = a_x t + b_x \quad \sum_{i=1}^N m_i y_i = a_y t + b_y \quad \sum_{i=1}^N m_i z_i = a_z t + b_z,$$

- ▶ fazendo  $t = 0$ , resulta que  $\mathbf{b}$  é o vetor de posição inicial do centro de massa do sistema de partículas.
- ▶ não havendo torques externos sobre o sistema, seu momentum angular total também será conservado

$$\ell = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{c},$$

- ▶ projetando o resultado sobre os eixos cartesianos, obtemos mais três integrais do movimento.

$$\sum_{i=1}^N m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = c_x \quad \sum_{i=1}^N m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = c_y$$

$$\sum_{i=1}^N m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = c_z,$$

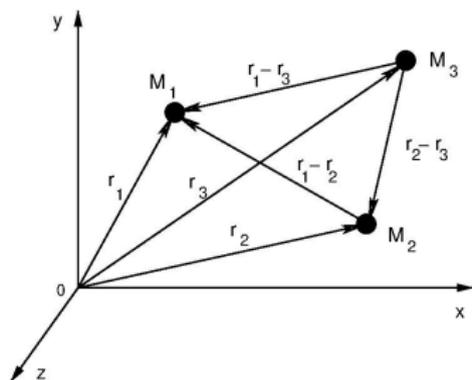
## Integrais do movimento do problema de $N$ corpos

- ▶ como a Hamiltoniana do sistema não depende explicitamente do tempo, ela é uma integral do movimento, numericamente igual à energia total do sistema:

$$T + U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = E,$$

- ▶ há  $3 + 3 + 3 + 1 = 10$  integrais clássicas do problema de  $N$ -corpos.
- ▶ Bruns (1887) e Poincaré (1890) demonstraram que não há outras integrais para o problema de  $N$  corpos
- ▶ a ordem do sistema de equações diminui de  $6N$  para  $6N - 10$
- ▶ problema de dois corpos ( $N = 2$ ): a ordem diminui de 12 para  $12 - 10 = 2$ . Um sistema de segunda ordem é integrável pois a solução do problema pode ser reduzida a quadraturas (problema de Kepler)
- ▶ problema de três corpos ( $N = 3$ ): o sistema será de oitava ordem ( $18 - 10 = 8$ ) e não-integrável, em geral.

## O problema geral de três corpos no espaço



- ▶ Hamiltoniana do sistema é

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2M_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2M_2} + \frac{\mathbf{p}_3^2}{2M_3} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$$

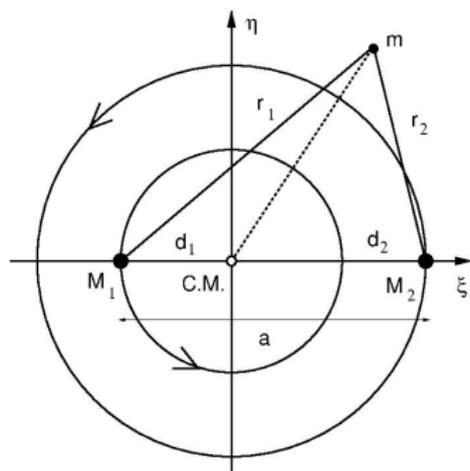
- ▶ energia potencial gravitacional

$$U = -\frac{G M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{G M_2 M_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} - \frac{G M_1 M_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|},$$

- ▶ equações canônicas

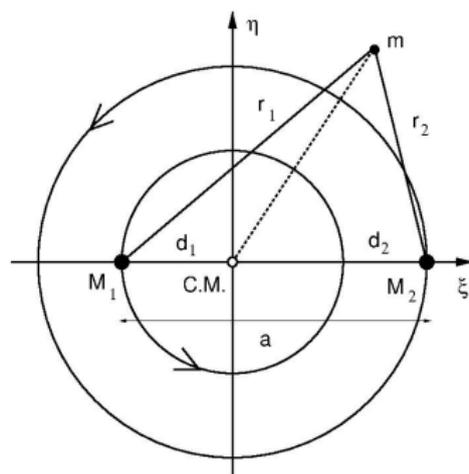
$$\dot{\mathbf{r}}_i = \nabla_{\mathbf{p}_i} H, \quad (i = 1, 2, 3) \quad \dot{\mathbf{p}}_i = -\nabla_i H,$$

## O problema restrito de três corpos no plano



- ▶ duas partículas de massas  $M_1$  (primária) e  $M_2$  (secundária), que giram em torno do seu centro de massa com velocidade angular  $\Omega$  constante num plano
- ▶ uma partícula (teste) de massa  $M_3 = m$ , com  $m \ll M_{1,2}$ : a partícula-teste não altera significativamente o movimento das duas partículas em movimento circular uniforme
- ▶ o movimento da partícula-teste é determinado pelo campo gravitacional produzido por  $M_1$  e  $M_2$

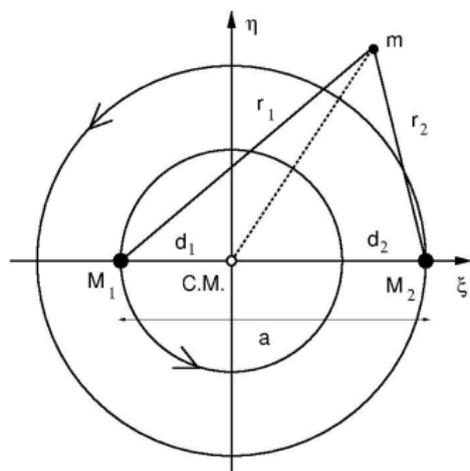
## O problema restrito de três corpos no plano



- ▶  $a$ : distância entre a massa primária e a secundária, que orbitam em torno do centro de massa comum
- ▶ a força centrípeta sobre a massa reduzida  $M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$  é igual à força gravitacional entre  $M_1$  e  $M_2$ ,

$$\left( \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right) \Omega^2 a = G \frac{M_1 M_2}{a^2} \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}}.$$

## O problema restrito de três corpos no plano



- colocando a origem no centro de massa do sistema, as posições das partículas  $M_1$  e  $M_2$  em relação à origem são

$$d_1 = \frac{M_2 a}{M_1 + M_2}, \quad d_2 = -\frac{M_1 a}{M_1 + M_2},$$

- variáveis adimensionais  $\tilde{d}_1 = r_1/a = \mu$ ,  $\tilde{d}_2 = r_2/a = 1 - \mu$

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad 1 - \mu = \frac{M_1}{M_1 + M_2},$$

## Hamiltoniana no referencial sideral

- ▶ referencial inercial: sistema de coordenadas siderais no plano  $(\xi, \eta, \zeta = 0)$ .
- ▶ coordenadas das massas primária e secundária

$$\xi_1 = -\tilde{d}_1 \cos \Omega t = -\mu \cos \Omega t, \quad \eta_1 = -\tilde{d}_1 \sin \Omega t = -\mu \sin \omega t$$

$$\xi_2 = -\tilde{d}_2 \cos \Omega t = (1-\mu) \cos \Omega t, \quad \eta_2 = -\tilde{d}_2 \sin \Omega t = (1-\mu) \sin \omega t$$

- ▶ Hamiltoniana da partícula-teste no referencial inercial

$$H(p_\xi, p_\eta, p_\zeta; \xi, \eta, \zeta; t) = \frac{1}{2m} (p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - \frac{(1-\mu)m}{r_1} - \frac{\mu m}{r_2},$$

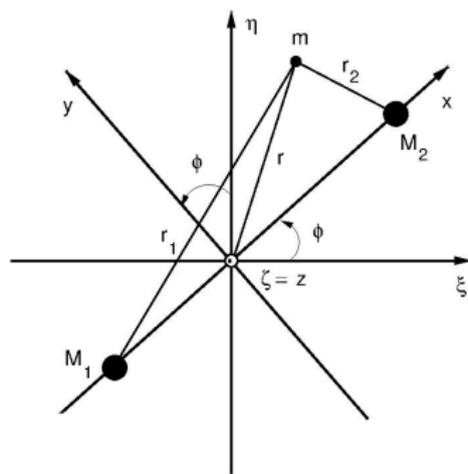
- ▶ distâncias da partícula-teste às massas primária e secundária

$$r_1(t) = \sqrt{(\xi + \mu \cos \Omega t)^2 + (\eta + \mu \sin \Omega t)^2 + \zeta^2},$$

$$r_2(t) = \sqrt{[\xi - (1-\mu) \cos \Omega t]^2 + [\eta - (1-\mu) \sin \Omega t]^2 + \zeta^2}.$$

- ▶ a Hamiltoniana depende explicitamente de  $t$ , logo não é uma constante do movimento

## Hamiltoniana no referencial sinótico



- ▶ referencial (não-inercial) que gira com velocidade angular  $\Omega$  em torno do eixo  $\zeta$
- ▶ sistema de coordenadas sinóticas  $(x, y, z = \zeta)$ : as massas primária e secundária estão fixas nas posições

$$x_1 = -\tilde{d}_1 = -\mu, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0,$$

$$x_2 = -\tilde{d}_2 = 1 - \mu, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0.$$

## Hamiltoniana no referencial sinótico

- ▶ a mudança de coordenadas é uma transformação canônica de segunda espécie, implementada pela função geratriz

$$F_2 = (\xi \cos \Omega t + \eta \sin \Omega t)p_x + (-\xi \sin \Omega t + \eta \cos \Omega t)p_y + \zeta p_z,$$

- ▶ equações da transformação canônica

$$p_\xi = \frac{\partial F_2}{\partial \xi} = p_x \cos \Omega t - p_y \sin \Omega t,$$

$$p_\eta = \frac{\partial F_2}{\partial \eta} = p_x \sin \Omega t + p_y \cos \Omega t, \quad p_\zeta = \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} = p_z,$$

$$x = \frac{\partial F_2}{\partial p_x} = \xi \cos \Omega t + \eta \sin \Omega t,$$

$$y = \frac{\partial F_2}{\partial p_y} = -\xi \sin \Omega t + \eta \cos \Omega t, \quad z = \frac{\partial F_2}{\partial p_z} = \zeta,$$

- ▶ correspondem a uma rotação dos eixos  $(x, y)$  de um ângulo  $\Omega t$  em torno do eixo  $z$

## Hamiltoniana no referencial sinótico

- ▶ das equações que descrevem a rotação dos eixos

$$p_{\xi}^2 + p_{\eta}^2 + p_{\zeta}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2.$$

- ▶ transformações inversas:

$$\xi = x \cos \Omega t - y \sin \Omega t, \quad \eta = x \sin \Omega t + y \cos \Omega t, \quad z = \zeta.$$

- ▶ Hamiltoniana no referencial girante

$$K(p_x, p_y; x, y) = H(p_{\xi}, p_{\eta}; \xi, \eta, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H + \Omega(y p_x - x p_y)$$

$$K = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Omega(y p_x - x p_y) - \frac{(1 - \mu)m}{r_1} - \frac{\mu m}{r_2},$$

- ▶ distâncias da partícula teste às massas primária e secundária

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{[x - (1 - \mu)]^2 + y^2 + z^2}.$$

- ▶ energia potencial gravitacional no referencial girante

$$\Phi(r_1, r_2) = -\frac{(1 - \mu)m}{r_1} - \frac{\mu m}{r_2}.$$

## Hamiltoniana no referencial sinótico

- ▶ como  $z$  é o eixo de rotação,  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$ , donde

$$\Omega(y p_x - x p_y) = -\mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}),$$

- ▶ forma alternativa da Hamiltoniana no referencial girante

$$K = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + m\Phi(\mathbf{r}).$$

- ▶ transformação não-canônica

$$\tilde{p}_x = \frac{p_x}{m}, \quad \tilde{p}_y = \frac{p_y}{m}, \quad \tilde{p}_z = \frac{p_z}{m}, \quad \tilde{K} = \frac{K}{m},$$

- ▶ equações de Hamilton no referencial girante

$$\frac{d\tilde{p}_x}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}, \quad \frac{d\tilde{p}_y}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y}, \quad \frac{d\tilde{p}_z}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial z}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_y}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_z}.$$

- ▶ Hamiltoniana rescalonada

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} (\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2 + \tilde{p}_z^2) + \Omega(y\tilde{p}_x - x\tilde{p}_y) + \Phi(r_1, r_2).$$

- ▶ equações de Hamilton

$$\begin{aligned} \tilde{p}_x &= \dot{x} - \Omega y, & \tilde{p}_y &= \dot{y} + \Omega x, & \tilde{p}_z &= \dot{z} \\ \frac{d\tilde{p}_x}{dt} &= \Omega\tilde{p}_y - \frac{\partial\Phi}{\partial x}, & \frac{d\tilde{p}_y}{dt} &= -\Omega\tilde{p}_x - \frac{\partial\Phi}{\partial y}, & \frac{d\tilde{p}_z}{dt} &= \ddot{z}. \end{aligned}$$

- ▶ derivando em relação ao tempo

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\Omega\dot{y} + \Omega^2 x - \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2\Omega\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} &= -2\Omega\dot{x} + \Omega^2 y - \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -2\Omega\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}$$

- ▶ energia potencial efetiva,

$$U = \frac{\Omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \Phi,$$

- ▶  $-\Omega^2(x^2 + y^2)$  termo associado à força centrífuga

# Integral de Jacobi

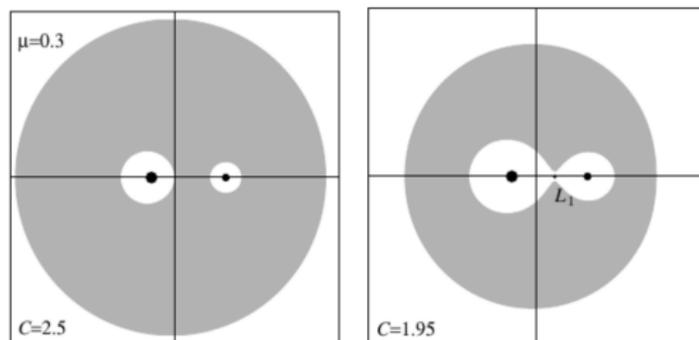
- ▶ no referencial girante a Hamiltoniana  $\tilde{H}$  não depende do tempo, portanto é uma constante do movimento
- ▶ integral de Jacobi:  $C = -2\tilde{H}$

$$C = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \Omega^2(x^2 + y^2) - 2\Phi$$

$$C = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + 2U.$$

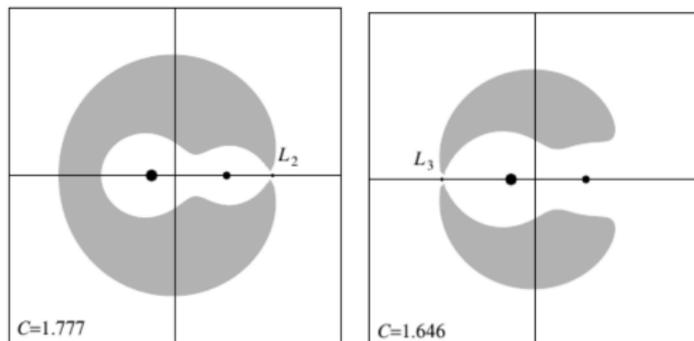
- ▶ como  $(\dots) \geq 0$  então  $U \geq C/2$ , logo  $U \geq 0$
- ▶ curvas de velocidade zero no plano  $xy$ : se  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  então  $C = 2U$
- ▶ regiões permitidas para o movimento da partícula-teste:  $U > C/2$ ; regiões proibidas:  $U < C/2$ .
- ▶ estabilidade no sentido de Hill: se as regiões permitidas envolvem as massas primária e secundária

## Curvas de velocidade zero



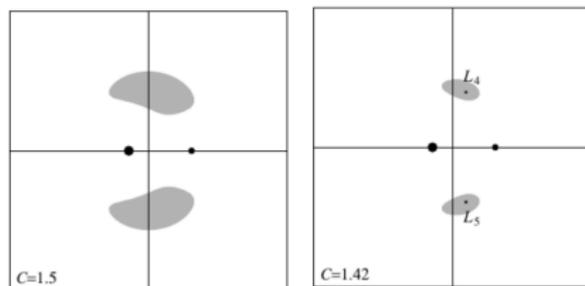
- ▶  $\mu = 0,3$ : as curvas de velocidade zero são as fronteiras entre as regiões proibidas (hachureadas) e permitidas (em branco), para diferentes valores da integral de Jacobi
- ▶  $C = 2,5$ : regiões permitidas concentradas na vizinhança das massas primária e secundária, e no exterior do círculo hachureado (sistema é estável no sentido de Hill)
- ▶  $C = 1,95$ : regiões internas se tocam num ponto Lagrangiano  $L_1$ , formando uma curva em formato de número oito (lóbulo de Hill)

## Curvas de velocidade zero



- ▶  $C = 1,777$ : tanto a região permitida interior quanto a exterior aumentam de tamanho: as duas regiões permitidas se tocam no ponto Lagrangiano  $L_2$
- ▶  $C = 1,646$ : há um outro contato destas regiões no ponto Lagrangiano  $L_3$ . Além disso, aumenta o tamanho da abertura próxima à massa secundária permitindo uma excursão maior das trajetórias da partícula-teste que, em tese, pode “escapar” da proximidade das outras partículas

## Curvas de velocidade zero



- ▶  $C = 1,5$ : aumento da abertura próxima à massa primária
- ▶  $C = 1,42$  praticamente toda a região é permitida, com exceção das vizinhanças dos pontos Lagrangianos  $L_4$  e  $L_5$ .
- ▶ aplicações: Sol (massa primária), Júpiter (massa secundária), asteróide (partícula-teste)
- ▶ se  $C$  tem um valor alto, o asteróide pode orbitar tanto o Sol como Júpiter, nunca saindo destas vizinhanças
- ▶ se  $C$  diminui, um asteróide que inicialmente esteja orbitando em torno do Sol poder ser capturado para uma órbita em torno de Júpiter. O contrário também pode ocorrer: um planeta pode perder um satélite para uma órbita Solar

## Pontos Lagrangianos

- ▶ são pontos de equilíbrio de uma partícula-teste movendo-se no potencial efetivo  $U(x, y)$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{(x^*, y^*)} = 0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{(x^*, y^*)} = 0.$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \Omega x - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \Omega y - \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1 - \mu}{r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\mu}{r_2^2} \frac{\partial r_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1 - \mu}{r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\mu}{r_2^2} \frac{\partial r_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{x + \mu}{r_1}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial y} = \frac{y}{r_1}, \quad \frac{\partial r_2}{\partial x} = \frac{x - (1 - \mu)}{r_2}, \quad \frac{\partial r_2}{\partial y} = \frac{y}{r_2}.$$

$$x^* - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^{*3}} - \frac{\mu(x^* - 1 + \mu)}{r_2^{*3}} = 0,$$

$$y^* \left\{ 1 - \frac{(1 - \mu)}{r_1^{*3}} - \frac{\mu}{r_2^{*3}} \right\} = 0.$$

- ▶ duas famílias de soluções:  $y^* = 0$  (pontos colineares) e  $y^* \neq 0$  (pontos triangulares).

## Pontos colineares

- ▶  $y^* = 0$ : encontram-se sobre a reta que contém as massas primária e secundária.

$$x^* - \frac{1 - \mu}{(x^* + \mu)^2} \frac{x^* + \mu}{|x^* + \mu|} - \frac{\mu}{(x^* - 1 + \mu)^2} \frac{x^* - 1 + \mu}{|x^* - 1 + \mu|} = 0.$$

- ▶ há três casos possíveis onde esta expressão se aplica:

1.  $x^* < -\mu$ :  $x^*$  está à esquerda de ambas as massas, com

$$x^* + \frac{1 - \mu}{(x^* + \mu)^2} + \frac{\mu}{(x^* - 1 + \mu)^2} \frac{x^* - 1 + \mu}{|x^* - 1 + \mu|} = 0,$$

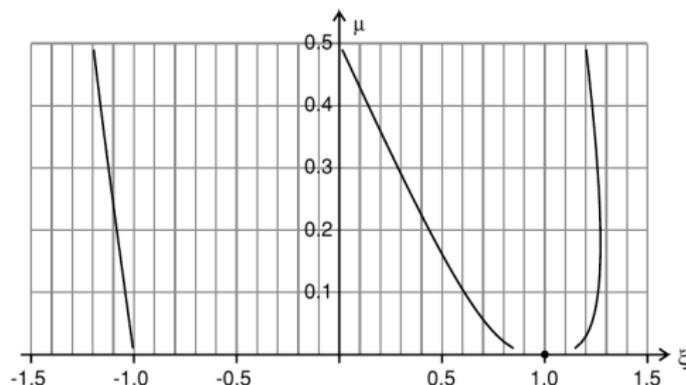
2.  $-\mu < x^* < 1 - \mu$ :  $x$  está entre a massa primária e a secundária, tal que

$$x^* - \frac{1 - \mu}{(x^* + \mu)^2} + \frac{\mu}{(x^* - 1 + \mu)^2} = 0.$$

3.  $x > 1 - \mu$ :  $x$  está à direita de ambas as massas, de modo que

$$x^* - \frac{1 - \mu}{(x^* + \mu)^2} - \frac{\mu}{(x^* - 1 + \mu)^2} = 0.$$

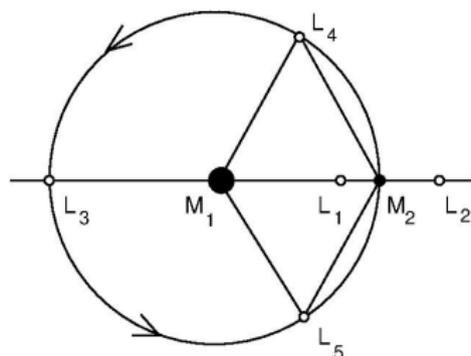
## Pontos colineares



- ▶ todas estas são equações algébricas de quinto grau, e devem ser resolvidas numericamente para um dado valor de  $\mu$
- ▶ cada uma delas só possui uma raiz real no intervalo para o qual ela é válida. Estas soluções reais identificam os pontos Lagrangianos colineares denotados por  $L_1$  (entre as massas),  $L_2$  (à direita) e  $L_3$  (à esquerda)
- ▶ por exemplo, para  $\mu = 0,3$

$$x_{L_1}^* = 0,3, \quad x_{L_2}^* \approx 1,25, \quad x_{L_3}^* \approx -1,12$$

# Pontos triangulares



- ▶ pontos Lagrangianos para os quais  $y \neq 0$ .

$$1 - \frac{(1 - \mu)}{r_1^{*3}} - \frac{\mu}{r_2^{*3}} = 0. \Rightarrow r_1^* = r_2^* = 1$$

- ▶ como a distância entre as massas primária e secundária também é igual a 1, o ponto Lagrangiano não-colinear é o terceiro vértice de um triângulo equilátero cujos demais vértices são as outras massas
- ▶ há dois pontos Lagrangianos triangulares, denotados por  $L_4$  e  $L_5$ , com  $y^* = \pm\sqrt{3}/2$ .

## Equações de Hill

- ▶ se  $\mu \ll 1$  a órbita da partícula-teste é essencialmente Kepleriana em relação à massa primária  $M_1$ , desde que a partícula-teste esteja longe da massa secundária  $M_2$
- ▶ equações de movimento da partícula-teste

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu[x-(1-\mu)]}{r_2^3}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3},$$

$$r_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2, \quad r_2^2 = [x-(1-\mu)]^2 + y^2.$$

- ▶ transformação de variáveis:  $x' = x - 1 + \mu$  e  $y' = y$

$$\ddot{x}' - 2\dot{y}' = x' + 1 - \mu - \frac{(1-\mu)(x'+1)}{r_1'^3} - \frac{\mu x'}{r_2'^3}$$

$$\ddot{y}' + 2\dot{x}' = y' - \frac{(1-\mu)y'}{r_1'^3} - \frac{\mu y'}{r_2'^3},$$

$$r_1'^2 = (x'+1)^2 + y'^2, \quad r_2'^2 = x'^2 + y'^2 \equiv \Upsilon^2.$$

## Equações de Hill

- ▶ se  $\mu \ll 1$  temos que  $1 - \mu \sim 1 + \mu \sim 1$

$$\ddot{x}' - 2\dot{y}' \approx x' + 1 - \frac{x' + 1}{r_1'^3} - \frac{\mu x'}{r_2'^3}$$

$$\ddot{y}' + 2\dot{x}' - y' \approx -\frac{y'}{r_1'^3} - \frac{\mu y'}{r_2'^3},$$

- ▶ expandindo em série em torno do ponto  $(x' = 0, y' = 0)$

$$-\frac{x' + 1}{r_1'^3} \approx -1 + 2x', \quad -\frac{y'}{r_1'^3} \approx -y',$$

- ▶ equações de Hill

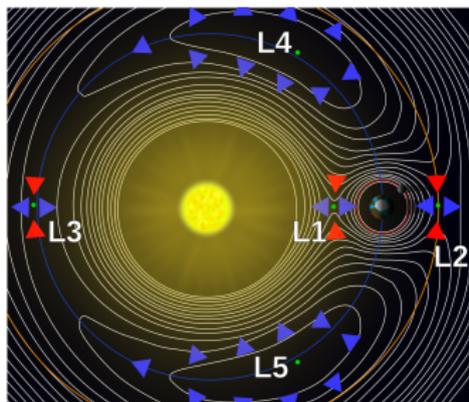
$$\ddot{x}' - 2\dot{y}' = \left(3 - \frac{\mu}{\Upsilon^3}\right) x' = \frac{\partial U_H}{\partial x'}$$

$$\ddot{y}' + 2\dot{x}' = -\frac{\mu y'}{\Upsilon^3} = \frac{\partial U_H}{\partial y'}.$$

- ▶ onde definimos o potencial de Hill

$$U_H = \frac{3}{2}x'^2 + \frac{\mu}{\Upsilon^3},$$

## Determinação aproximada dos pontos Lagrangianos



- ▶ posição dos pontos  $L_1$  e  $L_2$  quando  $\mu \ll 1$
- ▶ condições de equilíbrio:  $\dot{x}'^* = \ddot{x}'^* = 0$ ,  $\dot{y}'^* = \ddot{y}'^* = 0$
- ▶ substituindo nas equações de Hill

$$x'^* = \pm \Upsilon_H, \quad y'^* = 0, \quad \Upsilon_H = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3},$$

- ▶ estão simetricamente posicionados em relação à massa secundária, que é o centro de uma esfera de raio  $\Upsilon_H$  (esfera de Hill).

# Estabilidade dos pontos Lagrangianos

- ▶ perturbações das posições  $(x^*, y^*)$  dos pontos Lagrangianos:  
 $x = x^* + \delta x$ ,  $y = y^* + \delta y$ , com  $|\delta x| \ll |x^*|$  e  $|\delta y| \ll |y^*|$
- ▶ equações de movimento da partícula-teste

$$\ddot{\delta x} - 2\dot{\delta y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{\delta y} + 2\dot{\delta x} = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

$$U(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2}},$$

- ▶ expansão em série dos segundos membros das equações

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{(x^*, y^*)} + \delta x \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{(x^*, y^*)} + \delta y \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_{(x^*, y^*)},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{(x^*, y^*)} + \delta x \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right)_{(x^*, y^*)} + \delta y \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{(x^*, y^*)}.$$

- ▶ equações linearizadas de primeira ordem

$$\dot{\delta x} = \delta v_x, \quad \dot{\delta v}_x = a\delta x + b\delta y + 2\dot{\delta y}$$

$$\dot{\delta y} = \delta v_y, \quad \dot{\delta v}_y = b\delta x + d\delta y - 2\dot{\delta x}$$

## Coeficientes das equações linearizadas

$$a = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{(x^*, y^*)} = 1 - \tilde{a} + \tilde{d}, \quad d = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{(x^*, y^*)} = \tilde{c}y^*$$

$$b = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_{(x^*, y^*)} = 1 - \tilde{a} + \tilde{b}y^{*2},$$

$$\tilde{a} = \frac{1 - \mu}{(r_1^3)_0} + \frac{\mu}{(r_2^3)_0}, \quad \tilde{b} = 3 \left[ \frac{1 - \mu}{(r_1^5)_0} + \frac{\mu}{(r_2^5)_0} \right]$$

$$\tilde{c} = 3 \left[ \frac{(1 - \mu)(x^* + \mu)}{(r_1^5)_0} + \frac{\mu(x^* + \mu - 1)}{(r_2^5)_0} \right]$$

$$\tilde{d} = 3 \left[ \frac{(1 - \mu)(x^* + \mu)^2}{(r_1^5)_0} + \frac{\mu(x^* + \mu - 1)^2}{(r_2^5)_0} \right].$$

$$(r_1^3)_0 = \left[ (x^* + \mu)^2 + y^{*2} \right]^{3/2}, \quad (r_2^3)_0 = \left[ (x^* + \mu - 1)^2 + y^{*2} \right]^{3/2},$$

## Forma matricial das equações linearizadas

- ▶ sistema de equações linearizadas:  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta v_x \\ \delta v_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 2 \\ b & d & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ estabilidade linear dos pontos de equilíbrio determinada pelos autovalores da matriz Jacobiana: raízes da equação secular

$$\det(\mathbf{J} - \xi \mathbf{I}) = \xi^4 + (4 - a - d)\xi^2 + (ad - b^2) = 0,$$

- ▶ raízes da equação biquadrática ( $i = 1, 2, 3, 4$ )

$$\xi_i = \pm \left\{ -\frac{1}{2}(4 - a - d) \mp \frac{1}{2} \left[ (4 - a - d)^2 - 4(ad - b^2) \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

1. autovalores imaginários puros: centro (estável)  $\rightarrow$  trajetórias próximas executam pequenas oscilações em torno do ponto
2. autovalores reais: ponto de sela (instável)  $\rightarrow$  as trajetórias afastam-se do ponto Lagrangiano a uma taxa exponencial igual ao autovalor correspondente

## Estabilidade dos pontos colineares

- ▶ fazendo  $y^* = 0$ , como  $(r_1)_0 = x^* + \mu$  e  $(r_2)_0 = x^* + \mu - 1$

$$\tilde{a} = \frac{1 - \mu}{(x^* + \mu)^3} + \frac{\mu}{(x^* + \mu - 1)^3}, \quad \tilde{d} = 3\tilde{a}$$

$$a = 1 + 2\tilde{a}, \quad b = 0, \quad d = 1 - \tilde{a}.$$

- ▶ equação secular ( $s = \xi^2$ )

$$\xi^4 + (2 - \tilde{a})\xi^2 + (1 + 2\tilde{a})(1 - \tilde{a}) = s^2 + (2 - \tilde{a})s + (1 + 2\tilde{a})(1 - \tilde{a}) = 0,$$

- ▶ os pontos de equilíbrio serão estáveis (centros) se  $\xi_i$  forem imaginários puros. Pelas relações de Girard

$$\xi_1^2 \xi_3^2 = (1 + 2\tilde{a})(1 - \tilde{a}) > 0.$$

- ▶ como  $\tilde{a} > 0$ , então  $\tilde{a} < 1$  para estabilidade

$$\frac{(x^* + \mu - 1)^2 - (x^* + \mu)^2}{x^*} = \frac{-2(x^* + \mu) + 1}{x^*} > 0,$$

- ▶ os três pontos colineares nunca poderão satisfazer simultaneamente a condição de estabilidade  $\tilde{a} < 1$ , portanto todos serão instáveis, com tempo característico  $\sim \xi_{max}^{-1}$

## Estabilidade dos pontos triangulares

- ▶ os pontos triangulares  $L_4$  e  $L_5$  estão localizados em  $x^* = 1/2 - \mu$  e  $y^* = \pm\sqrt{3}/2$ , e formam os vértices de triângulos equiláteros de lado unitário com as massas primária e secundária. Logo  $(r_1)_0 = (r_2)_0 = 1$

$$\tilde{a} = 1, \quad \tilde{b} = 3, \quad \tilde{c} = \frac{3}{2}(1 - 2\mu), \quad \tilde{d} = \frac{3}{4},$$

$$a = 3/4, \quad b = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu), \quad d = \frac{9}{4}.$$

- ▶ equação secular

$$\xi^4 + \xi^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = s^2 + s + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0,$$

- ▶ raízes:  $s_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{\Delta})/2$ , onde  $\Delta = 1 - 27\mu(1 - \mu)$
- ▶ para que os pontos triangulares  $L_4$  e  $L_5$  sejam estáveis devemos ter  $\Delta \geq 0$  ou  $\mu^2 - \mu + \frac{1}{27} \geq 0$ , donde temos que

$$\mu \leq \mu_0 = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{23}{27}} \right) = 0,03852.$$

# Estabilidade dos pontos triangulares

- ▶ no intervalo de estabilidade  $0 < \mu \leq \mu_0$  os autovalores são

$$\xi_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{s_1} = \pm\left[(-1 \mp \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)})/2\right]^{1/2}$$

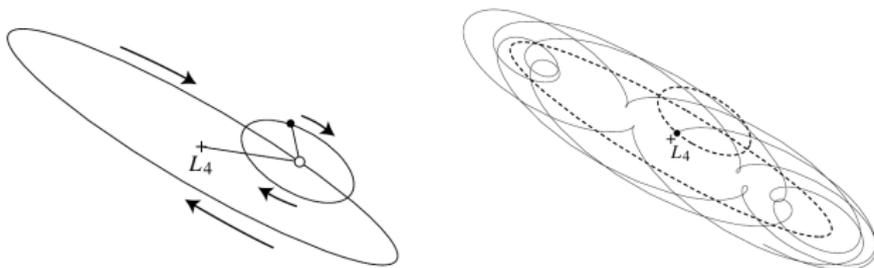
- ▶ se  $\mu \ll 1$  é pequeno  $\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} \approx 1 - (27/2)\mu$

$$\xi_{1,2} \approx \pm\sqrt{-1 + (27/4)\mu}, \quad \xi_{3,4} \approx \pm\sqrt{-(27/4)\mu}.$$

- ▶ as trajetórias nas vizinhanças dos pontos estáveis são curvas fechadas em torno deles, com períodos característicos

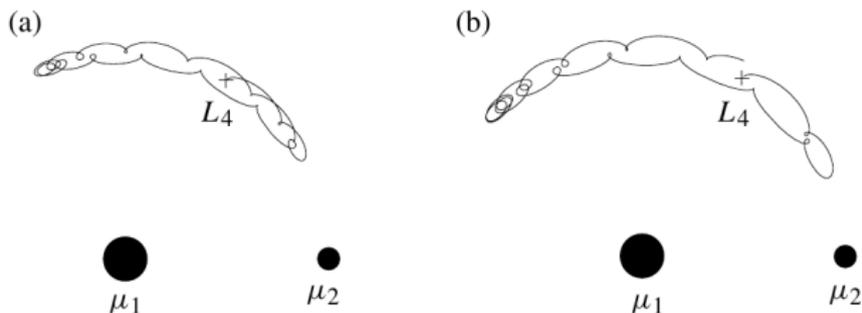
$$T_{1,2} = 2\pi/|\xi_{1,2}|, \quad T_{3,4} = 2\pi/|\xi_{3,4}|$$

# Estabilidade dos pontos triangulares



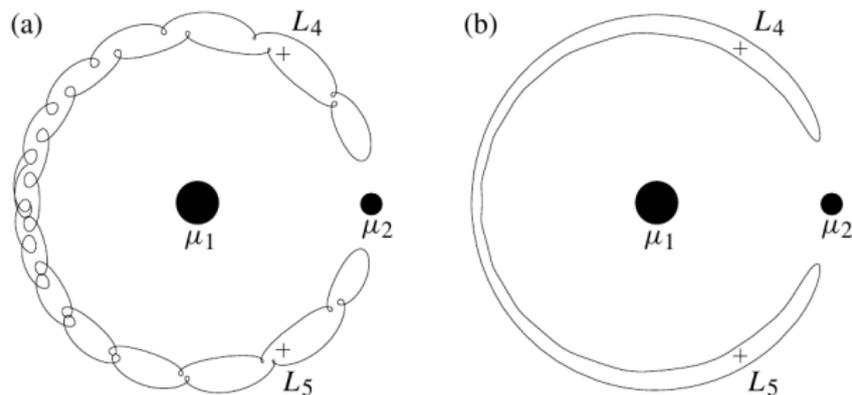
- ▶  $|\xi_{1,2}| \sim 1$  tal que as oscilações têm período curto  $T_{1,2} \sim 2\pi$ , correspondente a um movimento epicíclico
- ▶  $|\xi_{3,4}| \ll 1$  implica em oscilações de longo período  $T_{3,4} \gg 2\pi$ , que correspondem às órbitas fechadas (librações) em torno do ponto triangular
- ▶ no referencial girante, as trajetórias da partícula-teste nas vizinhanças dos pontos triangulares são combinações destes dois movimentos, ou seja, são epiciclos cujos centros executam órbitas do tipo libração

# Órbitas do tipo girino



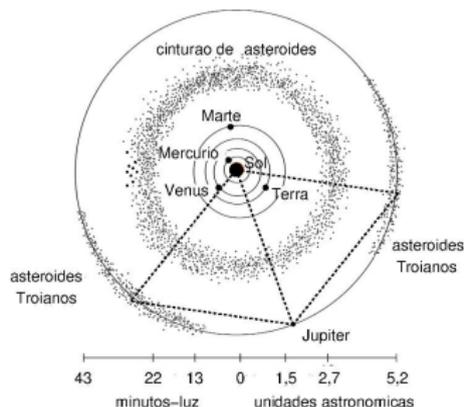
- ▶ ponto Lagrangiano  $L_4$ , situado em  $x^* = 0,5 - \mu_2$  e  $y^* = \sqrt{3}/2$ , com  $\mu_2 = 0,001$
- ▶ trajetórias obtidas numericamente em torno de  $L_4$ , para condições iniciais diferentes
  1. (a)  $x_0 = x^* + 0,0065$ ,  $y_0 = y^* + 0,0065$ ,  $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ ;
  2. (b)  $x_0 = x^* + 0,008$ ,  $y_0 = y^* + 0,008$ ,  $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ .
- ▶ órbitas do tipo girino: epiciclos superpostos a uma órbita fechada
- ▶ podem envolver tanto  $L_4$  como  $L_5$

# Órbitas do tipo ferradura



- ▶ a órbita envolve ambos os pontos triangulares
- ▶ é conhecida como órbita ferradura, com  $\mu_2 = 0,000953875$  e condições iniciais diferentes
  1. (a)  $x_0 = -0,97668$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0, \dot{y}_0 = -0,06118$
  2. (b)  $x_0 = -1,02745$ ,  $y_0 = \dot{x}_0 = 0$ ,  $\dot{y}_0 = 0,04032$
- ▶ aumentando o valor de  $C$ , podemos passar de uma órbita do tipo girino para outra do tipo ferradura e *vice-versa*.

# Asteróides Troianos



- ▶ sistema Sol-Júpiter-asteróide

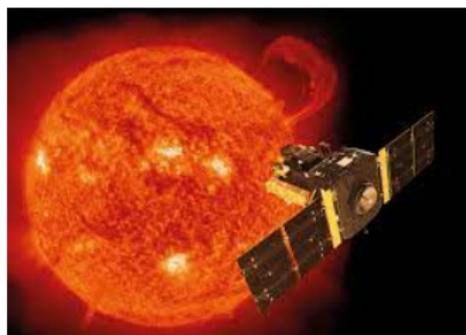
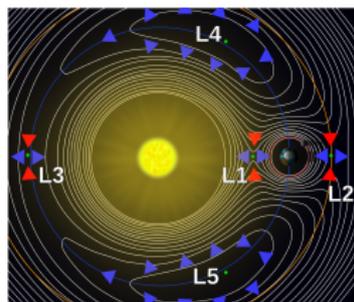
$$M_1 \approx 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad M_2 \approx 2,0 \times 10^{27} \text{ kg}, \quad m \sim 3,0 \times 10^{21} \text{ kg},$$

- ▶ a órbita elíptica Sol-Júpiter tem semi-eixo maior  $a = 778,34 \times 10^9 \text{ m}$  e excentricidade  $e = 0,0487$ , com período orbital de 11.862 anos.

$$\mu = M_2 / (M_1 + M_2) \sim 0,001 \ll 1, \quad m / M_2 \sim 10^{-6} \lll 1,$$

- ▶ os pontos  $L_4$  e  $L_5$  são populados por asteróides chamados *Troianos*: todos movem-se em órbitas do tipo girino.

# Sistema Sol-Terra-asteróide



- ▶ a órbita da Terra tem raio  $a = 1 U.A.$

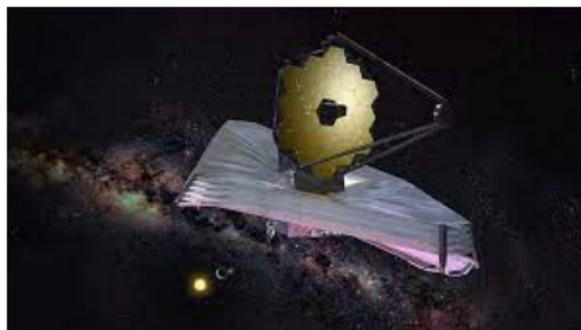
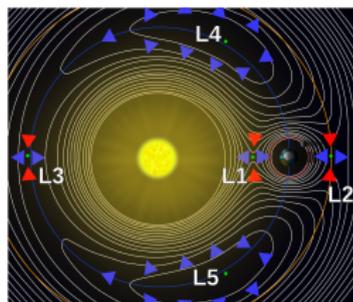
$$M_1 \approx 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad M_2 \approx 1,0 \times 10^{25} \text{ kg} \quad \mu \sim 10^{-6}$$

- ▶ posição dos pontos colineares se  $\mu \ll 1$

$$d_1 = d_2 = \Upsilon_H = (\mu/3)^{1/3} \rightarrow \times a = 1,49 \times 10^9 \text{ km}$$

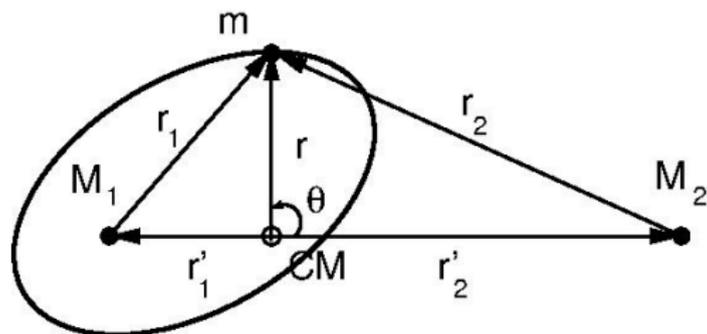
- ▶  $L_1$  é instável, com tempo característico é da ordem de 23 dias: correções de órbita são necessárias
- ▶ como  $L_1$  está entre o Sol e a Terra, permite uma observação aprimorada do Sol (sonda espacial não-tripulada SOHO)

# Sistema Sol-Terra-asteróide



- ▶ o ponto  $L_2$  tem o mesmo tempo característico de 23 dias, e é considerado ideal para a observação astronômica
- ▶ está suficientemente próximo à Terra para permitir uma comunicação rápida, e porque deixa para trás o Sol, a Terra e a Lua, permitindo uma visão mais nítida do espaço.
- ▶ sonda WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*), cuja missão foi estudar aspectos da radiação cósmica de fundo.
- ▶ Telescópio Espacial James Webb, lançado pela NASA no Natal de 2021.

## Sistema quase-integrável



- ▶ consideramos o movimento da partícula-teste em torno da massa primária  $M_1$  como uma órbita Kepleriana (sistema integrável)
- ▶ desde que a partícula-teste esteja suficientemente longe da massa secundária  $M_2$  podemos considerar a influência gravitacional entre elas como uma perturbação de fraca intensidade
- ▶  $\mathbf{r}'_1$  e  $\mathbf{r}'_2$ : posições das massas primária e secundária em relação ao centro de massa

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}_2,$$

## Sistema quase-integrável

- ▶ Hamiltoniana da partícula-teste no referencial girante

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \frac{(1 - \mu)m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|} - \frac{\mu m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|}.$$

- ▶ como  $|\mathbf{r}'_1| = \mu$ , se  $\mu \ll 1$  então  $\mathbf{r}'_1 \approx \mathbf{r}$ , de modo que a Hamiltoniana correspondente ao movimento integrável em torno da massa primária será

$$H_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \frac{(1 - \mu)m}{r},$$

- ▶ problema de Kepler mais um termo de força centrífuga: força resultante é central, para o qual a órbita é limitada a um plano
- ▶ usamos coordenadas polares  $(r, \theta)$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre o vetor posição  $\mathbf{r}$  da partícula-teste e a reta que liga as massas primária e secundária
- ▶ perturbação da massa secundária

$$\varepsilon H_1 = -\frac{\mu m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|}.$$

## Hamiltoniana do problema de Kepler

- ▶ problema de Kepler: momenta canonicamente conjugados

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = xp_y - yp_x = \frac{1}{\Omega} \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}),$$

- ▶ Hamiltoniana não-perturbada no referencial girante

$$H_0(p_r, p_\theta; r, \theta) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \Omega p_\theta - \frac{(1 - \mu)m}{r} = E,$$

- ▶ é cíclica em  $\theta$ , donde  $p_\theta$  é uma constante do movimento
- ▶ como  $H_0$  não depende explicitamente do tempo, ela é igual à energia  $E$ , a qual é também uma constante de movimento
- ▶ variáveis de ação do problema de Kepler

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = \alpha_\theta, \quad J_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint dr \frac{\partial W}{\partial r},$$

- ▶ isolando o momentum radial

$$p_r = \pm \left\{ 2m \left[ E + \Omega \alpha_\theta + \frac{m(1 - \mu)}{r} \right] - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} \right\}^{1/2}.$$

## Hamiltoniana não-perturbada

- ▶ definindo as quantidades

$$A = 2m(E + \Omega\alpha_\theta), \quad B = m^2(1 - \mu), \quad C = \alpha_\theta^2,$$

- ▶ variável de ação radial

$$J_r = \pm \frac{1}{2\pi} \oint dr \sqrt{A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}} = -\alpha_\theta + \frac{m^2(1 - \mu)}{\sqrt{-2m(E + \Omega\alpha_\theta)}}.$$

- ▶ Hamiltoniana não-perturbada expressa em variáveis de ação

$$H_0(J_r, J_\theta) = -\frac{m^3(1 - \mu)^2}{2(J_r + J_\theta)^2} - \Omega J_\theta,$$

- ▶ frequências do problema não-perturbado

$$\omega_r = \frac{\partial H_0}{\partial J_r} = \frac{m^3(1 - \mu)^2}{(J_r + J_\theta)^3} \equiv \omega_T$$

$$\omega_\theta = \frac{\partial H_0}{\partial J_\theta} = -\Omega + \frac{m^3(1 - \mu)^2}{(J_r + J_\theta)^3} = -\Omega + \omega_T,$$

# Toros do sistema integrável

- ▶ cada toro do sistema integrável  $H_0$  é identificado pelo seu número de rotação, que é a razão entre as frequências das variáveis angulares:

$$\alpha(J_r) = \omega_\theta / \omega_r$$

- ▶ se o número de rotação for igual à razão entre dois inteiros, primos entre si,  $\alpha = m_1/m_2$ , então o toro correspondente é racional, e as trajetórias fecham-se sobre si mesmas após um certo número de voltas nas duas direções do toro
- ▶ caso contrário, teremos um toro irracional, e as trajetórias nunca fecham-se sobre si próprias, preenchendo densamente o toro.
- ▶ sob uma perturbação não-integrável suficientemente fraca
  1. toros racionais desaparecem, deixando um número par de pontos fixos (metade elípticos, metade hiperbólicos): Teorema de Poincaré-Birkhoff
  2. a maioria dos toros irracionais são mantidos, ainda que com alterações de forma (teorema KAM)

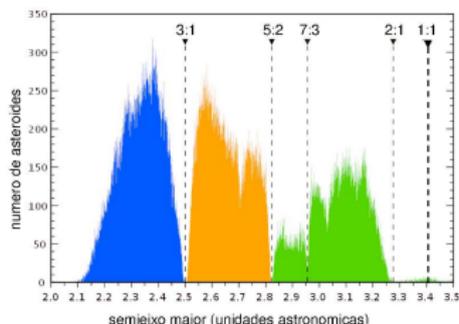
# Toros racionais

- ▶ os toros racionais correspondem a ressonâncias entre as frequências da massa primária e da partícula-teste

$$\alpha(J_r) = 1 - \Omega/\omega_T = m_1/m_2$$

- ▶ não haverá movimento da partícula-teste nas vizinhanças dos toros para os quais  $\Omega/\omega_T = m/n$ , onde  $m = m_2 - m_1$  e  $n = m_2$  são inteiros positivos.
- ▶ cinturão de asteróides entre as órbitas de Marte e Júpiter a uma distância da ordem de 2,8 UA do Sol
- ▶ milhões de objetos, desde asteróides com centenas de quilômetros de diâmetro até partículas de poeira. Os asteróides giram em torno do Sol e suas trajetórias são perturbadas pela órbita de Júpiter
- ▶ a influência da órbita de Marte é desprezível, visto que Júpiter tem massa 2960 vezes maior que a de Marte.

# Hiatos de Kirkwood

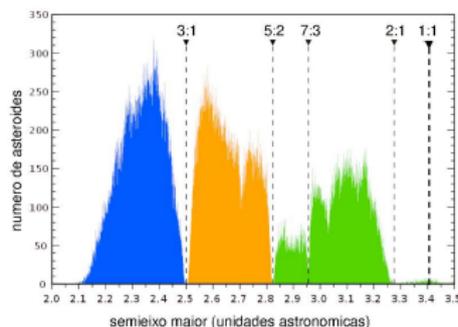


- ▶ frequências das órbitas dos asteróides  $\omega_T$ : diferem entre si devido às suas massa  $m$  e semi-eixos maiores diferentes, o que altera os valores das energias e momenta angulares e, por conseguinte, os valores das variáveis de ação  $J_r$  e  $J_\theta$
- ▶ há muito poucos asteróides com semi-eixos maiores próximos a 2,50 unidades astronômicas e períodos orbitais de 3,95 anos
- ▶ tais asteróides executam três órbitas para cada órbita completa de Júpiter. Assim a razão entre suas frequências é

$$\Omega/\omega_T = \tau_T/\tau_\Omega = 3\tau_\Omega/\tau_\Omega = 3/1,$$

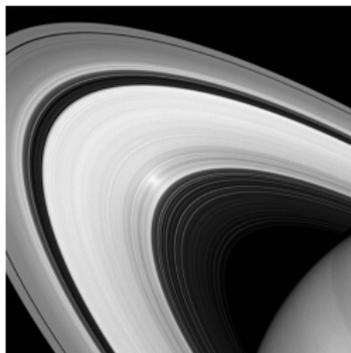
- ▶ o que configura uma ressonância orbital 3:1.

# Hiatos de Kirkwood



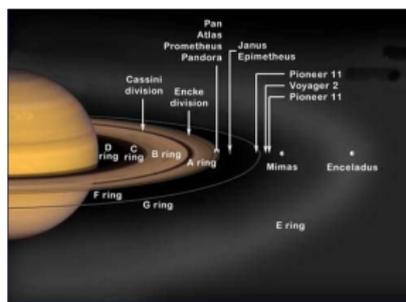
- ▶ histograma mostrando o número de asteroídeos em função do semi-eixo maior de suas órbitas
- ▶ há um hiato para o valor do semi-eixo maior de 2,50 UA que corresponde a uma ressonância 3 : 1
- ▶ outros hiatos correspondem a ressonâncias 5 : 2 (em 2,82 UA), 7 : 3 (em 2,95 UA) e 2 : 1 (em 3,27 UA).
- ▶ exceção: ressonância orbital 1 : 1, situada a uma distância de 3,4 UA: asteroídeos troianos
- ▶ como esta frequência é aproximadamente igual à frequência orbital de Júpiter, então  $\Omega \approx \omega_T$  e forma-se um pequeno pico

# Anéis de Saturno



- ▶ podemos tratar o sistema formado pelo planeta Saturno e um dos seus satélites interiores, como Mimas e Encelado, como um problema restrito de três corpos, onde a partícula-teste seria um grão pertencente ao anel de Saturno
- ▶ haverá toros racionais nas posições correspondentes a ressonâncias entre as frequências orbitais de Saturno e seu satélite (Mimas ou Encelado), com número de rotação  $\Omega/\omega_T$  igual a um número racional.
- ▶ os anéis de Saturno exibem hiatos: o anel de Crepe e os anéis A e B, separados pela divisão de Cassini.

# Anéis de Saturno e ressonâncias



- ▶ o anel de Crepe inicia a 74,6 unidades e termina a 88,9 unidades. O anel B, que o sucede, começa a 90,5 unidades, e termina a 117,1 unidades. Existe, assim, um hiato entre o anel de Crepe e o anel B.
- ▶ no interior deste primeiro hiato, a 89,2 unidades do centro, existe um toro racional devido a uma ressonância entre a frequência  $\Omega$  de Saturno e  $\omega_T$  de Mimas:  $\Omega/\omega_T = 3/1$
- ▶ nas proximidades da divisão de Cassini encontramos um toro racional, correspondentes a uma ressonância entre Júpiter e Encelado, com  $\Omega/\omega_T = 2/1$ ; e outra entre Júpiter e Mimas, com  $\Omega/\omega_T = 2/1$ .