Dinâmica Hamiltoniana Aplicada
Capítulo 9
Aplicações em fluidos

Prof. Ricardo Luiz Viana
rlv640@gmail.com

Instituto de Física da USP

Conteúdo da aula

Fluidos ideais

Escoamentos planos

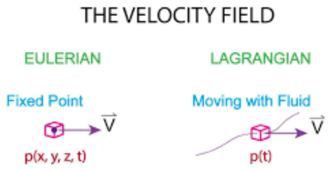
Advecção de escalares passivos

Vórtices em fluidos

O limite do contínuo

Vibrações sonoras num gás

Descrições do escoamento de um fluido



- descrição Lagrangiana: toma uma determinada partícula do fluido e acompanha seu movimento no espaço e no tempo
- descrição Euleriana: fixa a atenção num dado ponto do fluido, e analisa as variações das quantidades físicas de interesse naquele ponto
- na descrição Euleriana, as quantidades físicas de interesse são funções da posição $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e do tempo t
- fluidos ideais (sem viscosidade nem condução de calor): campos escalares de pressão $p = p(\mathbf{r}, t)$, densidade $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ e velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \to$ cinco campos escalares.

Equação de continuidade

- equações de balanço: traduzem princípios de conservação aplicáveis a escoamentos de fluidos ideais: massa, momentum linear, e energia
- princípio de conservação de massa $\to$ equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0,$$

- escoamento incompressível: a densidade é constante no tempo e uniforme no espaço: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
- a pressão p do fluido, numa região limitada de volume V_0, leva a uma força resultante atuando sobre a superfície S que limita essa região, dada por

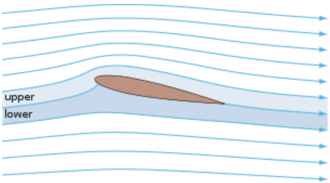
$$-\oint_S p\hat{\mathbf{n}}\, da = -\int_{V_0} \nabla p dV,$$

- o fluido que envolve um elemento de volume dV exerce sobre ele uma força $-dV\, \nabla p$, donde a força que age sobre uma unidade de volume do fluido é $-\nabla p$.

Equação de Euler

- a força sobre uma unidade de volume deve ser igual ao produto da densidade ρ e a aceleração $d\mathbf{v}/dt$:
$$\rho\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p.$$
- a derivada acima refere-se a um elemento de volume que se desloca com o tempo juntamente com o fluido (descrição Lagrangiana do movimento)
- passamos à descrição Euleriana levando em conta que uma quantidade física qualquer $\chi(\mathbf{r}, t)$ tem sua derivada total em relação ao tempo dada por
$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\chi}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\chi}{\partial t} = \mathbf{v}\cdot\nabla\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t},$$
- aplicando à velocidade temos a equação de Euler
$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\nabla p + \frac{1}{\rho}\,\mathbf{f}.$$
- onde $\mathbf{f}$ é uma força externa por unidade de volume. A densidade de força gravitacional é $\rho\mathbf{g}$.

Escoamentos planos



- escoamento bidimensional no plano $z = 0$: $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ e o campo de velocidades é $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$
- condição de incompressibilidade

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

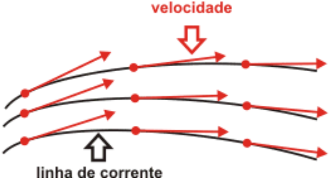
- definimos uma função de fluxo $\psi(x, y)$ tal que

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

- check da condição de incompressibilidade

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Linhas de corrente



- linhas de corrente são curvas que, num dado instante t, têm como tangentes em cada ponto o vetor velocidade $\mathbf{v}$
- como $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ temos que

$$dx = v_x dt, \qquad dy = v_y dt,$$

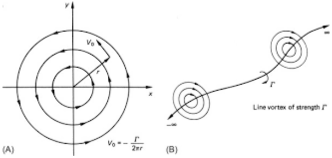
- equações diferenciais das linhas de corrente

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}.$$

- a função de fluxo $\psi(x, y)$ é constante ao longo de uma linha de corrente, pois

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy = 0,$$

Velocidade no escoamento plano



- a velocidade do fluido num escoamento bidimensional é

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \psi = \nabla \times (\psi \hat{\mathbf{z}}).$$

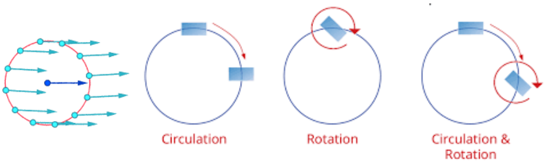
- velocidade do fluido em coordenadas polares (r, θ):

$$\mathbf{v}(r, \theta) = v_r(r, \theta) \hat{\mathbf{r}} + v_\theta(r, \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}},$$

- componentes da velocidade em termos de ψ

$$v_r(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial \theta}, \qquad v_\theta(r, \theta) = -\frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial r}.$$

Vorticidade e circulação



- vorticidade de um escoamento

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}.$$

- circulação da velocidade do fluido ao longo de uma curva fechada C

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds},$$

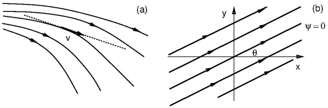
- usando o Teorema de Stokes

$$\Gamma = \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da,$$

- nos escoamentos planos a vorticidade é dada por

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} = \omega \hat{\mathbf{z}} = const.$$

Escoamento plano uniforme



- componentes da velocidade são constantes

$$\mathbf{v} = V_x \hat{\mathbf{x}} + V_y \hat{\mathbf{y}}.$$

- diferencial da função de fluxo

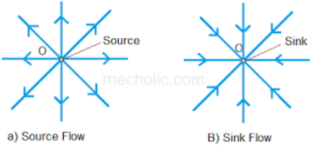
$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -V_y dx + V_x dy, \Rightarrow \psi(x, y) = -V_y x + V_x y.$$

- equações para as linhas de corrente

$$y(x) = \frac{\psi}{V_x} + (\tan\theta)\, x,$$

- como $\tan\theta = V_y/V_x$ é uma constante, as linhas de corrente são retas paralelas formando um ângulo θ em relação ao eixo x. Para cada valor de ψ há uma linha de corrente diferente.

Fontes e sorvedouros



- a velocidade só tem componente radial: $\mathbf{v} = v_r(r, \theta)\hat{\boldsymbol{\theta}}$
- se $v_r > 0$ teremos uma fonte e, caso $v_r < 0$, um sorvedouro
- como $\partial\psi/\partial r = 0$, ψ não depende de r, ou seja, $\psi = \psi(\theta)$

$$d\psi/d\theta = f(\theta) = rv_r \qquad \Rightarrow \qquad v_r = f(\theta)/r$$

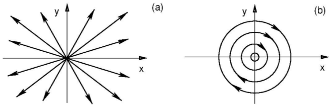
- supondo simetria radial, v_r não depende de θ, donde $f(\theta)$ deve ser uma constante, que escreveremos na forma

$$\psi(\theta) = \alpha\theta/2\pi$$

- as linhas de corrente $\psi = const.$ são raios com origem no centro, cada qual formando um ângulo θ com o eixo x.

$$\mathbf{v}(r) = \frac{\alpha}{2\pi r}\hat{\mathbf{r}}.$$

Vórtices



- a velocidade só possui componente angular: $\mathbf{v} = v_\theta(r,\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}}$: se $v_\theta > 0$, o vórtice é positivo (anti-horário) e, se $v_\theta < 0$, ele é negativo (horário)
- como $\partial\psi/\partial\theta = 0$, então $\psi = \psi(r)$, com $d\psi/dr = -v_\theta(r,\theta)$. Supondo simetria axial v_θ não depende de θ,

$$d\psi/dr = -v_\theta(r).$$

- circulação associada ao vórtice (C círculo de raio r)

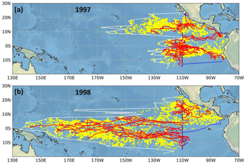
$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = (2\pi r)v_\theta(r), \Rightarrow v_\theta(r) = \Gamma/2\pi r$$

onde $\Gamma > 0$ e $\Gamma < 0$ são vórtices positivos e negativos
- função de fluxo: $\psi(r) = -(\Gamma/2\pi)\ln r$.
- linhas de corrente $\psi = const.$: circunferências de raio r e com centro na origem

Advecção de escalares passivos


- advecção: transporte de uma substância ou quantidade por meio do escoamento de um fluido, ou seja, as propriedades da substância são transportadas pelo movimento do fluido
- transporte de poluentes, sedimentação, misturas, emulsões,
- escalares (ou traçadores) passivos: partículas suficientemente pequenas para não perturbar significativamente o escoamento do fluido, porém grandes o suficiente para que não entrem em movimento Browniano e sejam transportadas com o movimento do fluido

Advecção passiva em escoamentos planos incompressíveis



- a descrição do movimento dos escalares passivos é Lagrangiana: a velocidade das partículas advectadas é igual à velocidade do fluido em cada posição da partícula no plano (x, y), ou seja, $\dot{x} = v_x$ e $\dot{y} = v_y$
- equações de movimento dos escalares passivos são

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

- são as equações de Hamilton, onde x é a coordenada e y o seu momentum canonicamente conjugado
- a função de fluxo é a própria Hamiltoniana do problema de advecção passiva: $H = \psi$.

Duplo giro

- se a função de fluxo for explicitamente independente do tempo, $\psi = \psi(x, y)$, então o problema de advecção passiva tem um grau de liberdade e, portanto, é integrável
- duplo giro: $\psi(x, y) = A \sin(\pi x) \sin(\pi y)$,
- equações de Hamilton

$$\dot{x} = A\pi \sin(\pi x) \cos(\pi y), \qquad \dot{y} = -A\pi \cos(\pi x) \sin(\pi y).$$

- região retangular $\mathcal{R} = \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$
- pontos de equilíbrio ($x_{ci} \in \{0, 1, 2\}$ e $y_{ci} \in \{1, 0\}$)

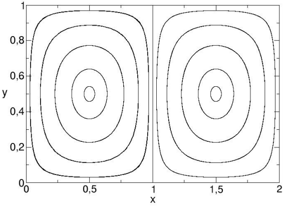
$$A : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad B : \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad C_i : (x_{ci}, y_{ci}), \quad (i = 1, \ldots 6)$$

- matriz Jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} A\pi^2 \cos \pi x \cos \pi y & -A\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y \\ A\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y & -A\pi^2 \cos \pi x \cos \pi y \end{pmatrix}.$$

  1. os autovalores de $\mathbf{J}$ nos pontos A e B são imaginários puros $\xi_{1,2} = \pm i\pi\sqrt{A}$: A e B são centros (lineares)
  2. os autovalores em C_i são reais: são pontos de sela (instáveis)

Duplo giro



- linhas de fluxo: as curvas onde ψ é uma constante
- dois vórtices com centros nos pontos de equilíbrio A e B, em torno dos quais as trajetórias dos escalares são fechadas
- os pontos de sela C_i estão conectados entre si pelas respectivas variedades invariantes, ou trajetórias heteroclínicas, que atuam como fronteiras dos dois vórtices centrados nos pontos A e B, com sentidos opostos
- a trajetória heteroclínica (o segmento de reta V) que conecta $C_1 = (1, 0)$ e $C_3 = (1, 1)$ separa os dois vórtices contidos no retângulo $\mathcal{R}$.

Duplo giro com perturbação dependente do tempo

- se a função de fluxo depender explicitamente do tempo, $\psi = \psi(x, y, t)$, o sistema passa a não ser mais integrável

$$\psi(x, y, t) = A \sin[\pi f(x, t)] \sin(\pi y),$$

$$f(x, t) = a(t)x^2 + b(t)x$$

$$a(t) = \varepsilon \sin(\omega t), \qquad b(t) = 1 - 2\varepsilon \sin(\omega t).$$

- equações de Hamilton

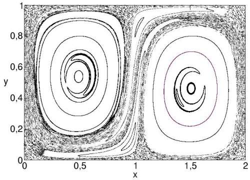
$$\dot{x} = \pi A \sin[\pi f(x, t)] \cos(\pi y)$$

$$\dot{y} = -\pi A \cos[\pi f(x, t)] \sin(\pi y) \frac{df}{dx}.$$

- mapa de Poincaré estroboscópicos: variáveis discretas (o tempo é tomado a múltiplos inteiros do período $\tau = 2\pi/\omega$)

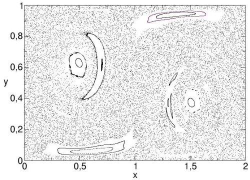
$$x_n = x(t = n\tau), \qquad y_n = y(t = n\tau).$$

Duplo giro com perturbação dependente do tempo



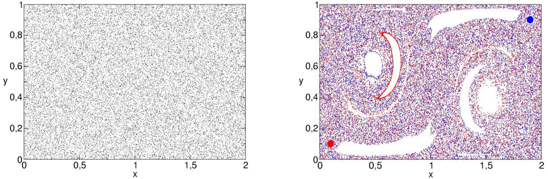
- $\varepsilon = 0,25$ e $\tau = 10$: o retângulo $\mathcal{D}$ não se altera, mas a trajetória heteroclínica V entre os dois pontos de sela $(1,0)$ e $(1,1)$ não mais existe
- as variedades invariantes estável e instável destes dois pontos de sela deixam de ser ligadas suavemente pela trajetória heteroclínica e se cruzam de forma altamente irregular, produzindo um emaranhado homoclínico
- a órbita caótica preenche uma área finita do retângulo $\mathcal{D}$, onde estão imersas ilhas periódicas.
- as partículas podem migrar de um lado a outro do retângulo $\mathcal{D}$ devido ao caos global (ausência de barreiras de transporte)

Duplo giro com perturbação dependente do tempo



- $\varepsilon = 0,5$: o aumento na taxa de difusão de partículas com movimento caótico é tanto maior quanto mais intensa for a perturbação,
- região caótica é mais pronunciada e claramente vai erodindo as trajetórias dentro das ilhas periódicas, tanto as relativas aos vórtices principais, como as ilhas que apareceram entre os dois vórtices
- o aumento da perturbação provoca a destruição de muitas curvas invariantes , tanto nas ressonâncias primárias como nas secundárias.

Duplo giro com perturbação dependente do tempo



- $\varepsilon = 1,0$: a região de movimento caótico das partículas advectadas pelo fluxo se estende ao longo de todo o retângulo $\mathcal{D}$ (alguns remanescentes de ilhas periódicas)
- trajetórias em cor vermelha (resp. azul) são geradas por condições iniciais no disco centrado em $(x_0 = 0,1, y_0 = 0,1)$ (resp. $(x_0 = 1,9, y_0 = 0,9)$).
- a existência de órbitas caóticas que visitam ambos os lados do retângulo $\mathcal{D}$ faz com que os dois fluidos se misturem

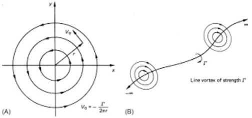
Vórtices em fluidos

- um vórtice é uma região do espaço onde há uma rotação do fluido em relação a um eixo
- vórtices puntiformes: o eixo de rotação é retilíneo e perpendicular ao plano do movimento
- extensões naturais do conceito de partículas na dinâmica Hamiltoniana
- vorticidade de um vórtice puntiforme na origem: $\omega(\mathbf{r}) = \Gamma\delta(\mathbf{r})$
- circulação do vórtice puntiforme

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \Gamma \underbrace{\int_S \delta(\mathbf{r}) da}_{=1} = \Gamma,$$

Sistema de Vórtices puntiformes



- se o vórtice puntiforme estiver no ponto $\mathbf{r}'$: $\omega(\mathbf{r}) = \Gamma\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$
- N vórtices puntiformes localizados nos pontos $\mathbf{r}_i$,

$$\omega(\mathbf{r}) = \sum_i \Gamma_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i).$$

- em escoamentos bidimensionais, a vorticidade é uma constante: ela é transportada pelo escoamento do fluido
- função de fluxo para um vórtice puntiforme na origem

$$\psi(\mathbf{r}) = -(\Gamma/2\pi)\ln|\mathbf{r}|.$$

- para um sistema com N vórtices puntiformes com intensidades Γ_i e localizados em $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2, \ldots N$

$$\psi(\mathbf{r}) = -(1/2\pi)\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|.$$

Sistema de Vórtices puntiformes

- encarando o movimento de vórtices puntiformes como um processo de advecção, as equações de movimento do i-ésimo vórtice serão

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i}.$$

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\}^{1/2} = \{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\}^{1/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \frac{x_i - x_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \qquad \frac{\partial}{\partial y_i}|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \frac{y_i - y_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

$$\dot{x}_i = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \Gamma_j \frac{y_i - y_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}, \qquad (i = 1, 2, \ldots N)$$

$$\dot{y}_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \Gamma_j \frac{x_i - x_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2},$$

- onde as somatórias excluem os termos singulares que aparecem para $i = j$.

Função de Kirchhoff-Routh

- cada vórtice estabelece em torno de si um campo de velocidades de módulo $\Gamma/2\pi r$, onde r é a distância ao vórtice
- havendo mais de um vórtice, qualquer um deles sofrerá advecção devido à velocidade combinada produzida por todos os outros vórtices
- a velocidade de um vórtice num dado instante será a soma vetorial das velocidades produzidas, em sua posição, por todos os outros vórtices.
- função de Kirchhoff-Routh

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \Gamma_i \Gamma_j \ln |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|.$$

- reescrevemos as equações de movimento dos vórtices como

$$\Gamma_i \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \Gamma_i \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Hamiltoniana do sistema de vórtices

- variáveis canonicamente conjugadas

$$q_i = \begin{cases} \sqrt{\Gamma_i} x_i & \text{se } \Gamma_i > 0, \\ \sqrt{-\Gamma_i} y_i & \text{se } \Gamma_i < 0, \end{cases}, \qquad p_i = \begin{cases} \sqrt{\Gamma_i} y_i & \text{se } \Gamma_i > 0, \\ \sqrt{-\Gamma_i} x_i & \text{se } \Gamma_i < 0, \end{cases}.$$

- equações de Hamilton para a função de Kirchhoff-Routh

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots N)$$

- cada vórtice puntiforme corresponde a um grau de liberdade: suas coordenadas no plano formam um par canônico
- um sistema de N vórtices terá N graus de liberdade
- $N = 1$: como $H = H(p_1, q_1)$ é independente do tempo, é uma constante do movimento, logo é um sistema integrável
- colchetes de Poisson

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\Gamma_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right),$$

Integrais do movimento

- colchetes de Poisson fundamentais:

  $\{x_1, \Gamma_1 y_1\} = \{x_2, \Gamma_2 y_2\} = \ldots = 1,\ \{x_1, y_2\} = \{x_2, y_1\} = \{x_1, x_2\} =$

- equação de evolução temporal de uma quantidade f

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}.$$

- três quantidades ligadas ao impulso linear total do sistema

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i x_i, \qquad P = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i y_i, \qquad I = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \left(x_i^2 + y_i^2\right).$$

$$\{Q, H\} = \{P, H\} = \{I, H\} = 0.$$

- todas são constantes do movimento. Estarão em involução?

$$\{Q, P\} = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i, \qquad \{Q, I\} = 2P, \qquad \{P, I\} = -2Q,$$

- definindo a combinação $J = Q^2 + P^2$

  $\{J, I\} = \{Q^2 + P^2, I\} = 2Q\{Q, I\} + 2P\{P, I\} = 4QP - 4PQ = 0.$

- portanto as três integrais do movimento H, I e J estão em involução
- logo os casos de $N = 2$ e $N = 3$ vórtices são integráveis para quaisquer valores das suas intensidades Γ_i
- o caso de $N = 4$ é, em geral, não-integrável. Há dois casos particulares interessantes
  1. se $\sum_{i=1}^{4} \Gamma_i = 0$ então $\{Q, P\} = 0$
  2. se $P = Q = 0$
- em ambos, haverá quatro integrais do movimento independentes: P, Q, I e H, e o sistema de quatro vórtices será integrável
- O caso de $N = 2$ vórtices puntiformes é integrável e tem uma solução analítica exata, no plano complexo, para $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$
- equações de movimento dos vórtices

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{2\pi}\Gamma_2 \frac{y_1 - y_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}, \qquad \dot{y}_1 = \frac{1}{2\pi}\Gamma_2 \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2\pi}\Gamma_1 \frac{y_2 - y_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}, \qquad \dot{y}_2 = \frac{1}{2\pi}\Gamma_1 \frac{x_2 - x_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}.$$

Solução para $N = 2$ vórtices

- definindo as variáveis complexas

$$z_1 = x_1 + iy_1, \qquad z_2 = x_2 + iy_2,$$

- reescrevemos as equações como

$$\dot{z}_1 = \frac{i}{2\pi}\Gamma_2 \frac{z_1 - z_2}{|z_1 - z_2|^2}, \qquad \dot{z}_2 = \frac{i}{2\pi}\Gamma_1 \frac{z_2 - z_1}{|z_1 - z_2|^2}.$$

- Vamos considerar as quantidades seguintes

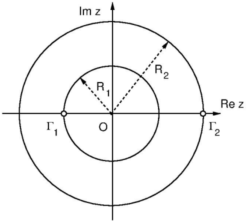
$$C = \frac{\Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \qquad D^2 = |z_1 - z_2|^2 = (z_1^* - z_2^*)(z_1 - z_2).$$

- ambas são constantes do movimento: C é a posição do baricentro dos dois vórtices no plano complexo, e $\sqrt{D^2}$ a sua distância mútua
- as equações de movimento ficam desacopladas

$$\dot{z}_1 = \frac{i(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi D^2}(z_1 - C) = i\omega(z_1 - C), \qquad \dot{z}_2 = \frac{i(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi D^2}(z_2 - C)$$

$$\omega = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi D^2},$$

Solução para $N = 2$ vórtices



- alicando a transformação canônica

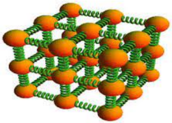
$$z_1 - C = \sqrt{2R_1}e^{i\theta_1}, \qquad z_2 - C = \sqrt{2R_2}e^{i\theta_2},$$

- e igualando as partes real e imaginária,

$$\dot{R}_1 = 0, \qquad \dot{\theta}_1 = \omega, \qquad \dot{R}_2 = 0, \qquad \dot{\theta}_2 = \omega.$$

- os vórtices giram (no plano complexo) em círculos concêntricos de raios R_1 e R_2 com a mesma velocidade angular ω em torno do seu baricentro
- se $\Gamma_1 = \Gamma_2$ os vórtices movem-se no mesmo círculo
- se $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$, o baricentro tende ao infinito e os vórtices deslocam-se paralelamente com a mesma velocidade.

O limite do contínuo



- descrição Lagrangiana: fluido como um sistema de partículas infinitamente próximas entre si, que resulta aplicando o limite do contínuo a um sistema discreto de partículas, como por exemplo uma cadeia de osciladores harmônicos acoplados
- partícula do fluido localizada, no tempo t, no ponto do espaço de coordenadas (x, y, z)
- deslocamento da partícula: $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}, t) = (\eta_x, \eta_y, \eta_z)$
- componentes do deslocamento (η_x, η_y, η_z) são as coordenadas generalizadas, enquanto as coordenadas cartesianas são meros parâmetros, assim como o tempo
- notação de índices
  1. coordenadas cartesianas x_k: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$,
  2. componentes do deslocamento das partículas η_j: $\eta_1 = \eta_x$, $\eta_2 = \eta_y$, $\eta_3 = \eta_z$.

O limite do contínuo

- velocidades generalizadas: derivadas temporais das componentes do deslocamento das partículas do fluido $\dot{\eta}_j$, com $j, k = 1, 2, 3$

$$\eta_{j,k} = \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k}, \qquad \dot{\eta}_{j,k} = \frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial x_k}.$$

- a Lagrangiana L é uma quantidade extensiva. Logo definimos a densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}$ como

$$L = \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \mathcal{L},$$

- em geral $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\eta_j, \dot{\eta}_j, \eta_{j,k}, x_k, t\right)$
- princípio de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \sum_{j=1}^{3} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} \delta \eta_j + \underline{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} \delta \dot{\eta}_j} + \sum_{k=1}^{3} \underline{\underline{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \delta \eta_{j,k}}} \right\} = 0$$

O limite do contínuo

- Equações de Lagrange para o campo de deslocamento das partículas do fluido

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} - \sum_{k=1}^{3} \frac{d}{dx_k}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}}\right) = 0,$$

- derivada funcional da Lagrangiana em relação a η_j:

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} - \sum_{k=1}^{3} \frac{d}{dx_k}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}}\right).$$

- como a densidade de Lagrangiana não depende das derivadas espaciais de $\dot{\eta}_j$, a derivada funcional respectiva é

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j}.$$

- forma alternativa das equações de Lagrange s

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j}\right) = 0$$

Descrição Hamiltoniana do fluido

- momenta canonicamente conjugados

$$p_j = \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \pi_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_j},$$

- densidade de momentum

$$\pi_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j}.$$

- a Hamiltoniana é a transformada de Legendre da Lagrangiana

$$H = \sum_{k=1}^{3} p_k \dot{\eta}_k - L = \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H} = \sum_{k=1}^{3} \pi_k \dot{\eta}_k - \mathcal{L}.$$

- equações de Hamilton

$$-\dot{\pi}_k = \frac{\delta H}{\delta \eta_k} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_k} - \sum_{j=1}^{3} \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{k,j}} \right)$$

$$\dot{\eta}_k = \frac{\delta H}{\delta \pi_k} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Descrição Hamiltoniana do fluido

- colchetes de Poisson

$$\{G, H\} = \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\delta G}{\delta \eta_k} \frac{\delta H}{\delta \pi_k} + \frac{\delta G}{\delta \pi_k} \frac{\delta H}{\delta \eta_k} \right).$$

- mesmas propriedades do caso discreto (sistemas de partículas)
- derivada total de uma função arbitrária

$$G(\eta_k, \pi_k, t) = \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \mathcal{G}$$

$$\frac{dG}{dt} = \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t},$$

- constante do movimento $dG/dt = 0$. Se G não depende explicitamente do tempo, então $\{G, H\} = 0$
- como $\{H, H\} = 0$, então H é constante do movimento se não depende explicitamente do tempo

Vibrações sonoras num gás

- campos envolvidos
  1. deslocamento das partículas do fluido $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$
  2. pressão p, densidade ρ (p_0 e ρ_0: valores no equilíbrio)
- ondas sonoras: perturbações infinitesimais destas grandezas.
- densidades de energia cinética e potencial

$$T = \int_V dV \mathcal{T}, \qquad U = \int_V dV \mathcal{U},$$

- onde $dV = dx_1 dx_2 dx_3$. Uma partícula do fluido de massa $dM = \rho_0 dV$ tem um elemento de energia cinética

$$dT = \frac{1}{2} dM \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 = \frac{1}{2} \rho_0 dV \left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2 \right),$$

- densidade de energia potencial seja uniforme ao longo do volume V_0 no equilíbrio, então $U = \mathcal{U} V_0$
- a onda sonora leva à expansão/compressão do gás: pequena variação de volume ΔV.

Vibrações sonoras num gás

- se o trabalho é realizado **sobre** o gás, o correspondente aumento da sua energia potencial é igual a $-pdV$
- numa variação quase-estática de volume a energia potencial

$$\mathcal{U}V_0 = -\int_{V_0}^{V_0+\Delta V} pdV.$$

- considerando a expansão/contração do gás como um processo adiabático $pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma = const.$, onde $\gamma = C_p/C_v$ é a razão entre as capacidades térmicas a pressão e volume constantes do gás, a integração resulta em

$$\mathcal{U}V_0 = -\frac{p_0 V_0^\gamma}{1-\gamma} V_0^{1-\gamma} \left[\left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^{1-\gamma} - 1 \right]$$

- supondo que $\Delta V \ll V_0$ usamos a expansão $(\alpha = 1 - \gamma)$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)x^2 + \dots \qquad x = \Delta V / V_0$$

$$\mathcal{U}V_0 = -p_0\Delta V + \frac{1}{2}\gamma p_0 V_0^{-1}(\Delta V)^2$$

como $\rho = dM/dV$, onde M é a massa do gás,

$$dV = -\frac{M}{\rho_0^2}d\rho, \Rightarrow \Delta V = -\frac{M}{\rho_0}\sigma = -V_0\sigma,$$

variação relativa de densidade do gás

$$\sigma = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \Rightarrow \mathcal{U} = p_0\sigma + \frac{1}{2}\gamma p_0\sigma^2$$

devido à compressão/expansão do gás provocada pela passagem da onda sonora, haverá um fluxo de massa

$$\oint_S \rho_0 \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_V dV \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\eta},$$

a massa envolvida pela superfície S é

$$M = \int dV \rho = \rho_0 \int dV(1+\sigma) = M_0 + \Delta M,$$

a variação (negativa) de massa é $-\Delta M = \rho_0 \int dV \sigma$

- devido à conservação de massa, o fluxo será responsável por uma variação na massa M do fluido envolvido pela superfície

$$-\rho_0 \int dV \sigma = \int_V dV \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} \Rightarrow \sigma = -\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}$$

- como $\dot{\rho} = \rho_0 / \Delta t$ é a taxa de variação da densidade do gás, esta relação é equivalente à equação da continuidade

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \dot{\boldsymbol{\eta}}) = 0,$$

- densidade de energia potencial em função da velocidade

$$\mathcal{U} = -p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2} \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})^2,$$

- densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 + 2 p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} - \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})^2 \right\}$$

- equação de movimento do fluido na descrição Lagrangiana,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} - \sum_{k=1}^{3} \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \right) = 0,$$

Equação das ondas sonoras no gás

- derivadas da densidade de Lagrangiana

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\eta_j} = \rho_0 \sum_{k=1}^{3} \dot\eta_k \delta_{kj} = \rho_0 \dot\eta_j, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} = p_0 I_{jk} - \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) I_{jk},$$

$$I_{jk} = \frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{\eta})}{\partial(\partial\eta_j/\partial x_k)} = \frac{\partial}{\partial(\partial\eta_j/\partial x_k)} \sum_{\ell=1}^{3} \eta_{\ell,\ell} = \sum_{\ell=1}^{3} \delta_{j\ell}\delta_{\ell k} = \delta_{jk}$$

- o termo $p_0\delta_{jk}$ representa uma constante aditiva na Lagrangiana, que pode portanto ser ignorada, donde

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left\{\rho_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 - \gamma p_0 (\nabla\cdot\boldsymbol{\eta})^2\right\}$$

- equações de Lagrange

$$-\rho_0 \ddot\eta_j + \gamma p_0 \frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}) = 0, \qquad (j = 1, 2, 3),$$

e que podem ser sintetizadas numa única equação vetorial

$$\rho_0 \ddot{\boldsymbol{\eta}} - \gamma p_0 \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}) = 0.$$

Equação das ondas sonoras no gás

- tomando o divergente desta equação

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} - \gamma p_0 \nabla^2 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) = 0.$$

- como $\sigma = -\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}$ obtemos a equação das ondas sonoras

$$\nabla^2 \sigma - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0,$$

- velocidade de fase das ondas sonoras no gás $v = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$
- densidade de momentum

$$\pi_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_k} = \rho_0 \dot{\eta}_k \Rightarrow \boldsymbol{\pi} = \rho_0 \boldsymbol{\eta},$$

- densidade de Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \rho_0 \dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 - \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})^2 \right\} = \frac{1}{2\rho_0} \boldsymbol{\pi}^2 + \frac{\gamma p_0}{2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})^2,$$

- equações de Hamilton

$$\dot{\eta}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} = \frac{1}{\rho_0} \pi_k, \quad \dot{\pi}_k = \sum_{j=1}^{3} \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{k,j}} \right) = \gamma p_0 \frac{d}{dx_k} (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}).$$