

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

Bifurcações, Controle e Sincronização do  
Caos nos Circuitos  
de Matsumoto-Chua

Elinei Pinto dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

INSTITUTO DE FÍSICA  
Serviço de Biblioteca e Informação  
Tombo: 3528  
ex. 2

Tese apresentada ao Instituto de  
Física da Universidade de São  
Paulo para obtenção do título de  
Doutor em Ciências

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (IFUSP) *Iberê Luiz Caldas*  
Prof. Dr. Celso Grebogi (IFUSP)  
Prof. Dr. José Carlos Sartorelli (IFUSP)  
Prof. Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau (INPE)  
Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana (UFPR)

São Paulo  
2001

*Armando Corbani Ferraz*  
Prof. Armando Corbani Ferraz  
Presidente da Comissão de Pós Graduação

5301155352  
S2376  
D  
ex. 2

### FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Santos, Elinei Pinto dos Santos

Bifurcações, Controle e Sincronização dos Circuitos  
de Matsumoto – Chua. São Paulo, 2001.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo.  
Instituto de Física – Departamento de Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas  
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Caos; 2. Controle; 3. Sincronização;  
4. Bifurcações.

USP/IF/SBI-022/2001

# Agradecimentos

Ao término de um trabalho, que durou quatro anos, muitas pessoas fizeram parte da minha vida. Somaram-se dessa forma, àquelas que me acompanham desde a tenra infância, ampliando meu universo de amizade social e científica. Ao tentar agradecer, nominando pessoas, sempre corremos o risco de deixar alguém de fora e as que referenciamos, nem sempre dizemos o que elas gostariam de ouvir. Contudo, algumas pessoas foram direta ou indiretamente responsáveis pela possibilidade de neste momento ter a oportunidade de agradecer-las numa tese de doutorado na Universidade de São Paulo. Friso o fato, pela importância pessoal que tem para mim e por todas as dificuldades que passei inerente da condição social e regional que nasci.

Agradeço à Deus pelo discernimento e humildade de perceber sua presença em todos os momentos de minha vida, seja na velha maloca que me criei, no rio que mergulhei, na imensidão do verde e do cheiro da floresta amazônica. Os órgãos dos sentidos me fizeram querer questionar e saber mais sobre a natureza que eu via, sentia e cheirava, isto me fez ser um Físico. Ampliar meus conhecimentos científicos só me fizeram reforçar minha crença de que a mente é tão pequena para entender ou questionar sua existência. Mas prova maior e mais fácil de perceber está na guerreira mulher que me deu como mãe, Iolane Pinto dos Santos, e no homem sereno e bom que me deu como pai, Avelino Pereira dos Santos. Sei que hoje, mais do que nunca que, “naquela mesa está faltando ele e a saudade dele está doendo em nós...”. Tenho a felicidade de ainda ter você, mãe, que apesar de sua parca cultura, sempre me fez ver nos estudos mais do que uma forma de ascensão social, mas também uma forma melhor de servir, sentir e ver o mundo ao meu redor. Acreditei no conselho: “a maior riqueza que deixo é o conhecimento”. E sei do seu esforço, da sua luta incansante para me possibilitar ter este tesouro. A lavadeira de roupa e o cozinheiro fizeram com que um amazônida, da periferia de Santarém aprendesse um pouco de Física e pudesse defender uma tese de doutorado. Este trabalho é dedicado a todos seus esforços e amor dedicado a mim.

A você Elivilson, obrigado pelo exemplo e dedicação. Você assumiu cedo a responsabilidade de cuidar dos irmãos menores. E particularmente, em relação à minha pessoa, sempre fez com dedicação e amor. A minha graduação só foi possível com tua ajuda, em todos os momentos que precisei nunca me faltastes, esta é uma oportunidade de registrar meu muito obrigado. Aos meus irmãos e suas famílias: Eliana, Elivaldo, Elinaldo, Elizabete e Elinete, obrigado pelo incentivo e carinho para comigo e por cuidarem de nossa mãe durante todos esse anos que estive ausente. Aos meus sobrinhos, em especial ao Enic por sua admiração e respeito a mim. Um obrigado ao meu cunhado, sempre prestativo, Ivo Rabelo.

Algumas pessoas não estão diretamente ligadas a minha vida em São Paulo, mas fizeram parte da minha vida de forma que foi possível em muitos momentos prosseguir na caminhada. Agradeço meu tio e amigo Raimundo Santana e sua família, que sempre me trataram e tratam como um membro da família. Vocês sempre foram meu porto seguro das minhas tentativas de alçar vôos, que por várias vezes deram errados. Sempre me senti em casa com vocês. A minha amiga e colega de trabalho Simone Fraiha, que nunca mediu esforços em me socorrer (obrigado pelo hospital). Agradeço aos amigos e hoje parceiros científicos Jessé Carvalho, pela discussões científicas ou não, e Licurgo Peixoto, por ajudar um concorrente no mesmo concurso a fazer um plano de aula (um belo exemplo para começar uma amizade). E hoje, por me apresentar o outra margem da UFPA e o chourinho do bar do Gilson...

Estes quatro anos em São Paulo foi uma vida ..., grandes conquistas, alegrias e amizades esta cidade me trouxe. Gostaria de agradecer aos meus parceiros de apartamento Luiz Mal-lacarne, o casal Carlos e Janice e ao amigo e colega de departamento Sérgio Vizeu, os quais por muito tempo foram minha família. E mesmo à distância ... amigos para sempre. Quero agradecer ao meu orientador o Dr. Iberê Caldas, principalmente por ter me aceitado de um outro orientador e confiado no meu potencial. A forma de conduzir o grupo de pesquisa, criando um ambiente harmonioso e operacional, valorizando a independência científica e ao mesmo tempo prezando pela amizade, são exemplos a serem seguidos. Agradeço a todo o grupo de alunos que conviveram comigo durante o desenvolvimento deste trabalho, todos sempre me foram cordiais e me propiciaram um ambiente de trabalho agradável que sentirei saudades. Ao novo amigo e certamente parceiro científico, Murilo Baptista, agradeço por todas discussões científicas, sugestões e leitura deste trabalho. E, acima do conhecimento científico, indiscutível que sempre teve a humildade e alegria de compartilhar, resalto seu espírito alegre e cordial de conduzir a vida dia-a-dia. A Kai Ullmann, agradeço pelos programas de FFT e PGLOT que fizeram com que os gráficos gerados neste trabalho tivessem uma aparência profissional. Ao Silvio pela parceria e amizade nos desafios que enfrentamos

juntos, à medida que desenvolvíamos nosso trabalho de tese, e pelas inúmeras sugestões e ajudas computacionais. À Anselmo Rodrigues e Renê Medrano pela agradável convivência. Ao Renê, um obrigado especial pela figura do atrator no novo sistema de coordenadas, ficou legal! E ao Anselmo, por me ceder os esquemas do circuito de Matsumoto-Chua. À Gisele e ao que vai chegar ... seja bem-vindo.

Agradeço à banca examinadora pela paciência dedicada à leitura desta tese. Antecipadamente pelas sugestões e encaminhamentos futuros. À sempre prestativa Maria M. Vara (Lia) estendidos aos demais funcionários que são a engrenagem de funcionamento da USP.

Quero agradecer à todo quadro de professores do departamento de Física da UFPA, pela convivência e amizade e pela minha liberação para a execução deste trabalho de tese. Em especial ao professor J. M. F. Bassalo que me acolheu na iniciação científica e me indicou para o doutoramento na USP.

Aos meus filhos Suellem e João Victor, mesmo longe dos olhos, vocês sempre estarão perto do coração, perdão pela minha ausência.

À minha família, Valéria Rodrigues e Guilherme Rodrigues, uma nova manifestação do amor divino para comigo. À você Valéria, meu muito obrigado pelo amor, pela amizade e dedicação a mim e a nossa família. E também por me suportar durante as fases críticas deste trabalho (ninguém é perfeito). Te amo ... Ao meu filho Guilherme, que me ensinou a ser pai, sua presença enche minha vida de alegria ... um poema em forma de gente: "a emoção de te esperar jamais irei esquecer, que venhas com a força que tens, o mundo que ver-te sorrir, eu quero tomar-te em meus braços e te embalar pra dormir ... hoje somos metade, porque parte de nós é amor, e a outra, você."

*dar do pouco que se tem, ao que tem menos  
ainda, enriquece o doador, faz sua alma ainda  
mais linda ... parece coisa tão singela, aos olhos  
de Deus, porém é das obras a mais bela.*

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>3</b>
<b>Resumo</b>	<b>11</b>
<b>Abstract</b>	<b>13</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>15</b>
<b>2 Circuito de Matsumoto-Chua e seus atratores</b>	<b>21</b>
2.1 O circuito de Matsumoto-Chua . . . . .	21
2.2 Dobramento de período e atratores . . . . .	23
2.2.1 Bifurcação de Hopf . . . . .	24
2.2.2 Surgimento do atrator tipo Rössler . . . . .	25
2.2.3 Efeito da curva característica linear por partes . . . . .	27
2.2.4 Surgimento do atrator Espiral-Dupla . . . . .	27
2.3 Frequência característica do circuito . . . . .	29
<b>3 Métodos de caracterização dos atratores</b>	<b>33</b>
3.1 Aspectos teóricos e definições dos sistemas dinâmicos . . . . .	33
3.2 Atratores e propriedades estatísticas das órbitas . . . . .	35
3.2.1 Atratores . . . . .	36
3.2.2 Atrator caótico . . . . .	36
3.3 Bacias de atração do circuito de Matsumoto-Chua . . . . .	38
3.3.1 Bacia de atração dos atratores tipo Rössler . . . . .	38
3.3.2 Bacia do atrator Espiral-Dupla . . . . .	41
3.4 Linearização e variedades invariantes . . . . .	42
3.4.1 Análise linear do circuito de Matsumoto-Chua . . . . .	44

3.5	Métodos para caracterizar o atrator . . . . .	51
3.5.1	Mapa de Poincaré: . . . . .	51
3.5.2	Análise de Fourier . . . . .	53
3.5.3	Diagrama no espaço de parâmetros usando autocorrelação . . . . .	55
3.6	Outras técnicas para análise de sistemas caóticos . . . . .	56
3.6.1	Expoente de Lyapunov . . . . .	56
3.6.2	Dimensão do atrator Espiral-Dupla . . . . .	59
3.6.3	Diagrama de bifurcação . . . . .	60
3.6.4	Diagrama nos espaços das frequências . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Rotas para o caos - sistema sem perturbação</b>	<b>65</b>
4.1	Equação de sensibilidade . . . . .	65
4.1.1	Introdução . . . . .	65
4.2	Diagramas no espaço dos parâmetros sem perturbação . . . . .	69
4.3	Coexistência de atratores . . . . .	74
4.3.1	Diagrama no espaço dos parâmetros para região de coexistência . . . . .	74
4.3.2	Bacia para atratores coexistentes . . . . .	74
4.4	Crise e intermitência . . . . .	78
4.4.1	Surgimento do atrator Espiral-Dupla - crise de fusão . . . . .	78
4.4.2	Desaparecimento do atrator Espiral-Dupla: crise de fronteira . . . . .	80
4.4.3	Crise nas janelas de periodicidade . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Análise biespectral</b>	<b>85</b>
5.1	Introdução . . . . .	85
5.2	Biespectro e ondaletas . . . . .	85
5.2.1	Definição e propriedades do biespectro . . . . .	86
5.2.2	Autobiespectro . . . . .	88
5.2.3	Definição da transformada de ondaletas . . . . .	89
5.3	Bicoerência do atrator caótico tipo Rössler . . . . .	93
5.4	Bicoerência do atrator Espiral-Dupla . . . . .	94
5.4.1	Biespectro na crise de fusão . . . . .	96
5.5	Caos por Shil'nikov, simetria e perda do acoplamento quadrático . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Rotas para o caos - sistema forçado</b>	<b>107</b>
6.1	O circuito de Matsumoto-Chua forçado senoidalmente . . . . .	107

6.2	Quase periodicidade . . . . .	108
6.3	Diagramas no espaço de parâmetros . . . . .	110
6.3.1	Diagrama no espaço de parâmetros $V_g$ e $f$ . . . . .	110
6.3.2	Línguas de Arnold . . . . .	113
6.3.3	Diagrama no espaço de parâmetros $f$ e $g$ . . . . .	117
6.4	Rotas para o caos através da quase periodicidade . . . . .	119
6.4.1	Introdução . . . . .	119
6.4.2	Crise cíclica . . . . .	120
6.4.3	Quebra abrupta do toro . . . . .	120
6.4.4	Dobramento de toro - cenário por dobramento de período . . . . .	124
6.4.5	Sobre os atratores caóticos a partir da quase periodicidade . . . . .	127
6.4.6	Conclusões do capítulo . . . . .	129
<b>7</b>	<b>Métodos de controle</b> . . . . .	<b>131</b>
7.1	Fundamentos teóricos do controle do caos, conceitos e aplicações . . . . .	131
7.2	Supressão do caos através de forçamento periódico . . . . .	134
7.2.1	Línguas de Arnold - regiões de sincronização . . . . .	135
7.3	Método de Hwang . . . . .	139
7.4	Método de Ott-Grebogi-Yorke (OGY) . . . . .	142
7.5	O método de realimentação . . . . .	150
7.5.1	Lyapunov condicional e equação variacional . . . . .	151
7.6	Método OPCL . . . . .	154
7.7	Método OPCL para migração entre órbitas . . . . .	160
<b>8</b>	<b>Sincronização</b> . . . . .	<b>165</b>
8.1	Introdução . . . . .	165
8.2	Fundamentos gerais de sincronização . . . . .	166
8.2.1	Sincronização de oscilações periódicas . . . . .	166
8.2.2	Sincronização de oscilações caóticas . . . . .	167
8.3	Método Pecora-Carroll . . . . .	168
8.3.1	Lyapunov condicional . . . . .	169
8.3.2	Variedade de sincronização e variedade transversa . . . . .	172
8.4	Método de realimentação . . . . .	173
8.4.1	Acoplamento unidirecional . . . . .	174

8.4.2	Diagrama no espaço dos parâmetros do expoente de Lyapunov condicional transverso . . . . .	177
8.4.3	Acoplamento mútuo . . . . .	179
8.5	Método de Jackson e Hübbller aplicado à sincronização . . . . .	181
8.5.1	Sincronização em sistemas com coexistência de atratores . . . . .	181
8.6	Bacias de sincronização . . . . .	185
8.6.1	Bacia de atração - atratores tipo Rössler . . . . .	185
8.6.2	Bacia de sincronização para acoplamento unidirecional . . . . .	188
8.6.3	Bacia de sincronização para acoplamento mútuo . . . . .	192
8.7	Bacia de sincronização - regime Espiral-Dupla . . . . .	193
8.7.1	Acoplamento unidirecional . . . . .	193
8.7.2	Bacia crivada . . . . .	195
8.7.3	Expoente de incerteza - $\alpha$ . . . . .	196
8.7.4	Acoplamento mútuo . . . . .	199
8.7.5	Bacia inter-crivada . . . . .	200
8.8	Sincronização de caos aplicado a comunicação . . . . .	202
8.8.1	Esquema de Cuomo e Hoppenheim . . . . .	204
8.8.2	Segurança em comunicação . . . . .	205
8.8.3	Conclusão do capítulo . . . . .	207
<b>9</b>	<b>Conclusão</b>	<b>209</b>
<b>A</b>		<b>215</b>
<b>B</b>		<b>227</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>229</b>

# Resumo

Neste trabalho utilizamos técnicas de controle e sincronização de sistemas caóticos, visando o uso delas para comunicação com caos. Aplicamos tais técnicas no circuito elétrico de Matsumoto-Chua. Inicialmente, mostramos a sensibilidade dos atratores deste circuito quando variamos os seus parâmetros. Determinamos as suas bacias de atração. Através da análise biespectral, verificamos que o acoplamento quadrático é alto para o atrator tipo Rössler, e quase nulo para o atrator Espiral-Dupla. Para a caracterização global do circuito, apresentamos diagramas, no espaço de parâmetros, com os valores dos expoentes de Lyapunov ou autocorrelação. A seguir estudamos esse circuito com uma perturbação senoidal. Com isto, identificamos novos cenários para a transição para o caos a partir da quase periodicidade. Duas destas transições foram identificados pela primeira vez nesse circuito. Aplicamos ao circuito cinco métodos de controle de caos: supressão de caos por sincronização de frequências, controle de órbitas periódicas instáveis pelos métodos OGY e de realimentação, estabilização no ponto de equilíbrio (método de Hwang), migração e arraste (método OPCL). Finalmente, consideramos dois circuitos de Matsumoto-Chua acoplados e determinamos as suas bacias de sincronização. Mostramos que a sincronização dos circuitos acoplados pode não depender das condições iniciais (fronteira das bacias contínua) ou ser extremamente sensível às condições iniciais (fronteira das bacias do tipo crivada ou intercrivada).

# Abstract

In this work we use control and synchronization of chaos techniques aiming their implementation in communicating with chaos. These techniques are applied into the electric circuit of Matsumoto-Chua. Initially, we show the sensibility of the attractors under parameter variations. We determine the attractor basin of attractions. Through the bi-spectral analysis, we verify that the quadratic coupling is high for the Rössler-type attractor, and almost null for the Double-Scroll attractor. For the global characterization of this system, we show parameter diagrams of the Lyapunov exponents or auto-correlation. We also study this circuit under a sinusoidal perturbation. In this configuration, we identify new scenario for the transition to chaos through quasi-periodicity. Two of these transitions are identified by us for the first time in this perturbed circuit. We apply five control of chaos techniques: chaos suppression by frequency synchronization, control of unstable periodic orbits by the OGY and feed-back methods, stabilization of the equilibrium points (Hwang method), migration and entrainment (OPCL method). Finally, we consider two acoupled Matsumoto-Chua's circuits and determine their synchronization basins. We show that the synchronization in these coupled circuits may not depend on the initial conditions (continuous synchronization basin boundary) or may depend extremely on the initial conditions (riddled or intermingled synchronization basin boundaries).

# Capítulo 1

## Introdução

O grande poder da física é alicerçado na capacidade de relacionar causa e efeito. Sob as bases das leis de Newton da gravitação, por exemplo, eclipses podem ser previstas a centenas de anos no futuro. Contudo, há outros fenômenos que não são previsíveis. Apesar do movimento da atmosfera obedecer às leis da Física, assim como o movimento dos planetas, a previsão de tempo ainda é feita em termos de probabilidade. Até pouco tempo, havia pouca razão para se duvidar de que essas previsões precisas poderiam em princípio ser alcançadas. Para isso, acreditava-se que seria necessário somente obter e processar uma quantidade suficientemente maior de informação.

Este ponto de vista, determinístico, foi alterado pela descoberta: sistemas determinísticos simples, com uns poucos graus de liberdade, podem gerar comportamentos imprevisíveis. A imprevisibilidade gerada dessa forma é denominada de *CAOS* determinístico [1]. O *CAOS* é gerado por regras fixas e determinísticas, que não envolvem qualquer elemento de chance ou apresentam um gerador explícito de randomicidade. Em princípio, o futuro é completamente determinado pelo passado, porém, na prática, pequenas incertezas são amplificadas, de forma que o comportamento é previsível em um curto lapso de tempo, não obstante, imprevisível em longos intervalos de tempo.

Sistemas não-lineares são as fontes do comportamento caótico [2]. Estes envolvem o conjunto de variáveis físicas intrinsicamente conectadas de tal forma que uma variação inicial em uma das variáveis do sistema não produz uma variação proporcional no comportamento desta variável, nem tão pouco de qualquer outra variável do sistema.

Nos últimos anos, um grande esforço teórico foi empreendido com o objetivo de se estudar e aplicar o caos gerado por sistema não-lineares [1][3]. Aliado a este esforço, o cálculo numérico das soluções mostrou-se uma ferramenta essencial para o entendimento e novos

direcionamentos de pesquisa na área. A velocidade de processamento e a precisão numérica obtida com os computadores atuais permitem que se acompanhe a evolução de qualquer sistema por milhares de evoluções de seu período. As técnicas numéricas já corroboradas para estudo de sistemas lineares, como a transformada de Fourier (FFT) e o mapa de Poincaré, se aliaram às novas técnicas próprias para estudo de sistemas não-lineares, tais como o expoente de Lyapunov e a entropia topológica [4][5]. Para a maioria dos sistemas físicos não é possível se obter uma solução analítica para o problema. As soluções numéricas se fazem necessárias e essenciais. E estas soluções, para sistemas apresentando dinâmica caótica, revelam estruturas e padrões onde a interação entre o método analítico e o numérico se entrelaçam.

A descoberta de características universais e de princípios fundamentais, comuns a uma imensa gama de sistemas não-lineares das mais diversas áreas, é a força propulsora de intensas pesquisas na área da teoria de dinâmica não-linear. De certa forma, a teoria dos sistemas não-lineares possibilita a interdisciplinaridade entre as diferentes áreas científicas. Padrões e leis de escalas foram determinadas para sistemas de áreas totalmente diferentes, mostrando que a maneira pela qual os sistemas desenvolvem comportamento caótico tem caráter universal [6]. Mas, é válido lembrar, os resultados obtidos nesta área, nos últimos anos, tem seus primórdios nos estudos de Poincaré sobre o problema dos três corpos. Ele certamente vislumbrou pela primeira vez a complexidade inerente dos sistemas não-lineares [7][8].

Neste trabalho de tese estudamos a dinâmica não-linear, explorando suas propriedades e possíveis aplicações, com ênfase nas bifurcações, no controle e na sincronização de sistemas caóticos. Para isto, escolhemos o circuito elétrico de Matsumoto-Chua [9], o qual é um sistema de dimensão-3 (a menor dimensão de um fluxo caótico) que pode ser implementado em laboratório e modelado facilmente por equações diferenciais.

O circuito de Matsumoto-Chua como modelo de investigação da dinâmica não-linear mostra-se como um dos sistemas físicos adequados para ser estudado de três formas distintas: numericamente, analiticamente e experimentalmente [10]. Os resultados obtidos por simulação numérica, análise analítica ou em laboratório podem ser comparados e as diferentes abordagens podem servir de guia entre si para novas pesquisas. Para experiências simples, o circuito de Matsumoto-Chua não requer grande sofisticação nem altos custos para sua implementação. De fato, é possível adquirir o circuito inteiro fabricado em um único circuito integrado[10].

A despeito da gama imensa de publicações envolvendo o circuito de Matsumoto-Chua [10], este ainda se mostra um sistema físico a ser explorado e requer novos estudos para determinar, por exemplo, o tipo de acoplamento não-linear presente nas séries temporais dos atratores

caóticos gerados pelo circuito, as bacias de atração para os diferentes atratores periódicos ou caóticos, as propriedades das fronteiras das bacias geradas, a dependência das soluções geradas pelo circuito com relação às variações nos parâmetros do sistema (fundamental para aplicações de métodos de controle).

Inúmeros trabalhos foram realizados com o objetivo de caracterizar a geometria e a topologia dos atratores gerados pelo circuito [10]. Uma característica marcante do circuito é que ele permite obter regimes caóticos sem ou com coexistência de atratores no espaço de fase. Com o intuito de entender os diferentes comportamentos deste sistema e a transição entre eles, aplicamos várias análises, tais como a autocorrelação e o biespectro com a transformada de ondaletas. Determinamos a dependência das equações do circuito com relação aos parâmetros através de uma equação de sensibilidade. A seguir, identificamos, no espaço de parâmetros, os atratores do circuito e as suas transições.

Enquanto o circuito original de Matsumoto-Chua tem sido amplamente estudado, o circuito modificado com um forçamento externo ainda é pouco caracterizado. A quase periodicidade que o circuito perturbado oferece possibilita encontrar novas bifurcações e rotas para o caos. Com o objetivo de determinar novas rotas para o caos e contribuir com a análise do sistema forçado, dedicamos uma grande parte desta tese ao circuito de Matsumoto-Chua com uma perturbação periódica. A introdução de novos parâmetros, a frequência e a amplitude da perturbação, permitiu gerar novos diagramas no espaço de parâmetros onde verificamos que os diferentes regimes presentes nestes diagramas formam estruturas mais complexas e apresentam mais diversidade de regimes do que o sistema sem perturbação. Com isto foi possível determinar quatro cenários para o caos via quase periodicidade, sendo dois destes cenários vistos pela primeira vez no circuito de Matsumoto-Chua perturbado.

Com o objetivo de entender e dominar as técnicas de controle e sincronização do caos, visando o uso destas para comunicação com caos, aplicamos cinco métodos de controle ao circuito de Matsumoto-Chua, com objetivos distintos. Na sincronização, exploramos a dependência às condições iniciais para dois circuitos de Matsumoto-Chua com coexistência de atratores. Para isto, o circuito de Matsumoto-Chua é adequado, pois oferece um regime caótico com coexistência de atratores assim como um regime caótico sem coexistência. O estudo da dependência às condições iniciais no processo de sincronização se faz essencial para qualquer método de comunicação baseado em sincronização. A presença de bacia de sincronização crivada e intercrivada observadas nos acoplamentos considerados devem ser evitadas. Por isso, buscamos caracterizar este comportamento em circuitos de Matsumoto-Chua acoplados operando caoticamente.

Esta tese é dividida em oito capítulos. Nos Capítulos 2, 3, 4 e 5 a caracterização e os aspectos teóricos do circuito de Matsumoto-Chua sem perturbação externa. O Capítulo 6 é dedicado exclusivamente ao sistema com uma perturbação externa periódica. Os Capítulos 7 e 8 exploram aplicações do caos com controle e sincronização.

Assim, iniciamos o Capítulo 2 com uma breve introdução das equações que descrevem o circuito [9]. Os possíveis atratores caóticos gerados pelo circuito que serão usados no decorrer da tese são distingüidos através das séries temporais e do espectro de potência.

Os aspectos teóricos e os métodos numéricos usados, com o objetivo de se analisar o comportamento do circuito de Matsumoto-Chua, são brevemente revisados no Capítulo 3. Nele determinamos as bacias de atração dos atratores caóticos gerados [11], os diagramas de bifurcação [12], a dimensão do atrator caótico [13][12], a variedade estável do ponto  $P^0$  e como esta influência a estrutura das bacias dos atratores coexistentes do tipo Rössler. Definimos também uma forma de diagrama no espaço de parâmetros usando a autocorrelação e, finalmente, apresentamos o cálculo dos expoentes de Lyapunov baseado no algoritmo de Wolf *et al.* [14].

No Capítulo 4 fazemos uma análise do circuito através da variação de um ou mais parâmetros. Inicialmente, introduzimos a equação de sensibilidade a fim de identificar quais parâmetros afetam mais as soluções do sistema. Através do cálculo dos expoentes de Lyapunov, geramos vários diagramas no espaço de parâmetros. Com estes diagramas é possível delimitar regiões de caos e periodicidade, coexistência de atratores, assim como transições para o caos.

Com o objetivo de analisar o acoplamento quadrático não-linear das séries temporais dos atratores caóticos do tipo Rössler e Espiral-Dupla, e o comportamento intermitente na transição destes dois regimes, fazemos o cálculo do biespectro através da transformada de ondaletas [15][16]. No Capítulo 5 apresentamos um desenvolvimento teórico breve sobre biespectro e ondaletas juntamente com os resultados obtidos com essa técnica.

Com um forçamento do tipo senoidal ao circuito original de Matsumoto-Chua, obtemos movimentos quase periódicos e com isto novas rotas para o caos. No Capítulo 6 descrevemos este circuito modificado e fazemos uma análise geral dos diagramas no espaço de parâmetros através do cálculo dos expoentes de Lyapunov. Determinamos quatro cenários a partir de quase periodicidade para o caos. Dois destes cenários seguem a rota de Curry-Yorke, a crise cíclica e a quebra suave do toro, este último se desenvolve a partir de uma órbita periódica do interior das línguas de Arnold. Os dois outros cenários que não seguem a rota de Curry-Yorke são o dobramento do toro pela rota de Feigenbaum, e a quebra abrupta do toro. A

crise cíclica e o dobramento do toro pela rota de Feigenbaum são vistos pela primeira vez no circuito de Matsumoto-Chua forçado. Para a outra rota, a quebra abrupta do toro [17], mostramos que a condição necessária e suficiente para isto ocorrer é a presença de um único ponto de sela externo ao toro.

O Capítulo 7 é dedicado à aplicação de cinco métodos de controle de caos ao circuito de Matsumoto-Chua: o método que usa a propriedade de sincronização de frequência para suprimir o caos; o método de Ott, Grebogi e Yorke (OGY) [18], para estabilizar uma órbita periódica instável imersa no atrator; o método de Hwang [19] para estabilizar o sistema nos seus pontos de equilíbrio; o método de realimentação [20], para estabilizar um órbita instável pré-gravada, o método de Jackson e Hübbler [21] para migração e arraste (*entrainment*).

No Capítulo 8 abordamos alguns métodos de sincronização de circuitos de Matsumoto-Chua operando no regime caótico. Analisamos a influência das condições iniciais no processo de sincronização. Para isto, analisamos a sincronização de circuitos operando tanto com coexistência de dois atratores caóticos do tipo Rössler, quanto com um único atrator, o Espiral-Dupla. Mostramos que dois circuitos acoplados operando em diferentes atratores não sincronizam [22][23]. Para contornar essa dificuldade e ampliar a capacidade de sincronização desses circuitos, utilizamos métodos de controle de caos para a troca do atrator de um dos circuitos. Determinamos e caracterizamos o comportamento da bacia crivada em dois circuitos operando caoticamente. Este comportamento deve ser evitado em aplicações, pois como mostramos, o estado final do sistema é indeterminado. E finalmente, aplicamos o método de comunicação, sugerido por Cuomo e Oppenheim, para exemplificar uma possível aplicação baseada em sincronização de sistemas caóticos.

Todos os programas numéricos usados nesta tese, com exceção dos programas para o cálculo do diagrama no espaço das frequências e do biespectro, foram desenvolvidos por nós.

## Capítulo 2

# Circuito de Matsumoto-Chua e seus atratores

Neste capítulo apresentamos o circuito de Matsumoto-Chua e suas propriedades, os atratores deste sistema, entre eles os caóticos do tipo Rössler e o Espiral-Dupla, usados em aplicações nesta tese. Mostramos como se desenvolve o cenário de duplicação de período, o qual inicialmente gera dois atratores caóticos do tipo Rössler coexistindo no espaço de fase. Esses dois atratores colidem e se fundem em um único atrator caótico conhecido na literatura como Espiral-Dupla [9].

### 2.1 O circuito de Matsumoto-Chua

O circuito de Matsumoto-Chua é um sistema dinâmico versátil de fácil implementação em laboratório, com baixo nível de ruído e modelado facilmente por equações diferenciais. Isto o torna um excelente modelo para estudo tanto teórico quanto experimental [10].

Dois capacitores, um indutor, um resistor e um resistor linear por partes compõem o circuito autônomo desenvolvido por Matsumoto e Chua. Através das leis de Kirchoff, determinamos o conjunto de equações diferenciais que descrevem a evolução do sistema. As variáveis dinâmicas são as duas tensões através dos capacitores ( $V_{C_1}$ ,  $V_{C_2}$ ) e a corrente através do indutor ( $i_L$ ). Um ponto no espaço de fase é determinado por  $(V_{C_1}, V_{C_2}, i_L)$ . O diagrama esquemático do circuito é mostrado na Figura 2.1. Do diagrama, nota-se que a conexão do capacitor ( $C_2$ ) e do indutor ( $L$ ) em paralelo constitui o mecanismo de da oscilação, enquanto que  $R$  provém a interação entre os componentes do oscilador formado por  $C_2$ ,  $L$  e

o resistor ativo  $R_{NL}$  junto com  $C_1$ . Além disso,  $R$  é o responsável pela dissipação de energia que restringe as amplitudes das oscilações. O resistor ativo  $R_{NL}$  é o responsável pelo comportamento global não linear do circuito [9].

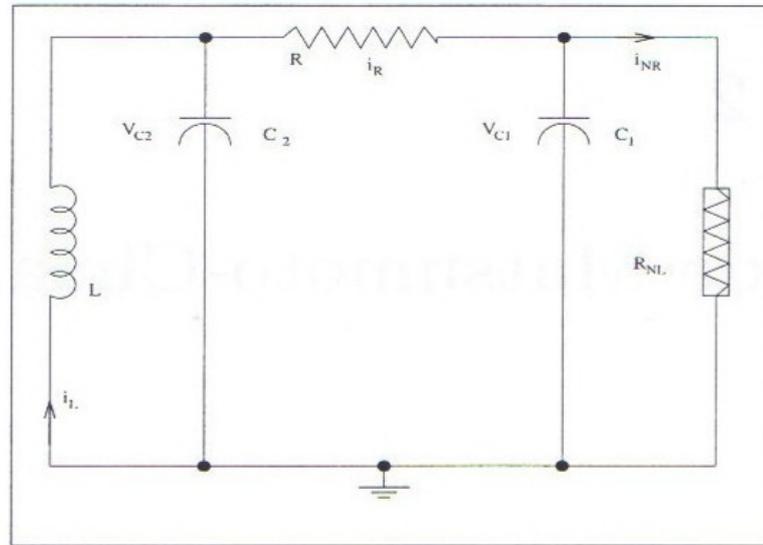


Figura 2.1: Diagrama esquemático do circuito elétrico de Matsumoto-Chua.

Para integrarmos as equações do sistema substituímos os valores experimentais por grandezas reescaladas de forma que as equações tornem-se adimensionais. Este procedimento evita problemas computacionais, que ocorreriam caso usássemos os valores nominais dos componentes elétricos. Neste trabalho usamos o seguinte conjunto de variáveis características do circuito reescaladas;

$$\frac{1}{C_1} = 10,0 \quad \frac{1}{C_2} = 1,0 \quad \frac{1}{L} = 6,0 \quad (2.1)$$

$$g = \frac{1}{R} = [0,50 \dots 0,66] \quad m_0 = -0,5 \quad m_1 = -0,8 \quad B_p = 1,0.$$

Em geral, consideramos o seguinte conjunto de condições iniciais,

$$V_{C_1}(0) = 0,0290, \quad V_{C_2}(0) = 0,2334, \quad i_L(0) = 0,8450 \quad (2.2)$$

e integramos as equações com o método de Runge-Kutta 4ª ordem com um passo de integração de  $h = 0,04$ . Para resultados que exigem maior precisão numérica, como mapa de Poincaré usamos um passo de  $h = 0,005$  e para o cálculo dos expoentes de Lyapunov  $h = 0,01$ .

As equações do circuito usadas em nossa simulação numérica, escritas em variáveis adimensionais, são:

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} &= g(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_{NR}(V_{C_1}), \\
 C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} &= g(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L, \\
 L \frac{di_L}{dt} &= -V_{C_2},
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

onde  $g = 1/R$  é o inverso da resistência linear,  $i_{NR}$  é a corrente através do resistor linear por partes. A dependência de  $i_{NR}$  com  $V_{C_1}$  é mostrada na Figura 2.2.

A curva característica da Figura 2.2 é matematicamente representada por:

$$i_{NR}(V_{C_1}) = m_0 V_{C_1} + 0,5(m_1 - m_0)(|V_{C_1} + B_p| + |V_{C_1} - B_p|). \tag{2.4}$$

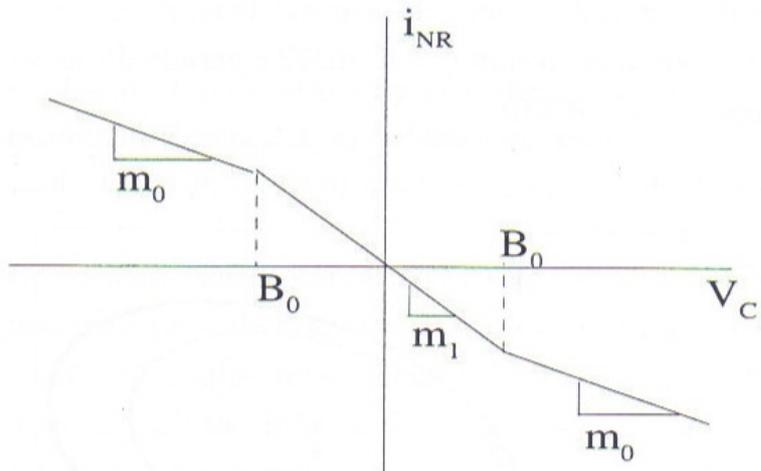


Figura 2.2: Curva característica ( $i_{NR}(V_{C_1})$ ) do resistor linear por partes  $R_{NL}$ .

## 2.2 Dobramento de período e atratores

A Equação 2.3 com os parâmetros especificados em 2.1 tem como soluções atratores periódicos e caóticos. Vamos analisar algumas séries temporais, obtidas integrando numericamente a Equação 2.3, e os atratores que surgem dessas integrações. Nos capítulos subsequentes analisamos em detalhes estes atratores e como eles surgem.

### 2.2.1 Bifurcação de Hopf

Este sistema possui três pontos fixos ( $P^+ = \{-\alpha, 0, g\alpha\}$ ,  $P^0 = \{0, 0, 0\}$ ,  $P^- = \{\alpha, 0, -g\alpha\}$ ), sendo  $\alpha = B_p(m_0 - m_1)/(g + m_0)$ , determinados a partir da equação 2.3, como mostramos no próximo capítulo.

A estabilidade dos pontos fixos muda à medida que variamos o parâmetro  $g$  do sistema. Inicialmente, os pontos  $P^+$  e  $P^-$  perdem a estabilidade gerando dois ciclos limites estáveis simétricos, um em torno de cada ponto fixo. O valor crítico em que ocorre a bifurcação é  $g_c \approx 0,563636363..$  e a bifurcação que os pontos sofrem é conhecida como *bifurcação de Hopf normal* [24][25]. À medida que variamos o parâmetro  $g$ , estes ciclos bifurcam por dobramento de período [6][1].

A bifurcação de Hopf no ponto  $P^+$  pode ser vista na Figura 2.3. Dois ciclos limites estáveis são gerados com dois parâmetros  $g$  próximos do valor crítico  $g_c$ . O ciclo menor com  $g = 0,56370$  é gerado a partir da integração da Equação 2.3, usando como condições iniciais os valores da posição do ponto  $P^+$  com um pequena perturbação na variável  $V_{C_1}$ , ou seja,  $V_{C_1} = -\alpha + 0,008$ . O segundo ciclo com  $g = 0,56372$  é gerado da mesma forma, no entanto, a condição inicial é agora  $-\alpha + 0,010$ .

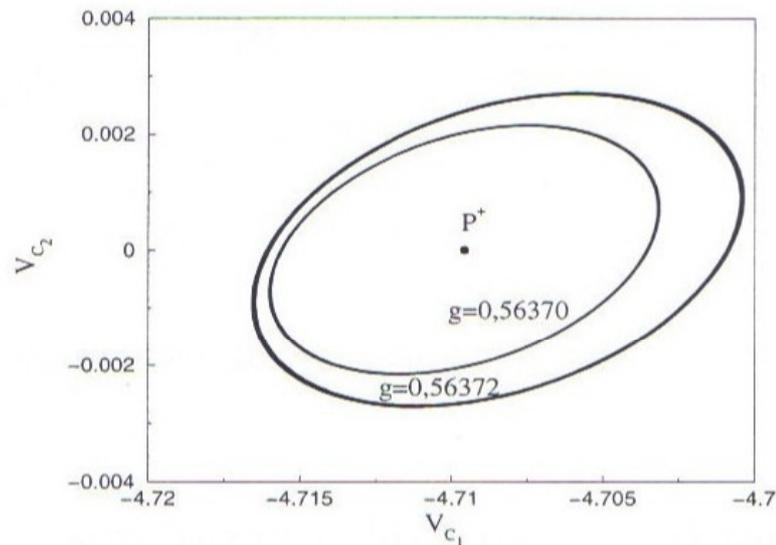


Figura 2.3: Ciclos limites para o circuito de Matsumoto-Chua, gerados por bifurcação de Hopf no ponto fixo  $P^+$ , para  $g$  próximo ao valor crítico  $g_c \approx 0,563636363$ .

### 2.2.2 Surgimento do atrator tipo Rössler

As primeiras órbitas periódicas geradas a partir dos ciclos limites mostrados na Figura 2.3 e o atratores caóticos gerados por este sistema são mostrados na Figura 2.4.

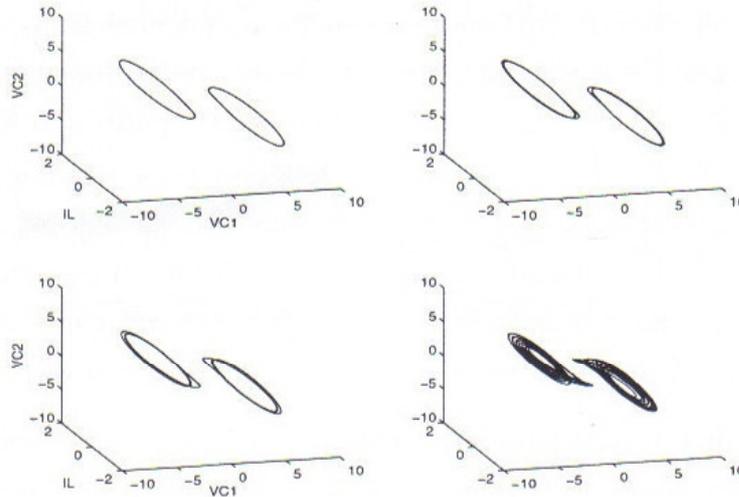


Figura 2.4: Surgimento dos atratores caóticos tipo Rössler seguindo a rota de Feigenbaum, após bifurcação de Hopf, mostrada na Figura 2.3. a) Órbitas de período-1 ( $g = 0,5690$ ); b) de período-2 ( $g = 0,5700$ ); c) de período-4 ( $g = 0,5716$ ); d) atratores caóticos tipo Rössler ( $g = 0,5750$ ).

Devido a forma simétrica da curva característica, temos, em cada figura, a coexistência de dois atratores simétricos no espaço de fase. Para cada condição inicial escolhida, apenas um atrator é gerado, como veremos subsequentemente. Na Figura 2.4 a) temos duas órbitas ou atratores de período-1, em b) órbitas de período-2, em c) período-4 e em d), os dois atratores caóticos do tipo Rössler. Esta é a rota pela qual o sistema considerado segue para desenvolver o comportamento caótico, conhecida como rota de Feigenbaum ou duplicação de período [1]. Variando o parâmetro  $g$ , da Equação 2.3, obtemos órbitas periódicas que bifurcam dando origem a órbitas de períodos  $2^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) até obtermos o atrator caótico do tipo Rössler. Os espectros de potência correspondentes a estas órbitas são mostrados na Figura 2.5. Nessa figura vemos uma característica que distingue o atrator caótico (espectro de banda larga em frequência) dos outros periódicos (espectro com um pico isolado dominante).

Mostramos na Figura 2.6 os pontos de equilíbrio ( $P^+$ ,  $P^0$ ,  $P^-$ ) (asteriscos) e os dois atratores caóticos coexistentes do tipo Rössler (linha cheia). A órbita caótica do atrator da direita executa movimento no sentido anti-horário e os da esquerda no sentido horário em volta dos pontos de equilíbrio  $P^+$  e  $P^-$ .

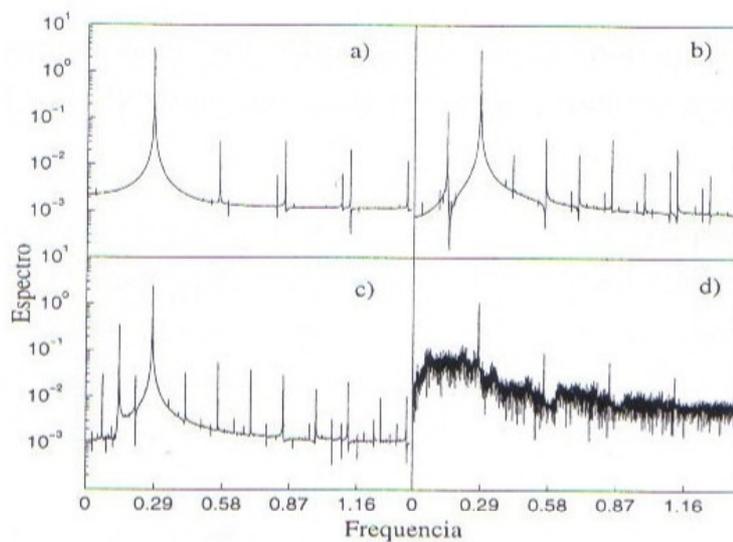


Figura 2.5: Espectros de potência para séries temporais da variável  $V_{C1}$  mostrando a duplicação de período - rota de Feigenbaum. a) Órbita de período-1, após bifurcação de Hopf ( $g = 0,5690$ ); b) Período-2 ( $g = 0,5700$ ); c) Período-4 ( $g = 0,5716$ ); d) Atrator caótico tipo Rössler ( $g = 0,5750$ ).

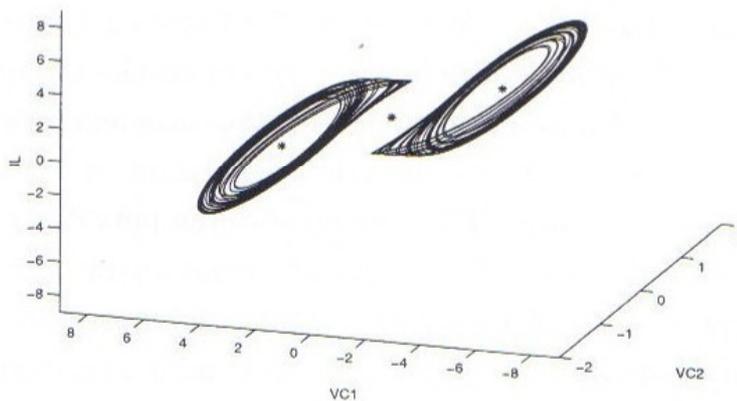


Figura 2.6: Atratores do sistema de Matsumoto-Chua coexistindo no espaço de fase. Três pontos de equilíbrio (asteriscos) e dois atratores caóticos (linha sólida).

### 2.2.3 Efeito da curva característica linear por partes

A não-diferenciabilidade da curva linear por parte é necessária para a geração dos atratores caóticos tipo Rössler. De fato, se modificarmos a curva característica de tal forma que esta apresente apenas um ponto de não-diferenciabilidade, como a mostrada na Figura 2.7, ainda assim obteremos um único atrator caótico tipo Rössler [9]. A curva com apenas um ponto de não-diferenciabilidade não gera o outro atrator simétrico obtido quando a curva possui dois pontos de não-diferenciabilidade.

Para valores do parâmetro  $g$  maiores do que  $g_c = 0,57729$ , ocorre a fusão dos dois atratores para gerar o novo atrator caótico Espira-Dupla. Entretanto, utilizando a curva característica com apenas um ponto de não-diferenciabilidade e  $g = g_c$ , teremos um transiente caótico que depois de um número grande de iterações escapa para o infinito, em contraste com o atrator observado para  $g < g_c$ . Como pode ser visto na Figura 2.8 para este valor crítico do parâmetro.

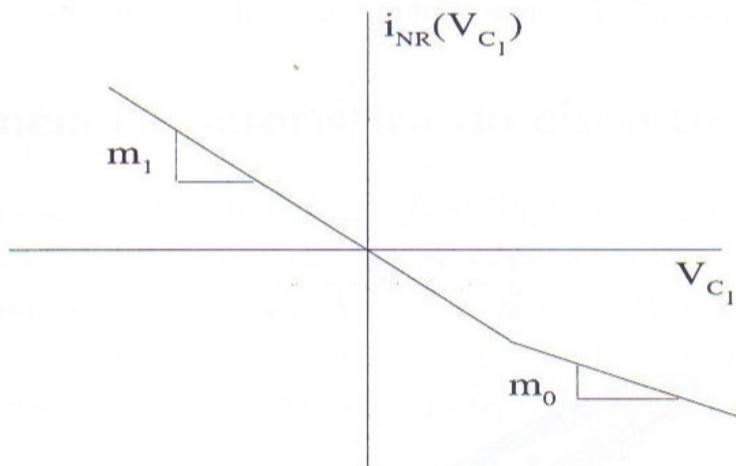


Figura 2.7: Esquema da curva característica ( $i_{NR}(V_{C1})$ ) com apenas um ponto de não-diferenciabilidade do resistor não-linear ( $R_{NL}$ ).

### 2.2.4 Surgimento do atrator Espiral-Dupla

Com a fusão dos atratores tipo Rössler para  $g = g_c \approx 0,57729$ , surge o atrator caótico Espiral-Dupla mostrado na Figura 2.9. Várias propriedades e aplicações deste atrator podem ser encontradas em [9][10].

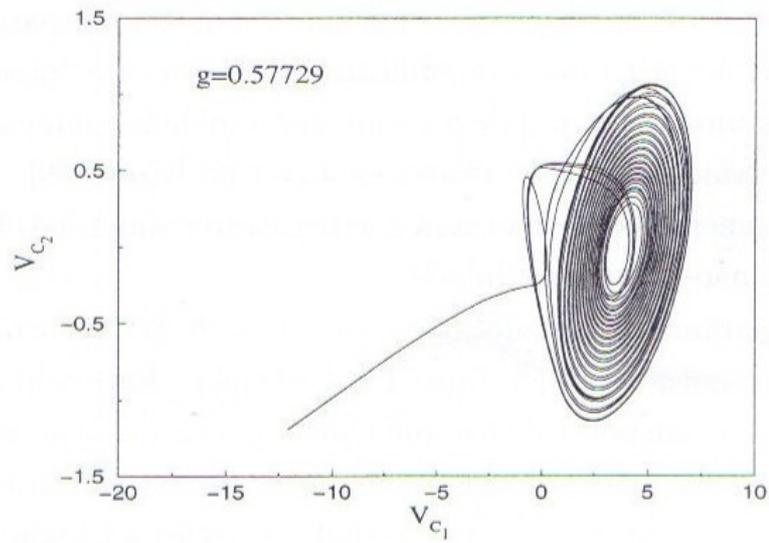


Figura 2.8: Transiente caótico (tipo Rössler) ( $g = 0,57729$ ). A figura foi gerada usando a curva de  $i_{NL}$  mostrada na Figura 2.7. Podemos verificar que a órbita escapa para o infinito.

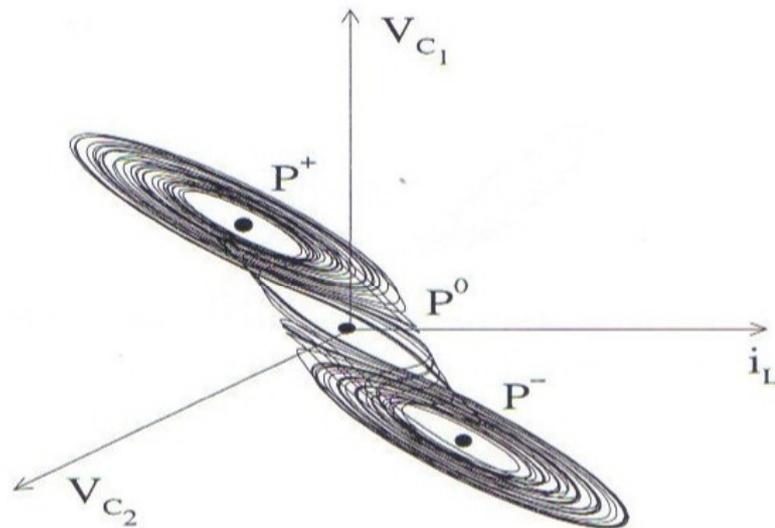


Figura 2.9: Atrator caótico Espiral-Dupla ( $g = 0,60000$ ) e os pontos de equilíbrio ( $P^+, P^0, P^-$ ).

A trajetória deste atrator gira em torno do ponto de equilíbrio  $P^+$ , no sentido anti-horário com relação a um sistema de coordenadas ligado à mão esquerda. Após cada rotação, a trajetória se afasta deste ponto de equilíbrio por um determinado intervalo de tempo, após o qual, há duas possibilidades: (i) a trajetória retorna à posição próxima ao ponto de equilíbrio e repete novamente o processo de afastamento, (ii) a trajetória não retorna às proximidades do ponto de equilíbrio, mas percorre um caminho espiral até a parte inferior do atrator próximo ao ponto de equilíbrio  $P^-$ . A seguir, a trajetória gira em sentido anti-horário em torno do ponto de equilíbrio  $P^-$ , de forma similar àquela em torno do ponto superior, exceto o fato que a trajetória começa a ascender após girar várias vezes em torno do ponto de equilíbrio inferior. O número de rotações que a trajetória executa em volta dos pontos de equilíbrio, antes de descer ou ascender, varia. O número de rotações que a trajetória executa enquanto desce ou ascende em espiral também varia.

Chua *et al.* [26] mostraram que, no regime de Espiral-Dupla, este sistema possui movimento caótico do tipo Shil'nikov [24][27][28] e, portanto, apresenta nas proximidades de uma órbita heteroclínica (ou homoclínica) um comportamento do tipo ferradura de Smale [24].

## 2.3 Freqüência característica do circuito

Os dois atratores caóticos, tipo Rössler e Espiral-Dupla serão frequentemente usados no decorrer deste trabalho. As projeções destes atratores no plano  $V_{C_2} \times V_{C_1}$  são mostrados na Figura 2.10. Correspondente a estes atratores, mostramos na Figura 2.11 as séries temporais típicas de uma das variáveis do sistema, onde se percebe o comportamento irregular, aperiódico dessas séries. Na Figura 2.12 temos os espectros de potência correspondente a essas séries temporais.

Podemos ver pelo espectro que este sistema possui uma freqüência característica igual a  $f_c = 0,29$  e ambas séries apresentam bandas largas em freqüência. A freqüência característica  $f_c$  corresponde aproximadamente às partes imaginárias,  $i\omega$ , dos autovalores complexos  $a \pm i\omega$  dos pontos fixos  $P^\pm$ . Para  $g = 0,6000$ , temos que os autovalores complexos de  $P^+$  são  $\lambda = 0,0965 \pm i1,8267$ , de onde obtemos  $f = 1,8267/2\pi \approx 0,29$ . Através da análise linear dos pontos fixos  $P^\pm$  é possível mostrar que a parte imaginária do autovalor complexo fica em torno de 1,8 para quaisquer valores do parâmetro  $g$ , gerando sempre a freqüência característica  $f_c \approx 0,29$ . Dessa forma, o tempo característico ou período característico do circuito é dado por  $\tau_c = 1/f_c \approx 3,44$ . A freqüência menor  $f^*$ , que surge no espectro do atrator Espiral-Dupla, está ligada ao movimento de visitação ao redor dos dois pontos fixos

$P^\pm$ .

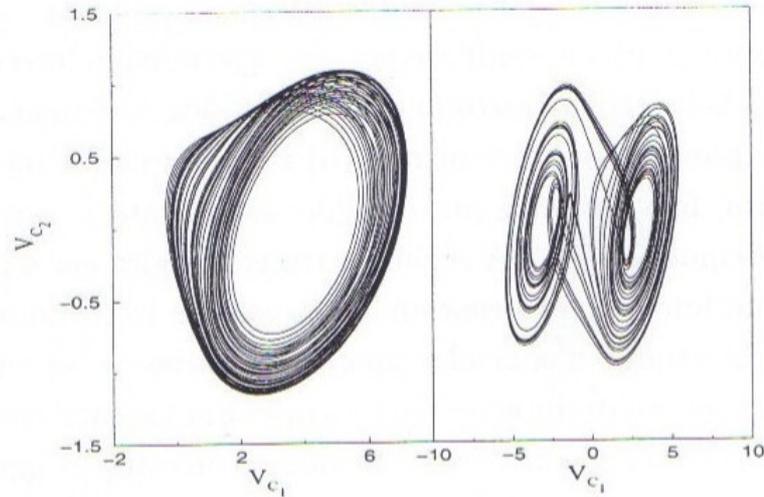


Figura 2.10: Atrator caótico tipo Rössler a esquerda ( $g = 0,5750$ ) e atrator caótico Espiral-Dupla a direita ( $g = 0,6000$ ). Projeção no plano  $V_{C_2}, V_{C_1}$ .

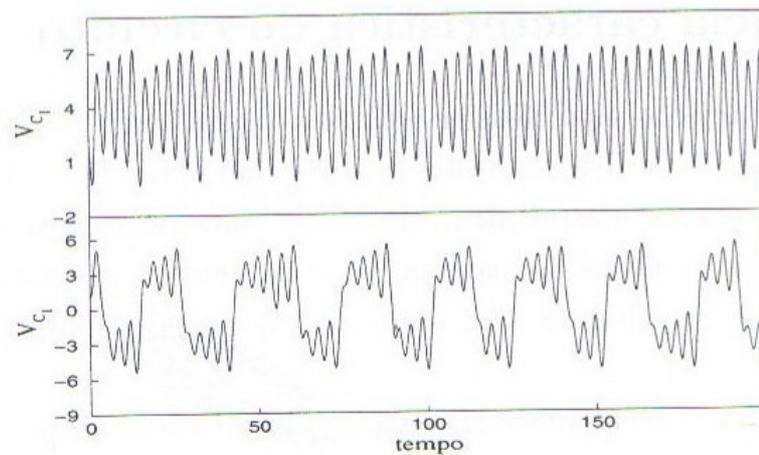


Figura 2.11: Série temporal típica da variável  $V_{C_1}$  para o atrator caótico tipo Rössler (gráfico superior,  $g = 0,5750$ ) e atrator caótico Espiral-Dupla (gráfico inferior,  $g = 0,6000$ ) mostrados na Figura 2.10.

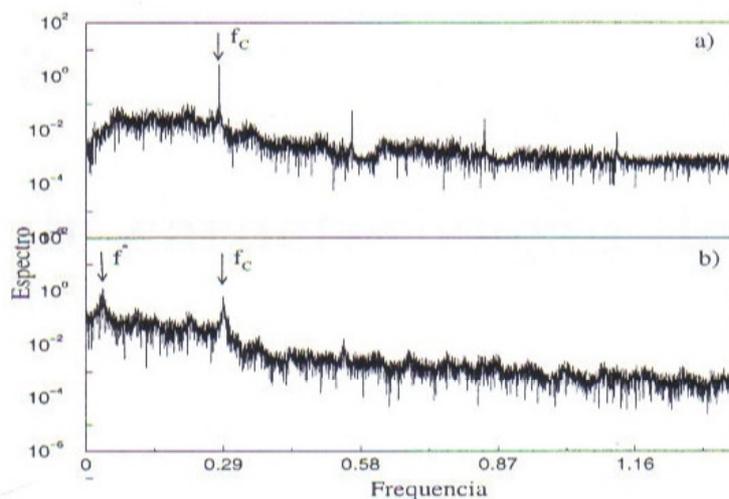


Figura 2.12: Espectros de potência dos atratores caóticos tipo Rössler e Espiral-Dupla. O pico a direita em ambos os espectros corresponde à freqüência característica do sistema ( $f_c \approx 0,29$ ). a) Espectro de potência do atrator caótico tipo Rössler ( $g = 0,5750$ ); b) Atrator caótico Espiral-Dupla ( $g = 0,6000$ ).

## Capítulo 3

# Métodos de caracterização dos atratores

Este capítulo aborda uma introdução ao estudo dos sistemas dinâmicos não lineares, com ênfase nos aspectos relevantes ao entendimento e à análise do comportamento do circuito de Matsumoto-Chua analisado neste trabalho. Através dos métodos descritos, obtemos características gerais do circuito, tais como tipos de atratores gerados, bacias de atração e suas separatrizes. Os resultados obtidos e suas interpretações estão baseados na simulação numérica das equações diferenciais que descrevem a evolução temporal do circuito de Matsumoto-Chua.

### 3.1 Aspectos teóricos e definições dos sistemas dinâmicos

Faremos, neste capítulo, uma breve revisão de alguns aspectos teóricos dos sistemas dinâmicos necessários para analisarmos os resultados obtidos com o Circuito de Matsumoto-Chua. A teoria concernente a sistemas dinâmicos é um campo vasto e que cresce rapidamente. Nossa abordagem está restrita a ferramentas matemáticas, métodos numéricos e resultados teóricos aplicados às equações do sistema de Matsumoto-Chua. Inúmeros trabalhos e livros podem ser citados como referência para os aspectos teóricos aqui apresentados. Para citar alguns que nos foram úteis e aprofundam as idéias apresentadas, temos os livros de Arnold [29], Guckenheimer e Holmes [24], Shuster [30], Argyris *et al.* [31], Ott [32], Alligood *et al.* [33] e as referências ali citadas.

Um sistema dinâmico com variáveis contínuas, representado aqui pelo circuito de Mat-

sumoto-Chua, pode ser definido como uma relação matemática determinística que descreve o comportamento ou evolução temporal do sistema a partir de seu estado anterior. O termo *determinística* enfatiza o fato de não haver um termo estocástico na descrição do sistema.

O estado do sistema no espaço Euclidiano de dimensão-3 em cada instante  $t$  é especificado por um vetor  $\mathbf{X}(t) \in \mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$ . A dinâmica do sistema será dada por um campo vetorial  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (F_1(X), F_2(X), F_3(X))$ .

Definimos uma equação diferencial ordinária de terceira ordem autônoma (independente do tempo) por

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, c), \quad (3.1)$$

onde  $c$  representa os parâmetros de controle do sistema. No caso de  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, c, t)$  (depende explicitamente do tempo) o sistema é não-autônomo. O conjunto de trajetórias é denominado de fluxo  $\phi(\mathbf{X}, t)$ , obedecendo a equação 3.1, ou seja

$$\frac{d\phi(\mathbf{X}, c)}{dt} = \mathbf{F}(\phi(\mathbf{X}, c)). \quad (3.2)$$

A equação geral 3.1 e os aspectos teóricos gerais serão exemplificados usando-se o sistema de Matsumoto-Chua

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} &= g(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_{NR}(V_{C_1}), \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} &= g(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L, \\ L \frac{di_L}{dt} &= -V_{C_2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Os parâmetros  $g = 1/R$ ,  $C_1$  e  $C_2$  são representados por  $c$  na equação geral 3.1.

Para uma condição inicial particular  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$  a solução de (3.1),  $\phi(\mathbf{X}_0, c)$ , define a trajetória, órbita ou curva solução da equação diferencial baseada em  $\mathbf{X}_0$ . Para sistemas autônomos, como 3.3, o campo vetorial é invariante com relação à translação no tempo.

A dimensão-3 do circuito de Matsumoto-Chua é a menor dimensão onde o caos é possível de ocorrer em sistemas descritos por equações diferenciais autônomas de primeira ordem [24][30].

Ao invés de tentar uma solução para (3.1), para uma condição inicial particular, a teoria dos sistemas dinâmicos tenta caracterizar a estrutura global de todas as soluções, ou seja,

produzir um *retrato de fase*: a descrição do espaço de estados ou fase onde se desenvolvem e evoluem os atratores (regiões deste espaço que capturam todas as órbitas), desde que estas estejam dentro de sua *bacia de atração* ou domínio, além das separatrizes entre esses domínios (*variedades*), e os *conjuntos invariantes e não-itinerantes*, todos definidos a seguir.

### 3.2 Atratores e propriedades estatísticas das órbitas

Um *conjunto invariante*  $C$  para o sistema (3.1) é um subconjunto do espaço de fase formado por soluções de (3.1), cujas soluções internas a este conjunto permanecem no interior de  $C$  para todo instante, i.e,  $\phi(C) = C$  para todo tempo  $t$ . Um conceito também importante é o de *ponto não-itinerante* para  $\phi(\mathbf{X}, c)$ ;  $\mathbf{X}$  é não-itinerante se para toda vizinhança  $U$  de  $\mathbf{X}$  e  $T > 0$ , há  $t > T$  de modo que  $\phi(\mathbf{X}, c) \cap U \neq \emptyset$ , ou seja, soluções de (3.1) arbitrariamente próximos de  $\mathbf{X}$  retornam a regiões arbitrárias próximas de  $\mathbf{X}$  infinitas vezes. Este comportamento pode ser esquematizado conforme a Figura 3.1. Os conjuntos não-itinerantes contêm todos os comportamentos recorrentes do fluxo e se espera que todas as trajetórias tendam a ele. Um conjunto não-itinerante pode conter vários componentes. Um componente pode ser um ponto fixo estacionário, uma órbita periódica, ou algum conjunto muito mais complicado de volume zero. Definimos também o conceito de órbita densa em um conjunto  $C$ , a órbita deste conjunto que retorna arbitrariamente próximo a todo ponto em  $C$ .



Figura 3.1: Comportamento itinerante e não-itinerante das órbitas.

O conjunto  $C$  é *atraente* se existe alguma vizinhança  $U$  de  $C$  tal que:  $\forall \mathbf{X} \in U, \forall t > 0, \phi(\mathbf{X}, c) \in U$  e  $\phi(\mathbf{X}, c) \rightarrow C$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Por último definimos *transitividade*, ou

seja, um conjunto fechado invariante  $C$  é topologicamente transitivo se  $\phi_t$  possui pelo menos uma órbita densa em  $C$ , ou seja, para qualquer dois conjuntos abertos  $U, V \subset C$ , e se  $U \cap V \neq \emptyset$ , então existem valores arbitrariamente grandes de tempo para os quais temos:  $\phi(\mathbf{X}, U) \cap V \neq \emptyset$ , conjuntos  $C$  que obedecem a esta condição são chamados de disjuntos. Esta propriedade assegura ainda que não há transiente no sistema.

De posse destas definições estamos em condições de definir um atrator. Um *atrator* é um conjunto atraente topologicamente transitivo.

### 3.2.1 Atratores

Os atratores são pontos fixos estáveis (sumidouros), órbitas periódicas (ciclos limites) e toro gerado por movimento quase periódico com frequências incomensuráveis. Sistemas dinâmicos não lineares produzem também atratores muito mais exóticos denominados de *estranhos* por Ruelle e Takens [34][35], por apresentarem dimensão fractal, podendo ainda ser caótico ou não.

Para exemplificar, mostramos na Figura 3.2 quatro tipos de atratores gerados pelo circuito de Matsumoto-Chua, Equações 3.3: Figura 3.2 a) ponto fixo, b) órbita periódica, c) toro de duas frequências (acrescentando um forçamento do tipo senoidal). Na seqüência, Figura 3.2, d) atrator caótico gerado.

As trajetórias dos atratores não estranhos são triviais: um ponto fixo, órbita periódica ou o movimento do toro de duas frequências.

O toro de duas frequências contém a trajetória *quase periódica* gerada a partir de duas oscilações independentes. Uma frequência determina a rapidez com que a órbita circula o toro em volta do diâmetro menor e a outra, a rapidez com que a órbita circula o diâmetro maior. Assim, esse movimento no toro é previsível. Mesmo que a razão entre as frequências que geram o toro seja irracional, fazendo com que as órbitas nunca se repitam, ainda assim o movimento permanece regular. Duas órbitas que iniciem seus movimentos sobre o toro com condições iniciais muito próximas, permanecem próximas e seus comportamentos são previsíveis [29]. O atrator caótico por sua vez é muito mais exótico e complexo como veremos no decorrer deste trabalho.

### 3.2.2 Atrator caótico

Definimos um atrator caótico como o sub-conjunto  $C$  do espaço de fase do fluxo gerado pela equação (3.1), o qual é compacto (fechado e limitado) com as seguintes características:

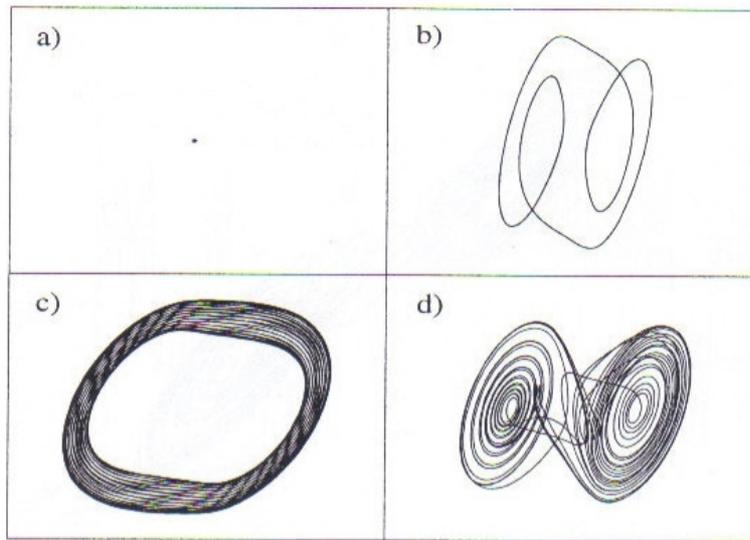


Figura 3.2: Projeções de atratores, no plano  $V_{C_2} \times V_{C_1}$ , gerados pelo circuito elétrico de Matsumoto-Chua: a) ponto fixo; b) órbita periódica; c) toro de duas frequências; d) atrator caótico.

- i)  $C$  é um conjunto invariante sob a influência do fluxo  $\phi_t$  ( $\phi(C) = C$ );
- ii) O atrator caótico é topologicamente transitivo (disjunto), ou seja, este não pode ser quebrado em dois subsistemas (dois subconjuntos abertos invariantes) os quais não interagem sob  $F$  devido a transitividade topológica;
- iii) Sensibilidade às condições iniciais, tendo pelo menos um expoente de Lyapunov positivo;
- iv)  $C$  é um conjunto atraente para o sistema.

Sendo nosso sistema dissipativo ( $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$ ) o atrator caótico  $C$  possui uma vizinhança aberta  $U$  que se contrai com a evolução do fluxo  $\phi$  em  $C$ . Desse modo, todas as trajetórias consideradas tendem eventualmente ao conjunto limitado do espaço de fase, denominado de *atrator caótico*. A propriedade do atrator caótico ser topologicamente transitivo assegura que quase todas as soluções no atrator mostram um comportamento típico deste. Estas órbitas vagueiam por todo lugar ao invés de permanecerem em um único ponto ou região do atrator, implicando portanto em *ergodicidade*. Mostramos na Figura 3.3 o atrator caótico gerado pelo circuito de Matsumoto-Chua.

Vamos analisar o que implica para um atrator a ter dinâmica caótica. O fato primordial é a extrema dependência às condições iniciais. Consideremos o circuito de Matsumoto-Chua com duas condições iniciais muito próximas  $\mathbf{X}_1(0) = (V_{C_1} = 0, 1, V_{C_2} = 0, 0, i_L = 0, 0)$  e  $\mathbf{X}_2(0) = \mathbf{X}_1 + \Delta(0) = (V_{C_1} = 0, 10001, V_{C_2} = 0, 0, i_L = 0, 0)$ . Na Figura 3.4 mostramos a

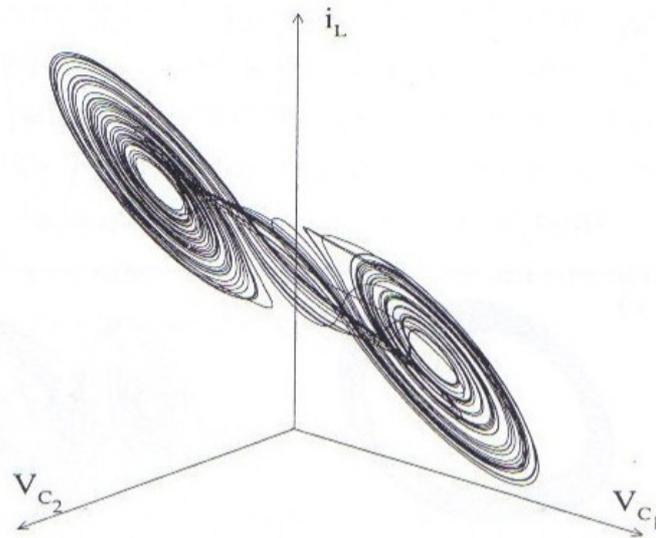


Figura 3.3: Trajetória caótica para o circuito de Matsumoto-Chua descrevendo o atrator caótico denominado de Espiral-Dupla.

evolução temporal da variável  $V_{C_1}(t)$  para as duas condições. Após três excursões em volta do atrator, as trajetórias não apresentam mais a mesma evolução, seus movimentos são totalmente independentes, o que não implica que não possam se aproximar de tempos em tempos (propriedade de recorrência e ergodicidade do atrator), justamente pela imprevisibilidade inerente do sistema.

### 3.3 Bacias de atração do circuito de Matsumoto-Chua

Um sistema dinâmico pode ter múltiplos atratores no espaço de fase; a escolha para que atrator convergirá cada solução dependerá das condições iniciais da órbita particular. O conjunto invariante de condições iniciais para as quais as órbitas são atraídas para um dado atrator é denominado *bacia de atração* do atrator [11][36][37].

#### 3.3.1 Bacia de atração dos atratores tipo Rössler

O circuito de Matsumoto-Chua, quando operando no regime caótico do tipo Rössler, apresenta dois atratores caóticos coexistindo no espaço de fase (observados para condições iniciais diferentes), como mostrado na Figura 3.5.

Queremos determinar numericamente a bacia de atração dos atratores mostrados na Figura 3.5. Para isto, é necessário analisar as propriedades e as possíveis assimetrias do sistema,

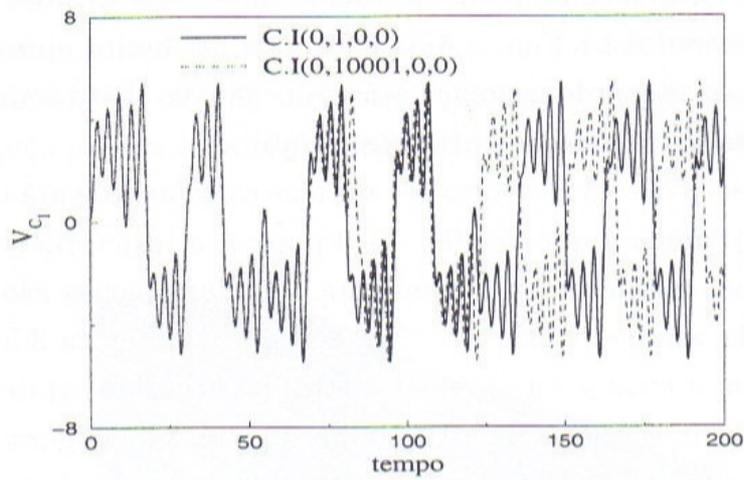


Figura 3.4: Dependência às condições iniciais. Evoluções temporais diferentes da variável  $V_{C_1}(t)$  para o atrator caótico de Espiral-Dupla (Figura 3.3) com duas condições iniciais próximas mostradas no gráfico (C.I.).

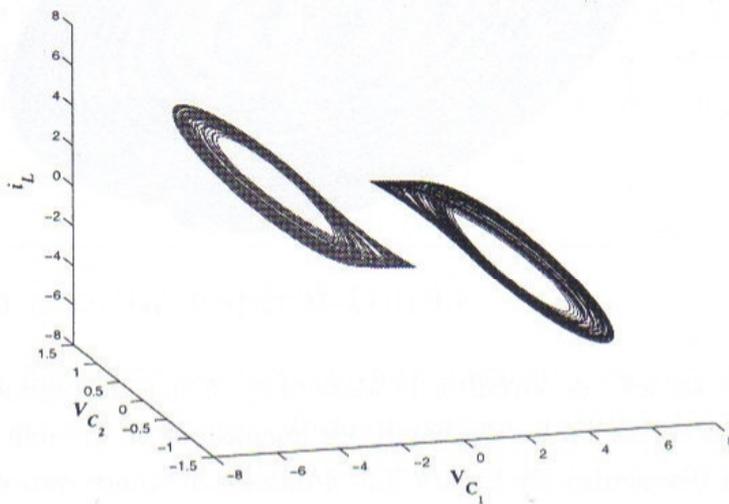


Figura 3.5: Atratores caóticos tipo Rössler coexistentes no espaço de fase do circuito de Matsumoto-Chua,  $g = 0,575$ .

de forma a se obter um algoritmo que permita determinar de forma eficaz as bacias e suas separatrizes. No presente sistema, podemos usar os valores da variável  $V_{C_1}$  para caracterizar os dois atratores mostrados na Figura 3.5. O atrator da direita apresenta somente valores positivos de  $V_{C_1}$  e o da esquerda, somente valores negativos. Esta será a assimetria que nos permitirá definir a bacia de atração para estes atratores.

As bacias de atração destes atratores são obtidas calculando, para cada par de condições iniciais de  $(V_{C_1}, V_{C_2})$ , numa grade de  $400 \times 400$  pontos, a trajetória sobre muitos ciclos em volta do atrator, após eliminarmos o transiente. As duas bacias são distinguidas através do sinal da média da variável  $\langle V_{C_1} \rangle$ . Com referência a Figura 3.5, valores positivos de  $\langle V_{C_1} \rangle$  caracterizam o atrator da direita e valores negativos, o atrator da esquerda.

A Figura 3.6 mostra as bacias de atração dos atratores da Figura 3.5 obtidas com este critério. Na referência [38] podemos constatar a determinação desta bacia experimentalmente, cujos resultados estão de pleno acordo com os nossos obtidos numericamente.

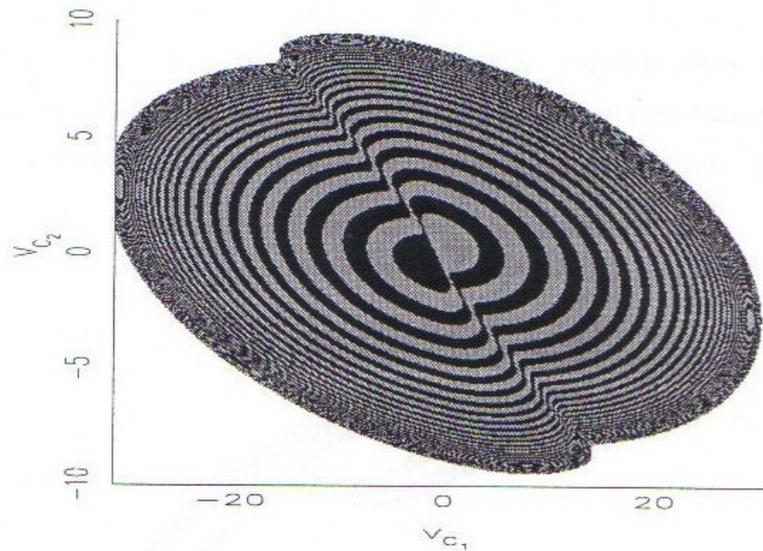


Figura 3.6: Bacias de atração do circuito de Matsumoto-Chua em regime caótico tipo Rössler. Pontos em preto (cinza) correspondem às condições iniciais que se dirigem para o atrator caótico tipo Rössler da direita (esquerda) da Figura 3.5. Pontos em branco vão para o atrator infinito.  $g = 0,5750$ ,  $i_L = 0,0$ .

As bacias mostradas na Figura 3.6 são um corte transversal para um valor fixo de  $i_L = 0,0$ , pois as bacias do sistema são tri-dimensionais. Na Figura 3.7 apresentamos outro corte dessas bacias. Fixamos agora  $V_{C_2} = 0,0$  e variamos os pares das variáveis  $(V_{C_1}, i_L)$  numa grade

de  $400 \times 400$  pontos de condições iniciais, obtendo as projeções das bacias nas variáveis  $(i_L, V_{C_1})$ . A partir dessas projeções podemos ter uma idéia geométrica da forma dessas bacias. As bacias formam uma estrutura em forma de pergaminho entrelaçando os dois atratores. Este pergaminho se estende no sentido positivo e negativo da variável  $V_{C_1}$  e seu diâmetro é limitado pela presença da órbita instável tipo sela que circunda os atratores.

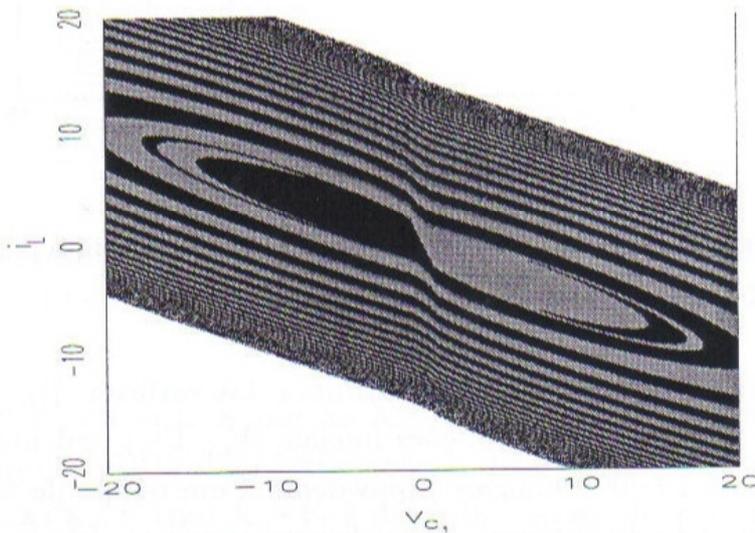


Figura 3.7: Bacias de atração do circuito de Matsumoto-Chua em regime caótico tipo Rössler. Pontos em preto (cinza) correspondem às condições iniciais que se dirigem para o atrator caótico tipo Rössler da direita (esquerda) da Figura 3.5. Pontos branco vão para o atrator infinito.  $g = 0,5750$   $V_{C_2} = 0,0$ .

### 3.3.2 Bacia do atrator Espiral-Dupla

O atrator caótico Espiral-Dupla coexiste no espaço de fase com a órbita instável tipo sela, que circunda o atrator caótico conforme mostrado na Figura 3.8. Ressaltamos que a existência dessa órbita instável é independente do valor do parâmetro  $g$ . Portanto, ela existe com outros atratores caóticos além do Espiral-Dupla.

Sendo este atrator caótico circundado por uma órbita instável limitada, sua bacia é uma região finita do espaço de fase. As órbitas que não tendem ao atrator caótico escapam para o atrator infinito. Dessa forma, utilizamos uma adaptação do algoritmo de tempo de escape para determinar esta bacia de atração.

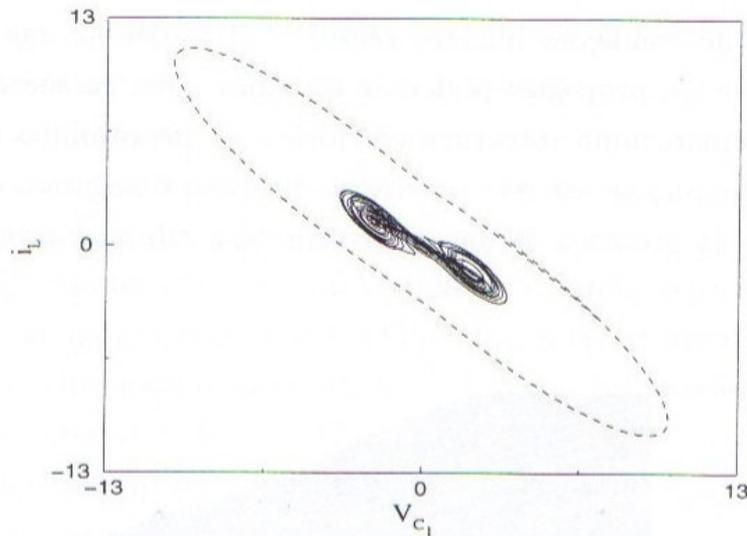


Figura 3.8: Atrator Espiral-Dupla (linha sólida) coexistente com a órbita periódica tipo sela (linha pontilhada).

Para obter a bacia numericamente, fixamos uma das variáveis ( $i_L = 0, 0$ ) e a partir de uma grade de  $400 \times 400$  pares de condições iniciais  $(V_{C_1}, V_{C_2})$ , calculamos a trajetória de cada par de valores para 10.000 iterações (equivalente a um tempo de  $\approx 117\tau_c \approx 3,44$ , onde  $\tau_c$  é o período característico do sistema). Consideramos que o par de variáveis gera o atrator Espiral-Dupla se após este número de iterações a trajetória, está limitada no espaço de fase, e portanto o atrator, ou seja, usamos o critério que  $|\sqrt{(V_{C_1}^2 + V_{C_2}^2)}| < 20$ . Com este número grande de iterações, eliminamos a possibilidade de estarmos obtendo um transiente caótico. Estes pares de pontos  $(V_{C_1}, V_{C_2})$ , que geram o atrator Dupla-Espiral, são graficados em preto e os pares de pontos atraídos para o infinito são graficados em branco. Mostramos na Figura 3.9 a bacia de atração do atrator Espiral-Dupla obtida com este algoritmo. Note que a bacia do atrator Espiral-Dupla é menor nesta projeção do que as bacias para os atratores tipo Rössler mostradas em 3.6.

### 3.4 Linearização e variedades invariantes

Pontos fixos também chamados de pontos de equilíbrio ou zero da Equação (3.1), são definidos por pontos  $P^* \in R^n$  que satisfazem a equação:

$$F(P^*) = 0. \quad (3.4)$$

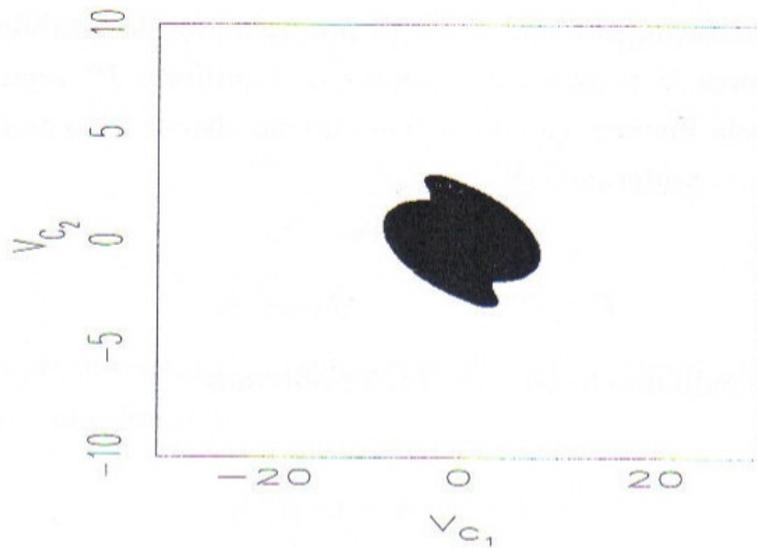


Figura 3.9: Bacia do atrator Espiral-Dupla. Pontos em preto geram o atrator caótico limitado Espiral-Dupla, pontos em branco se dirigem para o infinito.  $g = 0,6$ ,  $i_L = 0,0$ .

Um ponto fixo  $P^*$  é estável se a solução  $\mathbf{X}(t)$  próxima de  $P^*$  permanece próxima desse ponto para todo tempo, i.e, para toda vizinhança  $V$  de  $P^*$  em  $C$  há uma vizinhança  $V_1 \subset C$  tal que toda solução  $\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, t)$  com  $\mathbf{X}_0 \in V_1$  é definida e se localiza em  $C$  para todo instante de tempo  $t > 0$ . Se, além disso,  $V_1$  é de forma tal que  $\mathbf{X}(t) \rightarrow P^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ , então  $P^*$  é dito ser assintoticamente estável, uma visualização destas definições pode ser visto na Figura 3.10.

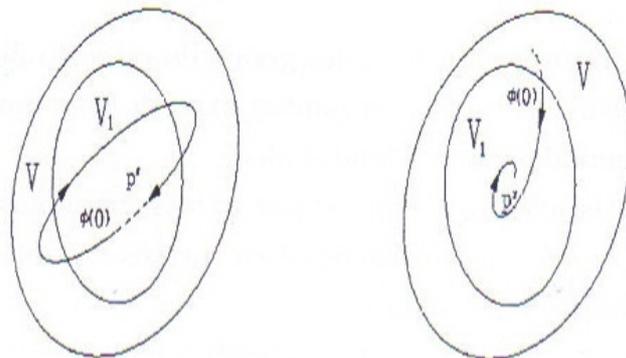


Figura 3.10: a) Estabilidade neutra; b) estabilidade assintótica.

O método de linearização estabelece que as propriedades de estabilidade de um sistema não linear na vizinhança  $U$  próxima aos pontos de equilíbrio  $P^*$  sejam essencialmente as mesmas produzidas pela linearização do sistema inicial. Isto é feito analisando a solução de (3.1) em torno de  $P^*$ , considerando

$$P = P^* + \delta; \quad |\delta| \ll 1, \quad (3.5)$$

em (3.6) e (3.1) e expandindo em série de Taylor obtemos:

$$\dot{\varphi} = DF(P^*)\varphi + O(|\delta|^2), \quad (3.6)$$

onde

$$DF(P^*) = \left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right]_{x=P^*} \quad (3.7)$$

é uma matriz real  $n \times n$  ou Jacobiana do sistema calculada em  $P^*$ . A equação (3.6) é um sistema linear com coeficientes constantes e pode ser solucionado pelos métodos usuais. Em particular, o fluxo gerado pela linearização de (3.1)  $D\phi_t(x)\varphi$  no ponto fixo  $P^*$  pode ser obtido de (3.6) por integração, obtendo-se

$$D\phi_t(P^*)\varphi = e^{tDF(x)}\varphi_0. \quad (3.8)$$

### 3.4.1 Análise linear do circuito de Matsumoto-Chua

Nesta seção, vamos resumir as propriedades gerais do circuito de Matsumoto-Chua obtidas a partir do estudo linear em torno dos pontos fixos do sistema. Nas referências [9][39] são discutidas essas propriedades em profundidade.

Devido a curva característica  $i_{NR}$  ser linear por partes, podemos decompor o sistema em três domínios,  $D^+$ ,  $D^0$  e  $D^-$ . A curva característica, nestes domínios, pode ser decomposta nas três regiões distintas indicadas a seguir:

$$i_{NR} = \begin{cases} B_p(m_0 - m_1) + m_0V_{C_1} & \text{no domínio } D^+ \\ m_1V_{C_1} & \text{no domínio } D^0 \\ B_p(m_1 - m_0) + m_0V_{C_1} & \text{no domínio } D^- \end{cases} \quad (3.9)$$

e os domínios  $D^+$ ,  $D^0$  e  $D^-$  da variável  $V_{C_1}$  são definidos como:

$$\begin{aligned} D^+ &: V_{C_1} < -B_p \\ D^0 &: |V_{C_1}| < B_p \\ D^- &: V_{C_1} > B_p \end{aligned} \quad (3.10)$$

Usando o mesmo procedimento da referência [40], introduzimos as constantes  $F$  e  $A$  com valores diferentes em cada domínio:

$$F = \begin{cases} m_0 & \text{em } D^+ \\ m_1 & \text{em } D^0 \\ m_0 & \text{em } D^- \end{cases} \quad (3.11)$$

e

$$A = \begin{cases} B_p(m_0 - m_1) & \text{em } D^+ \\ 0 & \text{em } D^0 \\ B_p(m_1 - m_0) & \text{em } D^-, \end{cases} \quad (3.12)$$

dessa forma podemos escrever a equação da curva característica (em cada um dos domínios) na forma

$$i_{NR} = A + FV_{C_1}. \quad (3.13)$$

E a equação do circuito pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_{C_1} \\ \dot{V}_{C_2} \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1}(g + F) & \frac{g}{C_1} & 0 \\ \frac{g}{C_2} & -\frac{g}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \\ i_L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{A}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

A partir da condição 3.4 podemos determinar os pontos de equilíbrio do sistema os quais são:

$$P^+ = (-\alpha, 0, g\alpha) \quad P^0 = (0, 0, 0) \quad P^- = (\alpha, 0, -g\alpha), \quad (3.15)$$

onde  $\alpha = \frac{B_p(m_0 - m_1)}{g + m_0}$ . Os pontos  $P^+$ ,  $P^0$  e  $P^-$  se localizam nos domínios  $D^+$ ,  $D^0$  e  $D^-$ , respectivamente.

A estabilidade de cada ponto de equilíbrio é obtida através do estudo dos autovalores da matriz Jacobiana ( $\mathbf{J}$ ) da Equação 3.14, ou seja

$$\det[\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}] = 0. \quad (3.16)$$

Resolvendo o determinante 3.16, temos que os autovalores da Jacobiana são as raízes do polinômio

$$\lambda^3 + \left(\frac{1}{C_1}(g + F) + \frac{g}{C_2}\right)\lambda^2 + \left(\frac{gF}{C_1C_2} + \frac{1}{C_2L}\right)\lambda + \left(\frac{g}{C_1LC_2} + \frac{F}{C_1LC_2}\right) = 0. \quad (3.17)$$

Substituindo-se os valores padrões de  $1/C_1 = 10, 0$ ,  $1/C_2 = 1, 0$  e  $1/L = 6, 0$ , obtemos

$$\lambda^3 + (10F + 11g)\lambda^2 + (10gF + 6)\lambda + 60(g + F) = 0. \quad (3.18)$$

A equação 3.18, para os possíveis valores de  $F$  ( $m_0 = -0,5$  e  $m_1 = 0,8$ ) e para os valores de  $g$  no intervalo  $[0, 5 \dots 0, 7]$ , fornece um autovalor real e dois complexos conjugados. Em particular, para o regime caótico de Espiral-Dupla, podemos esquematicamente traçar a geometria gerada pelas variedades conforme a Figura 3.11. O par de autovalores complexos determina um plano  $E^c$  no ponto fixo  $P^0$ , um plano  $E^0$  nos pontos  $P^+$  e  $P^-$ . O autovetor do autovalor real, determina uma reta  $E^r$  que é transversal a esses planos. Os planos  $E^c$  e  $E^r$  formam subespaços invariantes do sistema 3.14; por isso, um ponto  $x_0$  nesses subespaços permanecem neles por um tempo infinito. Usando um sistema apropriado de coordenadas, como mostrado esquematicamente em 3.12, é possível rotacionar o atrator Espiral-Dupla de forma a olharmos sua projeção em relação a este novo sistema de coordenadas. Na Figura 3.13 a) mostramos o atrator Espiral-Dupla ( $g = 0,6000$ ) projetado em relação aos eixos da 3.12 e em b) a projeção do atrator num giro de noventa graus. Através desse gráfico, fica evidente que o plano das variedades instáveis  $E^0$  dos pontos  $P^+$  e  $P^-$ , limita a região do espaço de fase que o atrator pode visitar.

Solucinada a equação 3.18, o que podemos inferir sobre o sistema inicial (3.1)? A resposta é dada por dois teoremas: Teorema de Hartman-Grobman e Teorema da Variedade Estável [24], os quais permitem a análise local nos pontos fixos do sistema não-linear linearizado.

**Teorema de Hartman-Grobman:** Se nenhum autovalor de  $DF(P^*)$  for nulo ou puramente imaginário, então existe um homeomorfismo ( $h$ ) definido numa vizinhança do ponto

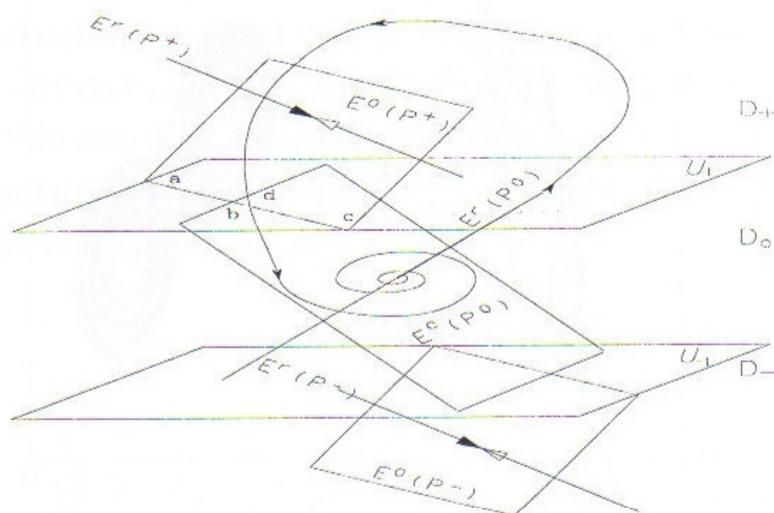


Figura 3.11: Representação dos subespaços  $E$  (dos três pontos de equilíbrio) do sistema de Matsumoto-Chua para  $g = 0,6000$ .

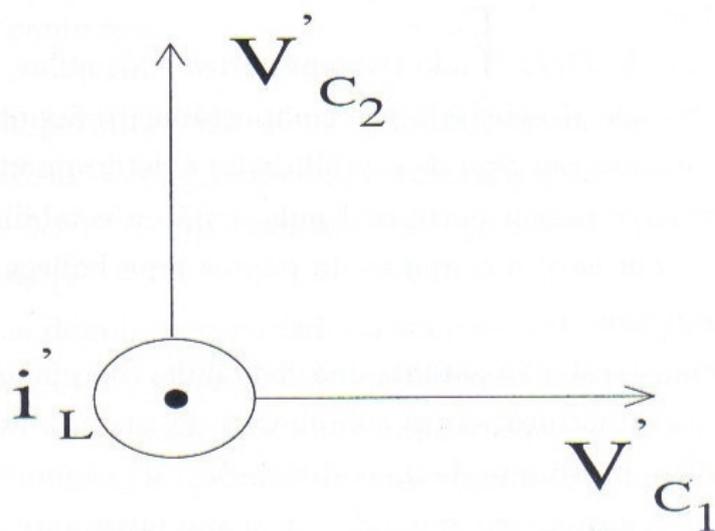


Figura 3.12: Novo sistema de coordenadas. Atrator visto perpendicularmente às variáveis  $V'_{C2}$  e  $V'_{C1}$ .

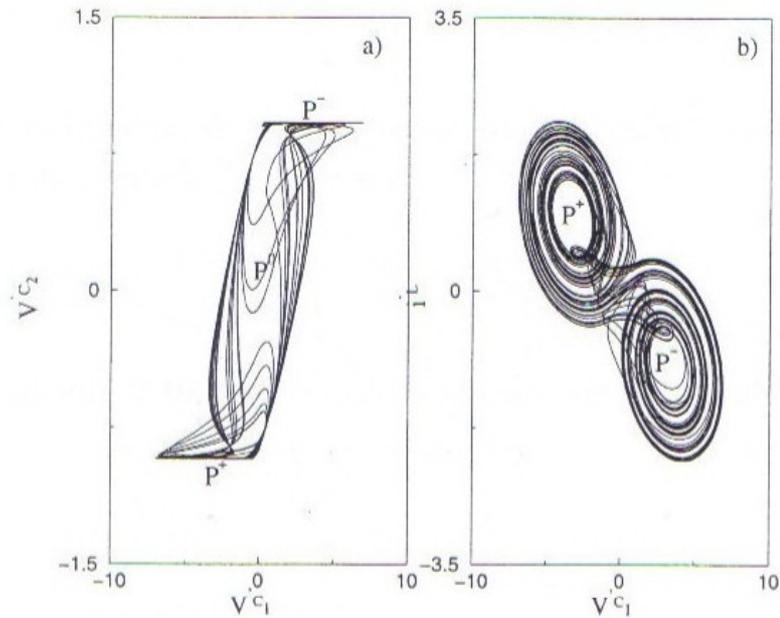


Figura 3.13: Projeção do atrator Espiral-Dupla ( $g = 0, 6000$ ) em relação ao sistema de coordenadas mostrado em 3.12. a) Atrator projetado nas variáveis  $V'_{C_2}$  e  $V'_{C_1}$ . b) Atrator projetado nas variáveis  $i'_L$  e  $V'_{C_1}$ .

$P^*$  que leva localmente as órbitas do fluxo não linear nas do fluxo linear. O homeomorfismo preserva as características das órbitas e pode ser escolhido de modo a preservar a parametrização no tempo.

Quando os autovalores de  $Df(P^*)$  não tiverem partes reais nulas, o ponto  $P^*$  é chamado *ponto fixo hiperbólico*, ou não degenerado e o comportamento assintótico das soluções nas suas proximidades (e portanto seu tipo de estabilidade) é determinada pela linearização. Se qualquer um dos autovalores possui parte real nula, então a estabilidade do ponto  $P^*$  não pode ser determinada. Com isto, o conjunto de pontos hiperbólicos se restringe a: fontes, sumidouros e pontos tipo sela.

O teorema de Hartman-Grobman garante que cada linha (ou plano invariante), relacionado com um autovalor real (ou autovalores complexos) do sistema linearizado, corresponde a uma curva (ou superfície invariante de duas dimensões) do sistema não linear. Aos autovalores  $e$  com parte real negativa, corresponde um plano invariante  $E^e$ , de dimensão  $e$ , do sistema linearizado em que todos os pontos tendem a  $P^*$  para  $t \rightarrow \infty$ . Da mesma forma, para os  $i$  autovalores, com parte real positiva, forma-se um plano  $E^i$  onde todos os pontos tendem a  $P^*$  para  $t \rightarrow -\infty$ . De acordo com o teorema, temos localmente duas superfícies (*variedades*) invariantes no sistema não linear:  $W_{loc}^e$  (variedade estável) de dimensão  $e$ , e

$W_{loc}^i$  (variedade instável), de dimensão  $i$ , em que todos os pontos de  $W_{loc}^e$  tendem a  $P^*$  para  $t \rightarrow \infty$  e todos os pontos de  $W_{loc}^i$  tendem a  $P^*$  para  $t \rightarrow -\infty$ .

**Teorema da variedade estável:** Se (3.1) tem um ponto fixo hiperbólico  $P^*$ , então existem localmente variedades estáveis e instáveis ( $W_{loc}^e, W_{loc}^i$ ) de mesma dimensão  $e, i$  dos autoespaços  $E^e$  e  $E^i$  do sistema linearizado, tangentes a  $E^e$  e  $E^i$  em  $P^*$ , e  $W_{loc}^i$  e  $W_{loc}^e$  são tão diferenciáveis quanto o próprio campo  $f$ . A figura 3.14 ilustra estes dois teoremas que determinam o tipo de estabilidade local.

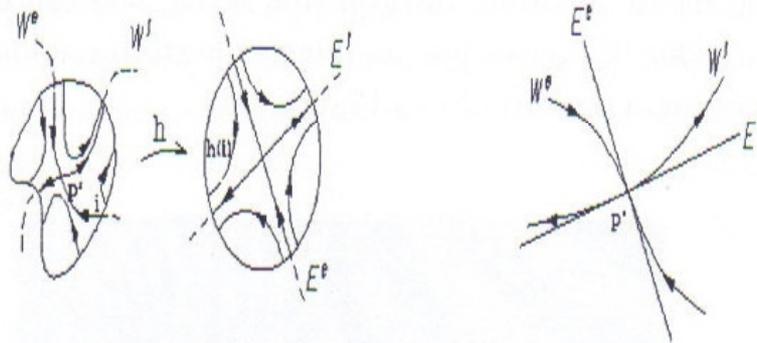


Figura 3.14: Linearização e variedades. a) Teorema de Hartman-Grobman; b) Teorema da variedade estável para um ponto fixo.

Assim, a linearização permite o uso de métodos numéricos para o cálculo das variedades, permitindo assim visualizar o complexo comportamento gerado pela intersecção dessas variedades no espaço de fase. Comportamento este já notado por Poincaré no estudo do problema dos três corpos [7].

Podemos dessa forma definir as *variedades* instáveis e estáveis globais em função das *variedades* locais. Elas são obtidas pelas uniões da iteração regressa e progressiva, respectivamente, das variedades locais sob a ação do fluxo não linear. Desse modo,  $W^e(P^*)$  (variedade estável) é o conjunto de todos os pontos cujas órbitas se aproximam de  $P^*$  para  $t \rightarrow \infty$ , até mesmo se estas órbitas deixam a vizinhança de  $P^*$  por instantes de tempo e  $W^i(P^*)$  (variedade instável) é o conjunto de todos os pontos cujas órbitas se aproximam de  $P^*$  para  $t \rightarrow -\infty$ .

Vamos agora mostrar como as características das variedades afetam os conjuntos invariantes, como a bacia de atração do circuito de Matsumoto-Chua. Podemos observar através

da Figura 3.6 que a bacia é limitada no espaço de fase pela presença da órbita instável tipo sela que engloba estes atratores. Notamos também que a separatriz entre as bacias é uma curva suave. Esta começa no centro das bacias e cria um contorno em forma de espiral (rolo de pergaminho) tendendo assintoticamente para a fronteira do atrator infinito. Esta separatriz é a variedade estável do ponto  $P^0$  que se estende assintoticamente à órbita tipo sela que circunda os atratores. Esta característica da separatriz cria uma região de acumulação na fronteira com a bacia do atrator infinito [11], como pode ser visto na Figura 3.15. Esta figura é uma ampliação da Figura 3.6 na região da fronteira com a bacia do atrator infinito. Pontos sobre a separatriz integrados recursivamente no tempo ( $t \rightarrow -\infty$ ) devem se aproximar assintoticamente da órbita instável tipo sela <sup>1</sup>, sem contudo tocá-la gerando a acumulação na fronteira [30][36]. Sucessivas ampliações nesta região de fronteira mostram o efeito desta acumulação como o mostrado na Figura 3.15.

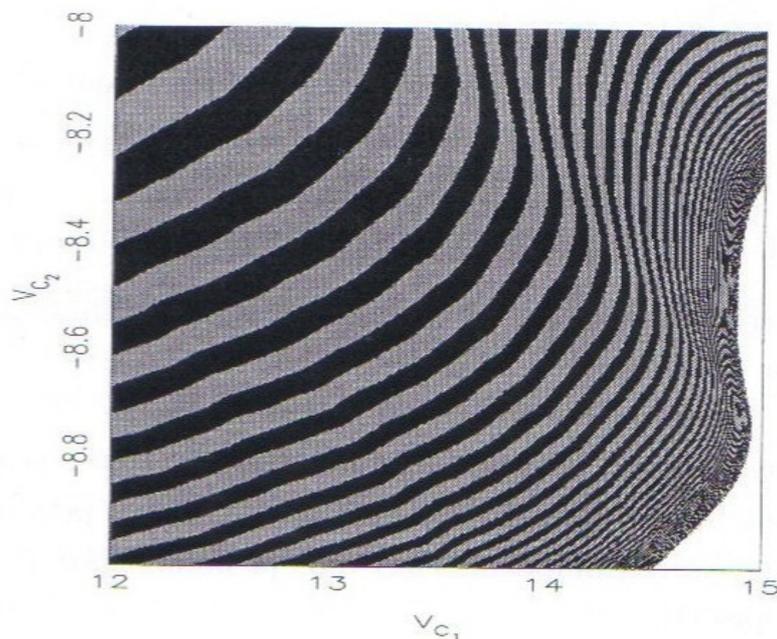


Figura 3.15: Região de acumulação das bacias de atração do sistema Matsumoto-Chua em regime caótico tipo Rössler. A separatriz das bacias é a variedade estável do ponto fixo central  $P^0$  tendendo assintoticamente para a órbita instável tipo sela que circunda os atratores.

Vale ressaltar que a propriedade de unicidade das soluções da Equação 3.1 asseguram que duas variedades de mesma natureza (estável ou instável) de pontos fixos distintos  $P_1, P_2$

<sup>1</sup>podemos dizer que a órbita instável tipo sela é um conjunto  $\alpha$  para pontos sobre a fronteira das bacias, ou seja,  $\phi_t(p) \rightarrow$  órbita para  $t \rightarrow -\infty$ .

não podem se interceptar, nem podem estas variedades se auto-interceptar. Porém, interseções de variedades de natureza distintas (por exemplo, uma estável e a outra instável), de pontos fixos distintos (intersecção heteroclínica) ou do mesmo ponto fixo (intersecção homoclínica) podem ocorrer. Este fato foi notado por Poincaré, o qual notou pela primeira vez que, quando isto ocorre, há um comportamento complexo do sistema dinâmico [29]. As variedades instáveis e estáveis  $W^i(\mathbf{P}^*)$  e  $W^e(\mathbf{P}^*)$  de um ponto de sela  $\mathbf{P}^*$  se interceptam transversalmente num ponto  $p$ , chamado *homoclínico*. A presença deste ponto homoclínico  $p$  implica a existência de uma infinidade deles, obtidos com a iteração progressiva do fluxo não-linear em  $p$  e a iteração regressiva do fluxo em  $p$  [24][32]. Como consequência, um ponto  $\mathbf{P}$  na vizinhança  $U(\mathbf{P}^*)$  de  $\mathbf{P}^*$  é inicialmente repellido de  $\mathbf{P}^*$  ao longo de  $W^i(\mathbf{P}^*)$  e é sucessivamente reinjetado dentro de  $U(\mathbf{P}^*)$  quando ele se aproxima de  $W^e(\mathbf{P}^*)$ . Este processo se repete indefinidamente, gerando portanto um comportamento errático. Uma região  $U(\mathbf{P}^*)$  retangular  $R$  sob as  $n$ -ésimas iterações, pode ser descrita pela dinâmica do mapa de ferradura de Smale [24][30]. Este conjunto contém:

- i) Um conjunto contável de órbitas de todos os períodos;
- ii) Um conjunto incontável de órbitas aperiódicas;
- iii) A existência de uma órbita densa.

Além disso, todas as órbitas são do tipo sela, as quais são densas neste conjunto. Seu fechamento é um conjunto de Cantor [24][32][30] estruturalmente estável. A dinâmica deste conjunto é caracterizada por uma forte dependência às condições iniciais: órbitas próximas se afastam exponencialmente.

## 3.5 Métodos para caracterizar o atrator

### 3.5.1 Mapa de Poincaré:

A idéia de reduzir o estudo do fluxo contínuo no tempo para o estudo de um sistema associado discreto no tempo é devido a Poincaré (1899). Poincaré foi quem primeiro utilizou esta técnica no problema dos três corpos na Mecânica Celeste [41][12]. A construção do mapa de Poincaré oferece várias vantagens, tais como:

- i) Eliminação de pelo menos uma variável do problema, resultando portanto no estudo de um sistema de dimensão mais baixa;
- ii) Visão global em sistemas com dimensão baixa ( $dim \leq 4$ ) (no nosso caso  $dim = 3$ ), como veremos nos próximos capítulos.

**Tipos de Mapas:** Os mapas diferem para sistemas autônomos e não-autônomos e neste trabalho usamos ambos os tipos de mapas.

Quando o sistema é não-autônomo usamos a técnica estroboscópico, a qual consiste em observar a evolução do sistema em tempos discretos como se tirássemos fotos do sistema a cada período de tempo pré-determinado, ou seja,

$$P_N^k(p) = \phi_{t_0+kT}(p, t_0) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

onde  $T$  no caso, desta tese, será igual ao período do forçamento externo aplicada ao sistema. A técnica estroboscópica é esquematizada no gráfico mostrado à esquerda na Figura 3.16.

Para sistema autônomo escolhe-se um plano  $\Sigma$  transversal ao fluxo de dimensão  $n - 1$ , este hiperplano é tal que:  $P_+ : \Sigma \rightarrow \Sigma$ .  $P_+(p^*)$  é onde  $\phi_t(p^*)$  primeiro intersecta  $\Sigma$  em uma posição positiva, (i.e,  $\langle \mathbf{h}, f(\phi_t(p^*)) \rangle \geq 0$ ),  $\mathbf{h}$  é um vetor unitário ortonormal a  $\Sigma$ . Este mapa é também chamado de mapa de Poincaré unidirecional para diferenciar o mapa de primeiro retorno que não obedece ao sentido preferencial para as órbitas. À direita do gráfico mostrado na Figura 3.16 é mostrado este procedimento.

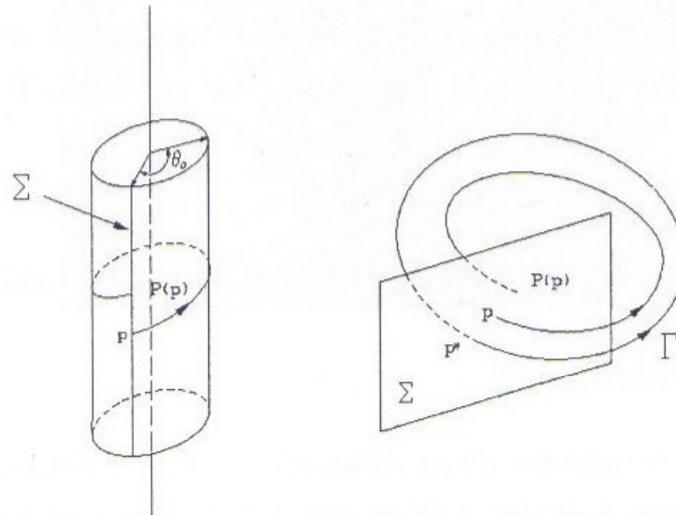


Figura 3.16: Mapas de Poincaré. Mapa estroboscópico à esquerda (sistema não-autônomo) e mapa de Poincaré à direita (sistema autônomo).

Para a aplicação da técnica de Poincaré devemos conhecer a dinâmica global do fluxo. O grande valor das seções geradas se manifesta quando consideramos características genéricas

de sistemas dinâmicos, ao invés de um sistema específico [24][41]. Por exemplo, na vizinhança de uma órbita periódica hiperbólica  $\gamma$ , correspondente a um ponto periódico hiperbólico  $p^*$  na seção de Poincaré, haverá uma variedade estável ( $W^e(\gamma)$ ) e uma instável ( $W^i(\gamma)$ ), tal que todas as órbitas de  $W^e(\gamma)$  se aproximam de  $\gamma$  para  $t \rightarrow \infty$ , enquanto todas as órbitas de  $W^i(\gamma)$  se aproximam de  $\gamma$  para  $t \rightarrow -\infty$ , como mostrado no gráfico da Figura 3.17.

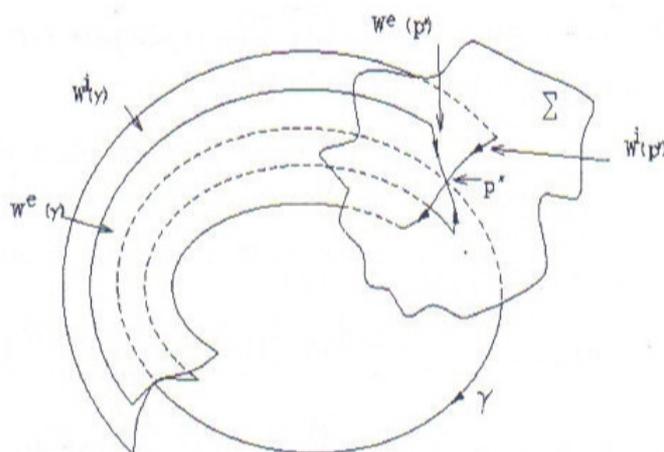


Figura 3.17: Mapa de Poincaré  $\Sigma$  gerado por uma órbita hiperbólica  $\gamma$  gerando um ponto fixo hiperbólico  $p^*$ .  $W^e$  variedade estável;  $W^i$  variedade instável. A estabilidade do ponto fixo  $p^*$  no mapa reflete a estabilidade da órbita  $\gamma$ .

### 3.5.2 Análise de Fourier

A análise espectral de Fourier indica se o sistema é periódico, quase periódico ou caótico. O espectro de um sinal periódico de frequência  $f$  apresenta impulsos em  $f$  e seus harmônicos  $2f, 3f, \dots$ . Um sinal quase periódico com frequências fundamentais  $f_1, \dots, f_k$  apresenta impulsos nessas frequências e também em todas as combinações lineares com coeficientes inteiros. Em geral, usa-se a análise espectral para a visualização e a definição de sinais periódicos e quase periódicos, assim como para distinguí-los de sinais caóticos. No entanto, como a análise de sinais gerados por sistemas caóticos envolve a decomposição espectral do valor absoluto de quantidades quadráticas, ela perde informação sobre a fase do sinal, que pode ser útil para o entendimento do atrator estranho [4][42], uma técnica possível para recuperação da fase é a análise biespectral que será vista no Capítulo 5. Para sinais caóticos, técnicas

próprias da dinâmica não-linear são introduzidas tais como expoente de Lyapunov, entropia de Kolmogorov-Sinai e dimensionalidade [4][30].

Se  $V_{C_1}(t)$  é uma série temporal caótica gerada pelo circuito de Matsumoto-Chua, sua transformada de Fourier é definida como

$$F(V_{C_1}(f)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi ft} V_{C_1}(t) dt \quad (3.20)$$

sendo o espectro de potência  $S(f)$  do sinal dado por:

$$\begin{aligned} S(f) &= \langle |F(V_{C_1}(f))|^2 \rangle & (3.21) \\ &= \langle F(V_{C_1}(f)) F^*(V_{C_1}(f)) \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi ft} V_{C_1}(t) dt \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi ft'} V_{C_1}(t') dt' \end{aligned}$$

(onde  $F^*(V_{C_1}(f))$  é o complexo conjugado de  $F(V_{C_1}(f))$ ). A transformada inversa de Fourier do espectro de potência pode ser calculada de uma forma interessante que nos será útil no decorrer deste trabalho,

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu = \langle V_{C_1}(t) V_{C_1}(t - \tau) \rangle, \quad (3.22)$$

a qual envolve a função de autocorrelação da série temporal (teorema de Wiener-Khinchin [43]). Assim, a função de autocorrelação e o auto-espectro de potência formam, num caso estacionário, um par de transformadas de Fourier.

A autocorrelação pode ser usada para caracterizar um atrator caótico. Ela indica por quanto tempo o valor do sinal no instante  $t$  depende de seus valores prévios; em outras palavras, a autocorrelação mede o grau de semelhança existente no sinal à medida que o tempo passa. Se o sinal é periódico ou quase periódico a função de autocorrelação permanece diferente de zero quando o intervalo de tempo tende ao infinito. A autocorrelação de um sinal periódico é igualmente periódica, pois um sinal periódico volta a se parecer consigo mesmo após um intervalo de tempo correspondente ao período. No entanto para sinais caóticos a autocorrelação tende a zero para um intervalo de tempo finito; a semelhança de um sinal consigo mesmo diminui com o tempo e acaba por desaparecer completamente. Isto significa que, no tempo, o sistema dinâmico perde memória do estado inicial. A função

de autocorrelação de um sinal multi-periódico com muitas frequências independentes e in-comensuráveis pode ser confundida com a de um sinal caótico, a exemplo do que ocorre com o espectro de potências [31][44].

### 3.5.3 Diagrama no espaço de parâmetros usando autocorrelação

Uma análise preliminar de um sistema caótico pode ser feita através da construção do diagrama no espaço de parâmetros com o valor da autocorrelação. Esta é uma nova maneira de se obter este diagrama, a qual propomos neste trabalho.

Consideremos o circuito de Matsumoto-Chua, modelado pelas Equações 3.3. Criamos uma grade de  $400 \times 400$  pares de valores dos parâmetros  $(g, C_1)$  do sistema. Usando sempre as mesmas condições iniciais,  $(V_{C_1}(0) = 0,0290, V_{C_2} = 0,2334, i_L = 0,8450)$ , integramos o sistema e obtemos uma série temporal para uma das variáveis,  $V_{C_1}(t)$ , com 4096 valores. Cada valor é selecionado a cada nove passos de integração ( $\Delta t = 0,1\tau_c$ ). O número de pontos  $2^{12}$ , e os saltos nos valores gerados pela integração, são para usar a eficiência do algoritmo de FFT no cálculo da autocorrelação [43]. Obtemos de cada série um espectro de autocorrelação, que tende a zero se o sinal é caótico, e é diferente de zero (para qualquer tempo), se o sinal é periódico. Dessa forma, podemos fazer a distinção entre comportamento caótico e periódico gerado para cada par de parâmetros. A Figura 3.18 mostra o diagrama obtido com este procedimento. Em cores escuras graficamos pontos que geram séries temporais com autocorrelações diferentes de zero, para qualquer tempo, sendo portanto movimentos periódicos. Tons claros são pontos cujas autocorrelações são nulas após um certo intervalo de tempo, caracterizando comportamento caótico. Veremos no, Capítulo 4, que este tipo de diagrama é muito semelhante ao diagrama obtido com outros algoritmos, como o de órbita recorrente mostrado em [40]. A vantagem do diagrama usando autocorrelação está na rapidez do cálculo da FFT, em comparação ao cálculo, por exemplo, do expoente de Lyapunov.

Um possível modo de obter a informação da fase (não apresentada nesses diagramas) do sinal é usar o biespectro calculado com FFT ou usando a técnica de ondaletas [42]. Esta última está sendo amplamente usada para análise de bicoerência, detecção de estruturas coerentes e multifractalidade em fluidos e dinâmica caótica [15][16]. Mostraremos a técnica de biespectro no Capítulo 5.

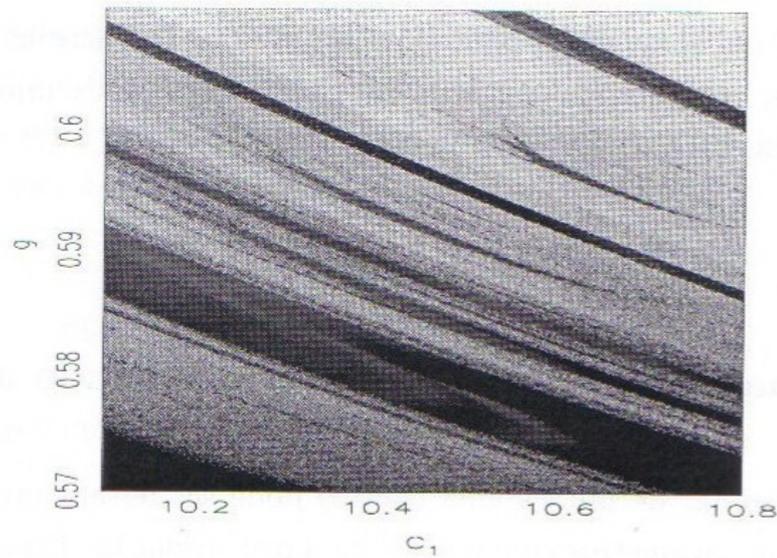


Figura 3.18: Diagrama no espaço dos parâmetros  $g$  e  $C_1$ , através da autocorrelação. Cores escuras indicam regiões de autocorrelação não nula, portanto periódicas. Regiões claras indicam regiões de autocorrelação nula, portanto caóticas.

### 3.6 Outras técnicas para análise de sistemas caóticos

A análise de sistemas dinâmicos não lineares determinísticos é ainda tema de pesquisa e estudo, uma vez que as técnicas usuais já corroboradas pela experiência podem não ser adequadas para determinados sistemas.

Apesar do comportamento irregular e imprevisível das séries temporais caóticas, estas apresentam estruturas no espaço de fase. Essas estruturas podem ser determinadas de forma a permitir aplicações da dinâmica caótica, inclusive o seu controle.

#### 3.6.1 Expoente de Lyapunov

Como já vimos anteriormente, as soluções de (3.1) podem gerar os mais variados tipos de atratores no espaço de fase; pontos fixos ou focos estáveis, ciclo limite, toros e atratores estranhos. A técnica do cálculo do expoente de Lyapunov é uma ferramenta poderosa que serve para distinguir os atratores individuais, a partir da convergência ou divergência exponencial no comportamento de trajetórias vizinhas no espaço de fase [45][46][47].

O expoente de Lyapunov depende da estabilidade de uma dada trajetória. Os atratores periódicos e quase periódicos possuem uma forte ação atratora que faz com que trajetórias nas suas proximidades (na sua bacia de atração) convirjam para eles assintoticamente, e duas

órbitas vizinhas distintas permaneçam próximas. Os atratores estranhos também atraem as trajetória de suas bacias, porém duas trajetórias próximas no atrator se afastam exponencialmente com o tempo. Dessa forma é possível distinguir os diferentes tipos de atratores e o comportamento da estabilidade do sistema dinâmico.

Vamos aqui sumarizar os aspectos relevantes da técnica do cálculo espectral dos expoentes de Lyapunov. Neste trabalho o espectro de Lyapunov é calculado usando o algoritmo de Wolf *et al.* [14]. No apêndice A detalhamos este algoritmo, assim como o programa em C que desenvolvemos neste trabalho.

Dado um sistema dinâmico contínuo em um espaço de fase de dimensão- $n$ , monitoramos a evolução temporal das condições iniciais para um grande intervalo de tempo de uma esfera infinitesimal (dimensão- $n$ ); esta esfera torna-se um elipsóide devido à deformação local da natureza do fluxo. O  $i$ -ésimo expoente de Lyapunov uni-dimensional é definido em termos do comprimento do eixo principal do elipsóide  $p_i(t)$ :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{p_i(t)}{p_i(0)}. \quad (3.23)$$

onde os  $\lambda_i$  são ordenados do maior para o menor.

Notando que extensão linear do elipsóide cresce como  $2^{\lambda_1 t}$ , a área definida pelos dois primeiros eixos principais cresce como  $2^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ , o volume definido pelos três eixos principais cresce como  $2^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$ , e assim sucessivamente.

Todo sistema dinâmico contínuo sem um ponto fixo terá pelo menos um expoente nulo, correspondendo à lenta variação do valor do eixo principal tangente ao fluxo. Eixos que na média expandem ou contraem correspondem, respectivamente, a expoentes positivos e negativos; portanto, todo sistema dinâmico dissipativo tem pelo menos um expoente negativo, e a soma de todos os expoentes é negativa [14][45][4].

A expansão exponencial indicada pelo expoente positivo é incompatível com o movimento que ocorre em um atrator limitado no espaço de fase, a menos que ocorra um processo de dobramento. Cada expoente positivo indica a existência de uma direção na qual duas trajetórias próximas divergem; havendo uma outra direção de convergência. Portanto, o comportamento do sistema a longo prazo é sensível às condições iniciais. Um atrator para um sistema dissipativo com um ou mais expoente de Lyapunov positivo é dito ser *caótico*. O cálculo dos sinais dos expoentes de Lyapunov fornece um quadro qualitativo da dinâmica do sistema. Em um sistema tri-dimensional dissipativo, como o circuito de Matsumoto-Chua estudado neste trabalho, o espectro,  $\lambda$ , dos sinais possíveis de  $\lambda_i$ :

- ponto fixo,  $\lambda = (-, -, -)$ ;
- ciclo limite,  $\lambda = (0, -, -)$ ;
- toro de duas frequências,  $\lambda = (0, 0, -)$ ;
- atrator estranho,  $\lambda = (+, 0, -)$ .

Mostramos, na Figura 3.19, exemplos de expoentes de Lyapunov para os atratores do circuito de Matsumoto-Chua mostrados na Figura 3.2. Podemos notar através do gráfico que o transiente inicial decai gradualmente com o tempo até a convergência final.

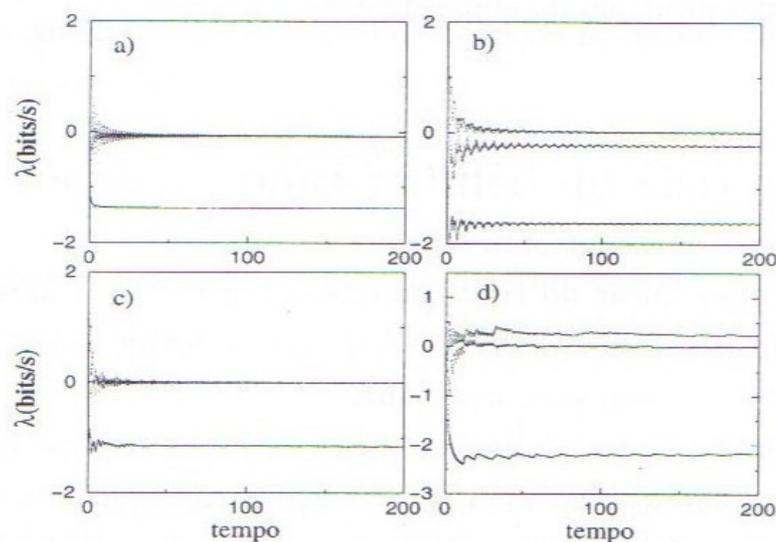


Figura 3.19: Limite dos três expoentes de Lyapunov para os quatro atratores do circuito de Matsumoto-Chua mostrados na Figura 3.2: a) ponto fixo,  $\lambda = (-, -, -)$ ; b) ciclo limite,  $\lambda = (0, -, -)$ ; c) toro de duas frequências,  $\lambda = (0, 0, -)$ ; d) atrator caótico,  $\lambda = (+, 0, -)$ .

Os módulos dos expoentes de Lyapunov quantificam a dinâmica do atrator em termos de informação. Os expoentes medem a taxa na qual a evolução do sistema cria ou destrói informação [14][4]; logo os expoentes são expressos em bits de informação/s ou bits/órbita. Por exemplo, se um sistema tiver o maior expoente de Lyapunov positivo igual a 2,16 bits/s, a posição futura de um ponto inicial, especificado com uma precisão de uma parte por milhão (20bits), não poderá ser previsto após cerca de 9s  $[20\text{bits}/(2,16 \text{ bits/s})]$  [14].

### 3.6.2 Dimensão do atrator Espiral-Dupla

A dimensão de um atrator não caótico é o menor valor do número de variáveis de estado necessárias para descrever o comportamento estacionário do sistema. A dimensão de um atrator não caótico é expressa por um número inteiro. Por exemplo, em relação ao espaço Euclidiano temos que um conjunto finito de pontos tem dimensão zero; uma linha tem dimensão um; uma superfície, dimensão dois, uma esfera dimensão três. Um atrator caótico, por sua vez, apresenta dimensão não inteira. A dimensão que apresenta valor não inteiro é chamada *dimensão fractal*. Uma propriedade de objetos que apresentam estrutura fractal é a chamada auto-similaridade. Quase todos os atratores caóticos são objetos fractais [1][34].

Nesta seção queremos mostrar dois métodos de cálculo de dimensão e aplicá-los ao circuito de Matsumoto-Chua, no regime de Espiral-Dupla, com objetivo de determinarmos a dimensão deste atrator.

a) **Capacidade ou dimensão fractal:** o mais simples tipo de dimensão é a capacidade [5]. Dado um atrator  $A$  num espaço de dimensão  $p$ . Recubra-se esses pontos com hiper-cubos de lado  $\epsilon$ . Seja  $N(\epsilon)$  o número mínimo de hiper-cubos (caixas) de lado  $\epsilon$  necessário para cobrir todo o atrator  $A$ . Define-se capacidade, dimensão de Hausdorff ou *dimensão fractal* como

$$D_{cap} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}. \quad (3.24)$$

Usando o programa *Dynamics ??*, determinamos que a dimensão fractal calculada através de contagem de caixas para o atrator Espiral-Dupla com  $g = 0,6000$ , mostrado na Figura 3.3 é igual a  $D_{cap} = 2,191 \pm 0,045$ .

b) **Dimensão de Kaplan-Yorke:** sejam  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n$  os expoentes de Lyapunov de um sistema dinâmico. Seja  $j$  o maior inteiro tal que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_j \geq 0$ . A dimensão de Lyapunov como definida por Kaplan e Yorke [13] é

$$D_\lambda = j + \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}. \quad (3.25)$$

Se não existe  $j$ , como no caso de um ponto de equilíbrio hiperbólico estável,  $D_L$  é definido como 0. Para um atrator,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$ , de forma que isto garante que  $j$  é menor do que  $n$ .

Para um ciclo limite atraente, a situação genérica é  $\lambda_1 = 0 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ . Portanto, a dimensão de Lyapunov de um ciclo limite genérico é 1. Da mesma forma, a dimensão de Lyapunov de um atrator periódico genérico de período- $K$  é  $K$ .

Se o atrator é caótico,  $D_\lambda$  deve ser não-inteira. Para o caso do circuito de Matsumoto-Chua (tri-dimensional) com expoentes  $\lambda_+ > 0 > \lambda_-$ ,

$$D_\lambda = 2 + \frac{\lambda_+}{|\lambda_-|} \quad (3.26)$$

Como,  $\lambda_+ + \lambda_- < 0$ , temos que  $2 < D_\lambda < 3$ . Para o atrator caótico Espiral-Dupla com  $g = 0,6000$ , mostrado na Figura 3.3, determinamos através do nosso programa que  $\lambda_+ \approx 0,161$ ;  $\lambda_- \approx 1,500$  de forma que a dimensão de Kaplan-Yorke deste atrator é  $D_\lambda = 2,100$ . Obtivemos com o programa *Dynamics* [48]  $D_\lambda = 2,090$ , de forma que temos inteira confiança nos resultados gerados pelo programa que calcula os expoentes de Lyapunov desenvolvido por nós neste trabalho. A dimensão fracionária exprime o caráter fractal do atrator caótico gerado pelo circuito de Matsumoto-Chua.

### 3.6.3 Diagrama de bifurcação

Uma outra técnica de análise usada para sistemas dinâmicos é o diagrama de bifurcação. Através destes diagramas podemos ter uma visão global dos diferentes atratores do sistema à medida que variamos um dos parâmetros de controle, dessa forma permitindo uma representação dos comportamentos periódicos e caóticos gerados do sistema. O diagrama de bifurcação fornece um sumário de toda a dinâmica essencial do sistema, tornando-se dessa forma uma ferramenta que permite uma visualização geral dos diferentes atratores gerados pelo sistema dinâmico.

Para certos valores do parâmetro de controle  $g$ , o circuito de Matsumoto-Chua terá assintoticamente um único movimento, enquanto que para valores do parâmetro um pouco diferente, dois ou mais tipos de movimentos são possíveis. Se esses movimentos são estáveis, o comportamento que o circuito executará dependerá das condições iniciais. Chamamos essa mudança na dinâmica do sistema quando se varia um parâmetro de *bifurcação*.

Neste trabalho o diagrama de bifurcação é construído de acordo com o algoritmo proposto no livro de Parker e Chua [12]. Escolhemos uma determinada seção de Poincaré e, para cada valor de um parâmetro de controle escolhido, eliminamos o transiente (em torno de 50 ciclos em torno do atrator de Espiral-Dupla) e graficamos 300 pontos gerados pelo cruzamento da trajetória na seção. Para uma melhor precisão usamos um passo de integração  $h = 0,005$  no algoritmo de Runge-Kutta 4ª ordem.

Mostramos nas Figuras 3.20, 3.21, 3.22 e 3.23, quatro diagramas de bifurcação, do circuito de Matsumoto-Chua, em sequência. O parâmetro de controle escolhido foi variado

de  $g = 0,565$  a  $g = 0,645$ . Cada linha vertical imaginária paralela ao eixo  $V_{C_2}$  determina um diferente comportamento para o sistema, de movimento periódico a bandas caóticas que se entrelaçam, se juntam e algumas vezes desaparecem gerando janelas de periodicidade. Podemos dizer que o diagrama de bifurcação é um catálogo dos atratores gerados pela variação do parâmetro de controle  $g$ . As finas regiões claras que aparecem nas regiões mais escuras são a presença de atratores periódicos entre bandas geradas por atratores caóticos ou órbitas de grandes períodos. O fenômeno de fusão de bandas caóticas ou seu desaparecimento repentino é chamado de *crise* [49] e será analisado posteriormente.

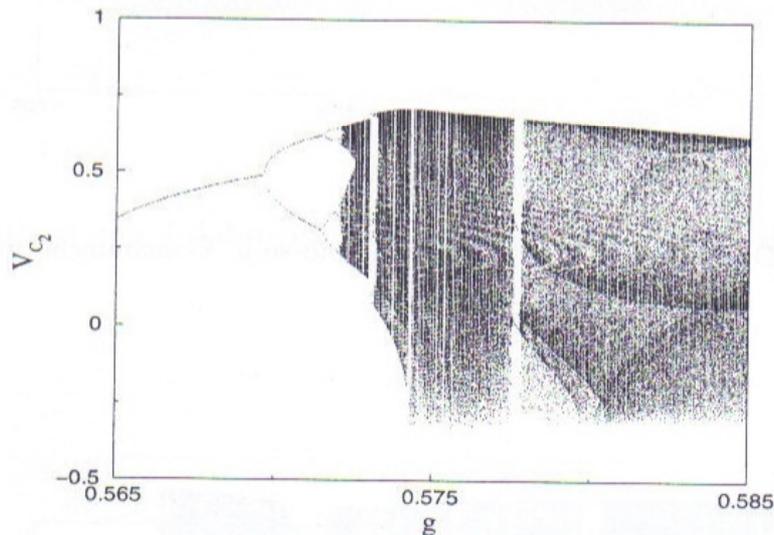


Figura 3.20: Diagrama de bifurcação do circuito de Matsumoto-Chua variando-se apenas o parâmetro de controle  $g$ .

Na Figura 3.24, mostramos num único gráfico a sequência dos diagramas de bifurcação (Figuras 3.20 a 3.23) a), b) os dois primeiros expoentes de Lyapunov para os atratores mostrados em a) e a dimensão dos atratores através da dimensão de Kaplan-Yorke do circuito de Matsumoto-Chua c). Cada gráfico foi gerado com 500 valores do parâmetro  $g$  no eixo horizontal.

### 3.6.4 Diagrama nos espaços das freqüências

Uma outra maneira de analisar os diferentes comportamentos do sistema, à medida que variamos o parâmetro de controle, é fornecido pelo diagrama no espaço das freqüências desenvolvido em [50] [51]. Neste diagrama, o eixo horizontal representa o parâmetro variado

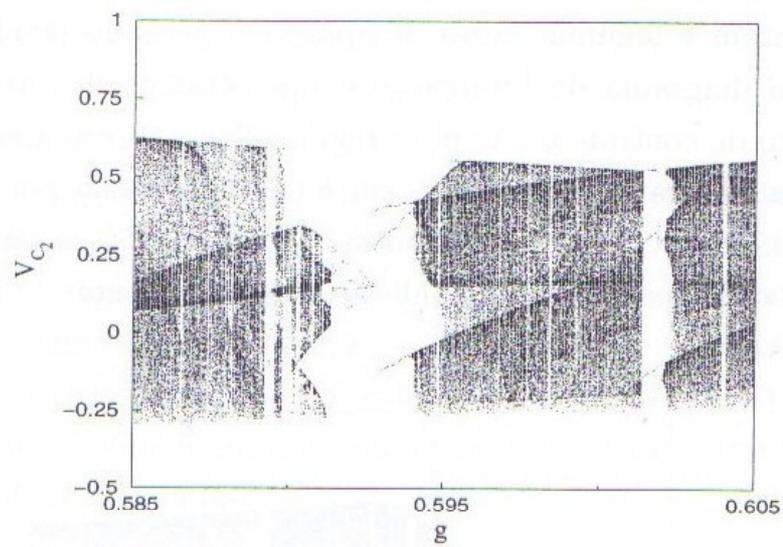


Figura 3.21: Diagrama de bifurcação variando-se  $g$ . Continuação da Figura 3.20.

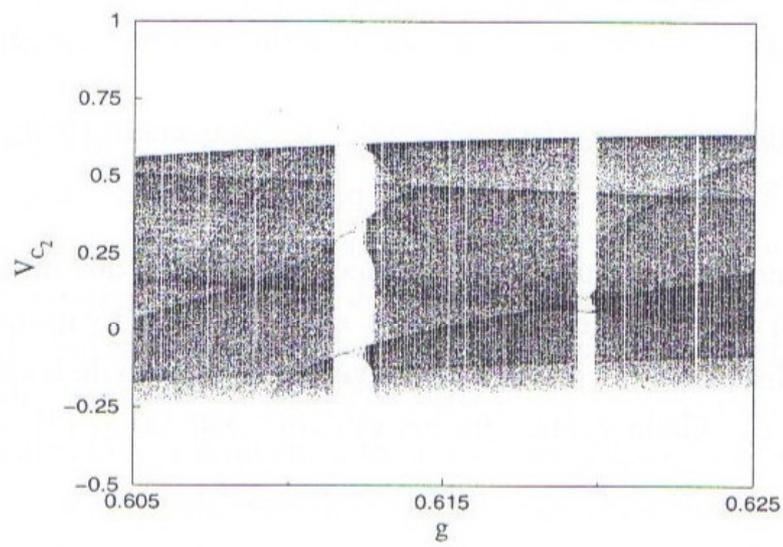


Figura 3.22: Diagrama de bifurcação variando-se  $g$ . Continuação da Figura 3.21.

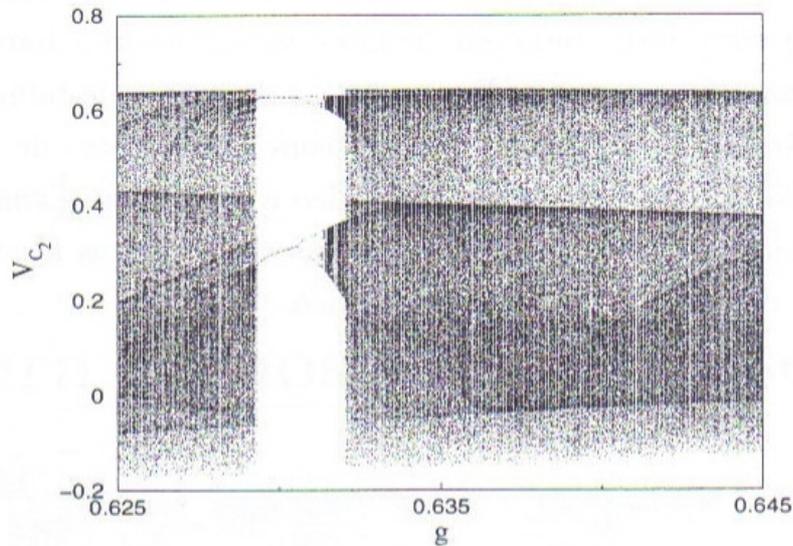


Figura 3.23: Diagrama de bifurcação variando-se  $g$ . Continuação da Figura 3.22.

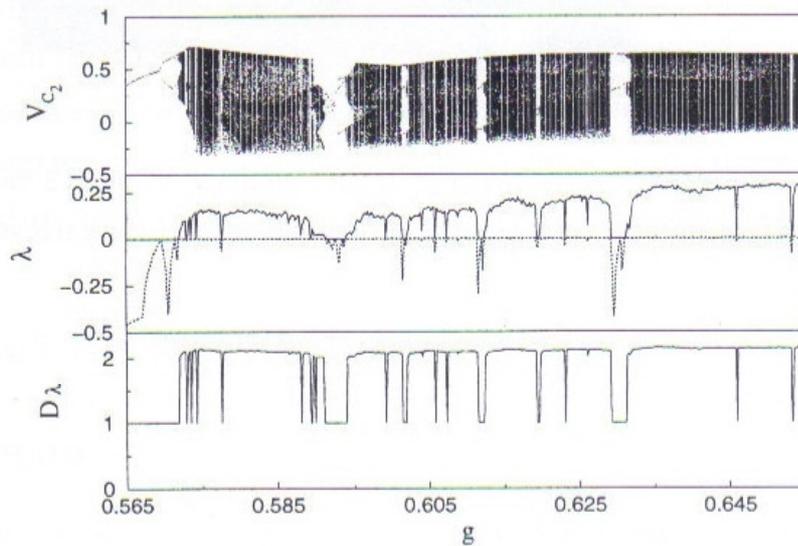


Figura 3.24: a) Diagrama de Bifurcação, com 500 valores de  $g$ . b) Os dois primeiros expoentes de Lyapunov para os atratores mostrados em a). c) Dimensão de Kaplan-Yorke para os atratores mostrados em a).

e o eixo vertical é o eixo das frequências. Para cada valor do parâmetro no eixo horizontal calcula-se o espectro de potências através do algoritmo de FFT e marca-se as frequências mais intensas (picos) em preto, sendo que as intensidades intermediárias são marcadas em tons graduais de cinza. Mostramos na Figura 3.25 o diagrama de bifurcação no espaço das frequências para o circuito de Matsumoto-Chua, com o parâmetro de controle variando de  $g = 0,565$  a  $g = 0,655$ . É possível notar no gráfico a faixa escura em torno da frequência característica do sistema  $f_c = 0,29$ . Nas regiões caóticas temos as faixas escuras contínuas, gerada pelo espectro de banda larga do sinal caótico.

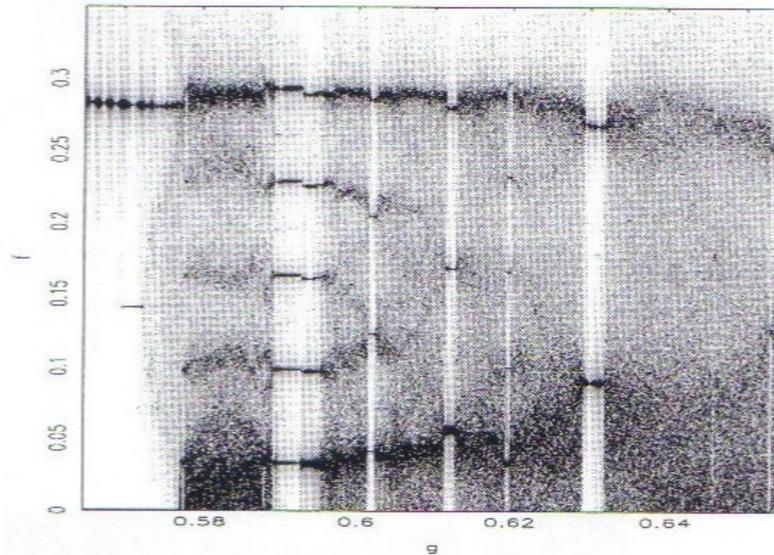


Figura 3.25: Diagrama de bifurcação no espaço das frequências, com 512 valores de  $g$ , para cada valor de  $g$  calcula-se a FFT de uma serie temporal de 4096 valores da variável  $V_{C_1}$ .

# Capítulo 4

## Rotas para o caos - sistema sem perturbação

Neste capítulo, descrevemos o comportamento geral do sistema de Matsumoto-Chua em função da variação dos seus parâmetros. Analisamos inicialmente a equação de sensibilidade do sistema, verificando e classificando quais parâmetros afetam mais sensivelmente a dinâmica das soluções geradas pelo circuito de Matsumoto-Chua. Através dos diagramas no espaço dos parâmetros, construídos a partir do valor do maior expoente de Lyapunov, delimitamos as zonas em que o sistema opera em regimes periódicos ou caóticos. As fronteiras dessas regiões representam transições ou rotas que o sistema desenvolve, tais como as rotas de Feigenbaum e intermitência. É possível ainda, com a ajuda desses diagramas, detectar coexistência de atratores e crises.

### 4.1 Equação de sensibilidade

#### 4.1.1 Introdução

A maneira como um sistema dinâmico responde às variações nos seus parâmetros é de fundamental importância para determinar: i) os diferentes tipos de trajetórias do sistema; ii) a sua estabilidade; iii) os parâmetros mais eficazes para o controle do sistema pela variação dos mesmos.

Iniciamos este capítulo analisando o circuito de Matsumoto-Chua através da *equação de sensibilidade*. Esta equação, fornece uma estimativa de primeira ordem do efeito da variação dos parâmetros nas soluções geradas pelo sistema dinâmico. A equação de sensibilidade

é composta das partes lineares do sistema gerado pela Jacobiana em relação às variáveis dinâmicas e da Jacobiana gerada pelos parâmetros do sistema. Através da equação de sensibilidade podemos definir quais parâmetros afetam sensivelmente as soluções .

Consideremos um sistema dinâmico arbitrário

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, c_0), \quad (4.1)$$

onde  $c_0$  representa todos os parâmetros nominais do sistema. Este sistema geral 4.1 será representado pelo circuito de Matsumoto-Chua, reescrito a seguir

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} &= g(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_{NR}(V_{C_1}), \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} &= g(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L, \\ L \frac{di_L}{dt} &= -V_{C_2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para este sistema o parâmetro nominal  $c_0$  é um dos parâmetros  $g$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $L$ . Queremos determinar como a variação de primeira ordem dos parâmetros afetam as soluções da Equação 4.1.

Seja a condição inicial da Equação 4.1 dada por  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$ . Pelo teorema da estabilidade de Lipschitz [24], sabemos que para todo parâmetro  $c$  próximo de  $c_0$ , isto é,  $|c - c_0|$  suficientemente pequeno, a equação 4.1 possui uma única solução  $\mathbf{X}(t, c)$  num intervalo de tempo  $[t_0, t_1]$ , próxima da solução nominal  $\mathbf{X}(t, c_0)$ . A diferenciabilidade contínua de  $\mathbf{F}$  referente a  $\mathbf{X}$  e  $c$ , implica a propriedade adicional da solução  $\mathbf{X}(t, c)$  ser diferenciável em relação a  $c$  próximo ao valor nominal  $c_0$ . Para observarmos isto, temos

$$\mathbf{X}(c) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{X}(c), c) ds. \quad (4.3)$$

Efetuando a derivada parcial em relação ao parâmetro  $c$  obtemos,

$$\frac{\partial \mathbf{X}(c)}{\partial c} = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}(c), c) \mathbf{X}(c) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial c}(\mathbf{X}(c), c) \right] ds, \quad (4.4)$$

onde  $[\partial \mathbf{X}_0 / \partial c] = 0$ , uma vez que  $\mathbf{X}_0$  é independente de  $c$ . Diferenciando em função do tempo  $t$ , podemos ver que  $\mathbf{X}(t, c)$  satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S}(t) = \mathbf{A}(c_0) \mathbf{S}(t) + \mathbf{B}(c_0), \quad \mathbf{S}(t_0) = 0, \quad (4.5)$$

onde

$$\mathbf{A}(c_0) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, c)}{\partial \mathbf{X}}, \quad \mathbf{B}(c_0) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, c)}{\partial c} \quad (4.6)$$

e  $\mathbf{S}(t) = \partial \mathbf{X}(c) / \partial c$ . A função  $\mathbf{S}(t)$  é chamada função de sensibilidade, e a Equação 4.5 é denominada *equação de sensibilidade*.

O procedimento numérico para calcular a função de sensibilidade  $\mathbf{S}(t)$  é solucionar a equação original do sistema com os valores nominais dos parâmetros simultaneamente com a função de sensibilidade  $\mathbf{S}(t)$ , ou seja, resolvemos numericamente o conjunto acoplado de equações

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}, c), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \\ \frac{d\mathbf{S}(t)}{dt} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, c)}{\partial \mathbf{X}} \right] \mathbf{S}(t) + \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, c)}{\partial c} \right], \quad \mathbf{S}(t_0) = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Consideremos agora o circuito de Matsumoto-Chua. Como temos quatro parâmetros no sistema, vamos fixar um e variar os outros três. Inicialmente fixamos o parâmetro  $g = 0,6$  e consideramos variações em torno dos valores nominais de  $C_1 = 10,0$ ,  $C_2 = 1,0$  e  $C_3 = 1/L = 6,0$ . Neste caso as Jacobianas  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são, respectivamente:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, c)}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} -10(g + F) & 10g & 0 \\ g & -g & 1 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

onde

$$F = \begin{cases} m_0 \in D^+ & V_{C_1} < -1,0 \\ m_1 \in D^0 & |V_{C_1}| < 1,0 \\ m_0 \in D^- & V_{C_1} > 1,0. \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, c)}{\partial c} = \begin{pmatrix} g(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_{NR}(V_{C_1}) & 0 & 0 \\ 0 & g(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L & 0 \\ 0 & 0 & -V_{C_2} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

A partir destas Jacobianas podemos integrar o conjunto acoplado de equações e determinar as soluções da equação de sensibilidade para o circuito de Matsumoto-Chua. O resultado numérico pode ser visto na Figura 4.1. Podemos concluir, com a ajuda dos resultados mostrados no gráfico, que as soluções da Equação 4.3, com o parâmetro  $g$  fixo, possuem sensibilidade de mesma ordem quanto às variações dos parâmetros  $C_2$ ,  $L$  e  $C_1$ .

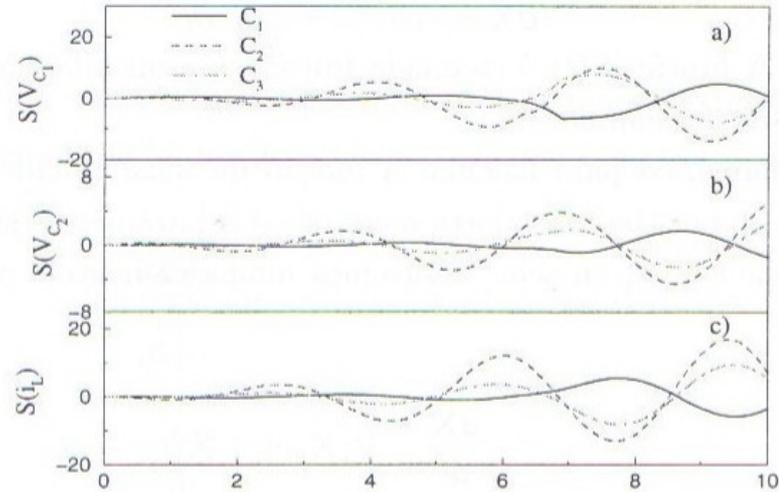


Figura 4.1: Função de sensibilidade,  $S(c)$ , em função dos parâmetros do circuito de Matsumoto-Chua ( $g = 0,6000$ ). a)  $S(V_{C_1})$  em função do parâmetro  $C_1$ ; b)  $S(V_{C_2})$  em função do parâmetro  $C_2$ ; c)  $S(i_L)$  em função de  $C_3 = 1/L$ .

Consideremos agora o parâmetro  $C_1 = 10,0$  fixo e a solução da equação de sensibilidade variando os parâmetros  $g$ ,  $C_2$  e  $C_3 = 1/L$ . Neste novo caso, a Jacobiana  $\mathbf{A}$  não se altera, porém a Jacobiana  $\mathbf{B}$ , que depende das variações dos parâmetros, passa a ser

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, c)}{\partial c} = \begin{pmatrix} 10(V_{C_2} - V_{C_1}) & 0 & 0 \\ C_2(V_{C_1} - V_{C_2}) & g(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L & 0 \\ 0 & 0 & -V_{C_2} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

O resultado da integração da equação de sensibilidade com essa nova Jacobiana é mostrado na Figura 4.2.

A partir da análise dos gráficos vistos nas Figuras 4.2 e Figura 4.1, verificamos que as soluções do circuito de Matsumoto-Chua são mais sensíveis às variações no parâmetro  $g$  do que às variações em outros parâmetros do sistema (note as diferenças de escala nessas figuras). Este resultado será útil quando tratarmos dos métodos de controle de caos. Podemos concluir

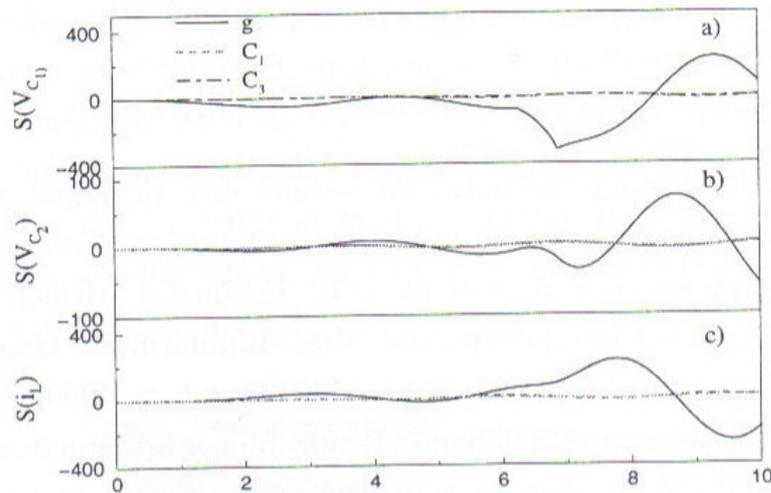


Figura 4.2: Função de sensibilidade,  $S(c)$ , em função dos parâmetros do circuito de Matsumoto-Chua. a)  $S(V_{C_1})$  em função do parâmetro  $g$ ; b)  $S(V_{C_2})$  em função de  $C_2$ ; c)  $S(i_L)$  em função de  $C_3 = 1/L$ .

que qualquer método de controle, que exija pequenas mudanças na topologia das soluções geradas pelo circuito de Matsumoto-Chua, não deve ser aplicado ao parâmetro  $g$  do sistema. Devido a extrema sensibilidade, quanto a variações no parâmetro  $g$ , inúmeras bifurcações e rotas para o caos podem ser vistas no circuito de Matsumoto-Chua, simplesmente mudando o parâmetro  $g$  em um intervalo pequeno de valores.

## 4.2 Diagramas no espaço dos parâmetros sem perturbação

Para quantificação de caos, ordem ou periodicidade, o expoente de Lyapunov é calculado. Vimos no Capítulo 3 que a direção da divergência máxima ou convergência é uma mudança das propriedades locais do atrator. O movimento deve ser monitorado em cada ponto ao longo da trajetória. Dessa forma, uma esfera pequena é definida, cujo centro é um ponto do atrator e cuja superfície consiste de pontos de trajetórias próximas no espaço de fase. À medida que o centro da esfera e pontos na superfície evoluem no tempo, a esfera torna-se um elipsóide. A taxa média de expansão e contração ao longo dos eixos principais são os expoentes de Lyapunov do atrator. Para o  $i$ -ésimo eixo principal, o expoente correspondente é definido como

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \log_e [L_i(t)/L_i(0)], \quad (4.12)$$

onde  $L_i(t)$  é o raio do elipsóide ao longo do  $i$ -ésimo eixo principal no tempo  $t$  [14]. No Apêndice A desenvolvemos o algoritmo numérico para o cálculo do expoente de Lyapunov seguindo o método proposto por Wolf *et al.* [14]. Usamos a aritmética de dupla precisão para o cálculo. Para cada cálculo do expoente, após eliminarmos o transiente, consideramos um intervalo de tempo adimensional de  $\Delta t = 500000 \times h \approx 4000\tau_c$ , onde  $h = 0.01$  é o passo de integração usado para este cálculo. Realizamos a ortogonalização a cada 10 (dez) passos de integração. É válido ressaltar que a convergência para os expoentes dos atratores gerados pelo circuito de Matsumoto-Chua é alcançada a partir de um tempo  $100000 \times h$ .

A partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov geramos o *diagrama no espaço de parâmetros*, o qual consiste em definir, através de código de cores, que pares de parâmetros geram movimento caótico ou periódico. Neste trabalho, o diagrama é calculado numa grade de  $400 \times 400$  pares de valores de dois parâmetros escolhidos do sistema de Matsumoto-Chua. Convenciona-se graficar pontos em preto, a pares de parâmetros que geram um valor negativo no maior expoente de Lyapunov, ou seja, que produzam atratores periódicos. Pares de parâmetros que geram o maior expoente de Lyapunov positivo, ou seja, geram atratores caóticos, são graficados em tons claros, quanto mais clara a tonalidade mais positivo e maior é o primeiro expoente. Realizamos várias análises combinando diferentes parâmetros do sistema. Em seguida apresentamos esses diagramas.

### 1) Diagrama no espaço dos parâmetros $g \times C_1$

Na Figura 4.3 mostramos um diagrama no espaço de parâmetros  $g \times C_1$  do circuito de Matsumoto-Chua. Neste diagrama, a região inferior correspondente a faixa em cinza claro é a região em que, para os parâmetros  $g$  e  $C_1$ , as órbitas são atraídas para os pontos fixos estáveis  $P^+$  ou  $P^-$ . Na fronteira entre essa faixa cinza claro e a próxima faixa preta, ocorre a bifurcação de Hopf; nessa faixa preta ocorre a rota de Feigenbaum ou dobramento de período até o caos. As regiões caóticas são as grandes faixas cinzas, cortadas por faixas pretas correspondentes a atratores periódicos. Essas faixas pretas correspondem a janelas de periodicidade, que surgem por bifurcação tangente, determinadas nos diagramas de bifurcação. As faixas cinza claro e branca, na parte superior da figura, correspondem a atratores não finitos. Na fronteira das regiões com e sem atrator finito, os atratores caóticos gerados desaparecem, por crise de fronteira. É possível ainda notar, no diagrama, ilhas isoladas correspondentes a atratores periódicos. Essas estruturas são semelhantes às estruturas presentes

em outros sistemas, tais como as observadas para o mapa logístico, denominadas camarões (*shrimps*) [52]. Exibimos na Figura 4.4, uma ampliação da Figura 4.3 na região correspondente aos camarões. Para a ampliação, refazemos o cálculo do expoente de Lyapunov com a mesma grade de pontos com um intervalo menor dos parâmetros. Esses dois diagramas no espaço de parâmetros  $g \times C_1$ , feitos através do cálculo do maior expoente de Lyapunov, são semelhantes aos mesmos diagramas, para o mesmo intervalo de parâmetros, gerados por Baptista [40] com o algoritmo de órbitas recorrentes.

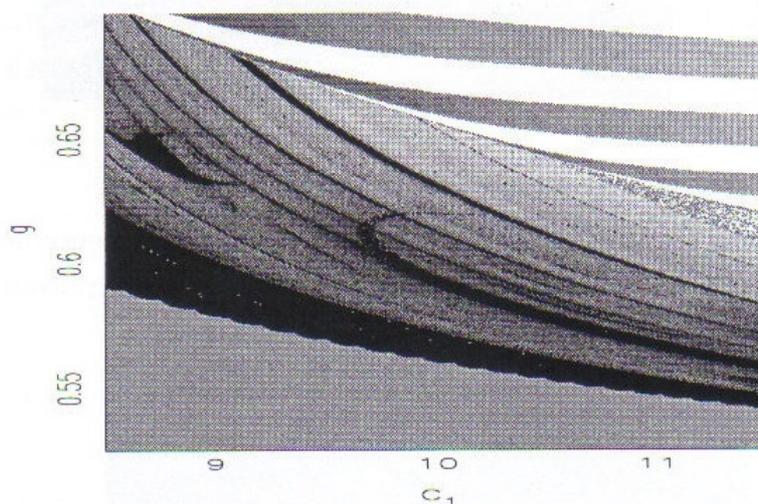


Figura 4.3: Representação do maior expoente de Lyapunov em função dos parâmetros  $g$  e  $C_1$ . A região cinza claro abaixo da grande faixa preta é de pontos fixos, a região preta de órbitas periódicas, a região cinza de caos. As faixas superiores (branca e cinza) correspondem a regiões de atratores não finitos.

Podemos comparar a Figura 4.4 com a Figura 4.5 obtida, no espaço de parâmetros, através do cálculo de autocorrelação, como verificamos no Capítulo 3. Notamos a grande semelhança entre os dois gráficos, exceto pela pequena região localizada no canto inferior à esquerda do gráfico da Figura 4.5, calculado com o valor da autocorrelação. Nesta região existem regiões finas correspondentes a atratores periódicos, para este nível de resolução o diagrama de autocorrelação não é tão eficaz quanto o diagrama gerado através do expoente de Lyapunov.

## 2) Diagrama no espaço de parâmetros $C_1 \times C_2$

Usamos o mesmo procedimento descrito para calcular o diagrama no espaço de parâmetros  $g \times C_1$ . Fixamos o valor do parâmetro  $g = 0,6$  e variamos  $C_2$  e  $C_1$  para uma grade de  $400 \times 400$  valores. O diagrama obtido é apresentado na Figura 4.6. Na parte superior deste gráfico, a

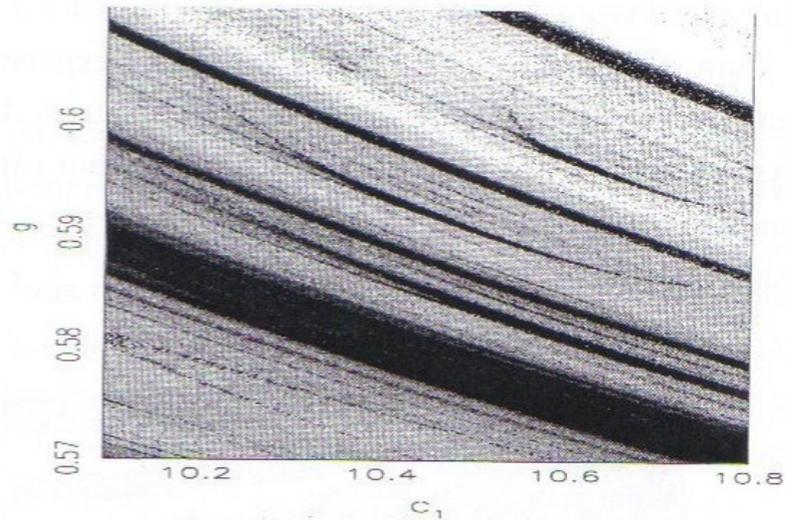


Figura 4.4: Ampliação da Figura 4.3. Representação do maior expoente de Lyapunov em função dos parâmetros  $g$  e  $C_1$ . Quanto mais escura a cor, menor o valor do expoente. Notam-se estruturas periódicas (camarões) inseridas nas regiões caóticas.

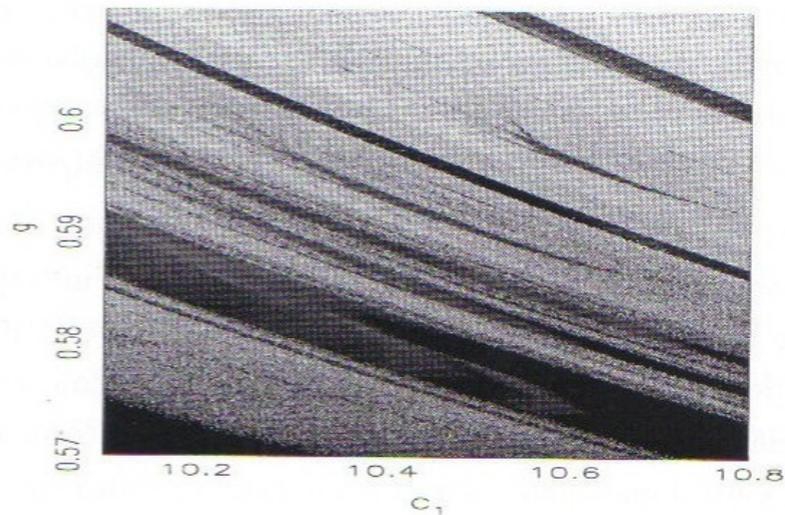


Figura 4.5: Diagrama no espaço de parâmetros gerado através do cálculo de autocorrelação. Nota-se a grande semelhança com o diagrama gerado através do cálculo do expoente de Lyapunov mostrado na Figura 4.4.

grande faixa preta corresponde às regiões em que ocorrem bifurcação de Hopf e as órbitas periódicas geradas por dobramento de período. Estas órbitas periódicas se concentram na fronteira com a faixa clara (região de caos) à direita, ou seja, se fixarmos um valor de  $C_2$  e aumentarmos  $C_1$  a partir do valor  $C_1 = 8,0$ , temos novamente a rota de Feigenbaum. Podemos ver um conjunto alinhado de estruturas periódicas no formato de  $V$  estilizado, inseridas no mar caótico. Podemos notar, ainda, faixas finas escuras que acompanham o formato da separatriz da faixa preta com o mar caótico. Essas faixas cortam um dos ramos das estruturas em  $V$ . Nestes pontos de cruzamentos, temos coexistência de atratores periódicos. A região no canto inferior direito (cor branca e cinza-claro) representa regiões de valores que não geram atratores finitos.

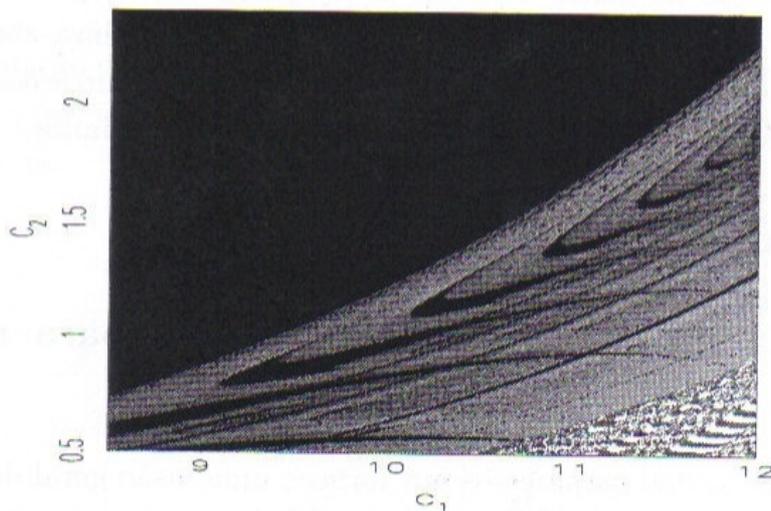


Figura 4.6: Representação do maior expoente de Lyapunov em função dos parâmetros  $C_1$  e  $C_2$ . Quanto mais escura a cor, menor o valor do expoente. A grande região escura, corresponde a zonas onde ocorre bifurcação de Hopf, dando origem a um ciclo limite, e em seguida órbitas periódicas.

### 3) Diagrama no espaço de parâmetros $g \times L$

Como último diagrama, variamos os parâmetros  $g$  e  $L$ . Este diagrama é visto na Figura 4.7. A região preta inferior, em forma de triângulo, corresponde aos pontos fixos atraentes para  $g \approx 0,55$ , os quais após bifurcação de Hopf geram órbitas periódicas por dobramento de período para valores de  $g > 0,55$ . Novamente notamos as estruturas quase paralelas de zonas de atratores periódicos cortando as regiões caóticas. Nesta faixa de parâmetros não se observa atratores não finitos.

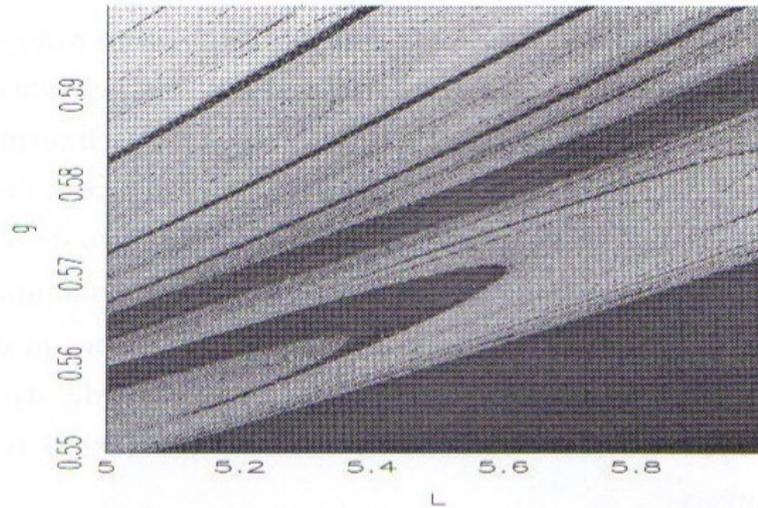


Figura 4.7: Representação do maior expoente de Lyapunov em função dos parâmetros  $g$  e  $L$ . Quanto mais escura a cor, menor o valor do expoente. A região cinza abaixo da grande faixa preta (órbita de período-1) corresponde as regiões onde ocorre as bifurcações de Hopf, e as faixas superiores (branca e cinza) correspondem a regiões de atratores não finitos.

## 4.3 Coexistência de atratores

### 4.3.1 Diagrama no espaço dos parâmetros para região de coexistência

O diagrama no espaço dos parâmetros nos fornece uma visão geral dos atratores gerados pelo sistema a partir da escolha de um par de parâmetros. Além disso, é possível identificar a coexistência de atratores, tal como na Figura 4.8. Nessa figura vemos que uma das faixas escuras é sobreposta por outras faixas. As faixas paralelas sobrepõem a faixa escura que sobe. Na região de sobreposição das faixas escuras, dois atratores periódicos coexistem.

### 4.3.2 Bacia para atratores coexistentes

Os atratores periódicos determinados, a partir do espaço de parâmetros mostrado na Figura 4.8, são órbitas de período-2 e período-3, projetadas na Figura 4.9. Estas órbitas geram, em um mapa de Poincaré apropriado, pontos fixos tipo sumidouros (os quais são atraentes), como no gráfico 4.10. Este gráfico é o mapa de Poincaré no plano  $V_{C_1} = 2, 0$ , para duas condições iniciais diferentes.

A Figura 4.11 mostra a bacia de atração para estes pontos fixos. Esta figura foi obtida

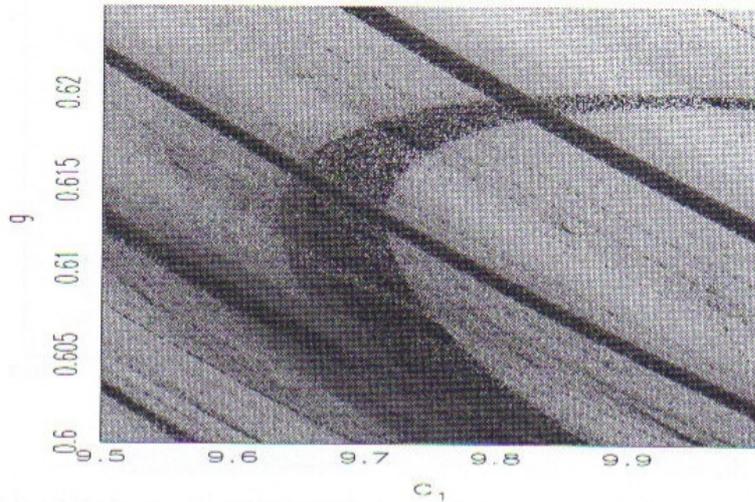


Figura 4.8: Representação do maior expoente de Lyapunov mostrando a coexistência de atratores. Quando mais escura a cor, menor o expoente de Lyapunov. A interseção das faixas escuras indica coexistência de atratores.

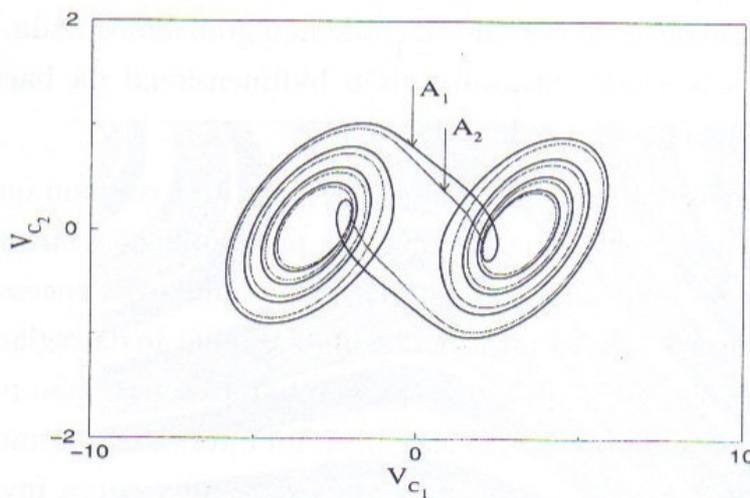


Figura 4.9: Atratores periódicos coexistentes determinados a partir da Figura 4.8. Órbita periódica de período-3 ( $A_1$ ), órbita periódica de período-2 ( $A_2$ ). Atratores gerados a partir de duas condições iniciais:  $A_1(V_{C_1}(0) = 0,029, V_{C_2}(0) = 0,2334, i_L(0) = 0,845)$  e  $A_2(V_{C_1}(0) = -1,029, V_{C_2}(0) = 0,23, i_L(0) = 0,845)$

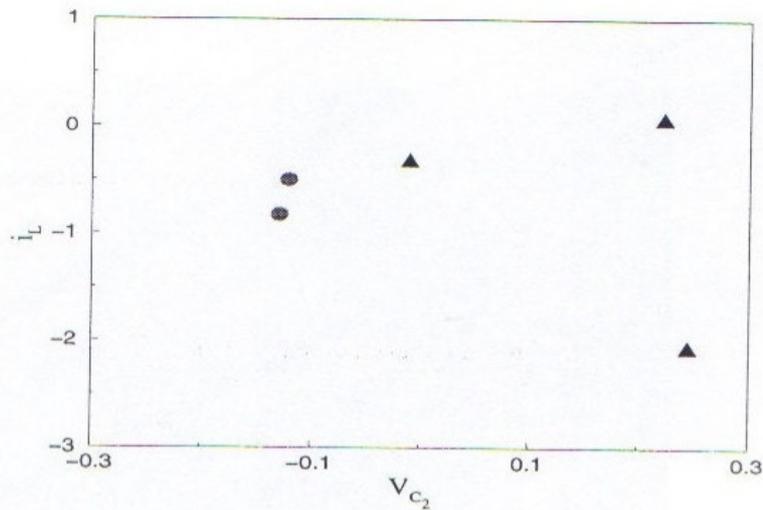


Figura 4.10: Atratores periódicos coexistentes determinados a partir da Figura 4.8. Órbita periódica de período-2 (círculo), órbita periódica de período-3 (triângulo).

para uma grade de  $400 \times 400$  condições iniciais. Para cada condição inicial o sistema de Matsumoto-Chua com  $g = 0,59312$ , foi integrado por um período de tempo grande (dez mil iterações). Se uma condição inicial gera uma órbita que se dirige para o atrator de período-2, então um ponto em cor preta é graficado na localização da condição inicial. Se a órbita se direciona para o outro atrator de período-3, então não graficamos nada. Portanto, as regiões pretas e brancas são essencialmente uma visão bidimensional da bacia de atração destes atratores, dentro da precisão da grade usada.

Ampliações sucessivas da bacia observada na Figura 4.11 revelam que a mesma estrutura está presente em qualquer escala, quando revelada por ampliações sucessivas de regiões cada vez menores da bacia. As Figuras 4.12 e 4.13 mostram ampliações sucessivas de uma pequena região da bacia da Figura 4.11. A Figura 4.12 é uma ampliação da região compreendida entre  $-0,8 \leq i_L \leq 0,0$  e  $-0,3 \leq V_{C_2} \leq 0,3$ , ou seja, ampliamos esta região por um fator de 50. A Figura 4.13 é novamente uma ampliação sucessiva, no interior da segunda ampliação (Figura 4.12), por um fator de  $4 \times 10^3$ . Verificamos que existe uma curva invariante separando as bacias dos dois atratores periódicos. Esta curva tem codimensão-1. No entanto, existe uma estrutura de Cantor na direção transversal a esta curva. Portanto, coexistem uma estrutura fractal em uma direção e uma estrutura contínua em outra. Porém, devemos acrescentar que devido ao fato da curva ter medida nula nestas bacias, qualquer tentativa de se medir a dimensão desta curva dará como resultado a dimensão fractal do conjunto de Cantor, transversal à esta curva.

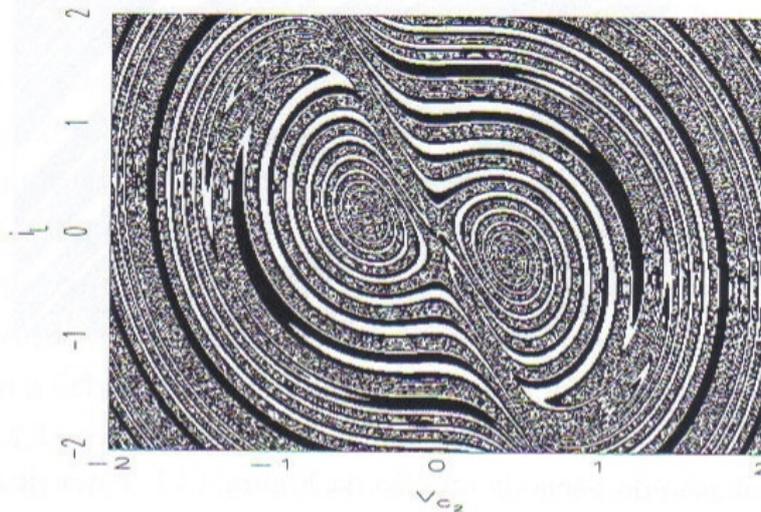


Figura 4.11: Bacia de atração na seção de Poincaré em  $V_{C_1} = 2,0$  para os atratores periódicos de período -2 e período-3. Pontos em preto são condições iniciais que são atraídas para o atrator de período-2, pontos em branco são condições iniciais que são atraídas para o atrator de período-3.

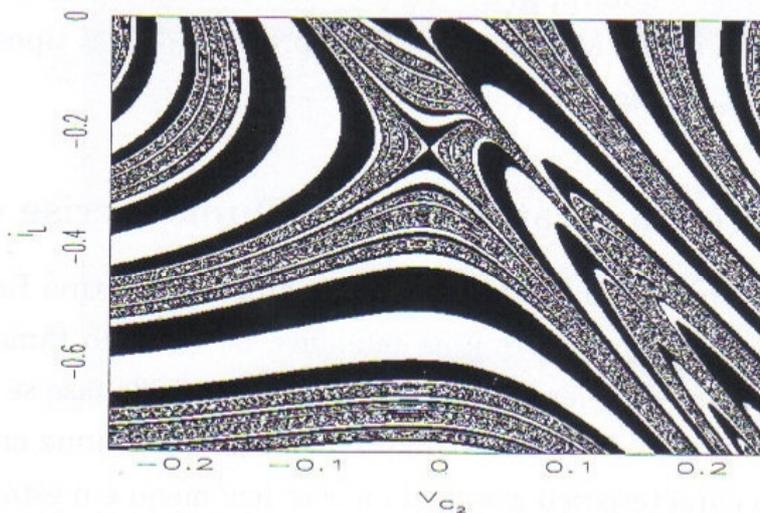


Figura 4.12: Ampliação da bacia de atração mostrada na Figura 4.11. Fator de ampliação 50.

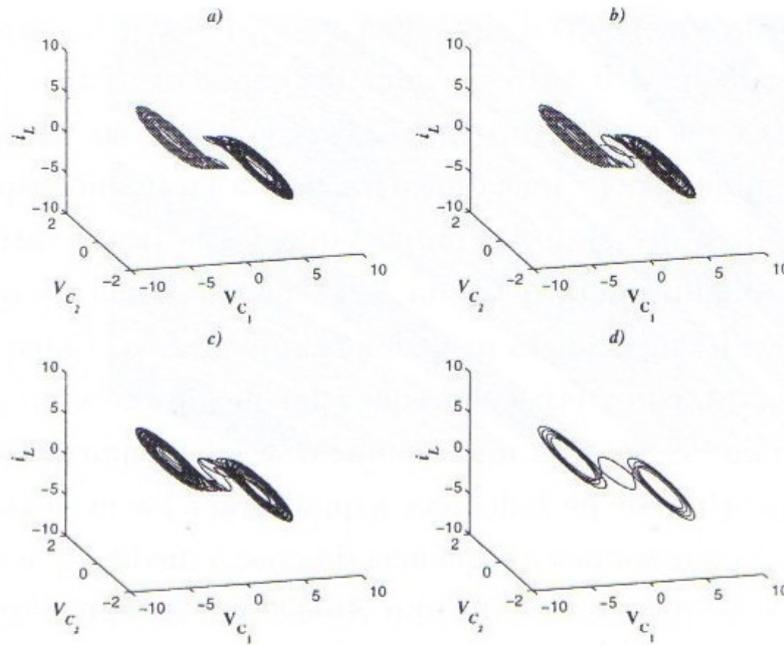


Figura 4.15: Crise de fusão e crise de fronteira. a)  $g = 0,57725$ , dois atratores do tipo Rössler coexistindo. b)  $g = 0,57727$ , os atratores se aproximam sem se tocarem. c)  $g = 0,57729$  os atratores se fundem formando o atrator Dupla-Espiral. d)  $g = 0,57760$ , através da crise de fronteira a órbita periódica atrai a bacia de atração do atrator Espiral-Dupla.

#### 4.4.2 Desaparecimento do atrator Espiral-Dupla: crise de fronteira

Vimos através dos diagramas no espaço de parâmetros que existe uma região delimitadora para a existência do atrator Espiral-Dupla, como visto na Figura 4.3. A partir desta região o atrator caótico colide com a órbita periódica tipo sela instável e desaparece juntamente com sua bacia de atração. Portanto, o atrator Dupla-Espiral desaparece por crise de fronteira com a órbita instável. Já apresentamos no Capítulo 3 que a bacia de atração do atrator Dupla-Espiral é limitada no espaço de fase, devido a presença da órbita tipo sela instável. Reproduzimos na Figura 4.16 esta bacia de atração.

À medida que variamos o parâmetro  $g$ , o atrator caótico aumenta de tamanho e sua bacia diminui, o que eventualmente para um valor crítico  $g_c$  leva o atrator a colidir com a órbita instável que circunda o atrator e este desaparece. Mostramos este comportamento da bacia para um valor de  $g = 0,6555$  próximo ao valor crítico em que ocorre a crise de fronteira, Figura 4.17.

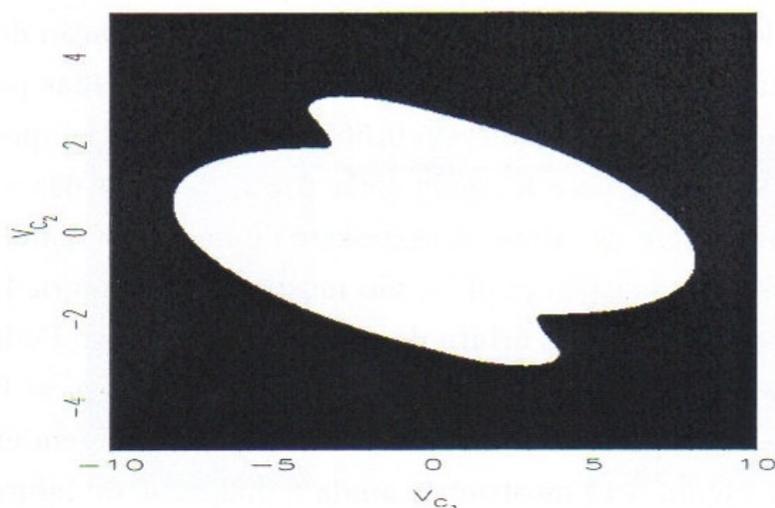


Figura 4.16: Bacia de atração para o atrator Espiral-Dupla ( $g = 0,6000$ ), determinada através do algoritmo de tempo de escape. Pontos em branco correspondem a condições iniciais que são atraídas para o atrator caótico. A região em preto são condições que escapam para o atrator infinito.



Figura 4.17: Bacia de atração para o Espiral-Dupla próximo à crise de fronteira ( $g = 0,6555$ ). Aumentando-se o parâmetro  $g$ , o Atrator caótico colide com a órbita tipo sela, desaparecendo juntamente com sua bacia. Nota-se a diminuição desta em comparação com a Figura 4.16.

### 4.4.3 Crise nas janelas de periodicidade

Vimos no Capítulo 3, através dos vários diagramas de bifurcação do circuito de Matsu-moto-Chua, que juntamente com as bandas caóticas que são geradas por atratores caóticos existem estreitas regiões dentro do intervalo  $0,565 \leq g \leq 0,665$  em que a órbita atraente é periódica. Por exemplo, escolhemos a região entre  $0,625 \leq g \leq 0,635$  e fizemos o diagrama de bifurcação juntamente com os valores do expoente de Lyapunov para os atratores gerados neste intervalo de parâmetro. Estes gráficos são mostrados na Figura 4.18. Esta ampliação mostra um intervalo de  $g$  onde uma órbita de período dois ocorre. Podemos ver através do diagrama de bifurcação, que a órbita de período dois nasce em  $g_t = 0,62929$ ; esta órbita por dobramento de período gera duas bandas caóticas que se fundem em uma única banda em  $g_c = 0,63202$ . Na Figura 4.19 mostramos ainda o diagrama de bifurcação no espaço das frequências para esta região.

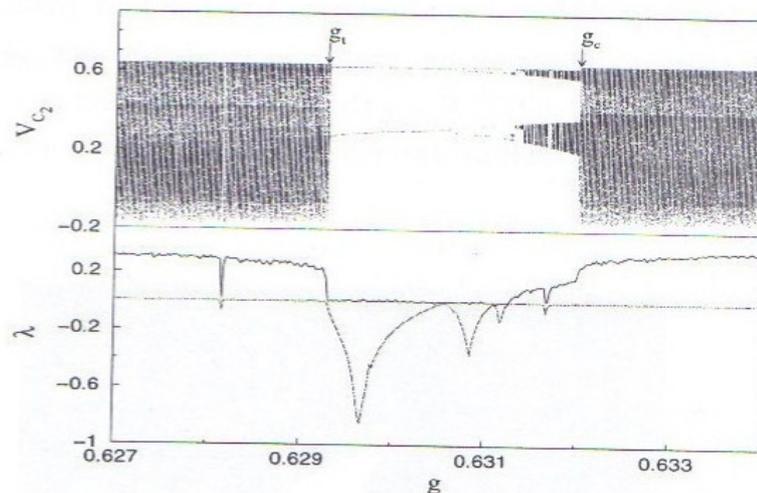


Figura 4.18: Diagrama de bifurcação e espectro do maior expoente de Lyapunov em função de  $g$ . Em  $g_t$  temos intermitência tipo-I, onde a banda caótica sofre uma subducção com a órbita de período-2, e em  $g_c$ , temos uma crise interior, a órbita instável de período-2 colide com a nova banda caótica formada através de dobramento de período.

Podemos definir dois fenômenos que acompanham estas janelas de periodicidade. Temos, para  $g = g_t$ , que o atrator caótico subitamente desaparece, surgindo imediatamente um atrator não caótico, ou seja, a órbita de período dois. Este fenômeno é denominado por Grebogi *et. al.* [49] de *subducção*. O efeito de uma *subducção* difere da crise de fronteira, no sentido de que a *subducção* não destrói a bacia do atrator caótico, pelo contrário, a

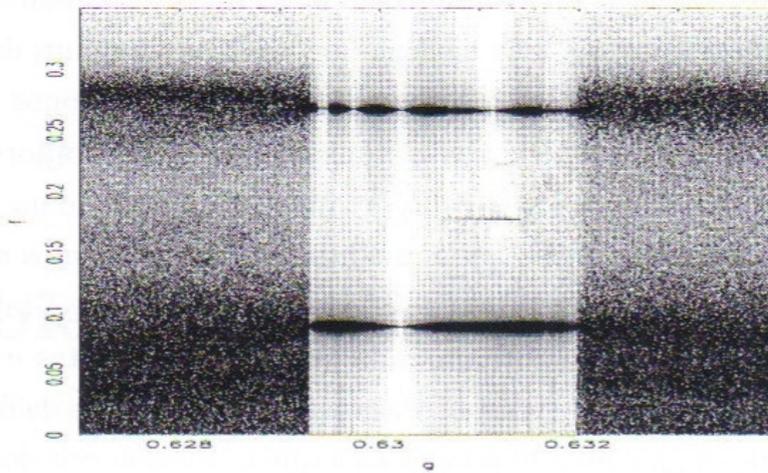


Figura 4.19: Diagrama no espaço das frequências, para região de intermitência e crise interior.

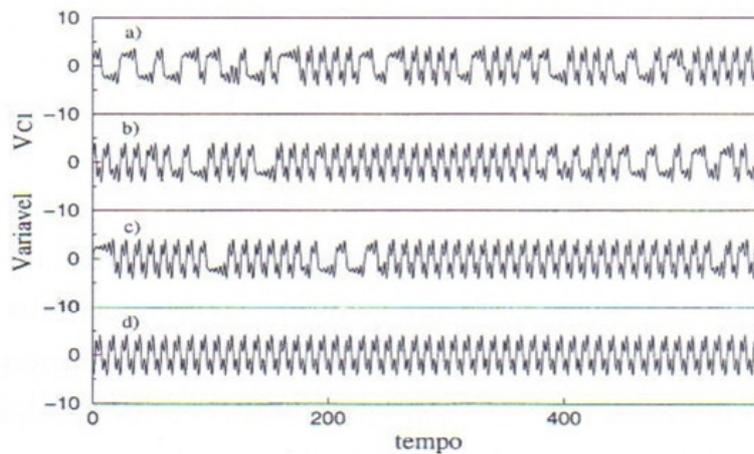


Figura 4.20: Intermitência tipo-I. Nota-se os estouros caóticos intermitentes com a fase laminar da órbita de período dois. a)  $g = 0,62927$ ; b)  $g = 0,622928$ ; c)  $g = 0,62929$ ;  $g = 0,62930$  fase laminar.

bacia permanece inalterada mesmo quando o atrator caótico é convertido para um atrator não caótico. A *subducção* ocorre sempre quando há uma bifurcação tangente em que uma órbita periódica aparece dentro da banda caótica [49]. Acompanhada com esta, ocorre o fenômeno de intermitência do tipo I. À medida que nos aproximamos do valor crítico  $g_t$  (em direção a  $g$  crescente) em que ocorre a bifurcação tangente, podemos perceber que a série temporal das variáveis dinâmicas do sistema transitam em dois comportamentos com breves intervalos de tempo para cada um. Este comportamento é mostrado na Figura 4.20 para três valores próximos de  $g_t$ . Podemos ver que à medida que aproximamos o valor do parâmetro  $g$  de  $g_t = 0,62929$  (bifurcação tangente), a série temporal caótica é interrompida por fases laminares de periodicidade que se tornam cada vez mais frequentes e os estouros caóticos aparecem em menores intervalos de tempo. Para  $g_c$ , temos a colisão da órbita instável gerada na bifurcação tangente em  $g_t$  com a banda caótica que se formou por dobramento de período das órbitas periódicas, este fenômeno é denominado de *crise interior* [49]. Vemos que neste caso, em  $g_c$ , as duas bandas caóticas se fundem para formar uma banda caótica única, maior. Nota-se que isto coincide precisamente com a intersecção da órbita instável de período dois criada na bifurcação tangente com a região caótica.

# Capítulo 5

## Análise biespectral

### 5.1 Introdução

Este capítulo é dedicado à análise das séries temporais com o método de bicoerência calculada com a transformada de ondaletas. Os regimes caóticos dos atratores tipo Rössler e Espiral-Dupla são diferenciados através dos seus respectivos autobiespectros. Analisamos a intermitência caos-caos devido à crise de fusão dos atratores caóticos coexistentes tipo Rössler, na formação do atrator caótico Espiral-Dupla.

### 5.2 Biespectro e ondaletas

Como vimos anteriormente (seção 3.5.2), o espectro de potência através da decomposição de um sinal em série de Fourier é uma ferramenta útil para a análise de séries temporais periódicas e quase periódicas, e pode servir como uma análise preliminar para distinguir e identificar séries temporais caóticas. No entanto, a decomposição espectral de uma série caótica fornece o módulo quadrático das componentes e não informa a fase instantâneas das mesmas, essencial para o entendimento da evolução da trajetória [4].

Um modo possível de se obter informação da fase do sinal é através do biespectro [42][56]. Se o processo que gera a série temporal é estocástico, então a covariância de segunda ordem (e espectro de potência de segunda ordem) contém toda a informação útil acerca do sinal. Quando a série temporal não é estocástica, mas gerada por uma dinâmica não-linear, temos que calcular espectros de ordem mais altas. O mais simples espectro de ordem mais alta é o biespectro [42][56].

A análise biespectral foi originalmente proposta por Hasselman *et al.* [57] para a investigar a interação não-linear de ondas de oceanos e Godfrey [58] usou-a para análise de séries temporais de Economia. Sato *et al.* [59] vêm analisando ruído acústico gerado por engrenagens com biespectro. Em uma série de artigos, Lii *et al.* [60][61] e Holand *et al.* [62] tem descrito como o biespectro pode ser usado para o estudo do processo não-linear de transferência de energia em turbulência.

Neste capítulo caracterizamos as séries temporais dos atratores caóticos tipo Rössler e Espiral-Dupla, assim como a série temporal na fase intermitente gerada pela crise de fusão dos atratores tipo Rössler na transição para o atrator caótico de Espiral-Dupla. A análise é feita através de funções de correlação *triplas*, que envolvem o valor esperado do produto de três séries temporais. Essas funções recebem o nome de bicorrelação. O prefixo bi indica funções de apenas duas variáveis no caso estacionário. Como o circuito de Matsumoto-Chua apresenta comportamento caótico por dobramento de período (rota de Feigenbaum), o que em geral é associado com a interação não linear quadrática (por exemplo mapa logístico), o biespectro pode ser útil na investigação do acoplamento e da troca de energia entre os vários componentes do sistema [63].

Os dois regimes caóticos analisados são diferenciados através do autobiespectro da série temporal da variável  $V_{C_1}(t)$  e sua bicoerência. Usualmente o autobiespectro é a transformada de Fourier da função de autobicorrelação e possui as mesmas informações que esta acerca das flutuações. A autobicoerência mede o grau de correlação quadrática de um sinal e serve para distinguir os modos lineares e independentes, dos modos quadraticamente acoplados.

A análise biespectral possui a vantagem, sobre a análise espectral linear, de que as informações sobre o módulo da fase da transformada de Fourier do sinal podem ser recuperadas [42].

### 5.2.1 Definição e propriedades do biespectro

A função de bicorrelação para uma série temporal  $V_{C_1}(t)$  é dado por [42]:

$$R(t, \tau_1, \tau_2) = \langle x(t)x^*(t - \tau_1)x(t - \tau_2) \rangle \quad (5.1)$$

onde  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são dois intervalos de tempo de correlação diferentes. Para o caso estacionário temos:

$$R(\tau_1, \tau_2) = \langle x(t)x^*(t - \tau_1)x(t - \tau_2) \rangle . \quad (5.2)$$

Em particular, quando  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  e para  $x(t)$  real:

$$R(0, 0) = \langle x^3(t) \rangle, \quad (5.3)$$

ou seja a função de autobicorrelação para  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  é igual ao valor médio do cubo de  $x(t)$ .

A Equação 5.1 pode ser escrita em termos da transformada de Fourier, ou seja:

$$R(t, \tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int \langle X(f_0)X^*(f_1)X^*(f_2) \rangle \quad (5.4)$$

$$\times e^{i2\pi(f_0 - f_1 - f_2)t} e^{i2\pi(f_1\tau_1 + f_2\tau_2)} df_0 df_1 df_2. \quad (5.5)$$

Para que o sinal  $x(t)$  seja estacionário a equação acima deve ser independente do tempo, o que implica em:

$$\langle X(f_0)X^*(f_1)X^*(f_2) \rangle = S(f_1, f_2)\delta(f_0 - f_1 - f_2), \quad (5.6)$$

onde

$$S(f_1, f_2) = \langle X(f_1 + f_2)X^*(f_1)X^*(f_2) \rangle \quad (5.7)$$

é o autobiespectro para um sinal  $x(t)$ . Substituindo a expressão 5.7 em 5.5 e integrando em  $f_0$  obtemos:

$$R(\tau_1, \tau_2) = \int \int S(f_1, f_2) e^{i2\pi(f_1\tau_1 + f_2\tau_2)} df_1 df_2 \quad (5.8)$$

ou seja, a função de autobicorrelação é a transformada de Fourier bidimensional do autobiespectro  $S(f_1, f_2)$ . Dessa forma constituindo um par de transformada de Fourier. Em outras palavras, o autobiespectro é a transformada de Fourier de terceira ordem da função de autocorrelação da série temporal. Para o caso  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  em 5.5 considerando 5.3 obtemos:

$$\langle x^3(t) \rangle = \int \int S(f_1, f_2) df_1 df_2 \quad (5.9)$$

$S$  é uma função de densidade espectral, ela representa como o valor médio do cubo de  $x(t)$  se distribui num plano bidimensional de freqüências. Para sinais de duração finita, ao invés de calcularmos  $S$ , calculamos seu valor aproximado, denominado estimador, definido como:

$$B(f_1, f_2) = \langle X^*(f_1)X^*(f_2)X(f_1 + f_2) \rangle_M \quad (5.10)$$

onde  $M$  é o número de medidas. Este valor será zero se a média do produto triplo dos coeficientes de Fourier for zero. Isto ocorre se os modos são independentes entre si, ou seja, cada realização será caracterizada por uma fase randomicamente distribuída. Para o caso em que as ondas presentes em  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_1 \pm f_2$  estiverem quadraticamente acopladas, esta quantidade será diferente de zero. Ou seja, as ondas com  $f_1$  e  $f_2$  e fases  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , se acoplam quadraticamente, com o surgimento de modos de freqüência  $f_1 + f_2$  e  $f_1 - f_2$  e fases  $\phi_1 + \phi_2$  e  $\phi_1 - \phi_2$ , respectivamente.

## 5.2.2 Autobiespectro

É conveniente reescalonar o biespectro de forma a ter sua amplitude normalizada, denominada de autobicoerência, dada por:

$$b^2(f_1, f_2) = \frac{|B(f_1, f_2)|^2}{\langle |X(f_1) \cdot X(f_2)|^2 \rangle_M \langle |X(f_1 + f_2)|^2 \rangle_M}, \quad (5.11)$$

ou seja  $b^2(f_1, f_2)$  é uma quantidade real compreendida entre 0 e 1, dependendo do valor do autobiespectro do numerador. Quando  $B(f_1, f_2)$  é zero,  $b^2(f_1, f_2)$  também é zero, indicando que não há acoplamento quadrático em nenhum ponto de coordenadas  $(f_1, f_2)$ , o que é o mesmo que dizer que os modos presentes em  $f_1$  e  $f_2$  são independentes. Para  $0 < b^2 < 1$ , a equação indica a existência simultânea de modos acoplados e espontâneos num ponto  $(f_1, f_2)$ , e o acoplamento é chamado de acoplamento parcial. Para  $b = 1$  temos o acoplamento máximo.

Usando as propriedades de simetria, o biespectro pode ser calculado por seus valores em um octante de bifreqüências. Para uma série temporal discreta com freqüência de Nyquist  $f_N$ , o biespectro é calculado unicamente na região correspondente à:

$$0 \leq f_2 \leq \frac{f_N}{2} \quad \text{e} \quad f_2 \leq f_1 \leq f_N - f_2. \quad (5.12)$$

Portanto, é mostrado nos gráficos do biespectro somente a região formada pelo polígono de lados  $f_1 = f_2$ ,  $f_1 + f_2 = f_N$ ,  $f_1 = f_N$  e  $f_1 + f_2 = 0$ . No gráfico 5.1, mostramos esquematicamente as regiões de simetria para o cálculo do biespectro, assim como a única região graficada do biespectro (regiões  $\Sigma$  e  $\Delta$ ). O octante  $\Sigma$  é a região de soma das frequências e o octante  $\Delta$  é a região de diferença das frequências.

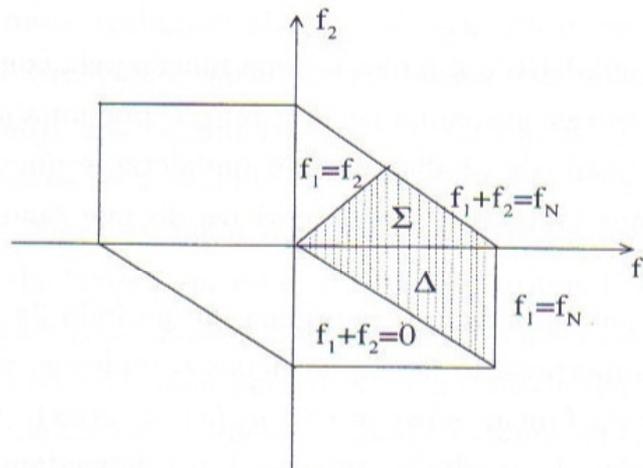


Figura 5.1: Regiões simétricas para o cálculo das quantidades biespectrais. Somente as regiões destacadas ( $\Sigma$  e  $\Delta$ ) são graficadas. A região  $\Sigma$  corresponde à soma das frequências e a região  $\Delta$  à diferença das frequências.

### 5.2.3 Definição da transformada de ondaletas

Sendo a bicorrelação definida em função da transformada de Fourier da série temporal, podemos calcular o autobiespectro através do algoritmo de FFT. No entanto, quando a série temporal apresenta comportamento intermitente, apresentando flutuações da amplitude e do espectro de potência em escalas curtas de tempo, o método de FFT baseado nas bases de Fourier não é uma ferramenta adequada. Para se estudar intermitência necessitamos de uma técnica de análise que não seja baseada na acumulação de informações numa escala de tempo que seja maior do que a escala de tempo característico do processo intermitente. Isto significa que a técnica não deve ser baseada em médias da dinâmica, obscurecendo dessa forma informações temporais relevantes do sinal. Para captar mudanças temporais em uma série temporal, usamos a análise com ondaletas (*wavelet analysis*), para a qual a resolução temporal varia com a frequência e o tempo. O fato básico sobre as ondaletas é que

elas são localizadas no tempo e na frequência, contrariamente ao que ocorre com as funções trigonométricas, que são as bases da transformada de Fourier. Esse comportamento torna-as ideais para analisar sinais não-estacionários contendo transitoriedade e estruturas tipo fractal [15][16]. As bases ou componentes de Fourier (bases do algoritmo de FFT) são funções das frequências, mas não do tempo: pequenas mudanças em algum sinal pode provocar mudanças em todas as componentes de uma expansão de Fourier, o que não acontece com uma expansão de ondaletas.

Na análise usando ondaletas aproxima-se uma função pela combinação de ondaletas. Enquanto na análise de Fourier aproxima-se uma função por uma combinação linear de senos e cossenos. Uma vantagem da análise usando ondaletas é que para funções com descontinuidade e picos, menos ondaletas são necessárias do que senos e cossenos na análise de Fourier [16].

Na análise de Fourier, toda função periódica, de período  $2\pi$ , de quadrado integrável, é aproximada por uma superposição de exponenciais complexas,  $w_n(x) = e^{inx}$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$ , obtidas por dilatações da função  $w(x) = e^{ix}$ :  $w_n(x) = w(nx)$ . O objetivo é estender essa idéia para  $L^2(\mathbf{R})$  (funções de quadrado integrável que dependam de dois parâmetros reais), isto é, gerar esse espaço a partir de uma única função  $\psi$ . Isso é conseguido por dilatações (ou compressões) e translações de  $\psi$  por

$$\psi_{a,\tau}(t) \equiv |a|^{-p} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right). \quad (5.13)$$

A função  $\psi$  é chamada de ondaleta-mãe. O parâmetro  $a$  é chamado fator de escala e  $\tau$  é o parâmetro de translação indicando a localidade ou ponto central da ondaleta. É válido ressaltar que a idéia de gerar uma base por dilatação e translação não é exclusividade das ondaletas, a análise de Fourier usual usa este procedimento baseado na função mãe  $\cos(w)$ . A translação sendo  $\sin(w) = \cos(w + \pi/2)$  e a dilatação sendo  $\cos(nw)$ .

Vamos analisar algumas propriedades da função  $\psi_{a,\tau}(t)$ . Por exemplo, suponha que queiramos visualizar  $\psi_{a,\tau}(t)$ , com  $t$  medido em segundos ( $\psi_{a,\tau}(t[s])$ ), usando para isto  $\psi_{a,\tau}(t)$ , com  $t$  medido em minutos ( $\psi_{a,\tau}(t[m])$ ). Através de 5.13 nota-se que,  $\psi_{a,\tau}(t[s]) = \psi_{a,\tau}(t[m]/60)$ , ou seja  $\psi_{a,\tau}(t[s])$  é obtida através da dilatação por um fator de 60 de  $\psi_{a,\tau}(t[m])$ . De fato, a nova função nada mais é do que  $\psi_{a,\tau}(t/60)$ . Para o caso geral  $a > 1$ ,  $\psi_a(t)$  é a versão de  $\psi$  dilatada por um fator  $a$  na direção horizontal. Similarmente, se  $0 < a < 1$ , então  $\psi_a$  é a versão de  $\psi$  comprimida na direção horizontal. Se  $a = -1$ , então  $\psi_a$  é a versão refletida de  $\psi$ . Se  $-1 < a < 0$ , então  $\psi_a$  é a versão refletida e comprimida de  $\psi$ . Finalmente, se  $a < -1$ , então  $\psi_a$  é a versão refletida e dilatada de  $\psi$ .

O fator  $|a|^{-p}$  na Equação (5.13) possui efeito similar na direção vertical, isto é, sobre a variável dependente. Se  $p > 0$ , então  $\psi$  é comprimida ao longo da vertical toda vez que  $\psi$  é dilatada ao longo da horizontal e é dilatada ao longo da vertical toda vez que  $\psi$  é comprimida ao longo da horizontal. (Se  $p < 0$ , então  $\psi$  é simultaneamente dilatada e comprimida em ambas as direções, mas somente as convenções com  $p \geq 0$  são usadas). Diferentes escolhas para  $p$  são usadas na literatura: Chui [64][65], Daubechies [66] e Meyer [67][68] usam  $p = 1/2$ , esse é o valor que usamos neste trabalho; Mallat e Zhong [69] usam  $p = 1$ . Segundo [16] o valor de  $p$  é completamente irrelevante para a teoria básica das ondaletas.

Para exemplificar o efeito dos parâmetros  $a$  e  $\tau$  na ondaleta mãe (com  $p = 1/2$ ), mostramos na Figura 5.2 versões reescaladas e deslocadas ( $\psi_{a,\tau}(t) \equiv \psi_a(t-\tau) = |a|^{-p}\psi(\frac{t-\tau}{a})$ ) da ondaleta  $\psi(t) = xe^{-t^2}$ . Neste exemplo o primeiro índice é o parâmetro  $a$  e o segundo índice é o deslocamento  $\tau$  da função em relação a função original. A curva central (linha cheia) é a função original a ser reescalada e deslocada. A curva à direita (linha de traço e ponto) é versão da ondaleta reescalada por um fator 2 e tendo seu centro deslocado de 15 para direita, em relação ao centro da ondaleta original. À esquerda (linha tracejada), temos a versão refletida (sinal -), comprimida por fator 0,5 e deslocada à esquerda por 10, tudo em relação à ondaleta original (linha cheia).

Neste ponto podemos fazer uma analogia entre as duas análises, de Fourier e de ondaletas. A analogia é que, dada uma função de quadrado integrável, ela pode ser escrita como uma superposição de senos e cossenos ou de ondaletas (centradas numa seqüência de instantes de tempo). A diferença é que as funções de uma base de ondaletas são indexadas por dois parâmetros  $a$  e  $\tau$ , ao passo que na base de Fourier temos um único parâmetro,  $w$ , que tem a interpretação física de freqüência.

Na análise de ondaletas, os parâmetros  $a$  e  $\tau$  representam escala e localização temporal, respectivamente. O método de ondaletas é baseado nas propriedades que tem a ondaleta-mãe de variar seu tamanho e posição por dilatação (ou compressão) e deslocamento, como mostramos no exemplo anterior. A transformada de ondaletas decompõe o sinal, usando como base ondaletas de funções localizadas no tempo e na freqüência. À medida que o fator de escala  $a$  decresce há um *encolhimento* no tempo, as oscilações crescem e a ondaleta exibe *alta freqüência*, ao passo que se o fator de escala cresce, há uma *expansão* no tempo, as oscilações tornam-se mais lentas, ou seja, apresentam um comportamento de *baixa freqüência*.

Essa é uma característica fundamental da análise de ondaletas: variações de alta freqüência são analisadas em intervalos curtos de tempo, enquanto que variações de baixa freqüência são analisadas sobre intervalos longos de tempo, o que permite a análise de sinais com tran-

sitoriedades e singularidades. Em outras palavras, *os coeficientes de ondaletas caracterizam o comportamento local de um sinal, ao passo que os coeficientes de Fourier caracterizam o comportamento global do sinal.*

Neste trabalho usamos a transformada de **ondaletas contínua** baseada na ondaleta-mãe, [70]

$$\psi_a(t) = a^{-1/2} e^{[i2\pi t/a - (t/a)^2/2]}, \quad (5.14)$$

onde  $a$  é o parâmetro de escala, para o qual definimos a frequência  $f = 1/a$ . A resolução em frequência dessa ondaleta é  $\Delta f = f/4$  e a resolução temporal é  $\Delta t = 2a$ . Para um sinal  $x(t)$  a transformada de ondaleta referente à ondaleta escolhida é definida por:

$$W(a, \tau) = \int x(t) \psi_a(t - \tau) dt, \quad (5.15)$$

onde  $\tau$  é o parâmetro do deslocamento temporal.

Para a transformada de ondaleta pode ser dada uma interpretação razoavelmente direta, dependendo da ondaleta usada: como uma função de  $t$  e um valor fixo de  $a$ , a transformada representa os *detalhes* contidos no sinal  $x(t)$  na escala  $a$ .

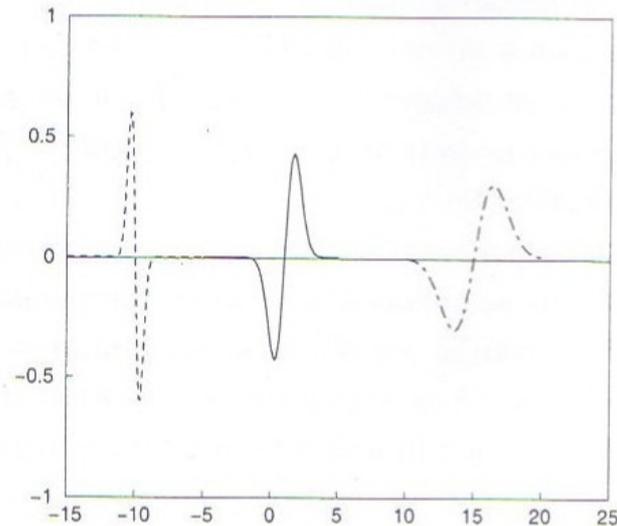


Figura 5.2: Gráfico de  $\psi(t) = xe^{-t^2}$  (linha cheia) e suas versões reescalada e deslocadas  $\psi_{2,15}(t)$  (direita) e  $\psi_{-0,5,-10}(t)$  (esquerda).

Para uma estudo mais profundo de ondaletas indicamos as referências [15][16][64] e [65].

## 5.3 Bicoerência do atrator caótico tipo Rössler

A bicoerência foi calculada com uma série temporal da variável  $V_{C_1}(t)$  com 4096 valores com intervalo de amostragem  $\Delta t = 0,36$  ( $\Delta t = 0,27\tau_c$ ). Dividimos a série total em quatro regiões de 1024 valores (potência de 2 para facilitar o algoritmo numérico). Consideramos inicialmente o circuito de Matsumoto-Chua no regime caótico tipo Rössler ( $g = 0,575$ ). Este atrator caótico, como já vimos, é gerado seguindo a rota de Feigenbaum ou duplicação de período. Esta rota é associada com interação não-linear quadrática (como no mapa logístico) ou comparando com o atrator de Rössler (ver Apêndice B) [71]. É de se esperar que a bicoerência seja alta como é confirmado através da Figura 5.3, para os quatro intervalos temporais sucessivos, a bicoerência tem valor próximo de 0,8 para modos  $f_1 - f_2$  e 0,6 para modos  $f_1 + f_2$ , confirmando o acoplamento quadrático entre os modos presentes na série temporal. Na Figura 5.4 mostramos as curvas de níveis para as quatro regiões da Figura 5.3. Usando as propriedades de simetria do biespectro, resumidas no gráfico 5.1, podemos notar as regiões de modos  $f_1 + f_2$  com  $f_1$  variando no intervalo  $0,1 < f_1 < 0,18$  e  $f_2$  variando em  $0 < f_2 < 0,1$ . A região de modos  $f_1 - f_2$  se localiza entre  $0,18 < f_1 < 0,25$  e  $-0,2 < f_2 < 0$ .

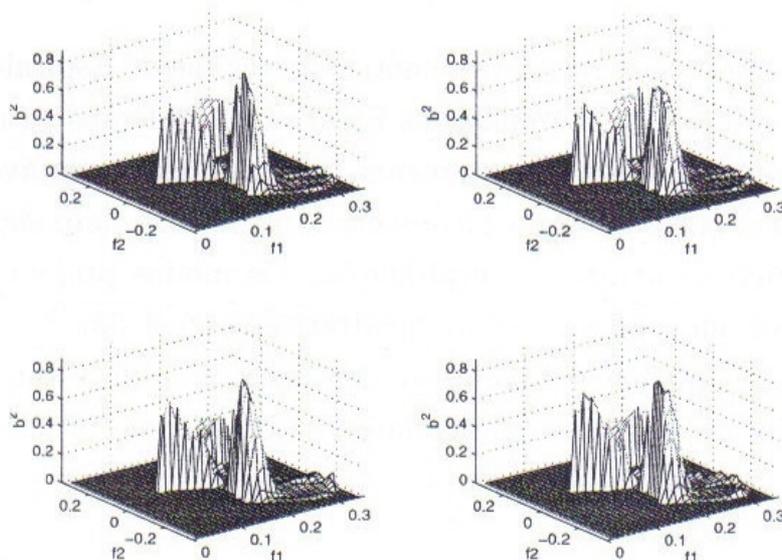


Figura 5.3: Bicoerência para atrator caótico tipo Rössler ( $g = 0,575$ ). Análise de quatro intervalos temporais sucessivos, cada um com 1024 valores com intervalo de amostragem  $\Delta t = 0,36$ .

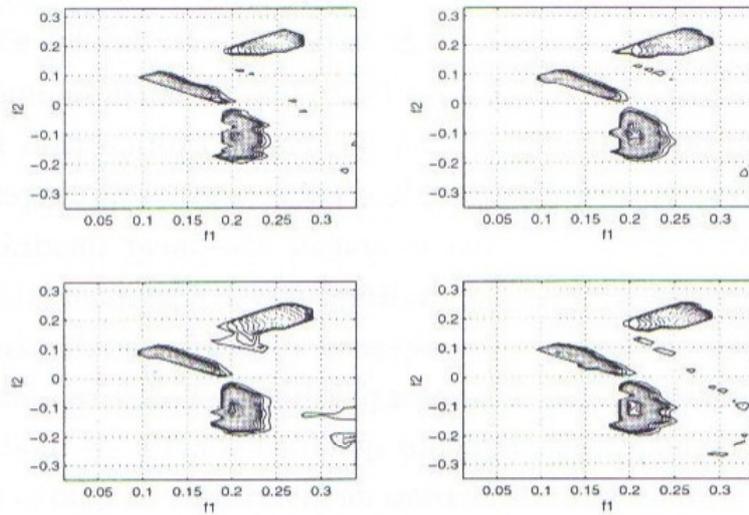


Figura 5.4: Curvas de nível para a bicoerência da Figura 5.3 mostrando acoplamento quadrático de frequências.

## 5.4 Bicoerência do atrator Espiral-Dupla

Mostramos a bicoerência para o atrator caótico no regime de Espiral-Dupla na Figura 5.5 e as curvas de níveis para estas bicoerências na Figura 5.6. Podemos notar que para os quatro intervalos da série temporal (cada intervalo com 1024 valores da variável  $V_{C_1}$ , como no caso do atrator tipo Rössler) que o valor da bicoerência é quase nulo. Isto significa que não temos acoplamento quadrático no atrator Espiral-Dupla. Os modos presentes na série temporal são modos espontâneos que não se acoplam quadraticamente e suas fases são aleatoriamente misturadas devido ao acoplamento não-linear. Na parte final do Capítulo, reservamos uma seção para a discussão das possíveis causas da perda do acoplamento quadrático no atrator Dupla-Espiral.

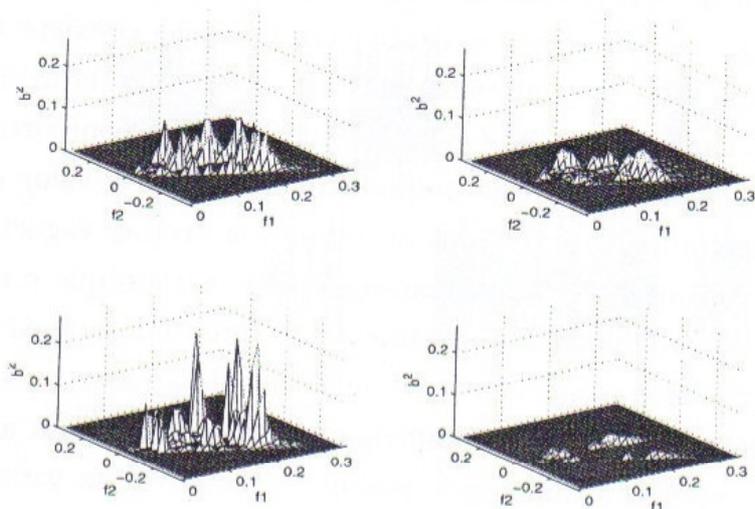


Figura 5.5: Bicoerência para atrator caótico Double-Scroll ( $g = 0, 6$ ). Análise de quatro intervalos temporais sucessivos, cada um com 1024 valores com intervalo de  $\Delta t = 0.36$ .

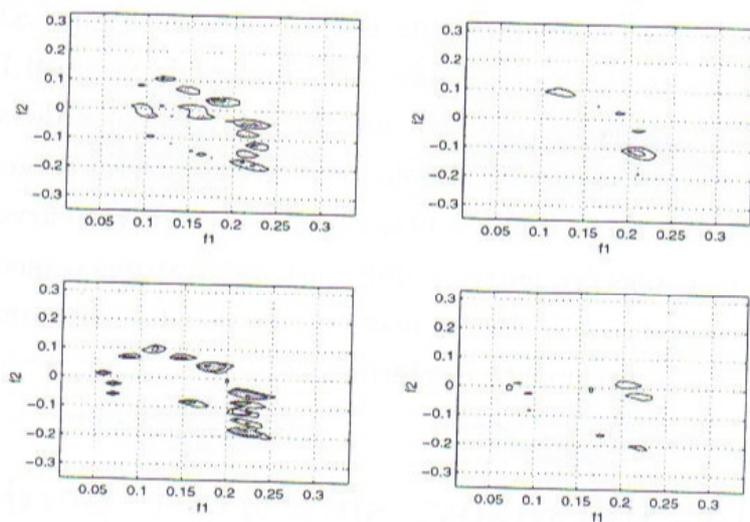


Figura 5.6: Curvas de nível para Bicoerência da Figura 5.5 mostrando acoplamento quadrático de frequências.

### 5.4.1 Biespectro na crise de fusão

Já vimos anteriormente que para um determinado valor do parâmetro  $g_c = 0,57729$  ocorre uma crise de fusão entre os dois atratores caóticos tipo Rössler coexistentes. Acompanhando a crise de fusão temos uma intermitência caos-caos por crise induzida. Para valores do parâmetro um pouco maiores que  $g_c$  é possível verificar este comportamento intermitente nas séries temporais. Mostramos este comportamento para o valor de  $g = 0,57732$  na Figura 5.7. Para determinados intervalos de tempo as órbitas vagueiam entre os antigos atratores de forma intermitente. Nesta transição foi mostrado que o espectro de potência decai com  $1/f$ , caracterizando um comportamento do tipo ruído branco, sem qualquer escala temporal para o evento de transição entre os dois rolos do atrator gerado pela fusão [10].

Para a série temporal da Figura 5.7 calculamos o biespectro para as oito regiões  $R_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) desta série temporal. Cada região possui 1024 valores da variável  $V_{C_1}$ . Cada valor da série é tomado num intervalo de tempo de  $\Delta t = 0,36$ . O biespectro e as respectivas curvas de níveis destas oito regiões foram divididos num conjunto de quatro gráficos. Nas Figuras 5.8 e 5.9 graficamos o biespectro e as curvas de níveis para as quatro primeiras regiões ( $R_1, R_2, R_3, R_4$ ) da série temporal mostrada na Figura 5.7. O resultado do biespectro e das curvas de níveis para as quatro regiões seguintes ( $R_5, R_6, R_7, R_8$ ) podem ser observadas nas Figuras 5.10 e 5.11, respectivamente. Podemos notar o caráter intermitente do biespectro e portanto do acoplamento quadrático. A região  $R_1$  da série temporal da Figura 5.7 possui biespectro alto (Figura 5.8 a) e sua curva de nível é vista na Figura 5.9 a). Note que para toda série temporal desta região a maior parte dos valores da variável  $V_{C_1}$  se localiza acima do valor zero. Isto indica que estamos em um dos antigos rolos do atrator tipo Rössler. Isto vale para regiões simétricas do outro rolo. Para estas regiões o biespectro é alto, como pode ser visto nas outras regiões de biespectro e suas respectivas curvas de níveis. Para as regiões que apresentam transições entre os dois antigos atratores o biespectro é quase nulo. Portanto, as transições entre os atratores ocorre para acoplamento quadráticos baixos. E, na crise de fusão, este comportamento é intermitente.

## 5.5 Caos por Shil'nikov, simetria e perda do acoplamento quadrático

Nesta seção discutiremos os resultados obtidos através da bicoerência, distinguindo os tipos de caos quando o circuito de Matsumoto-Chua opera nos regimes caóticos do tipo

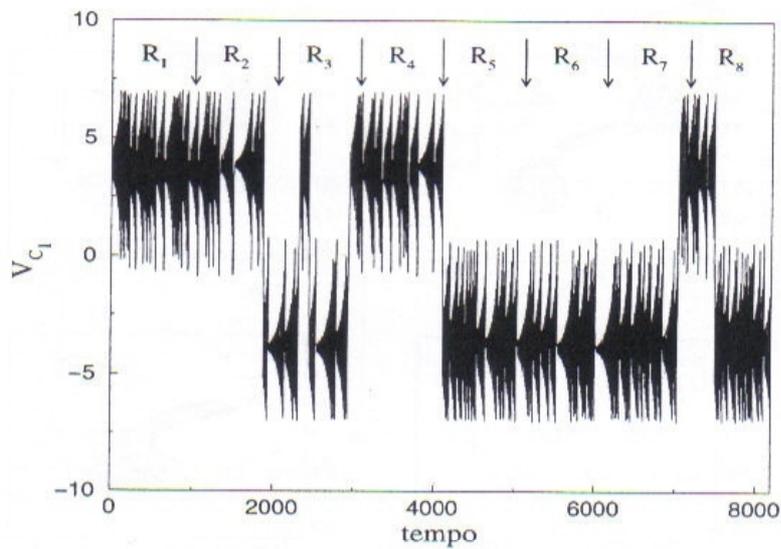


Figura 5.7: Intermitência Caos-Caos na transição : atrator caótico tipo Rössler para atrator caótico Espiral-Dupla. Série temporal da variável  $V_{C_1}$  com oito regiões de 1024 valores para cálculo da bicoerência na região de transição caos-caos ( $g = 0,57732$ ). Intervalo de amostragem 0,36.

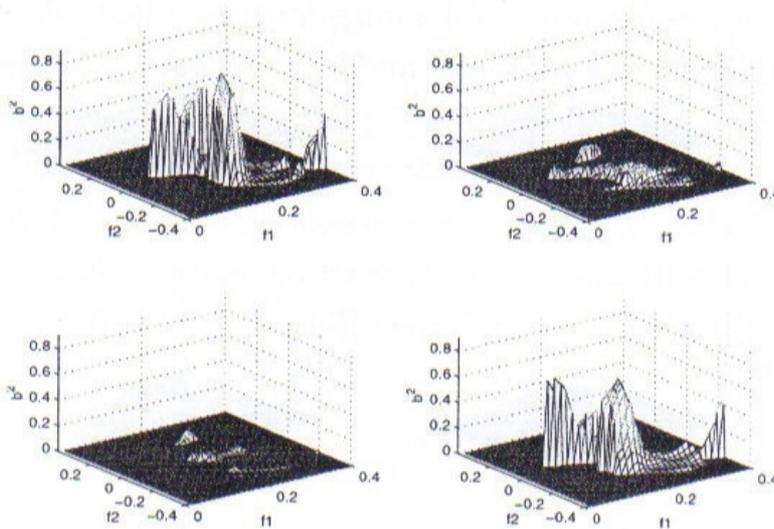


Figura 5.8: Bicoerência na região de transição caos-caos (Rössler para Double-Scroll) ( $g = 0,57732$ ). Primeiras quatro regiões de 1024 valores da série temporal da variável  $V_{C_1}$ , com intervalo de amostragem 0,36.

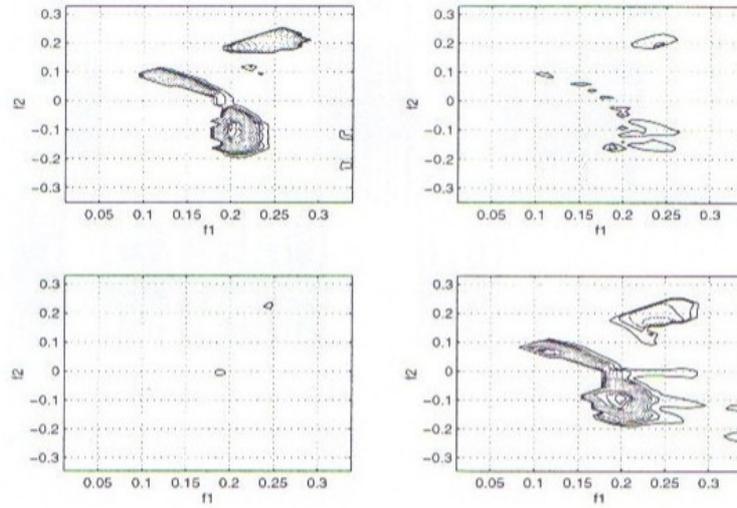


Figura 5.9: Curvas de níveis para Figura 5.8.

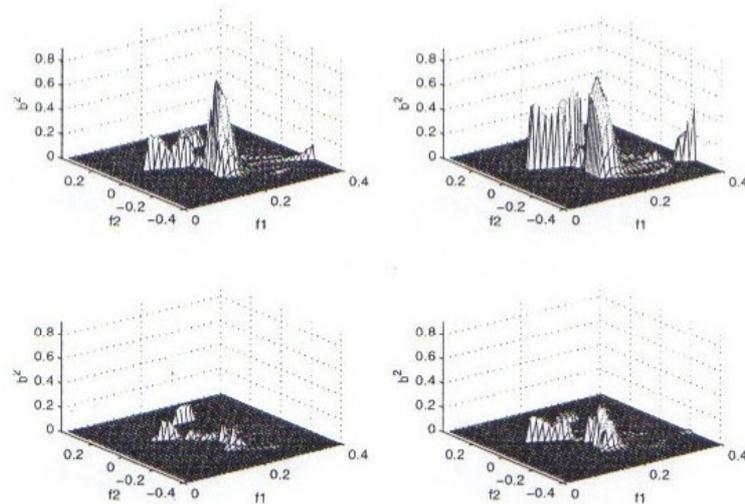


Figura 5.10: Bicoerência na região de transição caos-caos (Rössler para Scroll) ( $g = 0,57732$ ). Sequência de novas regiões de 1024 valores da série temporal da variável  $V_{C_1}$ , com intervalo de amostragem  $\Delta t = 0,36$ .

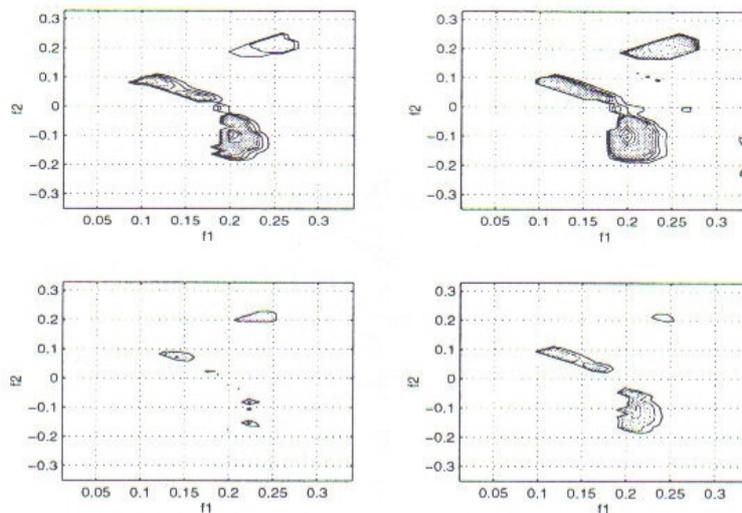


Figura 5.11: Curvas de níveis da Figura 5.10.

Rössler e de Espiral-Dupla. Nosso objetivo é justificar fisicamente a perda do acoplamento quadrático na passagem do regime caótico tipo Rössler para o regime de Espiral-Dupla. Para isso, usamos resultados de trabalhos que mostram que o circuito de Matsumoto-Chua apresenta comportamento caótico por obedecer ao critério de Shil'nikov [10][9]. Considere o fluxo do sistema de Matsumoto-Chua,  $\phi_t$ , em  $\mathbf{R}^3$  com um ponto de equilíbrio na origem  $(0, 0, 0)$  com um autovalor real positivo  $\lambda$  e um par de autovalores complexos conjugados  $\omega$  e  $\omega^*$ , com parte real negativa. Esse fluxo contém uma órbita homoclínica <sup>1</sup>  $\gamma$ , como ilustrado na Figura 5.12. Pelo teorema de Shil'nikov [27][24][41], se  $|\mathbf{Re}\omega| < \lambda$ , então o fluxo  $\phi_t$  pode ser perturbado para  $\phi'_t$  tal que  $\phi'_t$  possui uma órbita homoclínica  $\gamma'$ , próxima a  $\gamma$  que contém um conjunto inumerável de órbitas periódicas instáveis do tipo sela.

A análise global das bifurcações no circuito de Matsumoto-Chua mostra que para os regimes caóticos do tipo Rössler e Espiral-Dupla obtemos para o ponto  $P^0 = (0, 0, 0)$  os seguintes autovalores:

- Atrator caótico tipo Rössler ( $g = 0, 575$ ):

$$\lambda_1 = 2, 8479; \quad \omega = -0, 5865 \pm 2, 0967i. \quad (5.16)$$

- Atrator caótico tipo Dupla-Espiral ( $g = 0, 6$ ):

<sup>1</sup>Uma órbita é chamada *homoclínica* se ela conecta um ponto a si mesmo e *heteroclínica* se ela conecta diferentes pontos

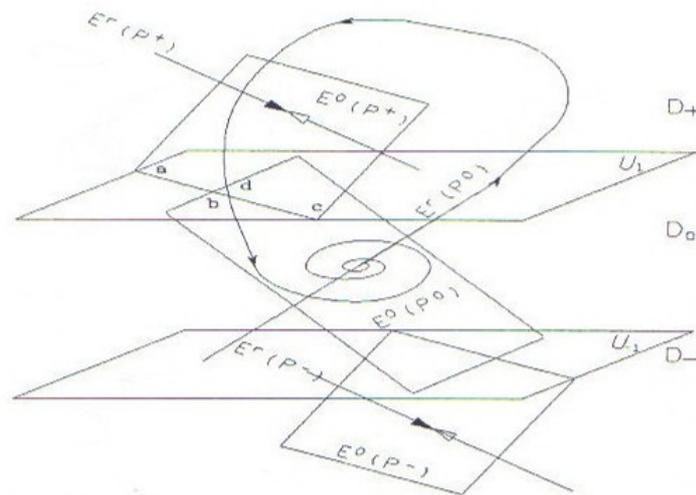


Figura 5.12: Órbita homoclínica conectando o ponto  $P^0$ .

$$\lambda_1 = 2,6528; \quad \omega = -0,6264 \pm 2,0325. \quad (5.17)$$

Ou seja, os valores dos autovalores obedecem a um dos critérios requeridos pelo teorema de Shil'nikov. Além disso, vários trabalhos mostram que este sistema possui órbitas homoclínicas e heteroclínicas para determinados conjuntos de parâmetros [10]. Assim, o sistema analisado, obedece aos critérios de Shil'nikov e portanto contém inumeráveis órbitas instáveis do tipo sela. Alguns tipos de órbitas homoclínicas e heteroclínicas que podem ser encontradas no circuito de Matsumoto-Chua são ilustradas na Figuras 5.13 e 5.14. A análise de como a presença de órbitas homoclínicas gera comportamento caótico é exemplificada em vários sistemas por Aneodo *et al.* [28]. Dessa forma, concluímos que o comportamento caótico visto tanto no atrator tipo Rössler, quanto no Espiral-Dupla, tem sua origem nas perturbações de suas órbitas homoclínicas ou heteroclínicas, com intersecções transversais das variedades estáveis e instáveis. E, como Poincaré [7] suspeitava e Birkhoff [8] e Smale [72] provaram, essas intersecções implicam a existência de conjuntos caóticos invariantes [24].

Uma outra característica importante do sistema de Matsumoto-Chua é sua simetria, no espaço de fase, em relação ao ponto  $P^0 = (0,0,0)$ . Se realizarmos transformações do tipo  $(V_{C_1}, V_{C_2}), i_L \rightarrow (-V_{C_1}, -V_{C_2}, -i_L)$  as equações não se modificam. Dessa forma, se houver uma conexão homoclínica (ou heteroclínica) entre os pontos  $P^0$  e  $P^+$ , haverá também uma conexão do mesmo tipo entre os pontos  $P^0$  e  $P^-$ . Vale ressaltar que quando o sistema

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3528

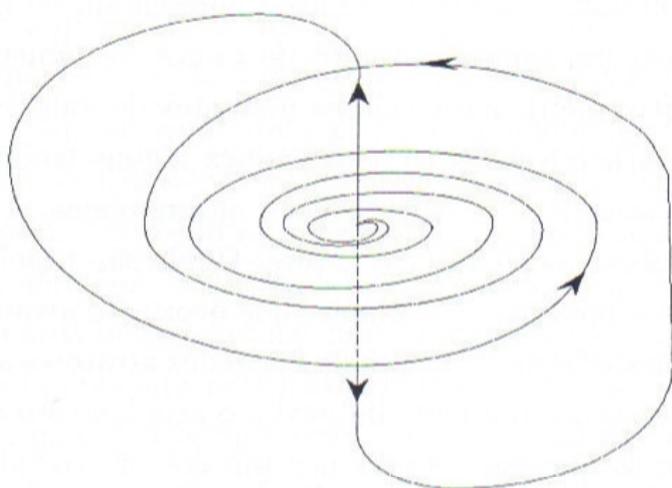


Figura 5.13: Ciclo homoclínico presente no circuito de Matsumoto-Chua pelo ponto  $P^0$ .

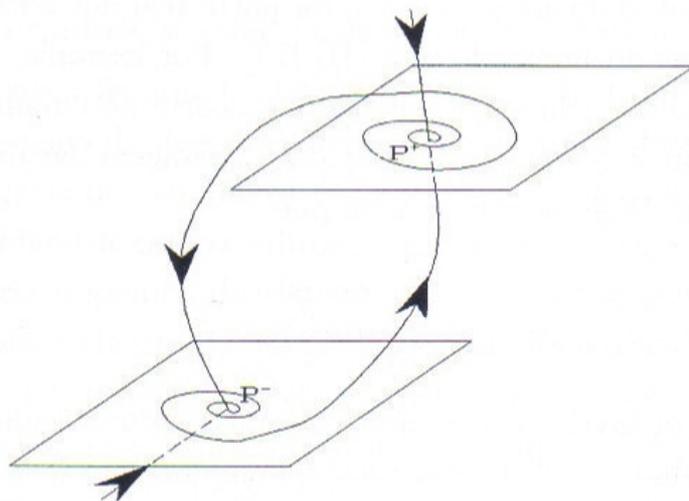


Figura 5.14: Ciclo heteroclínico presente no circuito de Matsumoto-Chua conectando os pontos  $P^+$  e  $P^-$ .

apresenta simetrias, até mesmo órbitas homoclínicas através do ponto  $P^0$ , com expoentes característicos reais, podem dar surgimento a comportamento caótico [28]. Os sistemas que apresentam órbitas homoclínicas (ou heteroclínicas) apresentam no mapa de Poincaré uma estrutura de ferradura com um número infinito de ramos; o número de ramos diminui à medida que variamos o parâmetro para valores distantes do valor para o qual o sistema apresentava a órbita homo(hetero)clínica. Isto explica alguns fenômenos bem conhecidos tais como bifurcações de cascatas subharmônicas ou intermitência.

Os dois atratores caóticos tipo Rössler e Espiral-Dupla são topologicamente diferentes. E vimos que o acoplamento quadrático não linear que ocorre no atrator caótico tipo Rössler não ocorre no atrator Espiral-Dupla. Na crise de fusão dos atratores simétricos tipo Rössler, gerando a intermitência caos-caos por crise induzida, o acoplamento possui caráter intermitente. Para séries temporais que são gerados por um dos antigos atratores tipo Rössler o acoplamento é alto. Para séries temporais que apresentam transições entre os dois atratores o acoplamento quadrático é quase nulo. Talvez o acoplamento no atrator Espiral-Dupla seja de ordem mais alta, onde a técnica com tri-espectro fosse necessário para detectar este acoplamento.

A seguir apresentaremos uma nova hipótese baseada no livro de Holmes *et al.* e referências ali citadas [42], resumidos a seguir. Se existe um ciclo homoclínico (ou heteroclínico), conectando um ponto de sela a si mesmo, então é bem conhecido que a estabilidade assintótica do ciclo é determinada pela razão da parte real dos autovalores do sistema linearizado nas vizinhanças do ponto de sela [41] [73]. Por exemplo, no caso de uma órbita homoclínica para um ponto sela-foco, como o que ocorre no circuito de Matsumoto-Chua (Figura 5.12), temos que o tempo estimado para a passagem das órbitas na vizinhança do ponto sela-foco, segundo Wiggins [41], é dado por

$$\tau = \frac{1}{\lambda_i} \left[ \ln\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right) \right], \quad (5.18)$$

onde  $\lambda_i$  é o autovalor instável e  $\delta$  e  $\epsilon$  são os comprimentos de um pequeno retângulo na vizinhança do ponto sela-foco. O tempo total que uma órbita leva para executar um ciclo completo através do ciclo homo(hetero)clínico é dado pelo resultado geral:

$$\tau = 2K_1 + \frac{2}{\lambda_i} \left[ \ln\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right) + K_0 \right], \quad (5.19)$$

onde as constantes  $K_1$  e  $K_0$  dependem da estrutura global do campo vetorial próximo ao ciclo homoclínico. Esses resultados foram testados por Stone e Holmes [74] com a equação

de Duffing e mostraram resultados similares com esse resultado obtido por linearização do sistema.

Um outro resultado importante obtido por Holmes *et al.*[73][75] está relacionado com a distribuição temporal quando o ciclo homo(hetero)clínico é perturbado. Esses autores verificaram que um sistema dinâmico próximo a um ciclo homoclínico perturbado produz uma distribuição de soluções próximas à vizinhança do ponto de conexão similar a soluções geradas por um processo aleatório. Os resultados resumidos destes trabalhos podem ser colocados da seguinte forma. As soluções capturadas por atratores homoclínicos (ou heteroclínicos) perturbados exibem eventos bem definidos cujo comportamento temporal são próximos das antigas evoluções do ciclo antes da perturbação. Esses eventos, contudo, ocorrem em tempos aleatórios com uma distribuição determinada conjuntamente pelo autovalor dominante (como já vimos) e pelo nível da perturbação. Em particular, a passagem do tempo escala como o produto do inverso do autovalor com o logaritmo do nível da perturbação. Assim, esta escala temporal exhibe uma mistura de efeitos determinísticos e aleatórios. O processo aleatório introduz uma escala de tempo sem contudo afetar significativamente as estruturas das soluções dos sistemas no espaço de fase. De certa forma, o *esqueleto* dos eventos são as conexões homo(hetero)clínicas que existem no sistema sem perturbação. Ao passarmos do regime tipo Rössler para o regime de Espiral-Dupla, essas conexões são quebradas, se interseccionam e geram caos. No entanto, a nova dinâmica ainda é regida pelo antigo *esqueleto* das órbitas homo(hetero)clínicas, as quais ficam subjacentes à dinâmica observada.

Em suma, em uma situação simples há um ponto fixo instável (tipo sela-foco) e uma órbita homoclínica no espaço de fase. Perturba-se o sistema de forma a quebrar os ciclos. O estado do sistema vagueia na vizinhança do ponto fixo por algum tempo. Esta duração é determinada pela quantidade de ruído e outras perturbações externas agindo sobre o sistema. Eventualmente, a própria dinâmica do sistema perturbado faz com que a órbita deixe o ponto fixo e ruma para uma viagem em torno do atrator. Essa dinâmica no atrator é regida pelas antigas estruturas dos ciclos homo(hetero)clínicos que existiam antes da perturbação. Nestas excursões podem ocorrer eventos bem definidos quando a órbita está próxima da antiga estrutura do ciclo. Estes eventos em nosso caso pode ser o acoplamento quadrático visto na transição caos-caos.

No caso do sistema de Matsumoto-Chua no regime caótico de Espiral-Dupla, sabemos que ele obedece aos critérios de Shil'nikov, é simétrico em relação à origem, possui uma família de órbitas homo(hetero)clínicas conectando os pontos  $P^+$ ,  $P^-$  e  $P^0$ , ou diretamente os pontos  $P^+$  ao ponto  $P^-$ . Sendo assim, os resultados dos trabalhos de Holmes *et al.* são

aplicados também a este sistema. Dessa forma, o acoplamento quadrático é perdido pela presença de novos modos lineares e espontâneos que são introduzidos na passagem de um rolo do atrator para outro. Esses modos sendo aleatoriamente distribuídos (vide resultado de Holmes *et al.*) são acompanhados de fase aleatoriamente distribuídas (ou espontâneas) o que anularia o valor do biespectro, como foi verificado neste trabalho. Sendo os resultados dos trabalhos de Holmes bastantes gerais, para qualquer tipo de sistema que apresente ciclos homo(hetero)clínicos, devemos encontrar o mesmo comportamento no biespectro para sistema que apresentem estas particularidades discutidas anteriormente. Por exemplo, sabemos que o atrator de Lorenz (ver Apêndice B) tem uma simetria do tipo  $(X, Y, Z) \rightarrow (-X, -Y, Z)$  e possui uma órbita homoclínica conectando o ponto na origem  $(0, 0, 0)$  [76]. Assim, é de se esperar que seu biespectro seja baixo ou quase nulo pela mesma razão da geração de novos modos aleatoriamente distribuídos que a passagem pelo ponto de conexão homoclínica gera. Calculamos o biespectro para o sistema de Lorenz para confirmar esta hipótese. Na Figura 5.15 mostramos este resultado juntamente com as curvas de níveis 5.16. Podemos ver, para todos os intervalos da série temporal, que o biespectro é quase nulo, apoiando nossa hipótese.

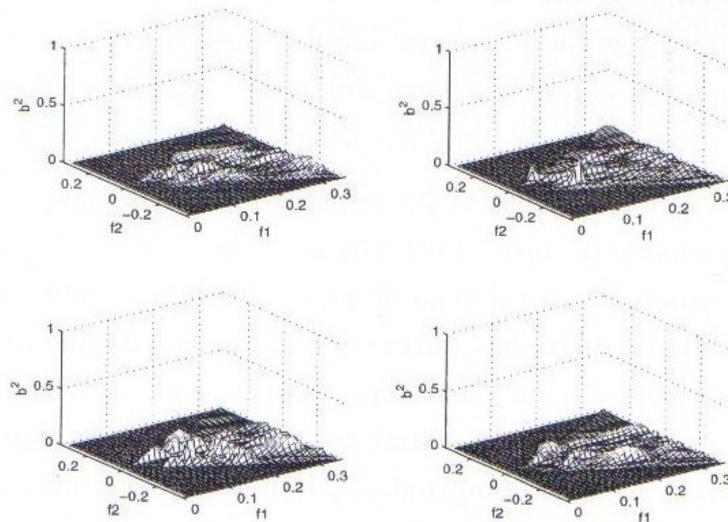


Figura 5.15: Bicoerência para atrator caótico de Lorenz ( $g = 0,575$ ). Análise de quatro intervalos temporais sucessivos, cada um com 1024 valores com intervalo de amostragem  $\Delta t = 0,36$ .

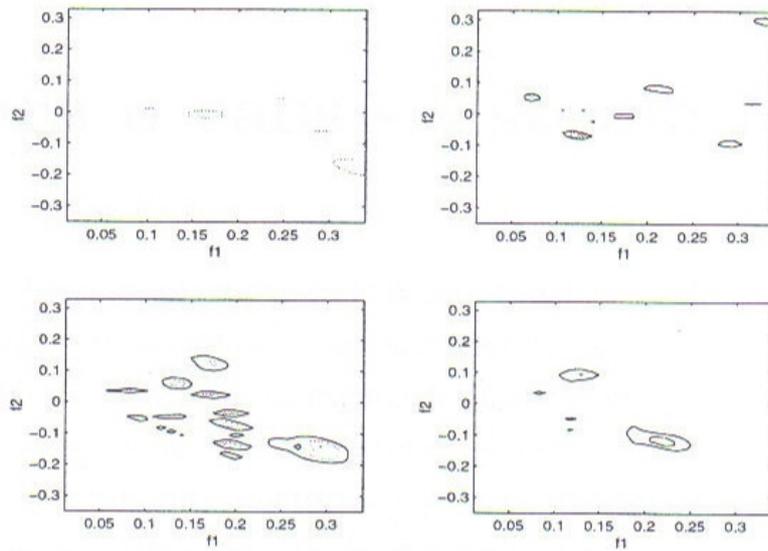


Figura 5.16: Curvas de nível para a bicoerência da Figura 5.15 mostrando acoplamento quadrático de frequências.

# Capítulo 6

## Rotas para o caos - sistema forçado

Neste capítulo analisamos o circuito de Matsumoto-Chua modificado por um forçamento variando senoidalmente. Através do cálculo do maior expoente de Lyapunov determinamos para o circuito modificado diagramas no espaço dos parâmetros. Delimitamos, nesses diagramas, regiões de parâmetros onde temos: movimentos quase periódicos, periódicos e caóticos. As separações entre as regiões de trajetórias regulares (periódicas e quase periódicas) e irregulares (caóticas) são identificadas com determinadas rotas para o caos.

### 6.1 O circuito de Matsumoto-Chua forçado senoidalmente

A partir do circuito básico de Matsumoto-Chua, introduzimos em série com o indutor  $L$  um forçamento externo do tipo senoidal. Na Figura 6.1 temos o diagrama esquemático do circuito com o forçamento.

As equações do movimento usadas na simulação numérica com o forçamento, em variáveis adimensionais, são:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_{NR}(V_{C_1}) \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -V_{C_2} - q(t). \end{aligned} \tag{6.1}$$

O forçamento externo é dado por:

$$q(t) = V_g \text{sen}(2\pi ft), \quad (6.2)$$

onde  $V_g$  é a amplitude e  $f$  é a frequência.

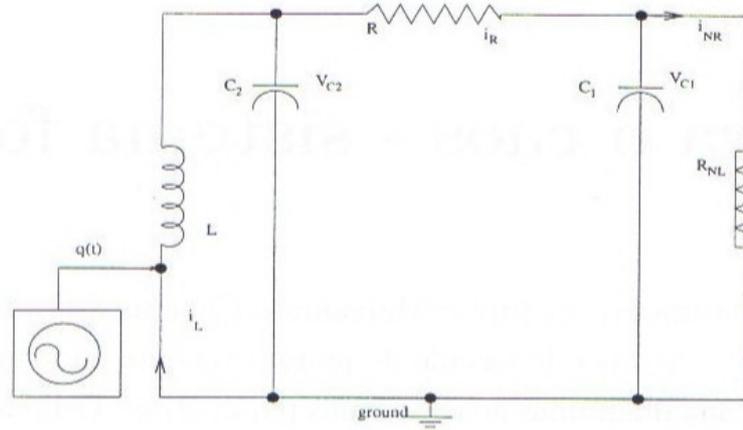


Figura 6.1: Diagrama esquemático do circuito elétrico de Matsumoto-Chua com perturbação externa do tipo senoidal.  $C_1 = 10,0$ ;  $C_2 = 1,0$ ;  $1/L = 6,0$ .

Para a simulação deste circuito forçado, usamos as mesmas constantes e condições iniciais usadas no circuito sem forçamento. Sendo o sistema não autônomo, usamos a técnica de mapa estroboscópico para gerar mapas de Poincaré, ou seja, a dinâmica do sistema é gravada (como uma fotografia) a cada instante  $t_k = t_0 + k/f$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), onde  $f$  é a frequência do forçamento externo  $q(t)$ .

## 6.2 Quase periodicidade

O forçamento externo senoidal aplicado ao circuito de Matsumoto-Chua introduz mais um novo grau de liberdade ao sistema. Além dos movimentos periódicos e caóticos que o sistema sem perturbação pode gerar, este novo sistema perturbado pode apresentar movimentos *quase periódicos* [8][31][32].

De forma simplificada, o movimento *quase periódico* pode ser visto como uma combinação de movimentos periódicos de várias frequências fundamentais incomensuráveis. Consideremos uma série temporal da variável  $V_{C_1}(t)$  gerada pelo sistema 6.1. No caso desta variável apresentar um movimento *quase periódico* com  $N$  frequências. O movimento da variável

dinâmica  $V_{C_1}(t)$  pode então ser representado em termos de uma função de  $N$  variáveis independentes,  $F(t_1, t_2, \dots, t_N)$  tal que  $F$  é periódica em cada uma das  $N$  variáveis. Isto é,

$$F(t_1, t_2, \dots, t_i + T_i, \dots, t_N) = F(t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N) \quad (6.3)$$

onde  $T_i$  é o período de cada variável. Além disso, as  $N$  frequências,  $f_i = \frac{1}{T_i}$ , são incomensuráveis. Isto significa que nenhuma das frequências  $f_i$  pode ser expressa como uma combinação linear das outras frequências usando coeficientes que sejam números racionais. As frequências  $f_i$  são incomensuráveis se a equação,

$$m_1 f_1 + m_2 f_2 + \dots + m_N f_N = 0 \quad (6.4)$$

não possui solução para qualquer inteiro  $m_i$ , exceto o caso trivial em que todos os  $m_i$  são zeros. Em termos da função  $F$ , a variável dinâmica  $V_{C_1}(t)$  pode ser representada como

$$V_{C_1}(t) = F(t, t, \dots, t). \quad (6.5)$$

Ou seja,  $V_{C_1}(t)$  é obtida de  $F$  fazendo com que todas as suas  $N$  variáveis sejam iguais a  $t$ ,  $t_1 = t_2 = \dots = t_N = t$ . E, devido a periodicidade de  $F$ , ela pode ser representada pela série de Fourier na forma

$$F = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N} a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_N} e^{i[n_1 f_1 t_1 + n_2 f_2 t_2 + \dots + n_N f_N t_N]}. \quad (6.6)$$

Fazendo  $t = t_1 = t_2 = \dots = t_N$  e efetuando a transformada de Fourier obtemos que,

$$V_{C_1}(f) = 2\pi \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N} a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_N} \delta(V_{C_1} - (n_1 f_1 + n_2 f_2 + \dots + n_N f_N)). \quad (6.7)$$

Portanto, o espectro de potência da série de Fourier de  $V_{C_1}(t)$  consiste de um conjunto denso de funções delta e todas as combinações lineares das  $N$  frequências fundamentais  $f_1, \dots, f_N$ , gerando valores discretos de frequências em  $m_1 f_1 + m_2 f_2 + \dots + m_N f_N$ . Na Figura 6.2 um espectro típico de movimento *quase periódico* gerado a partir do sistema 6.1. Podemos notar a presença das frequências  $f_c \approx 0,29$  (característica do sistema não perturbado) e  $f \approx 0,198$ , devido à perturbação externa. Estas frequências se combinam na forma  $m_1 f_c + m_2 f$  gerando as outras frequências que aparecem em intervalos igualmente espaçados.

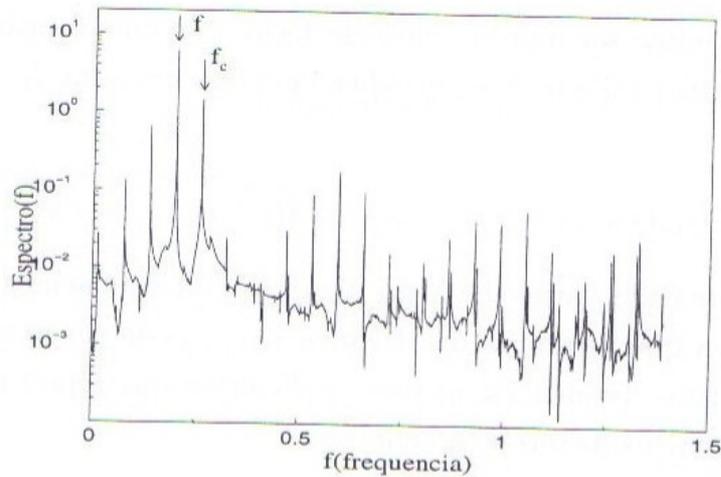


Figura 6.2: Espectro de potência típico para movimento *quase periódico* do sistema 6.1. Série temporal com 4096 valores da variável  $V_{C_1}(t)$ . Parâmetros:  $g = 0,5878$ ,  $f = 0,1980$  e  $V_g = 0,3000$ .

### 6.3 Diagramas no espaço de parâmetros

Da mesma forma que foi feito para o sistema sem forçamento, utilizamos o algoritmo desenvolvido no Apêndice A para o cálculo do expoente de Lyapunov para gerarmos todos os diagramas no espaço de parâmetros deste capítulo.

Podemos classificar os diferentes tipos de movimentos ou regimes gerados pelo sistema perturbado de acordo com o valor do maior expoente de Lyapunov. No diagrama do espaço de parâmetros adotamos a diferença na tonalidade de cores para caracterizar regimes periódicos (cor mais escura), quase periódicos (cor cinza-escuro) e caóticos (cor cinza-claro). As regiões sem atratores limitados são graficadas em branco. A tonalidade e o valor correspondente do expoente de Lyapunov é colocado ao lado do diagrama na barra de tonalidade. Quanto mais escura a tonalidade menor o valor do maior expoente de Lyapunov, quanto mais clara maior o expoente. Perturbamos o circuito de Matsumoto-Chua fixando inicialmente o valor do parâmetro  $g$  no regime de Espiral-Dupla. Escolhemos dois valores de  $g$  ( $g = 0,5878$  e  $g = 0,6000$ ) que são frequentemente usados neste capítulo. Ambos valores geram atratores do tipo Espiral-Dupla.

#### 6.3.1 Diagrama no espaço de parâmetros $V_g$ e $f$

Os primeiros diagramas no espaço de parâmetros são vistos nas Figuras 6.3 e 6.4. A Figura 6.3 corresponde ao diagrama para o valor fixo de  $g = 0,6000$ , enquanto a Figura 6.4

corresponde ao valor fixo de  $g = 0,5878$ .

Para gerar o diagrama da Figura 6.3, fixamos o valor do parâmetro  $g = 0,6000$  e variamos os valores dos parâmetros da perturbação,  $V_g$  (amplitude) e  $f$  (frequência). Para uma grade de  $400 \times 400$  de valores de  $f$  e  $V_g$ , calculamos o espectro dos expoentes de Lyapunov. Cada espectro foi calculado com um tempo de 400000 iterações ( $\Delta t = 1159\tau_c$ ) com um passo de integração de  $h = 0,01$  e a ortogonalização de Gram-Schmidt [43] foi feita a cada dez passos de integração.

O diagrama para o valor de  $g = 0,5878$ , é ilustrado na Figura 6.4. Nestes diagramas, podemos notar diferentes regimes. As diferentes tonalidades de cores demarcam fronteiras de transições de regimes para o caos através da *quase periodicidade*. Para pequenas frequências  $f$  e pequenas amplitudes  $V_g$ , o forçamento externo tem o efeito de uma pequena perturbação no atrator caótico do tipo Espiral-Dupla (observado para  $V_g = 0$ ). Para frequências maiores, mesmo com amplitudes  $V_g$  pequenas, podemos ter tanto o regime caótico, como o quase periódico ou o periódico.

Os regimes periódicos, gerados por travamento de frequência (*frequency locking*), são localizados, principalmente, para valores de frequências do forçamento que sejam um submúltiplo ou fração da frequência característica do sistema sem perturbação ( $f_c = 0,29$ ). Isto é, para razões racionais entre as frequências  $f$  e  $f_c$ . Há uma grande concentração dessas regiões que se estendem paralelamente ao eixo de  $V_g$  na parte superior das Figuras 6.3 e 6.4. Como apresentamos no Capítulo 7, estas regiões de travamento de frequência podem ser usadas para controle de caos, eliminando o comportamento caótico por travamento de frequência (*frequency locking*).

Com referência ainda aos dois diagramas, podemos notar a grande ilha periódica, presente em ambos os diagramas, em torno do valor da frequência externa  $f = 0,145$ . Nas bordas destas ilhas temos a transição de quase periodicidade para o caos. Estas bordas delimitam zonas de travamento de frequência, gerando as *línguas de Arnold* [77] (estruturas periódicas que aparecem imersas em regiões quase periódicas no espaço de parâmetros). Uma descrição das estruturas periódicas em termos do período de suas órbitas pode ser encontrada em [40]. Na referência [40], o diagrama da Figura 6.3 é calculado através do algoritmo isoperiódico, que permite determinar os períodos das estruturas maiores. Vale ressaltar a grande semelhança entre o nosso diagrama usando os expoentes de Lyapunov e o diagrama isoperiódico.

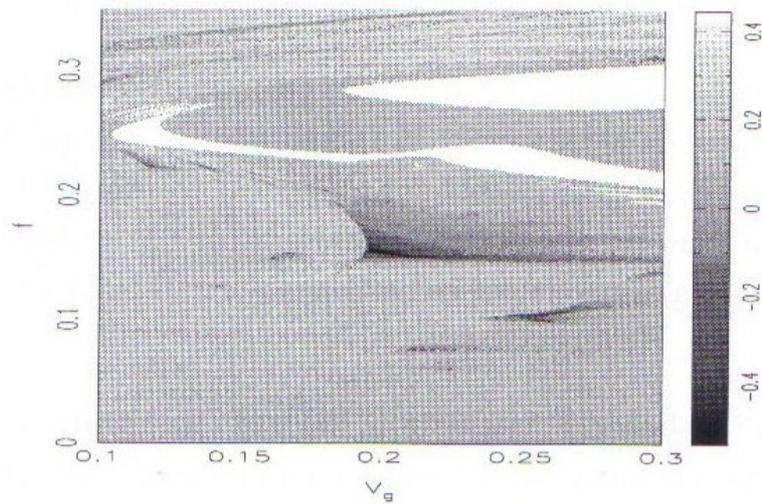


Figura 6.3: Representação do maior expoente de Lyapunov em função da frequência  $f$  e da amplitude do forçamento ( $V_g$ ), fixado o resistor linear ( $g = 0,6000$ ). Quanto mais escura a cor, menor o expoente de Lyapunov, cores em cinza corresponde a movimento quase periódico e as regiões mais claras correspondem a movimento caótico (conforme indicado na figura). As faixas em branco, correspondem a atratores não finitos.

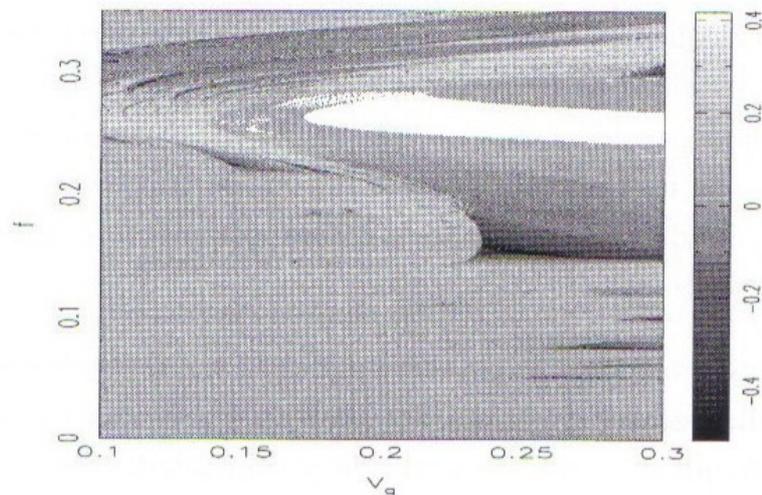


Figura 6.4: Representação do maior expoente de Lyapunov em função da frequência  $f$  e da amplitude do forçamento ( $V_g$ ), fixado o resistor linear ( $g = 0,5878$ ). Quanto mais escura a cor, menor o expoente de Lyapunov, cores em cinza corresponde a movimento quase periódico e as regiões mais claras correspondem a movimento caótico (conforme indicado na figura). As faixas em branco, correspondem a atratores não finitos.

### 6.3.2 Línguas de Arnold

As estruturas periódicas, que aparecem imersas em regiões quase periódicas no espaço de parâmetros são denominadas línguas de Arnold [78][77]. Nestas regiões ocorre o travamento de frequência [78] (*frequency locking*) de forma que o circuito passa a oscilar com a frequência gerada pelo travamento, ao invés de oscilar com sua frequência natural. E a razão entre estas frequências, como vimos no início deste capítulo, são racionais. Nas Figuras 6.5 e 6.6, observamos essas estruturas que aparecem no espaço de parâmetros  $f \times V_g$ . A Figura 6.5 é uma região ampliada da Figura 6.4, na borda da ilha periódica que aparece nesta figura. A Figura 6.6 é uma nova ampliação da Figura 6.5 para melhor evidenciar a estrutura interna das línguas. Cada língua representa a região no espaço dos parâmetros associado a um particular travamento de frequência gerando um atrator periódico. É possível notar as finas regiões imersas na estrutura de movimentos quase periódicos (regiões em cinza). Acima das línguas podemos ver as regiões com trajetórias caóticas.

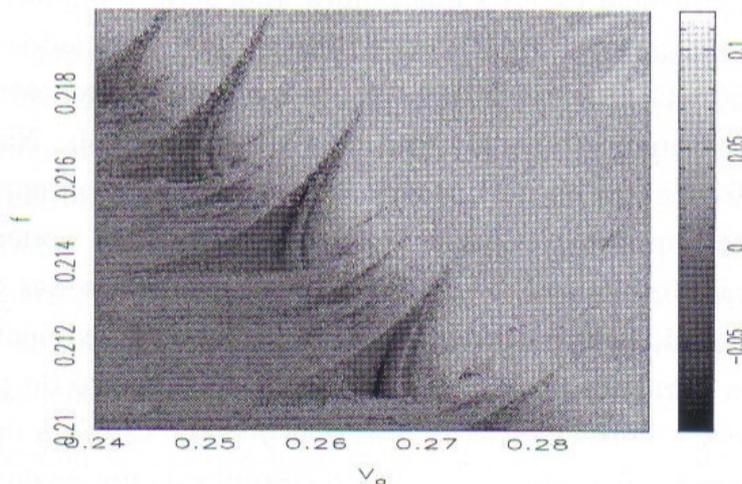


Figura 6.5: Ampliação da Figura 6.4. Representação do maior expoente de Lyapunov em função da frequência ( $f$ ) e amplitude de forçamento ( $V_g$ ), fixado o resistor linear ( $g = 0,5878$ ). As regiões cinza escuro correspondem às línguas de Arnold, dentro das quais as linhas negras correspondem às órbitas superestáveis. A região mais clara acima das línguas correspondem a movimento caótico.

Para analisar melhor o comportamento das órbitas próximas às línguas de Arnold, fizemos uso do diagrama no espaço das frequências [51]. Assim na Figura 6.7, fixamos os valores de  $g = 0,5878$  e  $V_g = 0,2700$  e variamos a frequência do forçamento externo no intervalo  $0,205 \leq f \leq 0,215$ , para 512 valores da frequência externa  $f$ . Esta região de parâmetros

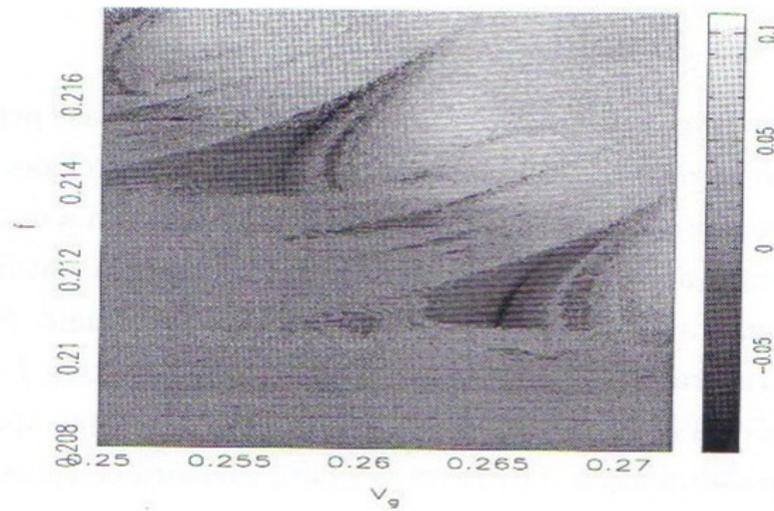


Figura 6.6: Línguas de Arnold. Ampliação da Figura 6.5

possibilita cruzarmos a língua de Arnold mais inferior do gráfico mostrado na Figura 6.6. Para cada valor da frequência externa analisamos uma série temporal, obtida da Equação 6.1, de 4096 valores da variável  $V_{C_1}(t)$ , sendo estes valores tomados a cada intervalo de tempo  $\Delta t = 0,36$ . O número de pontos e o intervalo de amostragem são essenciais para uma melhor performance do algoritmo de FFT usado [43]. Na abscissa do gráfico temos os valores da frequência da perturbação externa ( $f$ ) e na ordenada temos o espectro de potência das séries temporais. Com a ajuda deste diagrama podemos notar que, para frequências no intervalo  $0,2050 \leq f \leq 0,2115$ , o comportamento das órbitas é intercalado por movimento quase periódicos e periódicos (sincronização). Movimentos periódicos devem apresentar patamares paralelos ao eixo das abscissas no espectro de potência, como pode ser visto para o intervalo de frequência em torno de  $f \approx 0,212$ . Esta órbita periódica que é evidenciada neste diagrama é a órbita periódica no interior da língua de Arnold representada na parte inferior da Figura 6.6. Podemos ainda notar neste diagrama que para frequências acima de  $f \approx 0,213$  temos uma banda larga em frequência, caracterizando o comportamento caótico.

Vimos, através do gráfico da Figura 6.7, que variando-se a frequência externa as línguas de Arnold são intercaladas por movimentos quase periódicos ou caóticos. Ou seja, na região analisada a rota que leva ao caos segue o travamento de frequência que gera a língua de Arnold. Realizamos um novo experimento numérico na região das línguas observada na Figura 6.6. Agora fixamos o valor da frequência externa em  $f = 0,215$  e variamos a amplitude de forçamento com 512 valores para  $0,25 \leq V_g \leq 0,30$ . O diagrama no espaço das frequências

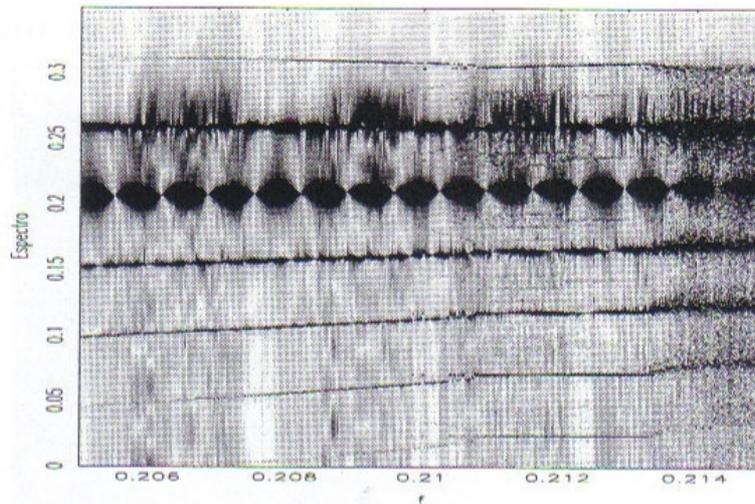


Figura 6.7: Diagrama no espaço das freqüências na região da língua de Arnold mostrado na Figura 6.5 ( $g = 0,5878$  e  $V_g = 0,2700$ ). Movimento quase periódico e sincronizado para  $0,2050 \leq f \leq 0,2115$ . Língua de Arnold para  $f \approx 0,2120$ . Banda larga em freqüência para  $f > 0,2130$ .

para este intervalo de parâmetros é visto na Figura 6.8. Neste caso, a língua de Arnold se localiza para  $V_g \approx 0,260$ , o que indica que estamos na segunda língua (de baixo para cima) da Figura 6.6. Podemos notar que à medida que variamos o parâmetro o aparecimento da banda larga em freqüência não ocorre abruptamente, como no caso em que variamos a freqüência apresentado na Figura 6.7. À medida que variamos o parâmetro  $V_g$  há a transição para o caos por dobramento de período como bem estudado na referência [31]. As finas regiões claras, circundadas por banda larga de freqüência que aparecem neste gráfico, são novas janelas de travamento de freqüência que ocorre com a variação de  $V_g$ .

Para melhor evidenciar a rota que leva ao caos a partir do interior da língua de Arnold, mostramos o mapa estroboscópico para a mesma região de parâmetros da Figura 6.8. Este mapa é mostrado na Figura 6.9. Nesta Figura vemos o movimento periódico sob o toro correspondente à língua de Arnold a), o dobramento do período desse toro b), a formação de cinco bandas caóticas c) e, finalmente, a formação de um atrator caótico que apresenta inúmeras dobras e *enrugamentos* d). Esta combinação de dobramento e estiramento é responsável pela propriedade de mistura (*mixing*) no atrator caótico [79], fazendo com que as órbitas vizinhas se afastem exponencialmente no decorrer do tempo. Este cenário segue a rota de Curry-Yorke, onde a quebra do toro ocorre suavemente, ou seja, à medida que variamos o parâmetro  $V_g$  o toro sofre dobramentos contínuos e estiramentos no espaço de fase [79].

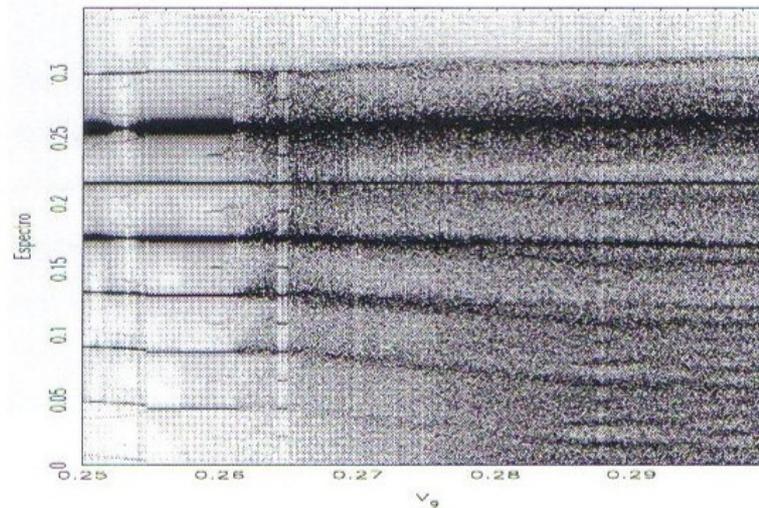


Figura 6.8: Diagrama no espaço das frequências na região da língua de Arnold mostrado na Figura 6.5 ( $g = 0,5878$  e  $f = 0,2150$ ). Língua de Arnold para  $V_g \approx 0,260$ . Banda larga de frequência por dobramento de período para  $V_g > 0,265$ .

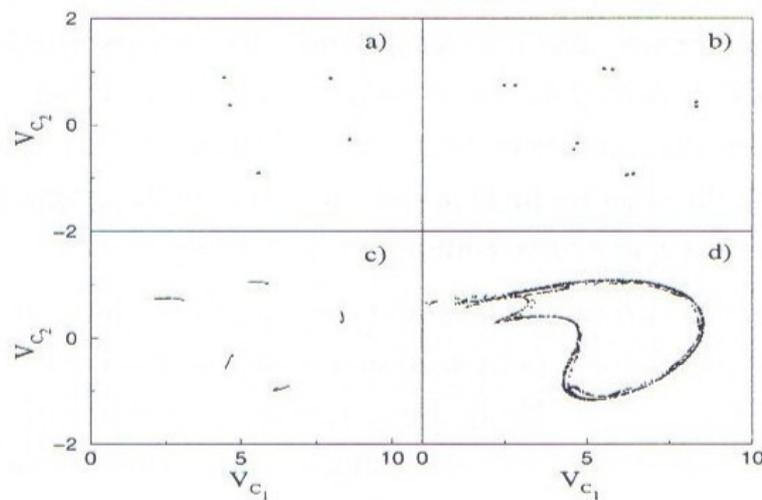


Figura 6.9: Rota para o caos a partir do interior da língua de Arnold. Mapa estroboscópico para  $g = 0,5878$  e frequência  $f = 0,2150$ . a) Travamento de frequência para  $V_g = 0,2560$ . b) Duplicação de período do estado travado,  $V_g = 0,2590$ . c) Formação de cinco bandas caóticas no toro  $V_g = 0,2600$ . d) Atrator caótico,  $V_g = 0,2630$ .

### 6.3.3 Diagrama no espaço de parâmetros $f$ e $g$

Sendo o circuito de Matsumoto-Chua mais sensível a variações no parâmetro  $g$  do que nos outros parâmetros, como visto no Capítulo 3, verificamos, com um forçamento externo, as modificações dos atratores com  $g$ . Para os três diagramas no espaço de parâmetros seguintes, Figuras 6.10, 6.11, 6.12, fixamos o valor da amplitude do forçamento externo em  $V_g = 0,144$  e variamos a frequência  $f$  do forçamento e o parâmetro  $g$ .

Na Figura 6.10, temos um diagrama geral para a mesma grade de pontos anteriores ( $400 \times 400$ ). A gama de regimes gerados pela mesma variação de parâmetros é muito mais rica que os gerados anteriormente. Notamos também que a região de atratores não limitados (região em branco no gráfico) diminui, restringindo-se a valores entre  $0,58 < g < 0,65$ , com as frequências próximas da frequência característica do sistema sem perturbação,  $f_c = 0,29$ . Nesta faixa de frequência há uma maior variedade de atratores periódicos. Nela, as regiões de mesmo atrator formam estruturas complexas, como pode ser visto na ampliação desta região vista na Figura 6.11. Uma outra região que chama a atenção é a zona de transição para  $g \approx 0,565$  que se estende por toda a faixa de valores da frequência, esta região também foi ampliada e é mostrada na Figura 6.12. Esta fronteira de transição é bastante disforme e não apresenta uma separatriz definida.

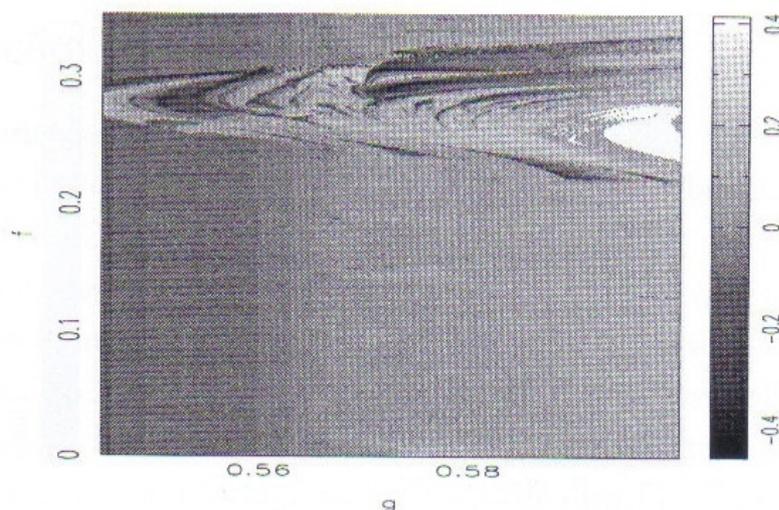


Figura 6.10: Representação do maior expoente de Lyapunov em função da frequência do forçamento,  $f$ , e da resistência linear,  $g$ , fixada a amplitude do forçamento ( $V_g = 0,144$ ). Quanto mais escura a cor, menor o expoente de Lyapunov, cor cinza corresponde a movimento quase periódico e as regiões mais claras correspondem a movimento caótico (conforme indicado no gráfico).

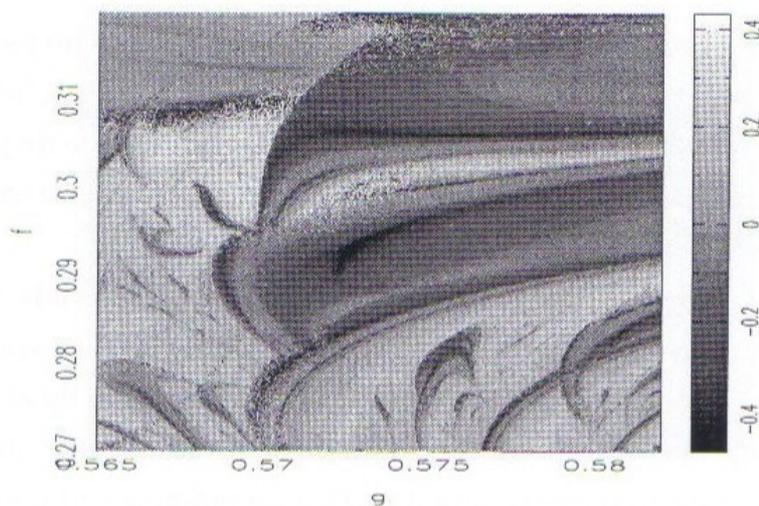


Figura 6.11: Ampliação da Figura 6.11. Representação do maior expoente de Lyapunov em função da frequência do forçamento,  $f$ , e da resistência linear  $g$ , fixada a amplitude do forçamento ( $V_g = 0.144$ ).

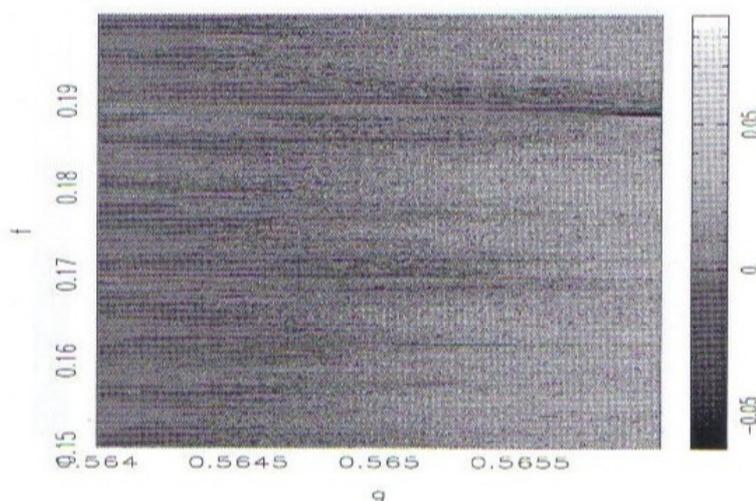


Figura 6.12: Ampliação da região inferior da Figura 6.11. Representação do maior expoente de Lyapunov em função da frequência do forçamento,  $f$ , e da resistência linear  $g$ , fixada a amplitude do forçamento ( $V_g = 0.144$ ).

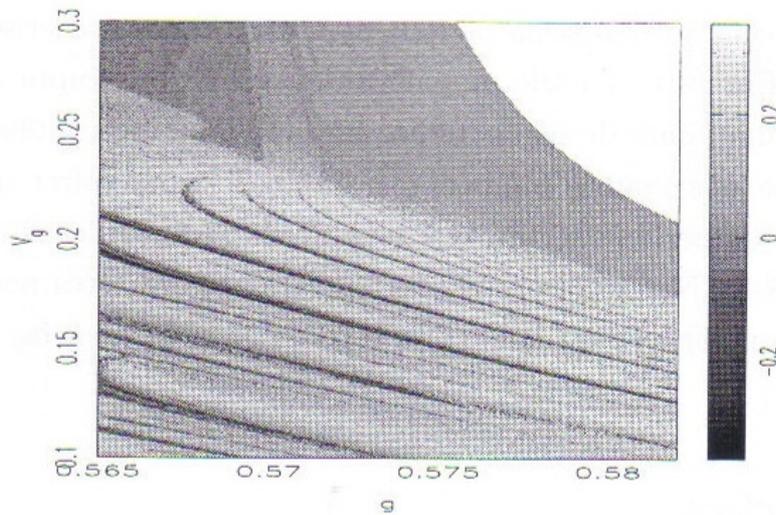


Figura 6.13: Representação do maior expoente de Lyapunov em função da amplitude da perturbação  $V_g$  e da resistência  $g$ , fixada a frequência da perturbação ( $f = 0,27$ ). Quanto mais escura a cor, menor o expoente de Lyapunov, cores em cinza correspondem a movimentos quase periódicos e as regiões mais claras correspondem a movimentos caóticos (gradação de tons cinza na barra ao lado da figura). As faixas branca e cinza clara uniforme correspondem a atratores não finitos.

## 6.4 Rotas para o caos através da quase periodicidade

### 6.4.1 Introdução

Nosso objetivo nesta seção é mostrar como o comportamento caótico ocorre a partir de movimentos quase periódicos, ou seja, mostrar rotas para o caos baseadas em bifurcações de toros quase periódicos.

Para compreender o surgimento de caos a partir da quebra do toro  $\mathbf{T}^2$  no espaço de fase para  $D = 3$ , inicialmente apresentamos o cenário para o caos através de movimento quase periódico: rota de Curry-Yorke [80]. Nesta rota, a desestabilização se desenvolve num movimento composto de duas frequências ou toro  $\mathbf{T}^2$ . Neste caso, o aparecimento do comportamento caótico ocorre devido à manifestação de outro grau de liberdade. Este novo grau de liberdade se manifesta pela divergência gradual das trajetórias do toro  $\mathbf{T}^2$ , que aumenta com a destruição do toro. A razão do caos aparecer por esta rota já é amplamente conhecida [81][82][83][84], e se dá através do cruzamento das variedades dos pontos de sela (presentes sempre entre dois sorvedouros). Nesta tese identificamos dois cenários que seguem esta rota. No primeiro cenário observamos o dobramento e *enrrugamento* do toro  $\mathbf{T}^2$  gerando uma mistura (*mixing*) no espaço de fase, mostrado na seção 6.3.2 que trata das línguas de

Arnold. Um outro cenário que segue a rota de Curry-Yorke é a crise cíclica, indicada a seguir, seção 6.4.2. Em outro cenário, a quebra de toro  $\mathbf{T}^2$  é abrupta e ocorre por crise de colisão do toro com um ponto de sela externo, gerando uma intermitência do tipo-II [17].

Além dessas rotas, observamos também que o toro  $\mathbf{T}^2$  pode sofrer sucessivas bifurcações do tipo dobramento de período seguindo a rota de duplicação de período. Esta rota será discutida na seção 6.4.4 Nas seções seguintes apresentaremos estes resultados. Uma visão geral das possíveis topologias para quebra de toro de duas frequências pode ser encontrada em [82][79].

### 6.4.2 Crise cíclica

Mostramos nesta seção um tipo de crise, denominada de *crise cíclica*, a qual foi determinada pela primeira vez no mapa logístico [85]. Na referência [85], foi mostrado que vários atratores sofrem colisões cíclicas com as fronteiras de suas bacias e se juntam para formar um único atrator, cujo comportamento dinâmico exhibe transição cíclica entre seus componentes com um período global bem definido. Imediatamente após a colisão, à medida que o parâmetro de controle é continuamente variado, todos os atratores que tomam parte da crise de colisão se fundem em um único atrator maior.

A crise cíclica encontrada no circuito de Matsumoto-Chua perturbado senoidalmente é mostrado na Figura 6.14. Inicialmente, há um toro periódico de duas frequências a), formado por travamento de frequência. Aumentando-se a frequência de forçamento  $f$ , ocorre uma bifurcação de Hopf formando um atrator com doze ilhas quase periódicas cíclicas no mapa estroboscópico b). Aumentando-se ainda mais a frequência, as doze ilhas se quebram e ocorre a crise c). Com uma frequência maior a crise cíclica se completa, ocorre a colisão das doze ilhas com as fronteiras que separam as bacias, resultando em um único atrator d). Este atrator apresenta baixos valores para os expoentes de Lyapunov (mesmo para o maior expoente de Lyapunov), de tal forma que seu comportamento caótico seria melhor caracterizado geometricamente ou topologicamente.

### 6.4.3 Quebra abrupta do toro

A primeira quebra de toro  $\mathbf{T}^2$  que não segue a rota de Curry-Yorke está diretamente ligada a presença de pontos de sela externo ao toro. O processo da quebra do toro é portanto uma bifurcação que envolve aspectos globais do espaço de fase. Além disso, a presença de um ponto de sela no espaço de fase gera uma fronteira crítica (*dangerous boundary*) no espaço

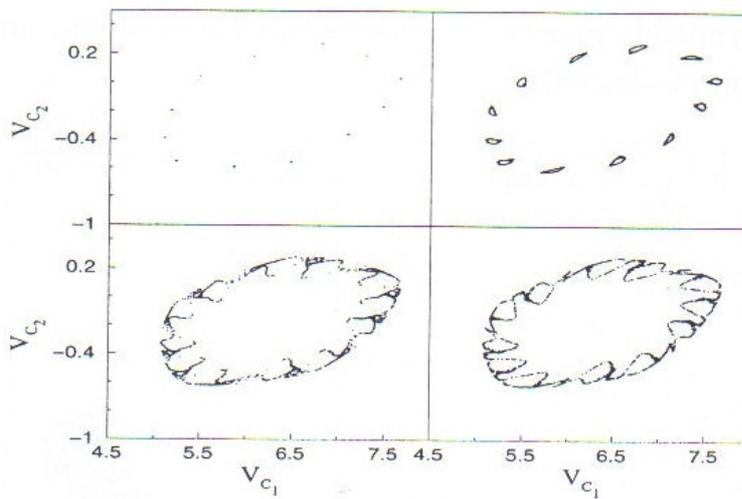


Figura 6.14: Crise Cíclica. Mapa estroboscópico para  $g = 0,5648$  e amplitude de forçamento  $V_g = 0,2329$  fixos, variando-se a frequência, na sequência mostrada na figura. a) Toro sincronizado após bifurcação de Hopf. b) Nova bifurcação de Hopf gerando doze ilhas quase periódicas. c) Expansão das ilhas levando a crise cíclica. d) Atrator caótico formado pela crise.

do parâmetro de controle, de acordo com Shilnikov [27]. A presença de pontos de sela pode gerar fenômenos de *crise* [49], ou de *catástrofe* [25][86].

Na Figura 6.15 mostramos como se desenvolve a quebra abrupta de um toro  $\mathbf{T}^2$ . Inicialmente temos um toro de duas frequências que se desenvolve após uma bifurcação de Hopf normal [24], a). Aumentando a frequência, a trajetória sobre o toro entra num estado de travamento de frequência (*frequency locking*); o movimento torna-se periódico b). Aumentando um pouco mais o valor da frequência externa, podemos perceber que o toro começa a se deformar e aumentar de tamanho e já apresenta evidências da presença de sete pontos de sela, c). E finalmente em d), o toro colide com os pontos de sela (externos ao toro). Podemos notar que o toro já não mais existe, surgindo um atrator estranho caótico. Para mostrar como esta quebra é abrupta e verificar que o atrator formado é caótico, calculamos o espectro dos expoentes de Lyapunov. Na Figura 6.16 mostramos apenas os dois primeiros expoentes, pois o terceiro é sempre negativo. Podemos notar que abaixo da frequência  $f_c$  (seta no gráfico) os expoentes são típicos de movimento periódico (travamento de frequência) ( $\lambda = (0, -, -)$ ). Imediatamente após a frequência  $f_c \approx 0,20192$  o primeiro expoente se torna positivo, caracterizando o surgimento de caos ( $\lambda = (+, -, -)$ ), conforme podemos verificar no gráfico. Esta quebra de toro abrupta (do circuito e Matsumoto-Chua com forçamento senoidal) foi determinada por Baptista e Caldas [17] para uma outra região no espaço de

parâmetros e foi determinada experimentalmente por Letellier (em uma experiência sobre descarga elétrica de um plasma)[87].

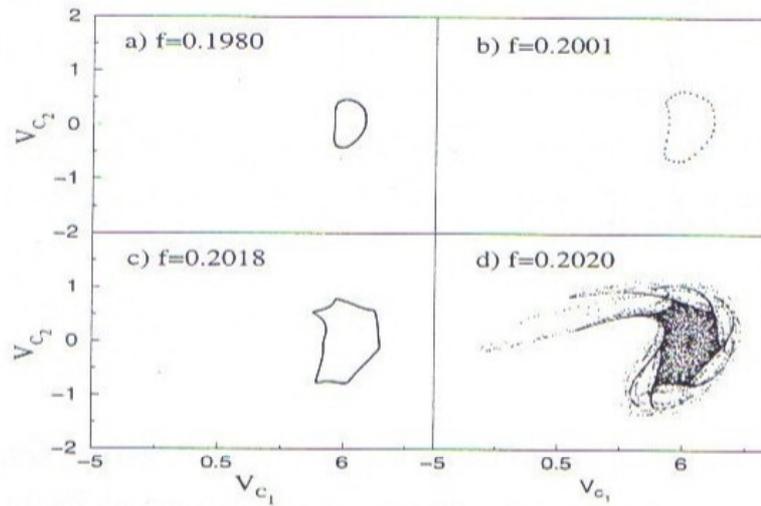


Figura 6.15: Quebra de toro abrupta. Mapa estroboscópico para  $g = 0,5878$ , amplitude do forçamento  $V_g = 0,3000$ . a) Toro de duas freqüências. b) Sincronização de freqüência. c) Deformação do toro pela presença dos pontos de sela. d) Quebra abrupta do toro.

O mecanismo topológico da quebra do toro abrupta como na Figura 6.15 foi mostrado em [17]. Aqui revisamos este mecanismo. Inicialmente, um ponto fixo perde estabilidade e através da bifurcação de Hopf é criado um ciclo limite (ou toro  $\mathbf{T}^2$ ). Simultaneamente surgem quatro pontos de sela que vão coexistir com o ciclo limite. O diagrama esquemático da formação do ciclo limite é visto na Figura 6.17, com quatro pontos de sela. Ao variarmos um dos parâmetros do sistema, o ciclo limite aumenta de tamanho até colidir com os pontos de sela exteriores. Esta colisão destrói o ciclo limite abruptamente. Os pontos de sela externos juntamente com o ponto fixo central, que se tornou um foco instável (bifurcação de Hopf subcrítica), formam uma *conexão heteroclínica* [17], responsável pelo aparecimento de um comportamento intermitente do tipo-II nas séries temporais do sistema [88]. As órbitas expiralam em direção aos pontos de sela de onde são ejetadas, em direção ao foco instável central, gerando os estouros da intermitência. As órbitas, então, são reinjetadas pelo foco instável central e o fenômeno se repete. Na Figura 6.18 esquematizamos a topologia da formação da conexão heteroclínica imediatamente após a quebra abrupta do ciclo limite.

Como comentamos no início desta seção, a presença de pontos de sela criam fronteiras críticas (*dangerous boundary*) no espaço dos parâmetros. Ou seja, a presença de pontos de sela leva à quebra abrupta do toro ou ao fenômeno de catástrofe do céu azul (*Blue Sky*

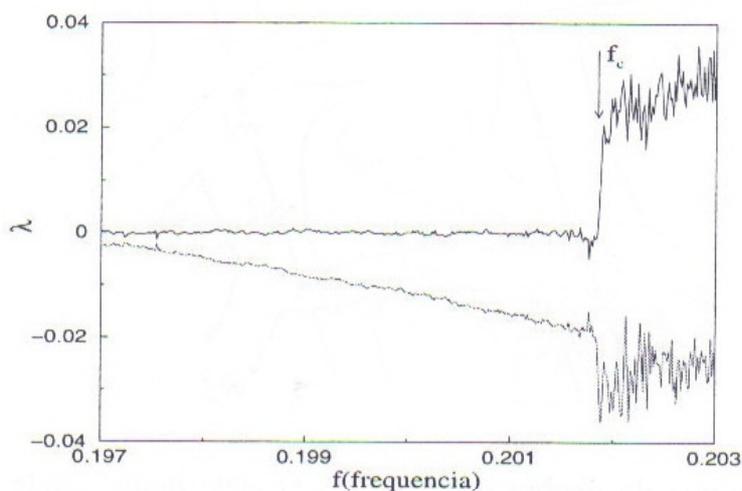


Figura 6.16: Dois primeiros expoentes de Lyapunov na região da quebra abrupta do toro. Parâmetros de controle fixos  $g = 0,5878$  e amplitude do forçamento  $V_g = 0,3000$ . Frequência crítica para quebra do toro  $f_c \approx 0,20192$ .

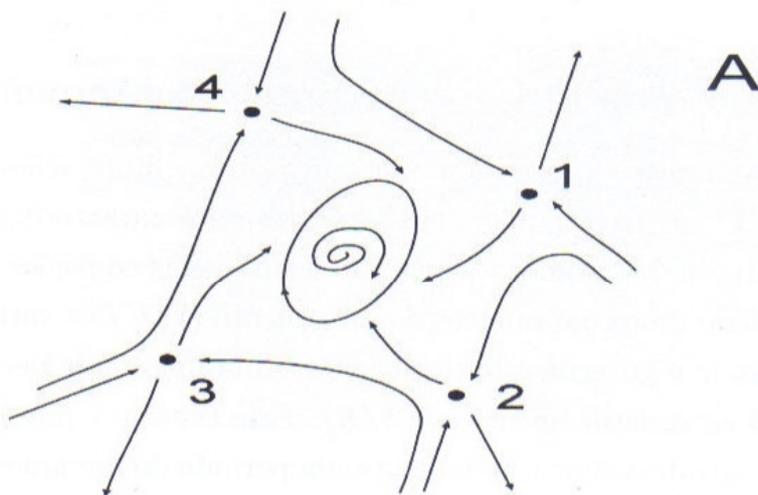


Figura 6.17: A-Diagrama da formação do toro  $\mathbf{T}^2$ . Um ciclo limite e quatro pontos externos de sela são formados após a bifurcação de Hopf.

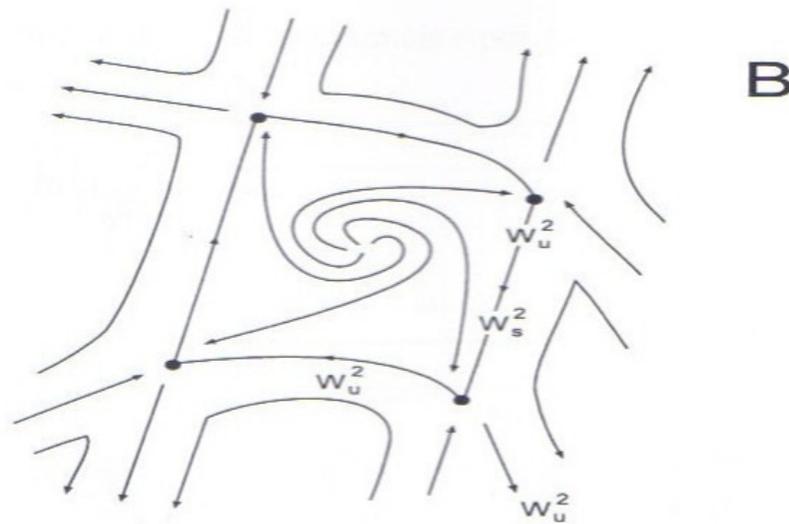


Figura 6.18: **B**-Diagrama da quebra do toro  $\mathbf{T}^2$ . O ciclo limite colide com os pontos de sela externos, gerando uma conexão heteroclínica responsável pela intermitência tipo-II.

*catastrophe*) [86]. De fato, confirmamos esta hipótese. Na Figura 6.19 pode ser vista a quebra abrupta do toro com a presença de apenas um ponto de sela externo. Em a) podemos ver que o toro já está deformado apresentando a evidência do ponto de sela externo onde em seguida se desenvolverá a conexão heteroclínica com o foco instável central. Em b) o toro já não mais existe, substituído pelo atrator caótico. Notamos também a intermitência tipo-II [88]: órbitas expirando ao redor do ponto central e sendo ejetadas pelo ponto de sela exterior.

#### 6.4.4 Dobramento de toro - cenário por dobramento de período

Um toro  $\mathbf{T}^2$  é caracterizado por dois períodos. Uma bifurcação por dobramento de período de um toro  $\mathbf{T}^2$  ocorre quando um destes períodos característicos sofre duplicação de período. No sistema de Matsumoto-Chua, modelado pelas equações 6.1, determinamos o dobramento do toro fixando os parâmetros do forçamento ( $V_g$  e  $f$ ) e variamos o parâmetro  $g$ . Portanto, o parâmetro que governa a bifurcação por dobramento de período (nesta análise) é o parâmetro  $g$  ligado ao resistor linear ( $g = 1/R$ ). Este cenário é mostrado na Figura 6.21. Esta figura é o mapa estroboscópico, tomado a cada período do forçamento externo  $T = 1/f$ . Inicialmente, temos o toro formado após uma bifurcação de Hopf normal [31] (ou supercrítica) a). À medida que variamos o parâmetro  $g$ , há uma sequência de bifurcações por dobramento de período. O primeiro dobramento ocorre em b) e o segundo em c); após este dobramento (período quatro) o atrator caótico é formado como mostrado em d). Na Figura 6.22 temos o espectro de potência das séries temporais para os valores do parâmetro  $g$  da Figura 6.21,

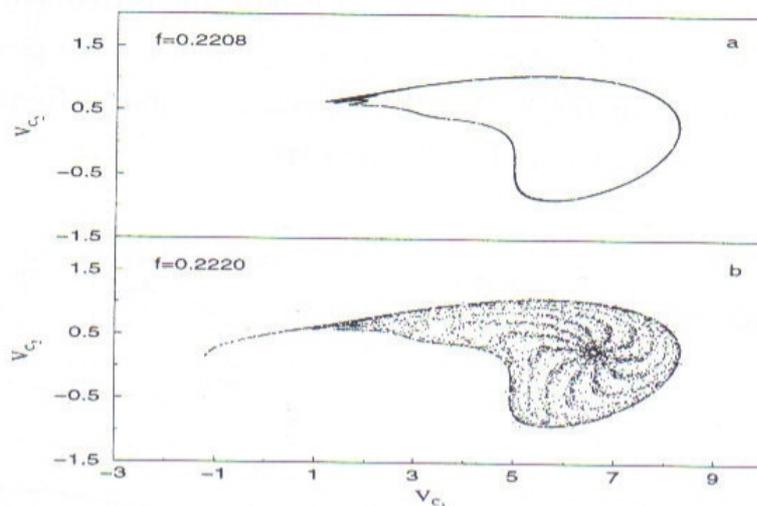


Figura 6.19: Quebra de toro abrupta por influência de apenas um ponto de sela externo. Mapa estroboscópico para  $g = 0,5878$ , amplitude do forçamento  $V_g = 0,2329$ . a) Toro de duas frequências deformado. b) Quebra abrupta do toro.

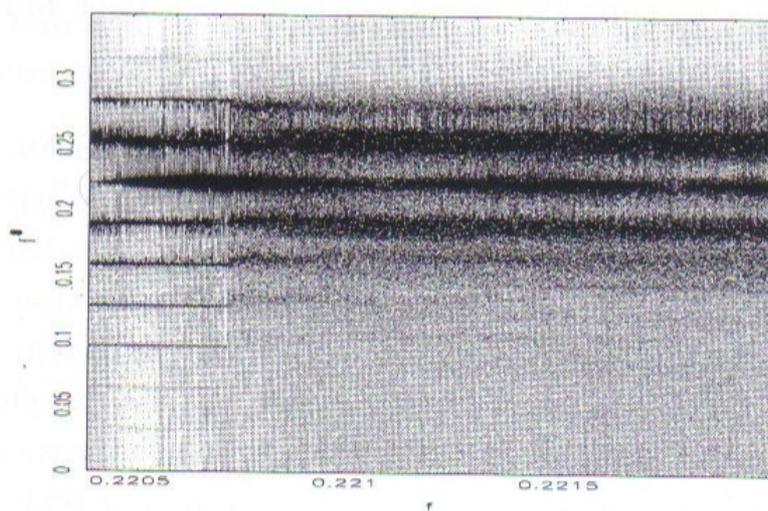


Figura 6.20: Diagrama de bifurcação no espaço das frequências  $f'$ , em função da frequência de forçamento,  $f$ . Região de quebra de toro abrupta por influencia de apenas um ponto de sela externo. Parâmetros fixos  $g = 0.5878$  e amplitude do forçamento  $V_g = 0.2329$ .

exceto o espectro visto na Figura 6.22 d), com  $g = 0,5725$  para melhor evidenciar o espectro de banda larga do atrator caótico formado. As setas indicam as frequências presentes. Em a) temos uma única frequência, em b) já temos a presença de um novo pico com um frequência menor, portanto dobrando o período, em c) destacamos as quatro frequências, geradas pelo segundo dobramento; e o espectro de banda larga em d).

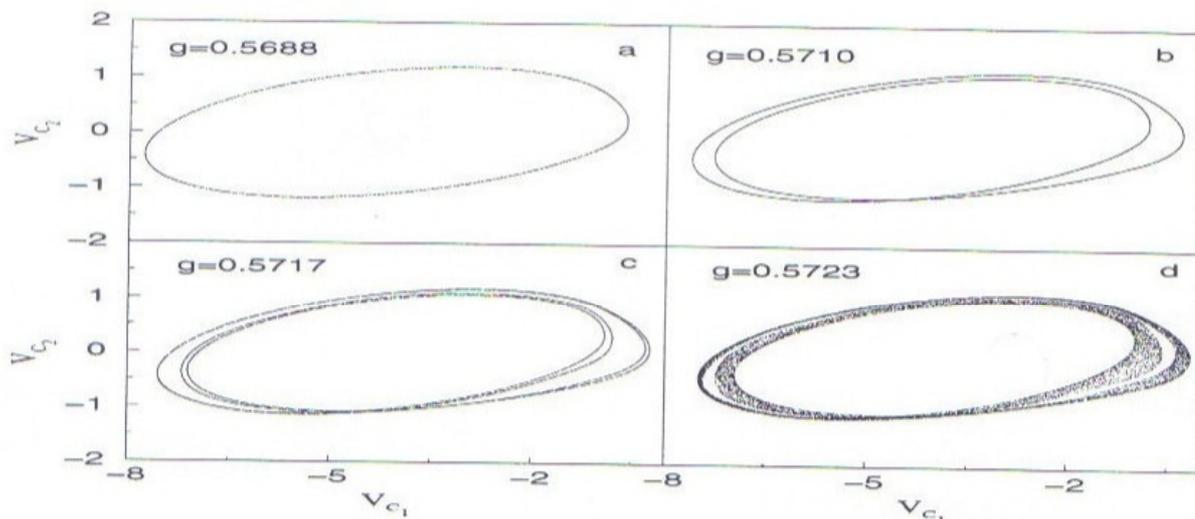


Figura 6.21: Caos através de dobramento de período do toro  $\mathbf{T}^2$ . Mapas estroboscópicos para amplitude de forçamento  $V_g = 0,144$  e frequência  $f = \sqrt{3}$ , variando-se o parâmetro  $g$ , conforme a sequência indicada na figura. a) Toro formado após bifurcação de Hopf. b) Primeiro dobramento. c) Segundo dobramento. d) Atrator caótico via rota de Feigenbaum.

Nesta tese, observamos numericamente, este cenário com dobramento de toro pela primeira vez no circuito de Matsumoto-Chua. Lettelier observou este cenário experimentalmente [89]. Para observarmos este cenário, seguimos o procedimento usado por Arnéodo *et al.* [90] para outro sistema descrito por um mapa não linear. Para evitar o travamento de frequência, ou seja, a ocorrência de órbitas periódicas sobre o toro; o que poderia causar a quebra do toro quase periódico através de outro cenário, escolhemos uma frequência de forçamento que gerasse no mapa estroboscópico um número de rotação mais próximo da média dourada  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Dessa forma garantindo que as frequências que gerassem o toro fossem as mais irracionais possíveis. Mostramos que para a frequência externa  $f = \sqrt{3}$  este cenário pode ser verificado. Um outro aspecto importante está relacionado ao intervalo do parâmetro  $g$ . Este foi também o parâmetro variado na região em que ocorre duplicação de período ou rota de Feigenbaum observado no sistema sem forçamento.

Este cenário é uma quebra suave do toro. Uma questão a ser explorada é a verificação da

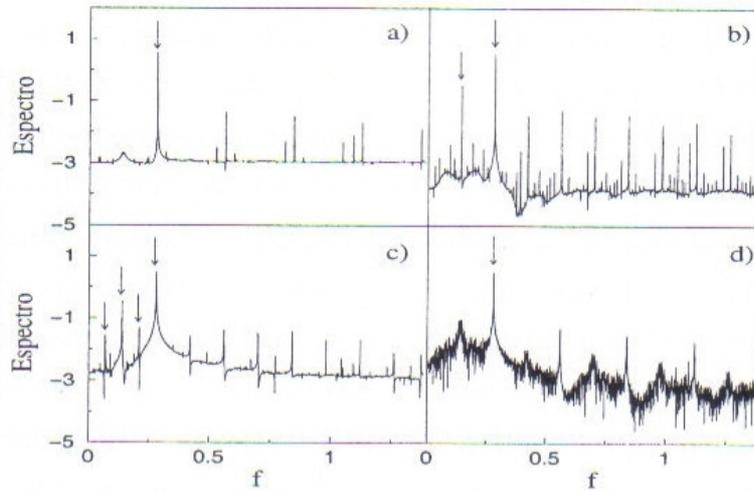


Figura 6.22: Espectro de potência da variável  $V_{C_1}(t)$  na região do dobramento de toro. Parâmetros de controle fixos  $V_g = 0,1440$  e frequência de forçamento  $f = \sqrt{3}$ . a) Toro formado após a bifurcação de Hopf; b) Primeiro dobramento do toro; c) Segundo dobramento; d) Atrator caótico com banda larga.

existência de um atrator estranho não caótico [84][91] na transição crítica para a formação do atrator caótico. A possível existência do atrator estranho merece futuras análises, não exploradas nesta tese. O cálculo numérico, dentro da precisão usada neste trabalho, leva-nos a inferir que após o toro sofrer o segundo dobramento, uma pequena alteração no parâmetro  $g$  é suficiente para gerar o atrator caótico.

### 6.4.5 Sobre os atratores caóticos a partir da quase periodicidade

Vimos neste capítulo, quatro tipos de atratores caóticos que são gerados a partir de movimento quase periódico; cenário de Curry-Yorke. Três desses atratores são ilustrados na Figura 6.24. Em a), temos o atrator caótico gerado por dobramento de período a partir da órbita periódica gerada por travamento de frequência (língua de Arnold). Em b), o atrator caótico que surge por quebra abrupta do toro. Em c) o atrator formado por dobramento de período do toro. Calculamos os expoentes de Lyapunov para esses atratores caóticos obtendo,

- Atrator caótico por rota de Curry-Yorke: Figura 6.24a)

$$\lambda_1 = 0,050, \quad \lambda_2 = -0,090 \text{ e } \lambda_3 = -1,080$$

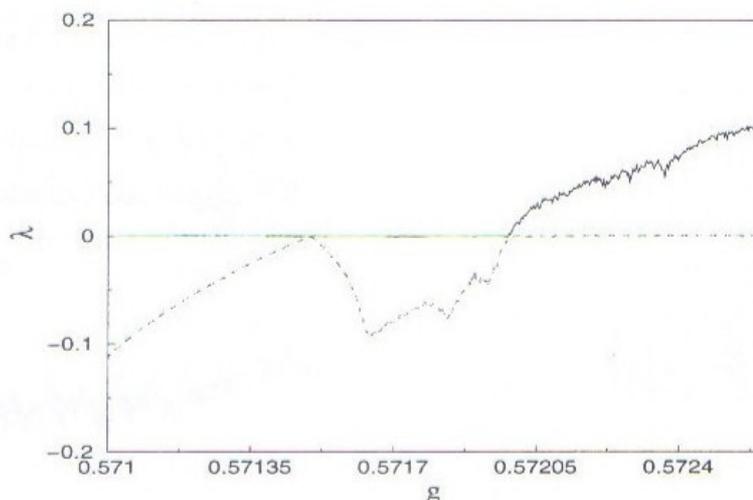


Figura 6.23: Dois primeiros expoentes de Lyapunov na região de dobramento de toro, para  $V_g = 0,144$ ,  $f = \sqrt{3}$ .

- Atrator caótico por quebra abrupta: Figura 6.24b)

$$\lambda_1 = 0,013, \quad \lambda_2 = -0,020 \text{ e } \lambda_3 = -1,150$$

- Atrator caótico por dobramento: Figura 6.24c)

$$\lambda_1 = 0,110, \quad \lambda_2 = 0,000 \text{ e } \lambda_3 = -0,990.$$

Constatamos que o atrator caótico gerado através da rota de Curry-Yorke e o atrator gerado por quebra abrupta possuem o mesmo espectro dos expoentes de Lyapunov,  $\lambda = (+, -, -)$ . O atrator caótico gerado por dobramento do toro, por sua vez, apresenta um espectro diferente,  $\lambda = (+, 0, -)$ . Dessa forma, há uma diferença topológica nesses atratores caóticos. Nos atratores cujo espectro possui um valor nulo observa-se que a trajetória, embora caótica, está limitada a uma região no espaço de fase, onde o toro quase periódico existia, antes de sua disruptura. Para atratores com o outro tipo de espectro, a trajetória não está mais limitada nas redondezas de uma superfície toroidal.

Um quadro geral, pode então ser traçado para estas quebras de toro observadas neste trabalho. Todas as rotas (para mudanças de um parâmetro) iniciam-se a partir de uma bifurcação de Hopf normal onde um ciclo limite é criado. Variando-se o parâmetro de controle, este ciclo sofre uma segunda bifurcação de Hopf normal [31] gerando um toro  $\mathbf{T}^2$ . No caso da rota de Curry-Yorke e da rota pela quebra abrupta, o processo de estiramento e dobramento

é evidenciado pelo sinal do primeiro expoente e segundo expoente de Lyapunov do espectro, respectivamente. (Compare este caso, por exemplo, a um mapa bidimensional dissipativo [92], para parâmetros que produzem uma trajetória caótica com apenas um expoente positivo. Neste caso, o outro será sempre negativo). Para o caso do atrator caótico gerado por duplicação de período, o atrator quase periódico (toro  $\mathbf{T}^2$ ) perde estabilidade através de uma sequência infinita de bifurcações de duplicação de período [90] (*flip* [32]), até atingir o parâmetro crítico [93] para o qual o atrator não é caótico mas é estranho [84][94], caracterizado por um espectro ( $\lambda = (0, 0, -)$ ). Para uma mudança infinitesimal no parâmetro, este atrator crítico se torna caótico caracterizado pelo espectro  $(+, 0, -)$ , ou seja, uma direção perde a estabilidade se tornando expansiva, e a outra preserva a característica invariante (nem expansiva nem contrativa) caracterizada por um expoente nulo.

Notamos que para mudanças em um parâmetro, a transição quase periódica para o caos não se dá diretamente. No caso da rota de Curry-Yorke e da rota de quebra abrupta, antes de atingir o caos, o atrator sincroniza em um toro periódico. No caso da rota via duplicação de período, o atrator quase periódico se transformaria no atrator estranho mas não caótico, antes do surgimento do atrator caótico [93][84][94]. Contudo, neste trabalho não observamos esse atrator estranho não caótico.

Especulamos que a transição direta de comportamento quase periódico para caos somente pode ser observada quando  $k + 1$  parâmetros podem ser variados simultaneamente, onde  $k$  representa o número de expoentes de Lyapunov positivos. Portanto, neste sistema não parece existir a transição direta de comportamento quase periódico para caótico, através da mudança de apenas um parâmetro. Estas observações sugerem que a transição deve ser observada para alterações simultâneas de dois parâmetros.

### 6.4.6 Conclusões do capítulo

Delimitamos no espaço dos parâmetros as regiões onde o sistema entra em sincronização com a força externa, com o surgimento das línguas de Arnold, como previsto e observado em [78]. Muitas das fronteiras entre essas zonas delimitam rotas para o caos por quebra de toro de duas frequências. Mostramos quatro destes cenários, sendo que dois seguem a rota de Curry-Yorke para caos. No primeiro cenário que segue a rota de Curry-Yorke mostramos como o caos se desenvolve a partir do interior da língua de Arnold. A partir de um movimento periódico formado por travamento de frequência o toro sofre contínuos dobramentos e estiramentos no espaço de fase. Em outro cenário desta rota, identificamos a transição para caos através de crise cíclica. Um terceiro cenário, o toro quase periódico formado cresce em

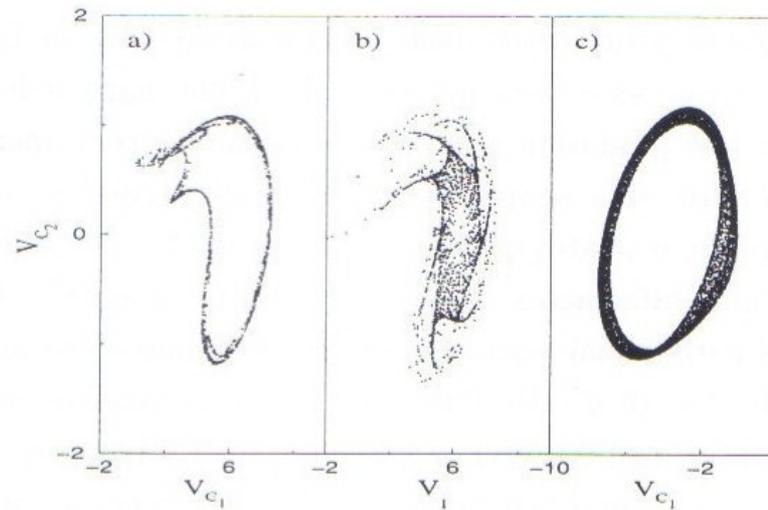


Figura 6.24: Atratores caóticos a partir de quase periodicidade. a) Caos por rota de Curry-Yorke. b) Quebra abrupta do toro. c) Dobramento do toro.

tamanho tocando um ponto sela externo, formando uma conexão heteroclínica. Conexão esta responsável pela intermitência tipo-II. Este cenário é uma quebra abrupta do toro. E por último, verificamos que o caos surge através da bifurcação do toro por dobramento de período. As rotas por crise cíclica e dobramento do toro são pela primeira vez vistas no circuito de Matsumoto-Chua, assim como o tipo de rota para o caos que ocorre a partir do interior das línguas de Arnold formadas por este sistema.

# Capítulo 7

## Métodos de controle

Neste capítulo, abordamos cinco métodos de controle de caos aplicados ao circuito de Matsumoto-Chua. Inicialmente, usando a propriedade de sincronização de frequências, realizamos a supressão de caos através de um forçamento externo do tipo senoidal. Estabilizamos as órbitas do circuito nos seus pontos de equilíbrio através do método de Hwang *et al.*. Aplicamos o método de controle de Ott, Grebogi e Yorke (OGY) para controlar uma das órbitas periódicas instáveis presentes no atrator caótico do tipo Rössler. Estabilizamos a órbita instável pré-gravada com o método de realimentação. Finalmente, mostramos a capacidade de migração e arraste (*entrainment*) do método proposto por Jackson e Hübbler, conhecido como OPCL (*Open Plus Closed Loop*). Mostramos que o método OPCL é eficaz para sistemas de controle e de comunicação que necessitem de migração entre diferentes órbitas no espaço de fase.

### 7.1 Fundamentos teóricos do controle do caos, conceitos e aplicações

Caos determinístico compreende sistemas cuja evolução depende sensivelmente das condições iniciais. Esta característica implica, como já vimos, que duas trajetórias com condições iniciais arbitrariamente muito próximas divergem exponencialmente com o tempo. Devido a esta dependência crítica às condições iniciais e devido ao fato que, em geral, as condições iniciais em um experimento nunca são conhecidas com precisão infinita, os sistemas caóticos são intrinsicamente imprevisíveis. Por muitos anos esta característica tornou o caos indesejável e experimentalmente tentava-se de todas as formas eliminar este comportamento. Com o mel-

hor entendimento dos sistemas caóticos e dos métodos de controle desenvolvidos nos últimos anos, uma grande quantidade de aplicações surgiu usando caos. De fato, dependendo da aplicação, caos pode ser suprimido ou mantido de forma adequada [13] [3]. O objetivo de implementação de métodos de controle pode ser resumido assim: dado um sistema físico que apresente caos determinístico a ser controlado e a especificação de um comportamento desejado, construir leis de forma que force o sistema a ter este comportamento utilizando uma quantidade mínima de energia e tempo.

Devido à característica da imprevisibilidade, para um sistema caótico, podemos produzir um número infinito de comportamentos dinâmicos (periódicos ou não) usando o mesmo sistema, com a ajuda de pequenas perturbações escolhidas apropriadamente. Esta é uma diferença essencial em relação a sistemas dinâmicos que não apresentam caos, onde as perturbações que são feitas para se produzir um determinado comportamento, em geral, são da mesma ordem da variável dinâmica do sistema não perturbado [3].

A sensibilidade crítica às condições iniciais dos sistemas caóticos pode ser explorada não somente para produzir um grande número de possíveis comportamentos periódicos, explorando a característica de que todo atrator caótico possui um número infinito de órbitas periódicas instáveis imersas em seu interior (*embedded*) [4][95]. Além de comportamentos periódicos, outros podem ser desejáveis e são compatíveis com a evolução natural do sistema. Por isso, podemos implementar uma perturbação adequada de forma a escravizar o sistema caótico de forma a apresentar um outro comportamento caótico.

Os métodos de controle de caos podem ser agrupados em duas categorias principais: no primeiro grupo, enquadram-se métodos em que a trajetória atual do sistema é constantemente monitorada no espaço de fase e algum processo de realimentação é empregado, de forma a manter a trajetória no comportamento desejado. O segundo grupo é composto de métodos que não utilizam realimentação. Esses métodos utilizam alguma outra propriedade ou conhecimento geral do sistema de forma a explorar os diferentes comportamentos do sistema. Os métodos que utilizam realimentação não modificam os sistemas controlados e estabilizam órbitas periódicas instáveis presentes no atrator caótico, enquanto os métodos sem realimentação mudam a configuração original do sistema controlado, introduzindo uma perturbação externa ao sistema.

Um dos métodos de realimentação que utilizamos neste trabalho é o método OGY [18], sendo este método bastante geral, explorando as particularidades de sistemas dinâmicos caóticos e, portanto, este método se aplica a qualquer sistema dinâmico que apresente caos. O método se baseia no fato de todo atrator caótico possuir um conjunto denso de órbitas

periódicas instáveis em seu interior (até mesmo pontos de equilíbrio). Sendo um método de realimentação, este requer o monitoramento constante da trajetória. Além disso, o sistema de controle que gera a realimentação deve ser flexível e de resposta rápida; em alguns sistemas experimentais a implementação deste método pode exigir a construção de um aparato experimental especial.

Os métodos que não empregam realimentação são inevitavelmente menos flexíveis e requerem o conhecimento das soluções das equações do movimento. Essas soluções dependem dos parâmetros, usar variações levam a um grande número de diferentes movimentos. A determinação dessas soluções será feita neste trabalho através do diagrama no espaço de parâmetros, como mostraremos posteriormente, quando fizermos supressão do caos através de um forçamento externo periódico. Por outro lado, para aplicação dos métodos que empregam realimentação, não é necessário o monitoramento permanente da trajetória. O procedimento de controle pode ser aplicado a qualquer momento.

Entre as inúmeras aplicações de controle de caos [3][13] concentraremos-nos em duas aplicações, as quais tem chamado a atenção da comunidade científica nos últimos anos: o controle do comportamento caótico para comunicação com caos (apresentada neste capítulo) e sincronização de sistemas caóticos para vários esquemas de comunicação (estudada no Capítulo 8).

Atualmente, tem sido feito um grande esforço com o objetivo de se desenvolver métodos que possibilitem usar as propriedades da dinâmica caótica de forma a tornar possíveis as aplicações práticas previstas com o uso de caos. Na literatura podemos encontrar um grande número de trabalhos contendo métodos que possibilitam usar caos de forma eficiente para aprimorar os métodos de comunicação usando a sincronização de órbitas caóticas [22][96], ou mesmo, alterar totalmente a dinâmica do sistema [21][23][97]. Outros trabalhos têm demonstrado com sucesso a realização de controle de caos em: um plasma de descarga elétrica [98]; na ordenação dos spins de uma esfera metálica em um campo magnético externo [99]; no ritmo cardíaco [100][101]; na epilepsia [102]; em lasers [103][104]; na reação química de difusão no sistema de Belousov-Zhabotinski [105].

Neste trabalho vamos aplicar cinco métodos de controle de caos no sistema de Matsumoto-Chua, através dos quais, o comportamento caótico do sistema pode ser modificado para um comportamento específico determinado por nós, assim como, suprimido.

## 7.2 Supressão do caos através de forçamento periódico

Inúmeros trabalhos têm demonstrado que é possível suprimir o comportamento caótico usando um sinal periódico externo ao sistema [106][107][108]. Dado uma perturbação externa, é possível mostrar que o sistema caótico encontra uma órbita periódica apropriada modificando seu comportamento [109].

Uma explicação possível para este mecanismo é baseado no fato da existência das órbitas periódicas instáveis que estão imersas (*embedded*) no atrator caótico [95][4]. Estas órbitas podem ser estabilizadas pela aplicação da força externa, pois foi mostrado que próximo aos pontos de bifurcação de um sistema dinâmico (por exemplo, bifurcação por dobramento de período) a aplicação da força externa periódica em alguma frequência ressonante pode causar a amplificação do sinal periódico e deslocar o ponto de bifurcação de forma a estabilizar o estado periódico [106].

Uma perturbação periódica pode ser introduzida como uma força externa ao sistema [106], ou como uma perturbação de um dos parâmetros internos do sistema [110]. Vamos considerar neste trabalho a aplicação de uma força externa do tipo senoidal aplicada ao sistema de Matsumoto-Chua, como mostrado na Figura 7.1. As Equações que descrevem a dinâmica do sistema perturbado são:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_{NR}(V_{C_1}), \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L, \\ L \frac{di_L}{dt} &= -V_{C_2} - V_g(\text{sen}(2\pi ft)) \end{aligned} \quad (7.1)$$

onde  $V_g$  é a amplitude da perturbação periódica e  $f$  é a frequência.

Para suprimirmos caos no sistema 7.1 devemos escolher uma frequência  $f$  para o forçamento externo, sub-harmônica ou harmônica de  $f'_c$  (frequência característica do sistema perturbado) e uma amplitude  $V_g$  apropriadas.

Para regimes de frequências baixas ( $f < 0,15$ ), temos que  $f'_c \approx f_c$ , onde  $f_c$  é a frequência característica do sistema sem perturbação. De forma que uma boa tentativa para supressão do caos é aplicar uma perturbação com uma frequência  $f$  próxima a um múltiplo ou sub-múltiplo de  $f_c$  (frequência característica sem perturbação).

Escolhemos uma perturbação senoidal com frequência  $f \approx f_c/3 = 0,1$ . São mostrados na Figura 7.2 uma sequência de quatro espectros de Fourier, para diferentes valores de  $V_g$ .

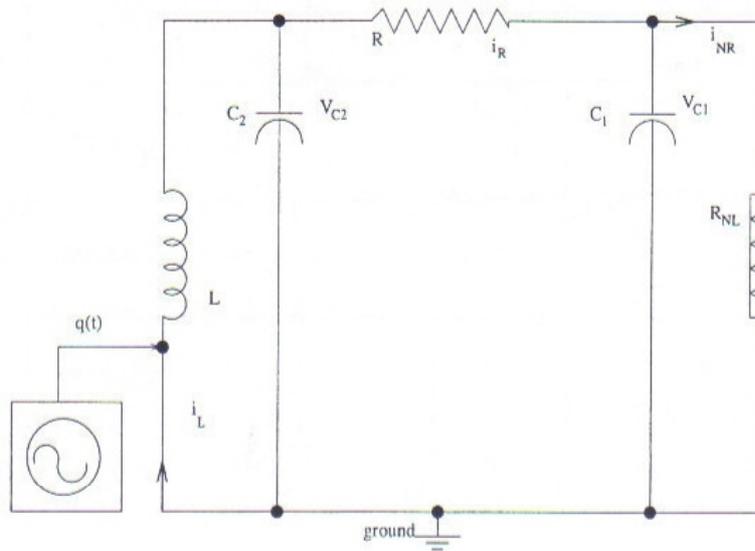


Figura 7.1: Circuito de Matsumoto-Chua perturbado pelo forçamento periódico  $q(t)$ .

Determinamos através do espectro de Fourier a frequência característica do sistema sem perturbação,  $f_c = 0,29$ , para  $V_g = 0$ . Introduzindo a perturbação com  $V_g = 0,280$ , vemos o aparecimento de um novo pico no espectro, correspondente à frequência externa  $f = 0,1$  e um pico correspondente à frequência característica do sistema perturbado  $f'_c$  (que não é tão próxima de  $f_c$ ). Aumentando a amplitude para  $V_g$  para  $V_g = 0,290$ , modificamos  $f'_c$  e  $f$  torna-se quase um sub-harmônico de  $f'_c$ . Temos finalmente, a supressão de caos para  $V_g = 0,295$ , com a sincronização das oscilações com  $f$  e  $f'_c$  ( $f$  é um sub-harmônico de  $f'_c$ ), com espectro típico de movimento periódico.

Na sequência da Figura 7.3, mostramos quatro comportamentos do atrator para os valores de  $V_g$  da Figura 7.2. Inicialmente temos o atrator caótico  $V_g = 0$ , cujo espectro é modificado com a aplicação da perturbação,  $V_g = 0,280$ . Para  $V_g = 0,290$  temos um movimento quase periódico (um toro com raio muito pequeno) e finalmente, para  $V_g = 0,295$ , o estado periódico gerado pela sincronização para as frequências  $f'_c$  e  $f$ .

### 7.2.1 Línguas de Arnold - regiões de sincronização

Para supressão de caos em frequências mais altas no circuito de Matsumoto-Chua ( $f > 1,5$ ) devemos determinar valores de  $f$  e  $V_g$  para os quais ocorra sincronização. No entanto, a determinação de  $f$  e  $V_g$  para que  $f$  seja um subharmônico ou harmônico de  $f'_c$  não é mais

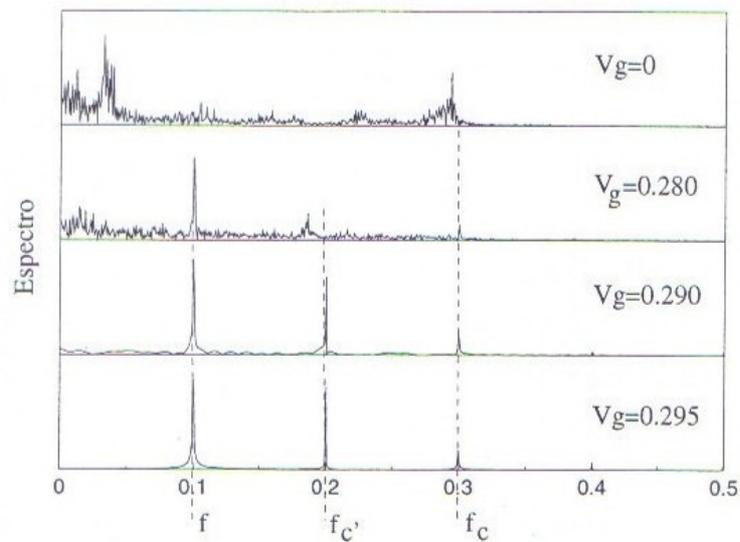


Figura 7.2: Espectros de Fourier para  $g = 0,5878$ ,  $f = 0,1$ , para os valores de  $V_g$ , indicados na figura. A supressão de caos ocorre pela sincronização das oscilações com frequências  $f$  (da perturbação externa) e  $f_{c'}$  (característica do circuito forçado).  $f_c$  é frequência característica do sistema sem perturbação.

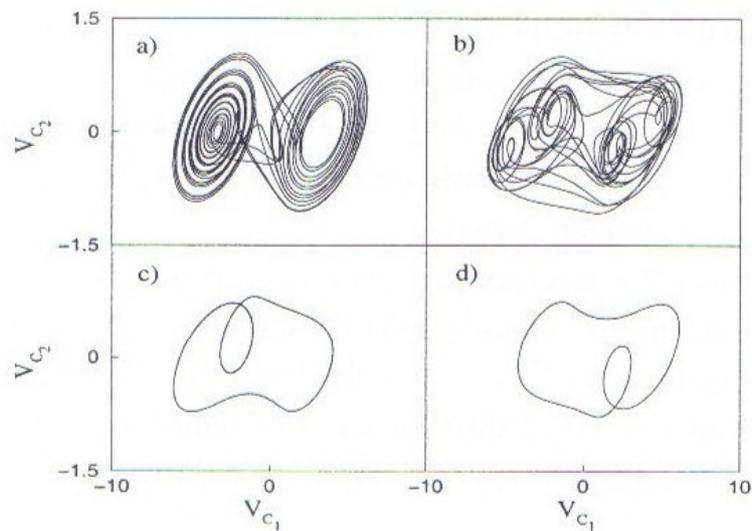


Figura 7.3: Supressão de caos: seqüência de atratores fixando  $g = 0,5878$  e  $f_c = 0,1$ . a) atrator caótico,  $V_g = 0$ ; b) caos fraco,  $V_g = 0,280$ ; c) quase periodicidade,  $V_g = 0,290$ ; d) sincronização,  $V_g = 0,295$ .

tão simples como no caso de frequências baixas, uma vez que  $f'_c$  depende de  $f$  e  $V_g$ .

Para determinar os parâmetros em que ocorre travamento de frequência, caracterizamos os atratores, no espaço dos parâmetros  $V_g$  e  $f$ , através do maior expoente de Lyapunov. Mostramos o diagrama no espaço de parâmetros na Figura 7.4. Neste diagrama, fixamos o valor do parâmetro  $g = 0,5878$  e variamos  $f$  e  $V_g$  numa grade de  $400 \times 400$  pontos. Para cada par de valores, determinamos o comportamento assintótico do sistema através do valor do maior expoente de Lyapunov. Quanto mais escura a cor, menor o valor do expoente, de acordo com a convenção de cores mostrada na barra ao lado do gráfico. Para o conjuntos de valores de  $f$  e  $V_g$  em que o maior expoente de Lyapunov é negativo (região mais escura:  $\lambda < 0$ ), temos movimento periódico do sistema de Matsumoto-Chua. Essas regiões periódicas inseridas nas regiões de quase periodicidade (regiões em cinza:  $\lambda = 0$ ) são as línguas de Arnold [78][31]. As regiões de quase periodicidade estão inseridas em regiões onde se desenvolve o comportamento caótico do sistema para as quais temos  $\lambda > 0$ . Dessa forma, entre duas línguas pode sempre aparecer movimento caótico, esta é uma das rotas para o caos no cenário de Curry-Yorke [80], pelo qual caos pode aparecer e desaparecer.

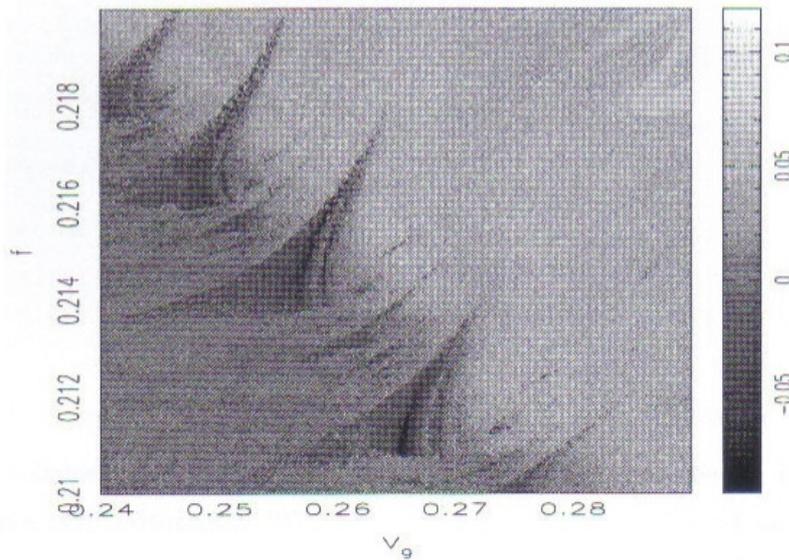


Figura 7.4: Línguas de Arnold. Representação do maior expoente de Lyapunov em função do parâmetros  $f$  e  $V_g$  da perturbação. As regiões em cinza escuro correspondem às línguas de Arnold, dentro das quais as linhas negras correspondem às órbitas periódicas superestáveis ( $\lambda_1 < 0$ ).

Juntamente com o diagrama no espaço dos parâmetros, o diagrama no espaço das frequências nos fornece uma visão geral do comportamento do sistema para uma variação de um determinado parâmetro escolhido [51]. Com referência à Figura 7.4, das línguas de Arnold,

fizemos o diagrama no espaço das freqüências (Figura 7.5) para um valor fixo de  $V_g = 0,27$ , variando a freqüência  $f$  da perturbação. Através deste diagrama, podemos delimitar três comportamentos do sistema bem definidos. Para freqüências externas abaixo de  $f \approx 0,2115$  temos movimento quase periódico, surge então uma faixa onde ocorre movimento periódico (as órbitas superestáveis no interior da línguas de Arnold). Para freqüências começando um pouco abaixo de  $f = 0,214$  em diante, temos movimento caótico para o sistema. Dessa forma, podemos eliminar o comportamento caótico do sistema usando freqüências no intervalo que vai de  $f \approx 0,2115$  a  $f \approx 0,2135$ . Escolhemos a freqüência  $f = 0,213$  para a força externa de tal forma a gerar o movimento periódico desejado. Mostramos na Figura 7.6 a sequência dos três comportamentos do sistema para freqüências correspondentes ao regime caótico  $f = 0,214$  (Figura 7.6 a)), quase periódico  $f = 0,210$  (Figura 7.6 b)) e periódico  $f = 0,213$  (Figura 7.6 c)).

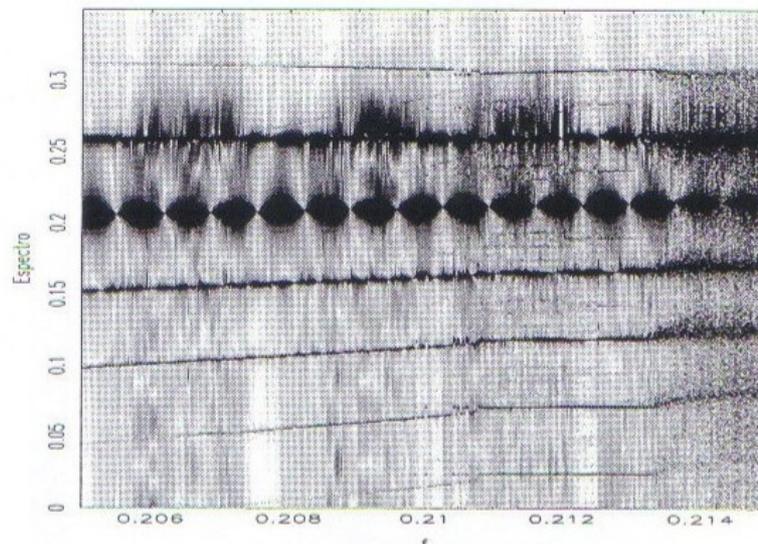


Figura 7.5: Diagrama no espaço das freqüências das oscilações para região das línguas de Arnold mostrado na Figura 7.4. Fixados:  $g = 0,5878$ ,  $V_g = 0,270$ , variando a freqüência  $f$  da perturbação.

Ainda com referência a Figura 7.4, podemos fixar a freqüência  $f$  da força externa e variar a amplitude do forçamento de forma a determinar órbitas superestáveis no interior das línguas de Arnold. Fixamos a freqüência do forçamento em  $f = 0,215$  e variamos  $V_g$  obtendo o diagrama de bifurcação no espaço das freqüências mostrado na Figura 7.7. Podemos ver pelo gráfico, diferentes tipos de comportamento do sistema a medida que variamos  $V_g$ . Há regiões correspondentes a movimentos quase periódicos, periódicos e uma grande faixa com banda larga em freqüência, indicando comportamento caótico. Notamos ainda, estreitas faixas

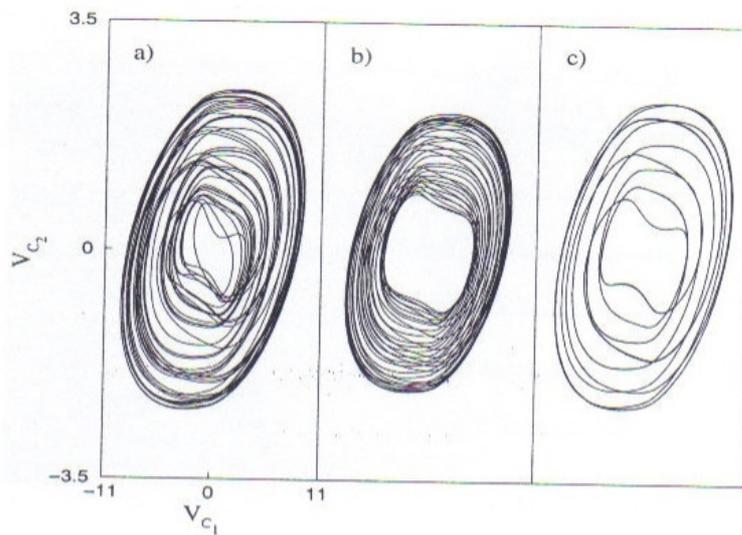


Figura 7.6: Supressão de caos com forçamento externo. a) atrator caótico  $f = 0,214$ ; b) atrator quase periódico  $f = 0,210$ ; c) órbita periódica superestável do interior da língua de Arnold  $f = 0,213$ .  $g = 0,5878$  e  $V_g = 0,270$ .

que aparecem na banda caótica, indicando regiões onde ocorre sincronização de frequências, gerando movimentos periódicos.

### 7.3 Método de Hwang

Este método é usado para se atingir um dos pontos de equilíbrio de um fluxo ou estabilizá-lo por um ciclo limite. Vamos exemplificar o método, usando o sistema de Matsumoto-Chua no regime de Espiral-Dupla. Usamos o método para estabilizar o sistema no ponto de equilíbrio para  $g = 0,6$  localizado em  $P^+ = (P_x^+ = 3, P_y^+ = 0,0, P_z^+ = -1,8)$ . Seguindo o método implementado por Hwang [19], introduzimos um elemento de controle  $U$  em série com o indutor do circuito. Dessa forma, temos que o circuito de Matsumoto-Chua com a perturbação  $U$  é:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_{NR}(V_{C_1}), \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L, \\ L \frac{di_L}{dt} &= -V_{C_2} + U. \end{aligned} \quad (7.2)$$

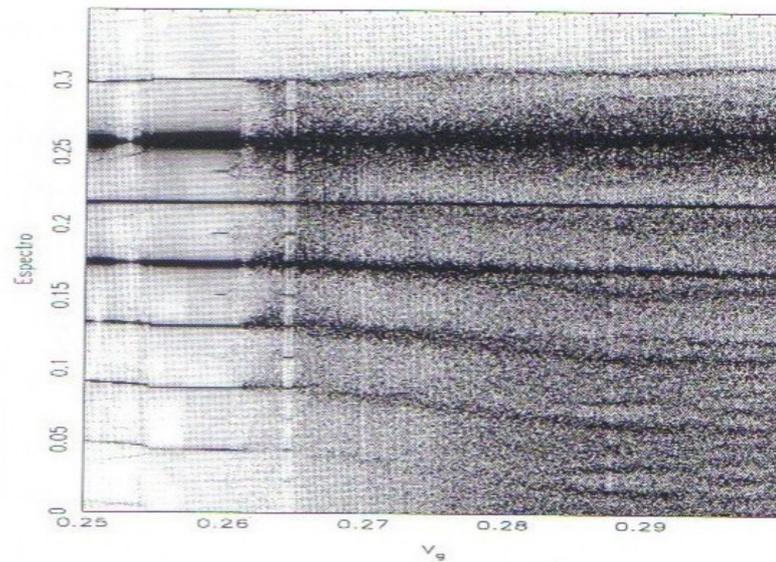


Figura 7.7: Diagrama no espaço das freqüências para região das Linguas de Arnold mostrado na Figura 7.4, variando-se a amplitude de forçamento  $V_g$ .

O elemento de controle  $U$  é composto de duas realimentações. A primeira realimentação tem por objetivo reproduzir a dinâmica da segunda equação do sistema 7.2. Consequentemente os pontos de equilíbrio do sistema de Matsumoto-Chua serão deslocados para uma variedade ou plano de equilíbrio  $(X, X + f(X), f(X))$ . Queremos direcionar a trajetória do circuito de tal forma que esta se dirija para um dos pontos de equilíbrio do sistema e permaneça nesse ponto. Para isso adicionamos a segunda realimentação, composta de uma realimentação proporcional a  $K_p(X_{ref} - X)$ . Para direcionar a trajetória para o ponto  $P^+$ , usamos a variável  $V_{C_1}$ , de forma que  $X_{ref} = 3, 0$ . Se ao invés da variável  $V_{C_1}$  usássemos  $V_{C_2}$ , mudaríamos a segunda realimentação negativa para  $U_2 = K_p(Y_{ref} - Y)$ . O diagrama em bloco do sistema de controle é mostrado na Figura 7.8. A principal vantagem deste método de controle é o valor do intervalo de tempo curto do transiente, após a aplicação do controle, para estabilizar a órbita no ponto de equilíbrio escolhido. Se o sinal de entrada é a variável  $V_{C_1}$ , então o controle  $U$  é dado por:

$$U = U_1 + U_2 = K\left(\frac{1}{C_2}(g(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L)\right) + \frac{1}{L}V_{C_2} + K_p(3, 0 - V_{C_1}). \quad (7.3)$$

Para este sinal de entrada  $V_{C_1}$ , a Jacobiana e sua equação característica com relação ao ponto de equilíbrio  $P^+ = \{3, 0, -1, 8\}$  são, respectivamente,

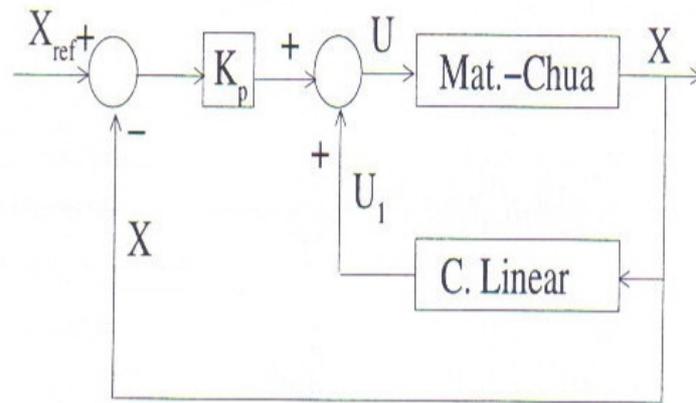


Figura 7.8: Diagrama esquemático do controle de Hwang *et al.*.

$$J = \begin{pmatrix} -10(g + F) & 10g & 0 \\ g & -g & 1 \\ Kg - K_p & -Kg & K \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

Em  $P^+$  temos que  $F = m_0 = -0,5$ , e

$$|\lambda I - J| = 0 \quad (7.5)$$

$$\lambda^3 + [g - K + 10(g + F)]\lambda^2 + 10(gF - gK - FK)\lambda + 20Kg^2 - 10gK_p = 0$$

Com a equação característica 7.5, podemos justificar a estabilidade do plano de equilíbrio aplicando o critério de Routh-Hurwitz. De fato, dada uma equação característica do tipo:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (7.6)$$

as condições necessárias e suficientes para que todos os autovalores sejam negativos são

$$a_1 > 0; \quad a_1a_2 - a_3 > 0; \quad a_3 > 0. \quad (7.7)$$

Dessa forma, para as constantes do controle de realimentação  $K = -3,0$  e  $K_p = 2,0$ , temos que os autovalores são negativos e, portanto, o controle é estável. Mostramos na Figura 7.9 a evolução temporal das três variáveis do circuito, antes e depois da aplicação do controle. Vemos através dessa figura que as variáveis  $V_{C_1}, V_{C_2}, i_L$  tendem ao ponto de equilíbrio  $P^+ = \{3, 0, -1, 8\}$ , respectivamente.

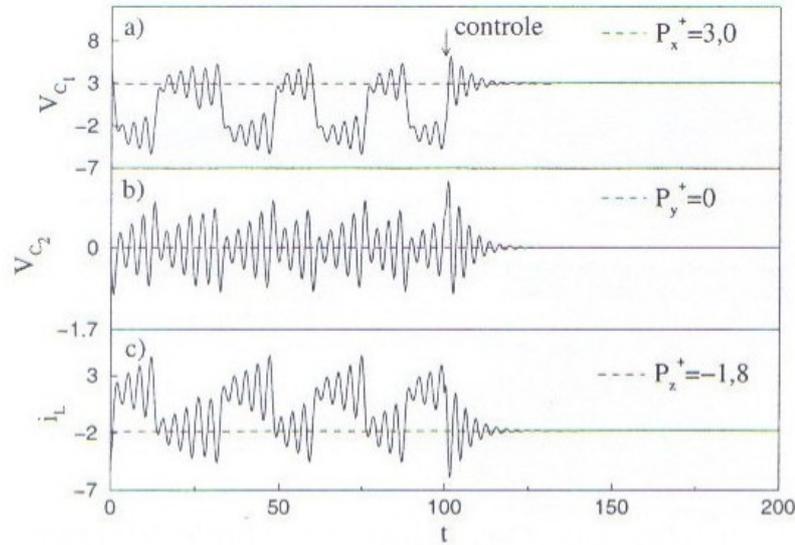


Figura 7.9: Controle de Hwang. Evolução temporal das três coordenadas do sistema 7.2 no regime de Espiral-Dupla ( $g = 0,6$ ), antes e após aplicação do controle. Supressão de caos, estabilizando a órbita no ponto de equilíbrio  $P^+ = \{3,0, 0,0, 1,8\}$ .

## 7.4 Método de Ott-Grebogi-Yorke (OGY)

Nesta seção descrevemos e aplicaremos o método proposto por Ott, Grebogi e Yorke (OGY) [18] no circuito de Matsumoto-Chua operando no regime caótico do tipo Rössler.

O método OGY utiliza a propriedade do atrator caótico conter imersas (*embedded*) em seu interior uma infinidade de órbitas periódicas instáveis [111][95][4]. Como o atrator caótico é ergódico, a trajetória caótica visita ou acessa a vizinhança de cada uma das órbitas periódicas instáveis presente no atrator. O objetivo do método é estabilizar uma dessas órbitas instáveis escolhida à priori. Esta órbita periódica, instável no sistema original sem controle, é estável no sistema controlado. Para implementar o controle introduzimos um mapa bi-dimensional da forma:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_n, p), \quad \mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^2, \quad (7.8)$$

onde  $p$  é o parâmetro do sistema escolhido para o controle. Este mapa é um mapa de Poincaré construído pelo cruzamento da trajetória através de uma seção transversal ( $\Sigma$ ) ao fluxo gerado pelo sistema caótico usado. Para aplicação do método ao circuito de Matsumoto-Chua, acrescentamos um novo parâmetro  $p = p_0 + \delta p$  onde  $p_0 = 0$  na equação original do circuito. Vale ressaltar que acrescentar um novo parâmetro que tenha um valor próximo de

zero, equivale a perturbar fracamente um parâmetro original do sistema. Este parâmetro será introduzido na terceira equação do circuito, pois como vimos no Capítulo 4, as outras duas equações dependem do parâmetro  $g$  e as soluções do circuito de Matsumoto-Chua são mais sensíveis às variações neste parâmetro. Como queremos aplicar pequenas perturbações que não alterem substancialmente a dinâmica do circuito, acrescentamos este novo parâmetro. A equação do circuito com esta perturbação é dada por:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_{NR}(V_{C_1}), \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L, \\ L \frac{di_L}{dt} &= -V_{C_2} - \delta p. \end{aligned} \quad (7.9)$$

O primeiro passo do método é determinar a localização da órbita instável (com  $\delta p = 0$ ) que se quer controlar. No mapa de Poincaré ( $\Sigma$ ) esta órbita é um ponto fixo hiperbólico (tipo sela) e pelo teorema de Hartman e Grobman, visto no Capítulo 2, quando se faz uma linearização em torno desse ponto, localmente há uma equivalência topológica entre o comportamento global do sistema e o movimento linearizado nas proximidades do ponto hiperbólico, de tal forma que variedade instável e estável são tangentes às variedades geradas pela linearização. Seguimos o procedimento da referência [112] para determinar a localização da órbita instável a ser controlada. Assim, uma órbita periódica instável gerada pelo sistema dinâmico  $\mathbf{X}(t)$  pode ser localizada analisando as órbitas recorrentes do atrator caótico. Procuramos uma órbita que retorna próximo a sua vizinhança após  $k$  iterações. Esta proximidade é definida usando um pequeno número  $\varepsilon$ : para uma órbita gerada pela dinâmica do sistema caótico  $\mathbf{X}(n)$  determinamos o menor índice de tempo  $k$  de forma que

$$|\mathbf{X}(n) - \mathbf{X}(k)| < \varepsilon \quad (7.10)$$

onde esta medida é feita com a distância Euclidiana entre os pontos que as órbitas geram no mapa de Poincaré. A diferença  $k - n$  é o período da órbita [112]. Mostramos na Figura 7.10 o atrator caótico (linha pontilhada) e a órbita instável de período-1 (linha sólida) que queremos estabilizar, aplicando o método OGY ao circuito de Matsumoto-Chua, operando no regime caótico do tipo Rössler. Selecionamos a seção de Poincaré no plano  $\Sigma$ ,  $V_{C_1} = 3, 0$ . Através do método descrito, para  $\varepsilon = 10^{-6}$ , determinamos nesta seção um ponto fixo com coordenadas  $V_{C_{2F}} = 0, 896095$ ,  $i_{LF} = -0, 223575$ , correspondente à órbita instável de período-1.

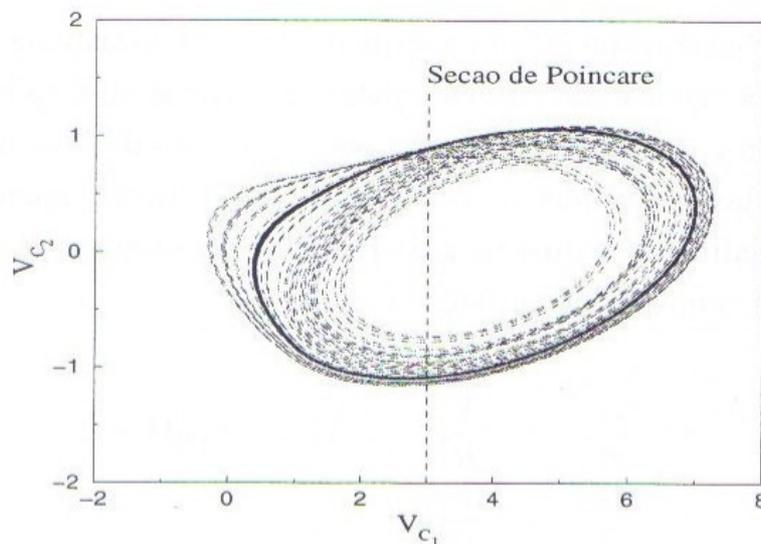


Figura 7.10: Atrator caótico tipo Rössler (linha pontilhada). Órbita periódica instável (linha sólida) imersa no atrator caótico. Mostra-se o cruzamento da órbita periódica na seção de Poincaré escolhida ( $V_{C_1} = 3.0$ ).

Determinada a órbita periódica instável presente no atrator caótico, queremos aplicar uma pequena perturbação, sem alterar drasticamente a dinâmica original do sistema, para estabilizar esta órbita. Escolhemos um parâmetro acessível do sistema,  $p$ , o qual pode ser variado numa pequena vizinhança em torno de seu valor original, que denominaremos por  $p_0 = 0$ .

Mostraremos agora como determinar a perturbação  $\delta p$  (sobre o parâmetro de controle escolhido) de forma a estabilizar a órbita instável. O procedimento consiste em monitorar o comportamento do sistema toda vez que a trajetória cruze a seção de Poincaré, de tal forma que, quando esta se afastar do ponto fixo  $(V_{C_{2F}}, i_{LF})$ , aplicamos a perturbação para redirecionar a trajetória para a direção do ponto fixo.

Quando o parâmetro de controle  $p$  é levemente variado, de seu valor sem perturbação  $p_0 = 0$ , para algum outro valor  $p = \delta p$ , o ponto fixo  $\mathbf{X}_F(p_0)$  será deslocado gerando um novo ponto fixo  $\mathbf{X}_F(p_0 + \delta p)$ . Queremos determinar uma perturbação que faça com que no próximo cruzamento da trajetória na seção de Poincaré o ponto fixo seja deslocado pela perturbação e a trajetória caia na variedade estável do ponto fixo estabilizando novamente a órbita. Mostramos esquematicamente o método na Figura 7.11.

Definimos um vetor  $\mathbf{g}$ :

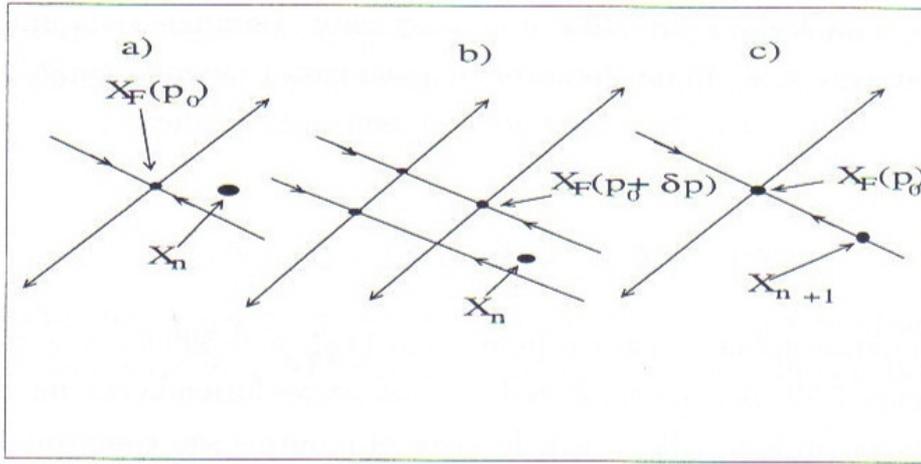


Figura 7.11: Esquema do método de controle OGY: a) cruzamento da trajetória próximo ao ponto fixo  $\mathbf{X}_F(p_0)$  após  $n$ -cruzamentos na seção de Poincaré; b) aplica-se a perturbação  $\delta p$  para mover o ponto fixo; c) a perturbação força o sistema de forma que o próximo mapeamento  $\mathbf{X}_{n+1}$  caia na variedade estável de  $\mathbf{X}_F(p_0)$ .

$$\mathbf{g} \equiv \left. \frac{\partial \mathbf{X}_F}{\partial p} \right|_{p=p_0} \approx \frac{\mathbf{X}_F(p) - \mathbf{X}_F(p_0)}{\delta p}, \quad (7.11)$$

o qual determinamos, fazendo pequenas alterações em torno de  $p_0$  e explicitamente observamos o movimento do ponto fixo  $\mathbf{X}$ . Para a órbita de período-1 escolhida, usando uma perturbação  $\delta p = 0,005$  obtivemos  $\mathbf{g} = (-0.84407, -26.8238)^T$ .

Próximo ao novo ponto fixo  $\mathbf{X}_F(p)$ , após alterarmos  $p$  levemente de  $\delta p$ , podemos fazer uma aproximação linear para o mapa da Equação 7.8, esta linearização é dada por:

$$[\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_F(p)] \approx \mathbf{M} \cdot [\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_F(p)], \quad (7.12)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz Jacobiana  $2 \times 2$  de  $\mathbf{F}$  calculada em  $\mathbf{X}_F(p_0)$ . Supomos que  $\mathbf{M}$  é praticamente constante para pequenos  $\delta p$ . Sejam  $\lambda_u$  e  $\lambda_s$ , os autovalores instável e o estável, respectivamente, da matriz  $\mathbf{M}$  ( $|\lambda_u| > 1 > |\lambda_s|$ ). Portanto, o ponto fixo é um ponto de sela hiperbólico. Numericamente usamos o procedimento desenvolvido por Sano e Sawada [47] para a determinação da matriz  $\mathbf{M}$ , o qual adaptamos e aplicamos ao nosso sistema na forma descrita a seguir.

Consideramos uma pequena área, de raio  $\epsilon = 10^{-5}$ , centrada no ponto fixo  $\mathbf{X}_F$ . Em torno do centro, criamos um conjunto de pontos aleatórios  $\{\mathbf{X}_j\} = \{V_{C_{2j}}, i_{L_j}\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ )

dentro dessa pequena área, distribuídos uniformemente. Iteramos cada um dos pontos até retornarem novamente a seção de Poincaré (mapeamento) obtendo então um conjunto de pontos  $\{\mathbf{X}_{ki}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) ( $N = 1500$  pontos) dentro da condição ,

$$\{\mathbf{Z}^i\} = \{\mathbf{X}_{ki} - \mathbf{X}_F\} \mid \|\mathbf{X}_{ki} - \mathbf{X}_F\| \leq \epsilon. \quad (7.13)$$

Este procedimento aplicado para o ponto fixo ( $V_{C_2} = 0,896095$ ,  $i_{LF} = -0,223575$ ) é mostrado na Figura 7.12. A pequena área de pontos é transformada em um elipsóide, alguns pontos são estirados ao longo da variedade instável e outros são comprimidos ao longo da variedade estável.

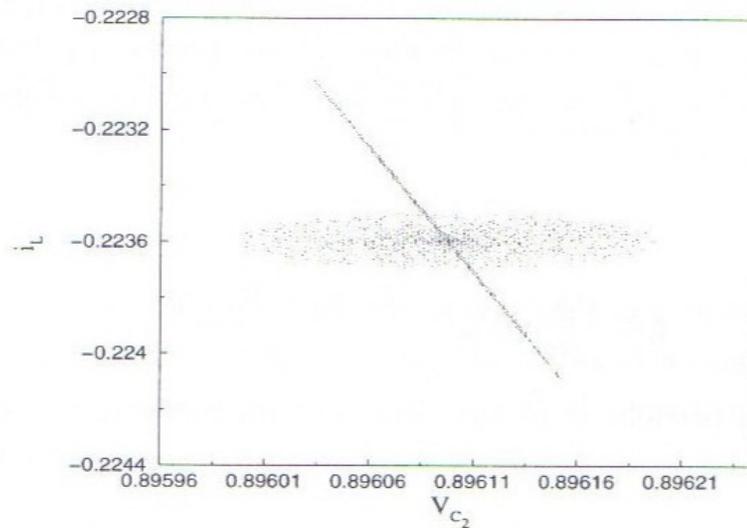


Figura 7.12: Evolução de 1500 pontos aleatórios em torno do ponto fixo para um unico tempo de retorno. Os dois conjuntos de pontos são usados para se determinar a Jacobiana ( $\mathbf{M}$ ) usando o algoritmo de mínimos quadrados. A partir de  $\mathbf{M}$  calcula-se os autovalores e autovetores em torno do ponto fixo.

Do conjunto de pontos aleatórios  $\{\mathbf{X}_j\}$ , que após a iteração obedeceram a condição 7.13, guardamos o conjunto de pontos:

$$\{\mathbf{Y}^i\} = \{\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_F\} \mid \|\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_F\| \leq \epsilon \quad (7.14)$$

onde usamos a norma Euclidiana para determinar o vetor deslocamento entre os pontos mapeados e o ponto fixo. Sendo  $\epsilon = 10^{-5}$ , podemos considerar este mapeamento como uma

linearização em torno do ponto fixo, de forma que a evolução dos conjunto de pontos  $\{\mathbf{Y}^i\}$  para  $\{\mathbf{Z}^i\}$  pode ser representada pela matriz  $\mathbf{M}$  que queremos determinar, ou seja

$$\mathbf{Z}^i = \mathbf{M}\mathbf{Y}^i. \quad (7.15)$$

Usando o algoritmo numérico de mínimos quadrados [43], o qual minimiza o erro médio quadrático da norma entre  $\mathbf{Z}^i$  e  $\mathbf{M}\mathbf{Y}^i$  com respeito a todas as componentes da matriz  $\mathbf{M}$ , ou seja:

$$\min S = \min \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{Z}^i - \mathbf{M}\mathbf{Y}^i\|^2. \quad (7.16)$$

Chamando as componentes  $(k, l)$  da matriz  $\mathbf{M}$  de  $a_{kl}(j)$  e aplicando a condição 7.16, obtemos quatro equações para serem solucionadas,  $\partial S / \partial a_{kl}(j) = 0$ . Com este procedimento obtemos finalmente a seguinte expressão para determinação de  $\mathbf{M}$ :

$$M_j \mathbf{V} = \mathbf{C}, \quad V_{kl} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y^{ik} Y^{il} \quad (7.17)$$

$$C_{kl} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z^{ik} Y^{il}, \quad (7.18)$$

onde  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{C}$  são matrizes  $2 \times 2$ , chamadas de matrizes covariantes e  $Y^{ik}$  e  $Z^{ik}$  são as  $k$  componentes dos vetores  $\mathbf{Y}^i$  e  $\mathbf{Z}^i$ , respectivamente. Usando este procedimento, determinamos que a região próxima ao ponto fixo  $\mathbf{X}_F$  se transforma linearmente como:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,806883 & 0,538121 \\ -4,801738 & -3,129992 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz possui os seguintes autovalores  $\lambda_u = -1,93301$ ,  $\lambda_s = -0,205421$ .

Prosseguindo com o desenvolvimento, podemos escrever que  $\mathbf{M}\mathbf{e}_u = \lambda_u \mathbf{e}_u$  e  $\mathbf{M}\mathbf{e}_s = \lambda_s \mathbf{e}_s$ , onde  $\mathbf{e}_u$  e  $\mathbf{e}_s$  são os autovetores estáveis e instáveis, respectivamente de módulo unitário da matriz  $\mathbf{M}$ . Definindo  $\mathbf{f}_u$  e  $\mathbf{f}_s$  como vetores bases contravariantes, os quais são determinados pelas seguintes regras:  $\mathbf{f}_s \cdot \mathbf{e}_s = \mathbf{f}_u \cdot \mathbf{e}_u = 1$ ,  $\mathbf{f}_s \cdot \mathbf{e}_u = \mathbf{f}_u \cdot \mathbf{e}_s = 0$  ( $\mathbf{f}$  é um vetor coluna e  $\mathbf{e}$  é um vetor linha). Usando estas relações encontramos para o ponto fixo os valores  $\mathbf{f}_u = (-2.5969, -1.44286)^T$  ( $T$ -transposta).

Além disso,  $\mathbf{M}$  pode ser expressa da seguinte forma

$$\mathbf{M} = [\mathbf{e}_u \ \mathbf{e}_s] \begin{bmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{bmatrix} [\mathbf{e}_u \ \mathbf{e}_s]^{-1}. \quad (7.19)$$

Uma vez que temos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix} [\mathbf{e}_u \ \mathbf{e}_s] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

isto implica que

$$[\mathbf{e}_u \ \mathbf{e}_s]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix}.$$

Logo,  $\mathbf{M}$  pode ser escrita como

$$\mathbf{M} = [\mathbf{e}_u \ \mathbf{e}_s] \begin{bmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_s \end{bmatrix} = (\lambda_u \mathbf{e}_u \mathbf{f}_u + \lambda_s \mathbf{e}_s \mathbf{f}_s).$$

Portanto a Equação 7.12 é expressa como

$$[\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_F(p)] \approx (\lambda_u \mathbf{e}_u \mathbf{f}_u + \lambda_s \mathbf{e}_s \mathbf{f}_s) \cdot [\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_F(p)]. \quad (7.20)$$

Observando, a partir da Equação 7.11 que  $\mathbf{X}_F(p) \approx p\mathbf{g} + \mathbf{X}_F(p_0)$ , a Equação 7.20 pode ser escrita como

$$\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_F(p_0) \approx p_n \mathbf{g} + (\lambda_u \mathbf{e}_u \mathbf{f}_u + \lambda_s \mathbf{e}_s \mathbf{f}_s) \cdot [\mathbf{X}_n - p_n \mathbf{g} - \mathbf{X}_F(p_0)]. \quad (7.21)$$

Queremos que a próxima iteração  $\mathbf{X}_{n+1}$  caia sobre a variedade estável de  $\mathbf{X}_F$ , o parâmetro de controle é escolhido de forma que  $\mathbf{f}_u \cdot (\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_F(p_0)) = 0$ .

Portanto, fazendo o produto escalar da Equação 7.21 com  $\mathbf{f}_u$ , e resolvendo esta equação explicitando o parâmetro de controle  $p_n$ , obtemos

$$p_n = \frac{\lambda_u \mathbf{f}_u \cdot (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_F(p_0))}{(\lambda_u - 1) \mathbf{f}_u \cdot \mathbf{g}}. \quad (7.22)$$

Observando que se  $\mathbf{X}_F(p_0) = 0$  o parâmetro de controle  $p_n$  dado pela equação acima é idêntico ao parâmetro deduzido por Ott *et. al.*[18]. Mostramos a aplicação do método OGY aplicado ao circuito de Matsumoto-Chua na Figura 7.13 a), onde o controle é aplicado para um intervalo de tempo correspondendo a 2000000 iterações do mapa. O máximo valor usado para a perturbação  $p_n$  é 0.01; para valores acima desta perturbação fazemos  $p_n = 0$ . O valor da perturbação, em escala logarítmica, é bastante pequeno, quando se aplica o controle, como pode ser visto no gráfico da Figura 7.13 b).

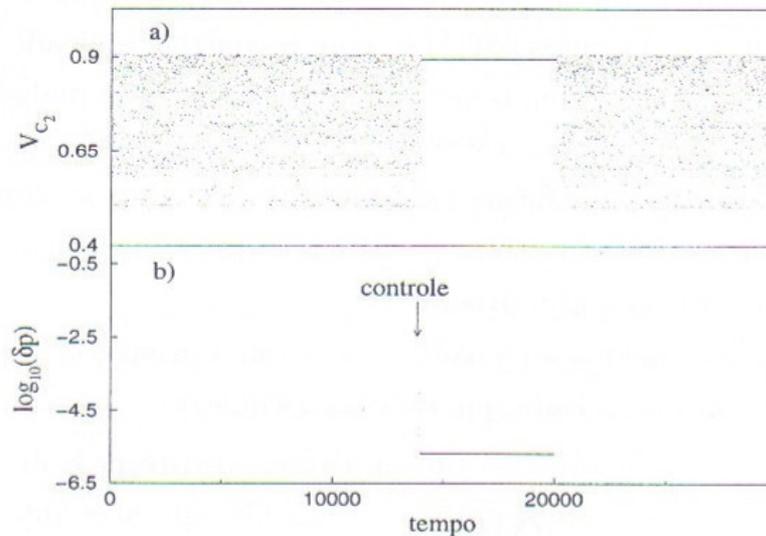


Figura 7.13: Aplicação do método OGY para estabilizar o ponto fixo ( $V_{C_2F} = 0.986095, i_{LF} = -0.223575$ ). a) A série temporal de  $V_{C_2}$  calculada na seção de Poincaré para  $V_{C_1} = 3.0$ ; b) perturbação aplicada para controle da órbita instável  $\delta p$ .

Uma importante característica desse método é que não é necessário um modelo da dinâmica do sistema. Para sua implementação em sistemas experimentais pode-se usar tanto a informação completa do processo ou a técnica de Ruelle e Takens de reconstrução com uma única série temporal do experimento [18][3]. Para a implementação do controle, qualquer variável acessível do sistema pode ser usada como parâmetro de controle. Entre as dificuldades podemos apontar que a presença de ruído pode desestabilizar a órbita controlada, resultando em ocasionais estouros caóticos. O método pode estabilizar somente aquelas órbitas para as quais o maior expoente de Lyapunov é pequeno comparado com o tempo recíproco do intervalo de tempo entre as mudanças do parâmetro de controle [18][113]. E como as correções do parâmetro são raras e pequenas (como vimos), a flutuação de ruídos pode gerar a desestabilização da órbita. Apesar disso, o método OGY aliado a um processo

de direcionamento permite uma vasta gama de aplicações tais como as revisadas em [3]. O direcionamento permite que se alcance a região da órbita que se quer estabilizar muito mais rapidamente.

## 7.5 O método de realimentação

Vimos que o método OGY, apesar de ser bastante geral, pode ser aplicado somente quando a órbita está próxima à órbita instável que se quer controlar. O método de realimentação, no qual pode-se incluir o de Pyragas [20][114], com o controle aplicado continuamente é capaz de superar esta dificuldade. Com o método de realimentação pode-se estabilizar órbitas periódicas instáveis presentes no atrator caótico, assim como órbitas caóticas. O método é baseado na construção de uma forma escolhida de perturbação contínua no tempo. A perturbação não muda a forma da órbita periódica instável que se quer estabilizar, mas a estabiliza com uma perturbação apropriada.

O método geral de realimentação envolve um sistema mestre  $\mathbf{y}_{orb}$  e um sistema escravo  $\mathbf{X}(t)$ , que é o sistema não perturbado que satisfaz a equação

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)). \quad (7.23)$$

Para estabilizar a órbita instável escolhida do sistema através da perturbação  $\mathbf{Y}_{orb}(t)$  podemos implementar o seguinte controle com realimentação

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) - \mathbf{K} \cdot [\mathbf{X}(t) - \mathbf{Y}_{orb}(t)], \quad (7.24)$$

com  $\mathbf{K}$  sendo uma matriz de acoplamento a ser determinada para o controle.

Vamos aplicar o método ao circuito de Matsumoto-Chua no regime caótico do tipo Rössler ( $g = 0.575$ ). Usamos a órbita periódica instável já calculada anteriormente para a exemplificação do método de controle de OGY mostrada na Figura 7.10.

Vamos inicialmente apresentar o método. Seja  $(\mathbf{Y}_{orb} \equiv V_{C_{1orb}}, V_{C_{2orb}}, i_{Lorb})$  uma órbita periódica instável ou uma órbita caótica qualquer do circuito de Matsumoto-Chua. A trajetória do atrator caótico pode então ser direcionada de forma a se comportar da mesma forma que a órbita escolhida (e gravada) com o controle de realimentação da forma:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} V_{C_1} - V_{C_{1orb}} \\ V_{C_2} - V_{C_{2orb}} \\ i_L - i_{Lorb} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C_1} - V_{C_{1orb}} \\ V_{C_2} - V_{C_{2orb}} \\ i_L - i_{Lorb} \end{bmatrix}. \quad (7.25)$$

Com este controle de realimentação, a equação do circuito controlado é:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_{NR}(V_{C_1}) - K_{11}(V_{C_1} - V_{C_{1orb}}), \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{R}(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L - K_{22}(V_{C_2} - V_{C_{2orb}}), \\ L \frac{di_L}{dt} &= -V_{C_2} - K_{33}(i_L - i_{Lorb}). \end{aligned} \quad (7.26)$$

A característica importante desta perturbação é que ela se anula quando o sinal de saída do circuito coincide com a órbita escolhida  $\mathbf{Y}_{orb}$ . A perturbação executa a função de autocontrole, pois ela sempre tende a atrair a trajetória atual em direção a órbita escolhida. Quando a estabilização é alcançada  $\mathbf{X} \approx \mathbf{Y}_{orb}$ , a perturbação se torna pequena.

Para determinar os valores da constante  $K$  que permitem o controle da órbita escolhida usamos os expoentes de **Lyapunov condicionais** introduzidos por Pecora e Carroll [115]. Podemos considerar que este tipo de controle como uma espécie de sincronização entre o circuito escravo ou circuito resposta (o circuito que se quer controlar) e o circuito mestre (o circuito que escraviza o circuito escravo com uma nova dinâmica), neste caso representado pela órbita escolhida,  $Y_{orb}$ . Na verdade, a órbita escolhida pode também ser gerada por um outro circuito com os parâmetros ajustados para gerar a órbita desejada.

### 7.5.1 Lyapunov condicional e equação variacional

Vamos introduzir o conceito de Lyapunov condicional e equação variacional, conceitos estes que serão importantes no capítulo de sincronização. De acordo com os argumentos acima, vamos considerar o problema de sincronizar dois circuitos caóticos de Matsumoto-Chua acoplados. Matematicamente este problema pode ser apresentado na seguinte forma:

Circuito mestre:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}_{orb}}{dt} &= \mathbf{F}(Y_{orb}, X_{orb}), \\ \frac{dY_{orb}}{dt} &= \mathbf{Q}(Y_{orb}, X_{orb}), \end{aligned} \quad (7.27)$$

Circuito escravo:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{X}}{dt} &= \mathbf{F}(Y, X) + K(Y_{orb} - Y), \\ \frac{dY}{dt} &= \mathbf{Q}(Y, X).\end{aligned}\quad (7.28)$$

Os expoentes de Lyapunov condicionais  $\lambda(K)$  podem ser definidos a partir de novas variáveis geradas pela diferença  $\Delta\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_{orb}(t)$ . Essas variáveis são chamadas transversas, pois medem o grau de afastamento entre as órbitas. O controle é alcançado quando  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_{orb}(t)$ . Este estado dinâmico é estável quando pequenas perturbações ou variações de  $\Delta\mathbf{X}(t)$  tendem a zero com o tempo. A equação evolutiva das variáveis transversas do circuito escravo é chamada **equação variacional** (ver Apêndice A) e é dada por:

$$\frac{d\Delta\mathbf{X}(t)}{dt} = [\mathbf{DF}(Y_{orb}(t), X_{orb}(t)) - \mathbf{K}].\Delta\mathbf{X}(t), \quad (7.29)$$

onde  $\mathbf{DF}(Y_{orb}(t), X_{orb}(t))$  é a matriz Jacobiana condicional. A denominação de condicional vem do fato da matriz estar condicionada ao valor da variável do circuito mestre. Para  $K \neq 0$  a equação 7.29 difere da equação variacional usual usada para o cálculo do expoente de Lyapunov do sistema não perturbado. Para  $K = 0$ , os expoentes de Lyapunov condicional coincidem com os expoentes de Lyapunov característicos do sistema não perturbado. Com o aumento de  $K$ , este termo causa um decrescimento dos  $\lambda(K)$  e a inversão dos sinais dos expoentes de Lyapunov que inicialmente eram positivos.

Como a equação variacional 7.29 depende da equação do sistema não linear do circuito de Matsumoto-Chua e também da Jacobiana do sistema, elas são calculadas simultaneamente. A integração da Equação 7.29 é efetuada simultaneamente com a equação não linear do circuito, a equação variacional é atrelada a equação original do sistema obtendo-se o sistema combinado

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{X}}{dt} \\ \frac{d\Delta\mathbf{X}(t)}{dt} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) \\ \{\mathbf{DF}(Y_{orb}(t), X_{orb}(t)) - \mathbf{K}\}.\Delta\mathbf{X}(t) \end{array} \right\} \quad (7.30)$$

o qual é integrado a partir da condição inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}(t_0) \\ \Delta\mathbf{X}(0) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}(0) \\ \mathbf{I} \end{array} \right\}. \quad (7.31)$$

A Jacobiana do sistema com acoplamento nas três variáveis representado pela constantes de acoplamento  $K_{11}$  (acoplamento com  $V_{C_1}$ ),  $K_{22}$  (acoplamento com  $V_{C_2}$ ) e  $K_{33}$  (acoplamento com  $i_L$ ). A forma da Jacobiana, portanto depende da constante ou constantes usadas no acoplamento.

$$J = \mathbf{DF}(\mathbf{X}(t)) = \begin{pmatrix} -10(g + F) - K_{11} & 10g & 0 \\ g & -(g + K_{22}) & 1 \\ 0 & -6 & -K_{33} \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

sendo

$$F = \begin{cases} m_0 & V_{C_1} > 1 \\ m_1 & |V_{C_1}| \leq 1 \\ m_0 & V_{C_1} < -1. \end{cases} \quad (7.33)$$

O valor negativo do maior expoente de Lyapunov condicional  $\lambda(K) < 0$  pode definir o intervalo de  $K$  correspondente à sincronização dos circuitos mestre e escravo. Na Figura 7.14 mostramos o maior expoente de Lyapunov condicional em função do parâmetro  $K$ . Como pode ser visto pelo gráfico, a escolha da variável de controle ( $V_{C_1}$ ,  $V_{C_2}$  ou  $i_L$ ) ou o acoplamento de duas variáveis determina o intervalo de  $K$  e qual variável oferece melhor controle. Por exemplo, podemos afirmar que o controle do sistema de Matsumoto-Chua pelo método de realimentação usando a variável  $V_{C_2}$  é mais eficiente, desde que esta oferece um maior intervalo de  $K$  que gera sincronização. O controle pela variável  $i_L$  é menos eficiente, pois a sincronização é possível em um curto intervalo do parâmetro  $K$ . A variável  $V_{C_1}$  também é ineficaz para controle, pois exige um alto valor de  $K$  para sincronização. O uso de duas variáveis acopladas pode diminuir o valor de  $K$  como pode ser constatado usando as duas variáveis  $V_{C_2}$  e  $i_L$ . Neste caso é possível notar dois intervalos diferentes de  $K$  em que ocorrerá sincronização. O valor ideal de  $K$  deve ser suficiente para compensar a divergência das trajetórias próximo da órbita que se quer controlar, porém deve ter um valor máximo. Um valor muito alto de  $K$  pode não ser ideal, uma vez que a perturbação aplicada em uma única variável pode variar muito mais rapidamente do que as outras variáveis fazendo com que estas não consigam acompanhar essa variação.

Mostramos na Figura 7.15 a aplicação do método de realimentação para controle da órbita instável escolhida do circuito no regime caótico tipo Rössler. Usamos  $V_{C_1}$  como variável de acoplamento e escolhemos a constante  $K = 10$ . Na Figura 7.15 a) mostramos a órbita

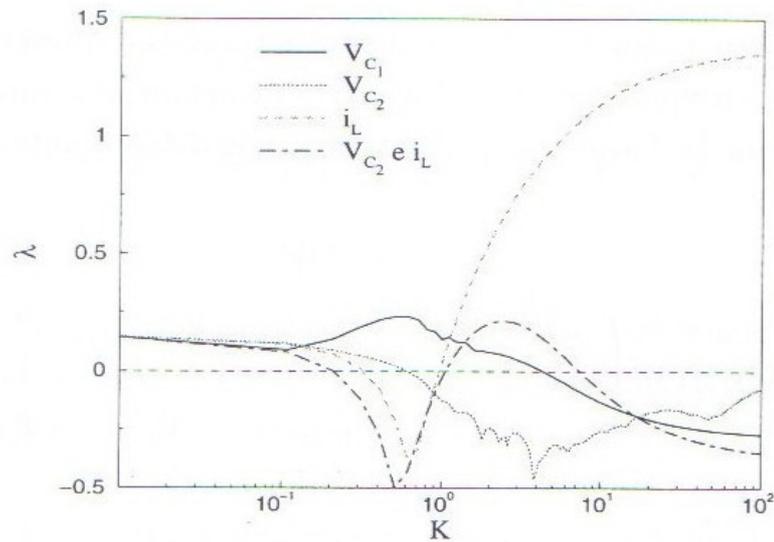


Figura 7.14: Maior expoente de Lyapunov condicional,  $\lambda$ , versus constante  $K$  da perturbação de realimentação para o atrator caótico tipo Rössler ( $g = 0,575$ ). No gráfico estão indicadas as variáveis usadas na realimentação.

periódica que queremos que o circuito execute. Na Figura 7.15 b) mostramos a evolução temporal da variável  $V_{C_1}$  antes e após o controle e, finalmente, na Figura 7.15 c) mostramos a diferença entre a variável de saída  $V_{C_1}$  do circuito menos o valor da órbita escolhida, podemos notar que a diferença tende a ter pequenas oscilações em torno do valor zero.

Nas Figuras 7.16 e 7.17 mostramos a aplicação do método usando as variáveis  $V_{C_2}$  ( $K = 5$ ) e  $i_L$  ( $K = 0,2$ ), respectivamente. Como anteriormente, em a) representamos a órbita periódica, em b) a evolução temporal da variável de acoplamento antes e após a aplicação do controle e em c) a diferença entre a variável de saída e órbita escolhida. Para cada variável usada na realimentação, escolhemos um valor de  $K$  de acordo com o gráfico do maior expoente de Lyapunov condicional mostrado na Figura 7.14, no intervalo em que o expoente é negativo.

## 7.6 Método OPCL

O método de controle OPCL (*Open Plus Closed Loop*) [116] é baseado na existência de regiões convergentes,  $C_k(k)$ , no espaço de fase ( $R^3$ ) [21][117]. A aplicação do método OPCL para o sistema

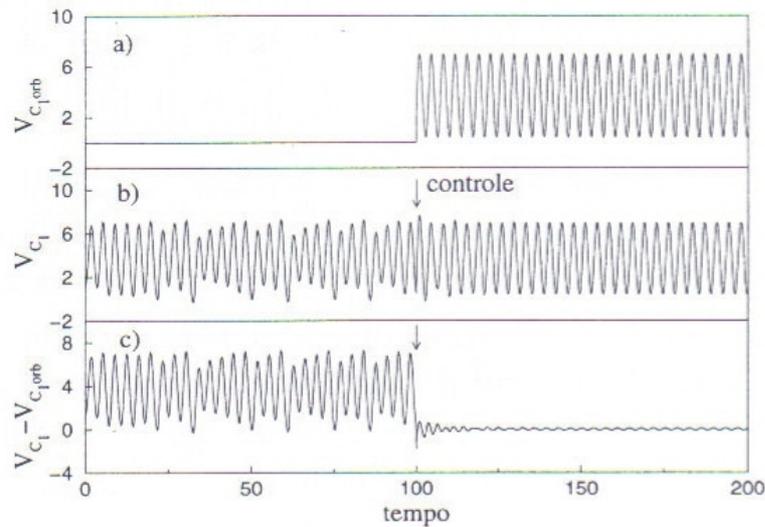


Figura 7.15: Controle de realimentação. a) Segmento da órbita periódica imersa no atrator tipo Rössler ( $g = 0,575$ ). b) Evolução temporal da variável  $V_{C_1}$  antes e após a aplicação do controle. c) Evolução temporal da diferença entre a variável  $V_{C_1}$  do atrator caótico e a da órbita periódica escolhida. As setas indicam onde inicia o controle ( $K = 10$ ).

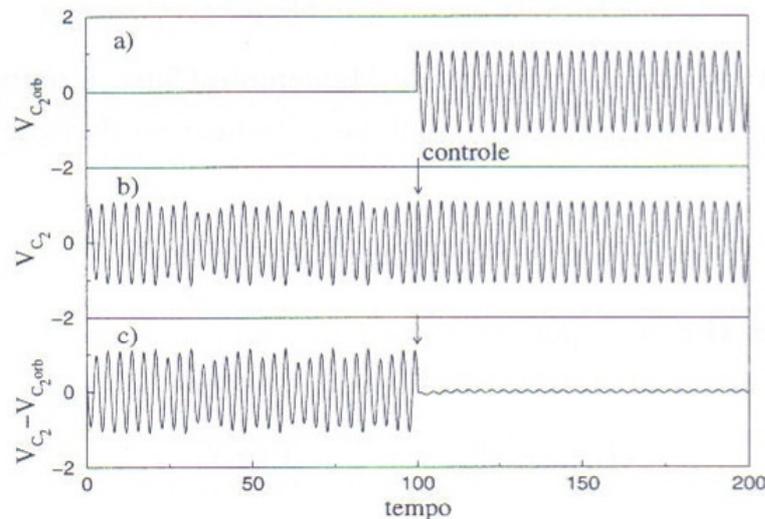


Figura 7.16: Controle de realimentação. a) Segmento da órbita periódica imersa no atrator tipo Rössler ( $g = 0,575$ ). b) Evolução temporal da variável  $V_{C_2}$  antes e após a aplicação do controle. c) Evolução temporal da diferença entre a variável  $V_{C_2}$  do atrator caótico e a da órbita periódica escolhida. As setas indicam onde inicia o controle ( $K = 5$ ).

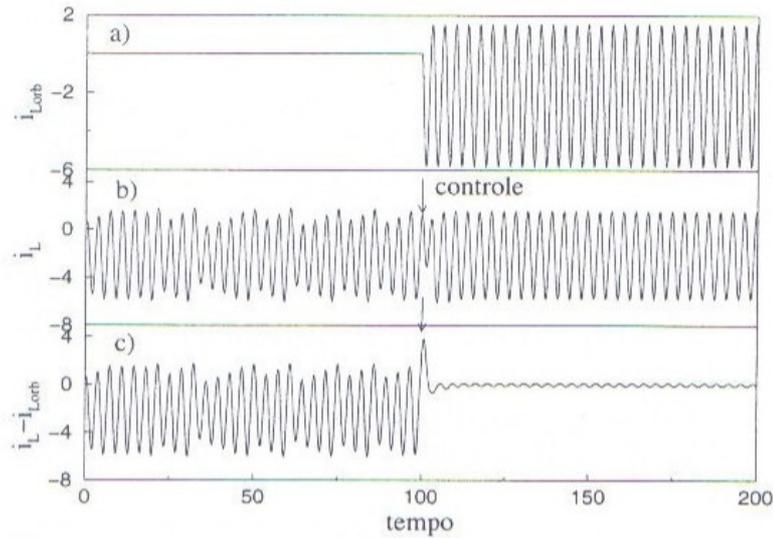


Figura 7.17: Controle de Realimentação. a) Segmento da órbita periódica imersa no atrator tipo Rössler ( $g = 0,575$ ). b) Evolução temporal da variável  $i_L$  antes e após a aplicação do controle. c) Evolução temporal da diferença entre a variável  $i_L$  do atrator caótico e a da órbita periódica escolhida. As setas indicam onde inicia o controle ( $K = 0,2$ ).

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \quad \mathbf{X} = (V_{C_1}, V_{C_2}, i_L), \quad (7.34)$$

onde a Equação 7.34 representa o circuito de Matsumoto-Chua, é representado pela adição de um termo de chaveamento  $S(t) = 1/0$ , que permite ligar ou desligar o controle.

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + S(t)[\mathbf{H}(\mathbf{g}, \frac{d\mathbf{g}}{dt}, t) + \mathbf{K}(\mathbf{g}, \mathbf{X}(t))] \quad (7.35)$$

( $\mathbf{X}, \mathbf{g} \in R^3$ ). A função  $\mathbf{H}$  é dada por

$$\mathbf{H}(\mathbf{g}, d\mathbf{g}/dt, t) = \frac{d\mathbf{g}}{dt} - \mathbf{F}(\mathbf{g}, t) \quad (7.36)$$

e a função  $\mathbf{K}$  é determinada por

$$\mathbf{K}(\mathbf{g}, \mathbf{X}(t)) = \left( \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{g}} - \mathbf{A} \right) (\mathbf{g}(t) - \mathbf{X}(t)) \quad (7.37)$$

onde  $\mathbf{g}(t) \in R^3$  é uma função suave arbitrária dependente do tempo e  $\mathbf{A}$  é uma matriz constante, cujo os autovalores possuem parte real negativa.

Este controle possui dois objetivos distintos. Um é forçar o sistema  $\mathbf{X}(t)$  a executar uma órbita escolhida  $\mathbf{g}(t)$  (controle de arraste *entrainment*) [118][116], significando que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{X}(t) - \mathbf{g}(t)| = 0. \quad (7.38)$$

O outro objetivo se aplica para sistemas com coexistência de atratores. O objetivo é transferir  $\mathbf{X}(t)$  de um atrator para outro; este controle é chamado de *controle de migração* [119][120][121]. Diferente do arrasto (*entrainment*), ou do método OGY [18], que requerem uma aplicação contínua do controle, a *migração* requer que o controle seja aplicado apenas durante um período finito (em geral muito curto) de tempo. Isto ocorre porque é necessário apenas transferir a trajetória da bacia de atração de um atrator para outra; após a transferência o controle pode ser retirado ( $S(t) = 0$  na Equação 7.35).

Foi mostrado por Jackson e Grosu [120][116] que, para qualquer função  $\mathbf{g}(t)$  com uma escolha adequada da matriz  $\mathbf{A}$ , a bacia de *entrainment*,  $BE(\mathbf{g}(t))$ , do circuito de Matsumoto-Chua pode abranger todo o espaço de fase. Assim, todas as condições iniciais do espaço de fase,  $\mathbf{X}_0(t)$  possuem soluções que satisfazem a Equação 7.38. Esse conjunto de condições iniciais que satisfazem a Equação 7.38 é chamado de *bacia de entrainment*

$$BE(\mathbf{g}(t)) = \{\mathbf{X}(0) | \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{X}(t) - \mathbf{g}(t)| = 0\}. \quad (7.39)$$

É importante notar que no controle OPCL, se a órbita alvo  $\mathbf{g}(t)$  for uma solução do sistema Equação 7.34

$$d\mathbf{g}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{g}, t), \quad (7.40)$$

e  $\mathbf{H}(\mathbf{g}, d\mathbf{g}/dt, t) = 0$ . Para o circuito de Matsumoto-Chua, é possível simplificar a ação geral dada pela Equação 7.35. Devido a linearidade presente nas duas últimas equações do circuito, podemos simplificar a Equação 7.35 selecionando uma matriz  $\mathbf{A}$  de tal forma a remover a realimentação nas variáveis  $(V_{C_2}, i_L)$ . Podemos fazer isso escolhendo os elementos da matriz como  $a_{ij} = dF_i/dg_j$ , se  $(i, j) \neq (1, 1)$ , e  $a_{11} = P$ . O termo  $d\mathbf{F}/d\mathbf{g}$  é uma matriz  $n \times n$

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} -\frac{g + \frac{\partial i_{NR}}{\partial g_1}}{C_1} & \frac{g}{C_1} & 0 \\ \frac{g}{C_2} & -\frac{g}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.41)$$

Temos que a matriz  $\mathbf{A}$  conveniente para a simplificação desejada é

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} P & \frac{g}{C_1} & 0 \\ \frac{g}{C_2} & -\frac{g}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.42)$$

A condição necessária e suficiente para se obter o controle é que todos as partes reais dos autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  sejam negativas. Podemos usar novamente o critério de Routh-Hurwitz: dado uma equação característica do tipo

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (7.43)$$

as condições necessárias e suficientes para que todos os autovalores sejam negativos são,

$$a_1 > 0; \quad a_1a_2 - a_3 > 0; \quad a_3 > 0. \quad (7.44)$$

Para a matriz  $\mathbf{A}$ , temos que a equação característica determinada a partir de  $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$  é

$$\lambda^3 + (g - P)\lambda^2 + (6 - Pg - 10g^2)\lambda - 6P = 0. \quad (7.45)$$

Aplicando o critério de Routh-Hurwitz, temos que para um determinado valor de  $g$ , os valores válidos de  $P$  para se obter o controle pode ser determinado pelo sistema

$$\begin{aligned} (g - P) &> 0 \\ (g - P)(6 - Pg - 10g^2) - 6P &> 0 \\ -6P &> 0. \end{aligned} \quad (7.46)$$

A aplicação do controle de arraste (*entrainment*) do sistema de Matsumoto-Chua para uma dinâmica arbitrária  $(g_1, g_2, g_3)$  é então:

$$\begin{aligned} \frac{dV_{C_1}}{d}t &= \frac{1}{C_1}[g(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_{NR}(V_{C_1})] + \left\{ dg_1/dt - \frac{1}{C_1}[g(g_2 - g_1) - i_{NR}(g_1)] \right\} \\ &+ [(1/C_1)(g + di_{NR}/dg_1) + P](V_{C_1} - g_1), \end{aligned} \quad (7.47)$$

$$\frac{dV_{C_2}}{d}t = \frac{1}{C_2}[g(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L] + \left\{ dg_2/dt - \frac{1}{C_2}[g(g_1 - g_2) + g_3] \right\}, \quad (7.48)$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L}V_{C_2} + \left\{ dg_3/dt + \frac{1}{L}g_2 \right\}, \quad (7.49)$$

onde o parâmetro  $P$  é escolhido conforme o critério de Hourth-Hurwitz para assegurar o arraste (*entrainment*) com a dinâmica escolhida.

Para o controle de migração entre atratores coexistindo, os termos em  $\{\bullet\}$  nas Equações 7.48 e 7.49 são nulos (eles satisfazem a Equação 7.34) e as equações acima tornam-se,

$$\frac{dV_{C_1}}{dt} = \frac{1}{C_1}[g(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_{NR}(V_{C_1})] + [(\frac{1}{C_1}(g + di_{NR}/dg_1) + P)(V_{C_1} - g_1)], \quad (7.50)$$

$$\frac{dV_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_2}[g(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L], \quad (7.51)$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L}V_{C_2}. \quad (7.52)$$

Podemos notar que o sistema é agora simplesmente um controle de realimentação linear, como na Equação 7.50, porém com um coeficiente generalizado dependente do tempo que assegura o controle de migração. Resumindo, temos que para o controle de arraste (*entrainment*) usamos as Equações 7.48-7.49, sendo que  $g(t)$  não pode ser solução da Equação 7.34. Para migração entre atratores usamos as Equações 7.50-7.52, onde  $g(t)$  é um sinal pré-gravado do atrator para onde se quer migrar.

Vamos mostrar primeiramente a aplicação do controle de migração entre os cinco atratores coexistindo no circuito de Matsumoto-Chua operando no regime de atrator de Rössler. Esses atratores são mostrados na Figura 7.18. Há dois atratores caóticos do tipo Rössler. Em relação a variável  $V_{C_1}$ , denominamos o atrator da esquerda aquele com  $V_{C_1} > 0$  e atrator da direita aquele com  $V_{C_1} < 0$ . Há também três pontos de equilíbrio instáveis. Há ainda um sexto atrator, uma órbita instável do tipo sela, não usada nesta migração.

Uma série temporal de  $V_{C_1}$  é gravada durante um intervalo de tempo  $\Delta t = 50$ , para uso no controle de migração Equações 7.50-7.52. Este procedimento é feito para cada um dos cinco atratores mostrados na Figura 7.18. Usamos como estado inicial para o sistema o atrator caótico tipo Rössler da esquerda ( $V_{C_1} > 0$ ) até o tempo  $t_a$ , a partir do qual iniciamos o controle de migração.

Primeiramente, o controle transfere a trajetória para o atrator do tipo Rössler direito ( $V_{C_1} < 0$ ), usando o sinal pré-gravado  $g(t) = V_{C_1}(t)$  da trajetória do atrator tipo Rössler direito. Em seguida, usando os sinais pré-gravados dos pontos de equilíbrio, a trajetória é transferida de um ponto para outro nos instantes  $t_b$ ,  $t_c$  e  $t_d$ . Finalmente, em  $t_e$  a trajetória migra para o atrator original. Podemos notar que o sistema migra através dos diferentes atratores muito rapidamente. O tempo necessário para migração depende do valor de  $P$ ; quanto mais negativo o valor de  $P$ , mais rápido ocorrerá a migração. Para o processo

mostrado usamos  $P = -20$ , pois pelo critério de Hurwitz-Hurwitz determinamos que para ocorrer o processo temos que ter  $P < 0$ .

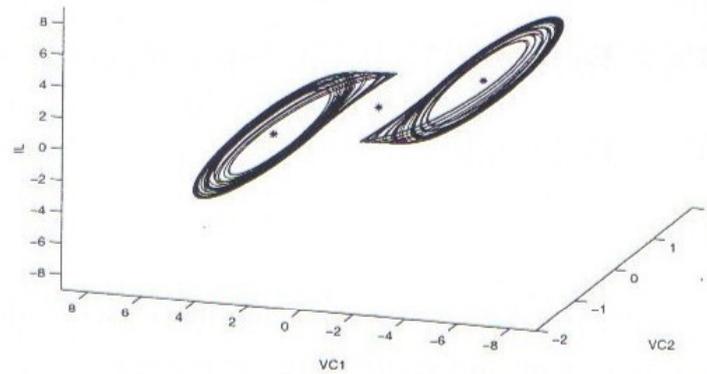


Figura 7.18: Atratores coexistentes no sistema de Matsumoto-Chua. Três pontos de equilíbrio instáveis (asteriscos) e dois atratores caóticos (linha sólida) para  $g = 0.575$ .

Como um exemplo de controle de arraste (*entrainment*), descrito pelas Equações 7.48-7.49, selecionamos uma órbita alvo convergente dada por

$$g_1 = \cos(\omega t) - 4, \quad g_2 = -\sin(\omega t) + 4, \quad g_3 = \sin(\omega t/2). \quad (7.53)$$

O arraste (*entrainment*) do circuito para esta órbita é mostrado na Figura 7.20. Usamos  $\omega = 1, 0$  e  $P = -a_{11} = -20$  para gerar a Figura 7.20 a); na Figura 7.20 b) usamos  $P = -10$ ; vemos que neste caso o processo de arraste (*entrainment*) demora um pouco mais para ocorrer e envolve uma maior excursão da dinâmica no espaço de fase. Para  $P = -20$  o processo é mais rápido; no entanto, há uma mudança abrupta na órbita do sistema, o que muitas vezes é indesejável quando não se quer alterar drasticamente a dinâmica do sistema.

## 7.7 Método OPCL para migração entre órbitas

Vimos que no método OGY, de controle de órbitas periódicas instáveis, devemos esperar que a órbita do atrator caótico se aproxime da região do ponto fixo onde é possível aplicar o controle. A ergodicidade do atrator caótico nos assegura que a trajetória visitará todo o espaço de fase e, portanto, chegará até a região de controle, mesmo que para alguns

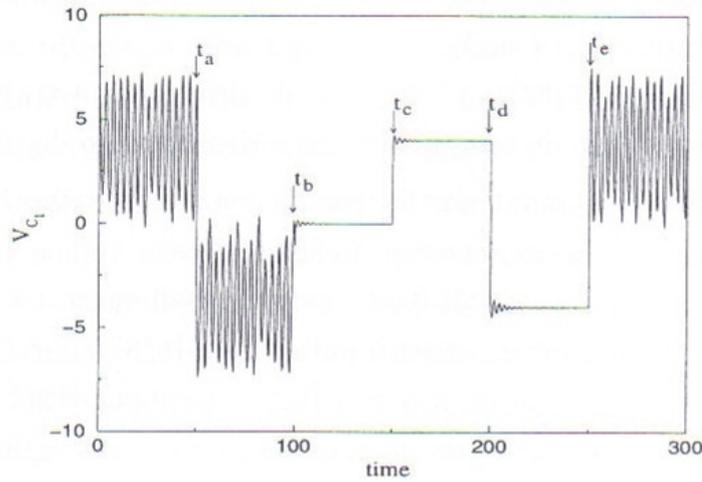


Figura 7.19: Aplicação do método de controle OPCL para migração entre atratores do sistema de Matsumoto-Chua mostrados na Figura 7.18. Migração a partir do atrator caótico tipo Rössler da esquerda para outros atratores. No tempo  $t_a$  aplica-se a migração para o atrator caótico da direita, em  $t_b$  migra-se para o ponto fixo trivial, em  $t_c$  e  $t_d$  migra-se para os pontos fixo da esquerda e direita, respectivamente. Em  $t_e$  retiramos o controle deixando o sistema voltar ao seu movimento original.

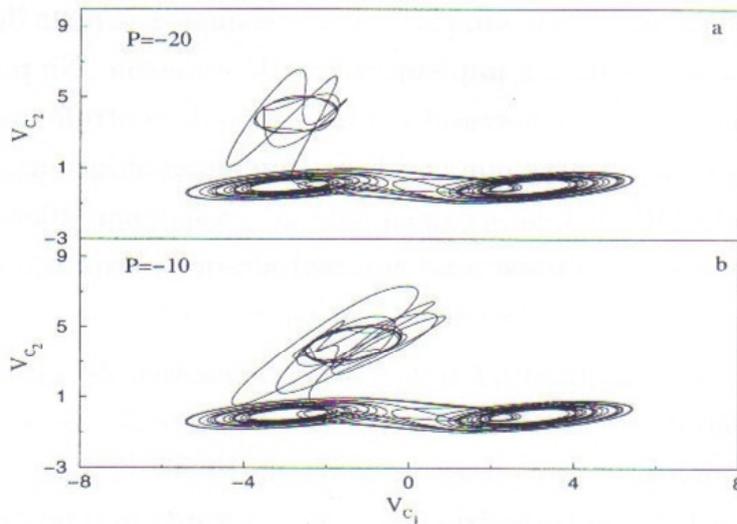


Figura 7.20: Arraste (*Entrainment*) do circuito a partir do atrator caótico Double-Scroll para um atrator arbitrário inserido no espaço de fase para  $P = -20$  (a) e  $P = -10$  em (b). Nota-se que quanto menor for o valor de  $P$ , o processo de *entrainment* é mais demorado. Por outro lado, a ação do controle é fisicamente menos abrupta.

sistemas haja um transiente longo. Em muitas aplicações de controle de caos e métodos de comunicação que utilizam caos, é necessário atingir uma região do espaço de fase específica no menor tempo possível [113][122]. O processo de direcionar a trajetória do sistema para um ponto específico do espaço de fase do sistema é denominado de direcionamento [113].

A primeira idéia de direcionamento foi implementada por Shinbrot *et al.* [113]. Sua implementação usa um parâmetro acessível do sistema para aplicar perturbações sucessivas de forma a atingir o *alvo* no espaço de fase. Este procedimento foi testado em vários sistemas tais como: atingir uma órbita caótica para a Lua [123], controle de sistemas de altas dimensões [124], e transmissão de informação [125]. Baptista [126] sugere um método de direcionamento, aplicando perturbações de correções de órbitas vizinhas distanciadas de  $\epsilon$ . A correção de órbita significa que, se  $A$  é a posição atual da trajetória, após aplicarmos a perturbação  $\delta$ , a trajetória é transferida para  $A + \delta$ .

Recentemente foi proposto por Baptista *et al.* [127] um novo esquema de comunicação baseado em caos. Nesse esquema integrado de comunicação caótica o ponto chave é usar a dinâmica caótica como um meio de codificar e decodificar informação e como um gerador de sinal ondulatório. Em outras palavras, o sinal caótico não é somente a portadora mas também a mensagem. O processo de codificação e decodificação da mensagem usa uma partição dinâmica do espaço de fase, cuja construção é baseada na própria fonte da mensagem e não na dinâmica do sistema como é feito em [125]. Neste esquema, a idéia de correção da órbita é um dos processos necessários para a implementação do esquema. No processo de codificação da fonte nas trajetórias caóticas é necessário um método de controle que permita a migração entre diferentes pedaços de órbitas que codificam diferentes informações. Mostramos neste trabalho que o método OPCL tem a capacidade de concatenar diferentes órbitas, através de um processo de migração e também ser um método que permita o direcionamento como sugerido em [126].

Usando o circuito de Matsumoto-Chua no regime caótico de Espiral-Dupla ( $g = 0,6$ ), construímos uma seção de Poincaré em  $V_{C_1} = 1,5$ . Nesta seção, selecionamos cinco órbitas distanciadas entre si de  $0,1 < d < 0,15$  ( $d$ -distância Eucliana entre os pontos que as trajetórias geram na seção). Cada trajetória é gravada durante um intervalo de tempo  $\Delta t = 50$ . Essas trajetórias determinam a função  $g(t)$ , usada para migração. Mostramos na Figura 7.21 a evolução temporal da variável  $V_{C_1}$  do atrator caótico juntamente com as cinco trajetórias com esta mesma variável, antes e após a aplicação do método de migração aplicado ao sistema. Na Figura 7.21 a) mostramos a evolução temporal da variável  $V_{C_1}$  do atrator sem a aplicação do controle (linha sólida no gráfico) juntamente com as cinco órbitas selecionadas

que queremos migrar (linha pontilhada). Podemos notar que a evolução temporal das trajetórias selecionadas é totalmente diferente da evolução da trajetória do atrator. Na Figura 7.21 b) mostramos a trajetória do atrator com aplicação do método OPCL (linha sólida) e as trajetórias selecionadas (linha pontilhada). O controle de migração é aplicado a partir de  $t = 100$ . Na Figura 7.21 c) mostramos a diferença entre a variável  $V_{C_1 a}$  do atrator caótico e  $V_{C_1 o}$  das órbitas selecionadas quando se aplica a migração. Em cada valor  $m_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ), a trajetória é forçada a migrar para uma órbita diferente. Nota-se que o processo de migração é eficaz, fazendo com a trajetória atual do atrator migre e reproduza a evolução das trajetórias previamente gravadas.

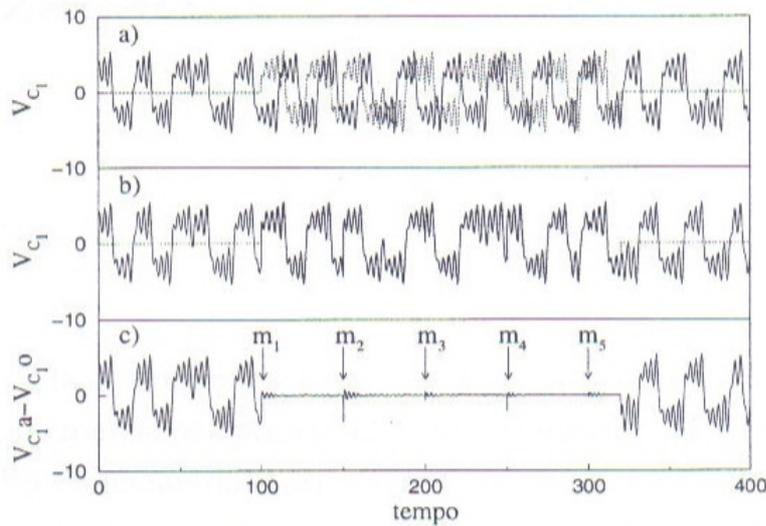


Figura 7.21: Migração entre órbitas. a) Evolução temporal da variável  $V_{C_1}$  do atrator caótico (linha sólida) juntamente com as órbitas selecionadas (linha pontilhada). b) Evolução temporal de  $V_{C_1}$  com o controle OPCL de migração para 5 órbitas diferentes pré-selecionadas; c) Diferença entre a variável  $V_{C_1 a}$  do atrator caótico e das órbitas pré-selecionadas  $V_{C_1 o}$ .

# Capítulo 8

## Sincronização

### 8.1 Introdução

Este capítulo aborda a sincronização de circuitos de Matsumoto-Chua caóticos. Dois circuitos acoplados sincronizados apresentam comportamentos caóticos idênticos, apesar da dependência às condições iniciais das trajetórias. Essa sincronização pode ser explorada para implementar um método de comunicação baseado em dinâmica caótica. Inicialmente, descreveremos alguns métodos de sincronização que aplicaremos na sincronização de circuitos com coexistência de atratores de Rössler. Aplicamos o método OPCL (*Open Plus Close Loop*), juntamente com os métodos usuais de sincronização, para migração e posterior sincronização para sistemas que apresentam coexistência de atratores. Analisamos a influência das condições iniciais no processo de sincronização através da obtenção das bacias de sincronização. Mostramos que dois circuitos de Matsumoto-Chua acoplados, no regime caótico de Espiral-Dupla, apresentam bacias de atração crivada e intercrivada (*riddled* e *intermingled*) para os estados sincronizado e não-sincronizado deste sistema. Uma outra condição necessária para que ocorra sincronização pode ser determinada pelos expoentes de Lyapunov condicional transverso (expoente calculado a partir das diferenças das variáveis dos circuitos acoplados). Esta condição é analisada através de diagramas no espaço de parâmetros deste expoente. E, finalmente, aplicamos o método de transmissão de mensagem e recepção, sugerido por Cuomo e Oppenheim [128], para exemplificar uma possível aplicação de comunicação baseada em sincronização de sistemas caóticos.

## 8.2 Fundamentos gerais de sincronização

Nesta seção apresentaremos algumas considerações gerais sobre a sincronização de oscilações periódicas e caóticas.

### 8.2.1 Sincronização de oscilações periódicas

Estudos de sincronização entre sistemas acoplados remontam aos trabalhos iniciados por Huygens [129]. A sincronização é um fenômeno de interesse em áreas como: Mecânica Celeste, Física de Laser, Comunicação, Neurociência e Fisiologia [130]. Em Fisiologia, por exemplo, são clássicos alguns problemas relacionados ao tema. Podemos citar alguns exemplos: a arritmia respiratória sinusal; fenômeno relacionado com a modulação da frequência cardíaca pela respiração, devido a um acoplamento complexo entre os dois ritmos [131]. Acoplamento entre o ventilador e a respiração; este é um problema relacionado a situações clínicas agudas e crônicas, onde o paciente é submetido à ventilação mecânica. O processo de ajustar o aparelho de forma que o paciente não *lute contra o ventilador*, ou seja, que haja uma sincronização cooperativa entre o ritmo de respiração do paciente e o aparelho é quase-empírico e, apesar de sua importância prática na clínica médica, este problema parece longe de ser solucionado [132]. Citamos outros problemas relacionados ao tema, tais como: a arritmia do sono, o ajuste do marcapasso cardíaco, o acoplamento respiração - locomoção e a coordenação entre membros [129].

No geral, a sincronização de sistemas periódicos é entendida como a capacidade de osciladores acoplados auto-excitados, com diferentes frequências, modificarem de comportamentos. Os osciladores passam de regime de oscilações independentes, caracterizadas por batimentos [29], para regime de oscilações periódicas estáveis e cooperativas, à medida que se aumenta a intensidade do acoplamento. Como resultado da sincronização, os osciladores mudam suas frequências, de forma que estas tornam-se idênticas ou a razão entre elas torna-se racional. Dependendo das propriedades dos osciladores considerados, podemos ter diferentes explicações para as sincronizações. A primeira teoria não linear que trata de sincronização de osciladores quase-harmônicos é devido a Van der Pol [133]. Na literatura há inúmeros livros e trabalhos referentes à teoria de sincronização de osciladores periódicos. As referências [29], [134] e [82] podem ser úteis para o entendimento das principais características que geram o comportamento sincronizado.

A despeito da complexidade dos mecanismos envolvidos no processo de sincronização, o fenômeno de sincronização de osciladores periódicos possui uma interpretação geométrica

simples. A imagem das oscilações periódicas no espaço de fase de um sistema autônomo é um ciclo limite estável. O comportamento de uma rede de  $n$  osciladores periódicos acoplados depende do parâmetro de acoplamento entre os osciladores. No espaço de fase da rede com acoplamento nulo, após eliminarmos o transiente, as oscilações correspondem a trajetórias que percorrem a superfície de um toro estável  $n$ -dimensional. O fenômeno de sincronização entre osciladores periódicos pode ser compreendido como a habilidade da rede de osciladores em trocar do comportamento das oscilações quase periódicas, associadas ao movimento quase periódico executado sob o toro estável, para oscilações periódicas, a medida que aumenta a intensidade do acoplamento entre os osciladores. Por isso, a imagem de oscilações periódicas sincronizadas é novamente um ciclo limite estável, porém agora este ciclo limite é resultante da intersecção dos  $n$  toros presentes no espaço de fase da rede dos osciladores acoplados [135].

### 8.2.2 Sincronização de oscilações caóticas

O mecanismo para o estabelecimento da sincronização entre sistemas caóticos difere do mecanismo de sincronização de sistemas periódicos. Diferente do caso de sincronização entre osciladores idênticos em regime periódico, a sincronização entre osciladores caóticos idênticos é, em geral, caracterizada por um certo valor crítico do acoplamento necessário para que haja sincronização. A razão para a existência deste valor crítico é a instabilidade local das trajetórias caóticas presente no atrator caótico. De fato, para se conseguir a sincronização em sistemas acoplados, a instabilidade do circuito escravo (que se quer sincronizar) tem que ser suprimida [136],[137],[135].

O trabalho pioneiro em sincronização entre sistemas caóticos acoplados foi feito por Yamada e Fujisaka [138]. Nesse trabalho, os autores demonstraram que dois sistemas idênticos com dinâmica caótica individual podem trocar suas oscilações caóticas não-correlacionadas por oscilações caóticas idênticas. Esta sincronização foi definida por Afraimovich *et al.* [139] como sincronização completa; este autor fez ainda o primeiro estudo teórico referente a estabilidade da sincronização.

A partir de 1990 intensificou-se o estudo de sincronização em sistemas caóticos com o trabalho de Pecora e Carroll [130], exposto na seção seguinte. Uma gama imensa de trabalhos tem mostrado que, assim como oscilações periódicas ou quase periódicas, sistemas caóticos também podem ser sincronizados [109], [140], [141], [142]. Um leque de aplicações voltadas à comunicação abriu-se desde então, uma vez que sincronização é uma técnica essencial para muitos tipos de comunicação, não somente quando se usa dinâmica caótica

[142]. Possíveis aplicações para uso em robótica e implantes biológicos foram sugeridos. Nessas aplicações, deseja-se que as várias partes do sistema, quando acopladas, hajam de forma conjunta, preservando porém o comportamento caótico das partes envolvidas. Para termos esta aplicação eficiente, estuda-se maneiras para alcançar a sincronização usando um número mínimo de sinais compartilhados. O ideal seria sincronizar o sistema com um acoplamento função de um único sinal. Em suma, há um vasto campo de aplicação em sincronização, seja com um processo que envolva dinâmica caótica ou não. Neste trabalho, estamos interessados em estudar diretamente o processo de sincronização caótica aplicado ao circuito elétrico de Matsumoto-Chua.

### 8.3 Método Pecora-Carroll

O primeiro método de sincronização que mostraremos foi introduzido por Pecora e Carroll [130], e consiste em um *circuito mestre* (ou circuito de forçamento) e um *circuito escravo* (ou circuito forçado) idênticos acoplados unidirecionalmente (o circuito mestre oscila independentemente do circuito escravo). Estes dois subsistemas - mestre e escravo - exibem um comportamento caótico.

Sejam dois circuitos de Matsumoto-Chua  $\mathbf{X}_1 \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{X}_1)$  e  $\mathbf{X}_2 \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{X}_2)$ . Uma (ou mais) variável do circuito mestre é usada como variável dinâmica do sistema escravo e, por essa razão, esse método é também chamado de substituição total. Para alcançar isto, dividimos cada circuito em duas partes, uma parte do circuito mestre é usada para fazer a ligação ao circuito escravo possibilitando a comunicação entre os sistemas. Não há regra para se fazer a divisão, embora uma boa tentativa seja escolher variáveis que geram no sistema escravo um *expoente condicional* negativo (expoente calculado a partir da jacobiana gerada pela diferença entre as variáveis do circuito mestre e escravo).

Com a divisão escolhida, temos para o circuito mestre:

$$\mathbf{X}_1(t) = [\mathbf{Y}_1(t), Z_1(t)], \quad (8.1)$$

onde  $\mathbf{Y}_1$  é uma variável dinâmica com uma dimensão a menos do que a dimensão-3 do circuito mestre completo  $\mathbf{X}_1(t)$  e  $Z(t)$  é de dimensão-1.  $Z(t)$  é a parte do circuito mestre que será usada para ligação com o circuito escravo. As equações do sistema mestre são:

$$\frac{d\mathbf{Y}_1}{dt} = \mathbf{F}_y(\mathbf{Y}_1(t), Z(t)) \quad (8.2)$$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = F_z(\mathbf{Y}_1(t), Z(t)).$$

O sinal  $Z(t)$  é usado para forçar o sistema escravo, o qual é dividido como  $\mathbf{X}_2(t) = [\mathbf{Y}_2(t), Z(t)]$ , dessa forma, a componente  $\mathbf{X}_2$  do circuito escravo é agora idêntica à componente do circuito mestre  $\mathbf{X}_1$ . A equação do circuito escravo é:

$$\frac{d\mathbf{Y}_2}{dt} = \mathbf{F}_y(\mathbf{Y}_2(t), Z(t)) \quad (8.3)$$

### 8.3.1 Lyapunov condicional

Consideramos que os sistemas 8.2 e 8.3 estão sincronizados quando  $\mathbf{Y}_1(t) = \mathbf{Y}_2(t)$ , para determinadas condições iniciais que constituem a bacia de atração para a sincronização. Esta condição é estável quando pequenas perturbações ou variações  $\Delta\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_1(t) - \mathbf{Y}_2(t)$  tendem a zero com o tempo. Se a variação permanecer pequena, a dinâmica da perturbação é dada aproximadamente por:

$$\frac{d\Delta\mathbf{Y}(t)}{dt} = \mathbf{DF}_y(\mathbf{Y}_1(t), Z(t)) \cdot \Delta\mathbf{Y}(t), \quad (8.4)$$

onde  $\mathbf{DF}_y(\mathbf{Y}(t), Z(t))$  é a matriz Jacobiana condicional, de dimensão-2, em torno de  $\mathbf{Y}_1(t)$ . A denominação de condicional vem do fato da matriz estar condicionada ao valor da variável  $Z(t)$ . A partir desta Jacobiana e da Equação 8.2 determina-se os expoentes de Lyapunov do sistema acoplado, chamados de expoentes de Lyapunov condicionais.

Foi mostrado [130] que a condição necessária para:

$$|\mathbf{Y}_1(t) - \mathbf{Y}_2(t)| \rightarrow 0 \quad (8.5)$$

ou seja, que os dois circuitos estejam sincronizados, é que todos os expoentes de Lyapunov condicionais sejam negativos [130]. O limite entre o estado sincronizado e o não sincronizado corresponde à transição do comportamento caótico para o hipercaótico e, conforme mostrado por Vieira [143], este comportamento ocorre quando há pelo menos dois expoentes de Lyapunov condicionais positivos [144], [145].

Exemplificaremos o método de Pecora e Carroll aplicando-o a dois circuitos de Matsumoto-Chua no regime caótico de Espiral-Dupla ( $g = 0, 6$ ). Na Figura 8.1 mostramos a projeção das

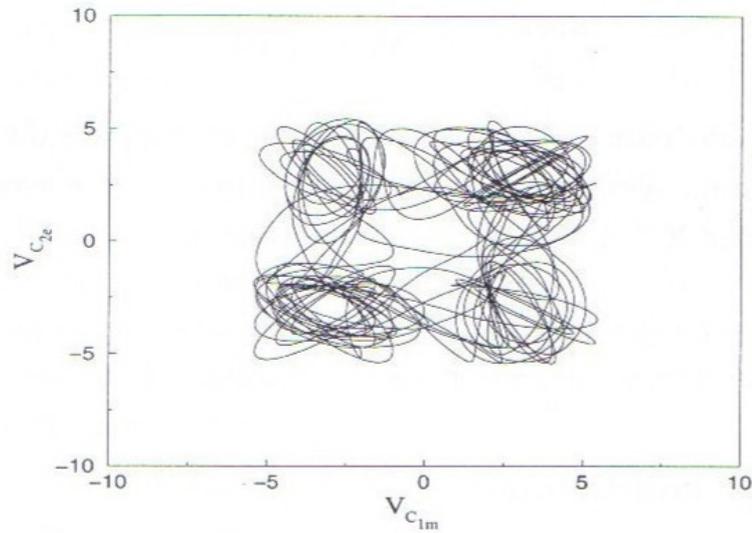


Figura 8.1: Oscilações dos circuitos no estado não sincronizado. Projeção da variável  $V_{C_{1m}}$  do circuito mestre versus  $V_{C_{1e}}$  do circuito escravo, circuitos no regime caótico de Espiral-Dupla ( $g = 0,6$ ).

variáveis  $V_{1e}$  versus  $V_{C_{1m}}$ , pertencentes ao circuito escravo e mestre no estado não sincronizado. A sincronização ocorre se o comportamento dinâmico do estado acoplado for equivalente à dinâmica caótica de um único circuito operando no regime caótico de Espiral-Dupla.

Para aplicarmos o método de Pecora, decompomos o conjunto dos circuitos em dois modos diferentes:

- (1) configuração com variável  $V_{C_1}$ -mestre, temos que as equações de movimento tornam-se

1-A) Circuito mestre:

$$C_1 \frac{dV_{C_{1m}}}{dt} = g(V_{C_{2m}} - V_{C_{1m}}) - i_{NRm}(V_{C_{1m}}), \quad (8.6)$$

$$C_2 \frac{dV_{C_{2m}}}{dt} = g(V_{C_{1m}} - V_{C_{2m}}) + i_{Lm}, \quad (8.7)$$

$$L \frac{di_{Lm}}{dt} = -V_{C_{2m}}. \quad (8.8)$$

1-B) Circuito escravo:

$$C_2 \frac{dV_{C_{2e}}}{dt} = g(V_{C_{1m}} - V_{C_{2e}}) + i_{Le}, \quad (8.9)$$

$$L \frac{di_{Le}}{dt} = -V_{C_{2e}}. \quad (8.10)$$

Nota-se que no circuito escravo não é necessário a Equação 8.6, pois ela se torna redundante, tanto experimentalmente quanto na simulação, pois  $V_{C_{1m}} = V_{C_{1e}}$ .

Mostramos o resultado da simulação para as equações acima na Figura 8.2. Para circuitos no regime Espiral-Dupla ( $g = 0,6$ ). Foram usadas condições iniciais diferentes nos circuitos mestre e escravo. Apresentamos as variáveis  $V_{C_{2e}}$  versus  $V_{C_{2m}}$ , dos circuitos escravo e mestre, respectivamente. A linha reta indica que a sincronização dos circuitos no regime de Espiral-Dupla foi alcançada, ou seja  $V_{C_{2e}} = V_{C_{2m}}$ , como impusemos  $V_{C_{1m}} = V_{C_{1e}}$ , concluímos que  $i_{Lm} = i_{Le}$ , após o intervalo transitório necessário para que ocorra a sincronização.

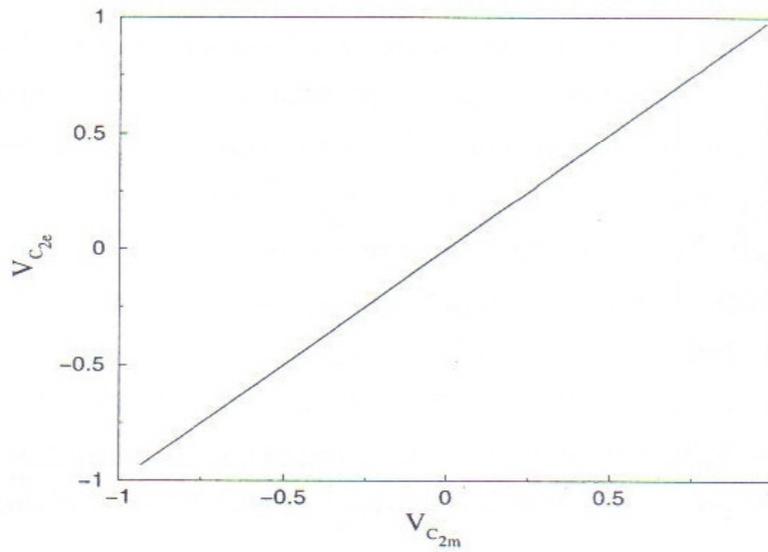


Figura 8.2: Sincronização através do método de Pecora-Carroll (Variável mestre  $V_{C_{1m}}$ ), circuitos no regime Espiral-Dupla ( $g = 0.6$ ). Projeção da variável  $V_{C_{2m}}$  do circuito versus  $V_{C_{2e}}$  do circuito escravo.

(2) configuração com variável  $V_{C_2}$ -mestre, temos que as equações de movimento tornam-se

2-A) Circuito mestre:

$$C_1 \frac{dV_{C_{1m}}}{dt} = g(V_{C_{2m}} - V_{C_{1m}}) - i_{NRm}(V_{C_{1m}}), \quad (8.11)$$

$$C_2 \frac{dV_{C_{2m}}}{dt} = g(V_{C_{1m}} - V_{C_{2m}}) + i_{Lm}, \quad (8.12)$$

$$L \frac{di_{Lm}}{dt} = -V_{C_{2m}}. \quad (8.13)$$

2-B) Circuito escravo:

$$C_1 \frac{dV_{C_{1e}}}{dt} = g(V_{C_{2m}} - V_{C_{1e}}) - i_{NRe}(V_{C_{1e}}), \quad (8.14)$$

$$L \frac{di_{Le}}{dt} = -V_{C_{2e}}. \quad (8.15)$$

Na Figura 8.3 mostramos a projeção das variáveis  $V_{C_{1e}}$  versus  $V_{C_{1m}}$ , dos circuitos escravo e mestre, respectivamente. Nota-se a perfeita sincronização dos circuitos na reta diagonal presente no gráfico.

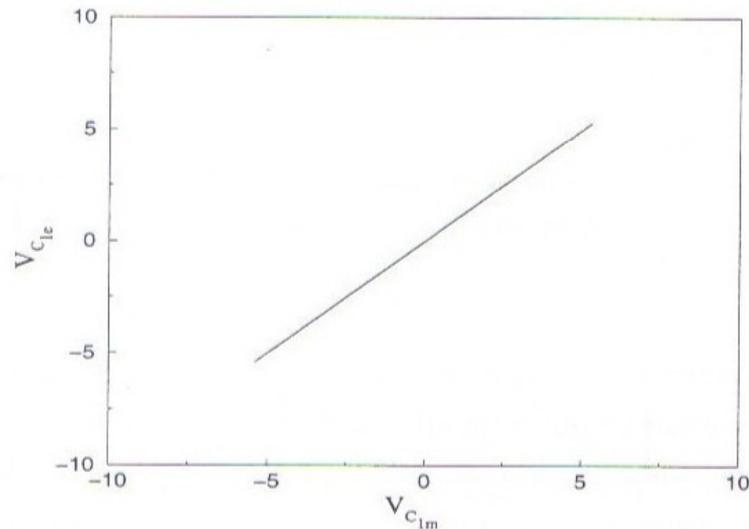


Figura 8.3: Sincronização através do método de Pecora-Carroll (Variável mestre  $V_{C_{2m}}$ ), circuitos no regime Espiral-Dupla. Projeção da variável  $V_{C_{1e}}$  do circuito escravo versus  $V_{C_{1m}}$  do circuito mestre.

### 8.3.2 Variedade de sincronização e variedade transversa

Para o método de Pecora-Carroll, ou substituição total, vimos que os dois sistemas de Matsumoto-Chua sincronizam, ou seja, as diferenças das variáveis no primeiro caso  $|V_{C_{2m}} - V_{C_{2e}}| \rightarrow 0$  e  $|i_{L_m} - i_{L_e}| \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ , após o transiente, onde  $t$  é o tempo. Para entendermos o processo que leva os sistemas a sincronizarem é conveniente trabalharmos com novas variáveis definidas por:

$$V_{C_{1\perp}} = V_{C_{1m}} - V_{C_{1e}} ; \quad V_{C_{1\parallel}} = V_{C_{1m}} + V_{C_{1e}}$$

$$\begin{aligned} V_{C_{2\perp}} &= V_{C_{2m}} - V_{C_{2e}} ; & V_{C_{2\parallel}} &= V_{C_{2m}} + V_{C_{2e}} \\ i_{L\perp} &= i_{Lm} - i_{Le} ; & i_{L\parallel} &= i_{Lm} + i_{Le}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Este procedimento, transforma o conjunto das variáveis originais em um novo conjunto de variáveis.

As coordenadas  $(V_{C_{1\parallel}}, V_{C_{2\parallel}}, i_{L\parallel})$  estão sobre a variedade de sincronização ou plano de sincronização (região do espaço de fase onde o atrator caótico no estado sincronizado se localiza) e  $(V_{C_{1\perp}}, V_{C_{2\perp}}, i_{L\perp})$  estão sobre a variedade transversa (região do espaço de fase definido pela diferença das variáveis mestre e escravo). Essas variáveis descrevem a dinâmica do plano de sincronização (ou variedade de sincronização) e serão usadas para o cálculo dos expoentes condicionais. No caso em particular, usando o método de Pecora-Carroll, nota-se que a variável mestre  $V_{C_{1m}}$ , usada para forçar o sistema escravo, faz com que  $V_{C_{1\perp}} = 0$ . O cálculo dos expoentes de Lyapunov dessas novas variáveis, Equações 8.16, definem os expoentes de Lyapunov condicionais, como já vimos anteriormente, os quais caracterizam o tipo de estabilidade do sistema acoplado em relação aos planos da variedade de sincronização e da variedade transversa. Ressaltamos, que uma condição necessária, mas não suficiente, para ocorrer a sincronização é que todos os expoentes condicionais transversos sejam negativos. As condições iniciais também são relevantes para o processo, como veremos subsequentemente.

## 8.4 Método de realimentação

Nesta seção, vamos considerar dois circuitos de Matsumoto-Chua acoplados entre si, através de um resistor conforme mostrado na Figura 8.4.

Vamos usar dois tipos de acoplamentos resistivos. No primeiro tipo de acoplamento, considerado a seguir no item 7.4.1, chamado de acoplamento unidirecional, os mesmos pontos são conectados através de um resistor e de um amplificador operacional de ganho unitário (mostrado na Figura 8.4). Esse acoplamento dissipativo unidirecional, pode ser considerado como um controle de *feedback* negativo, como o método de controle proposto por Pyragas [20]. O segundo tipo de acoplamento, considerado a seguir no item 8.4.3, chamado acoplamento mútuo, é feito através da conexão de pontos similares de cada um dos dois circuitos, através de um resistor.

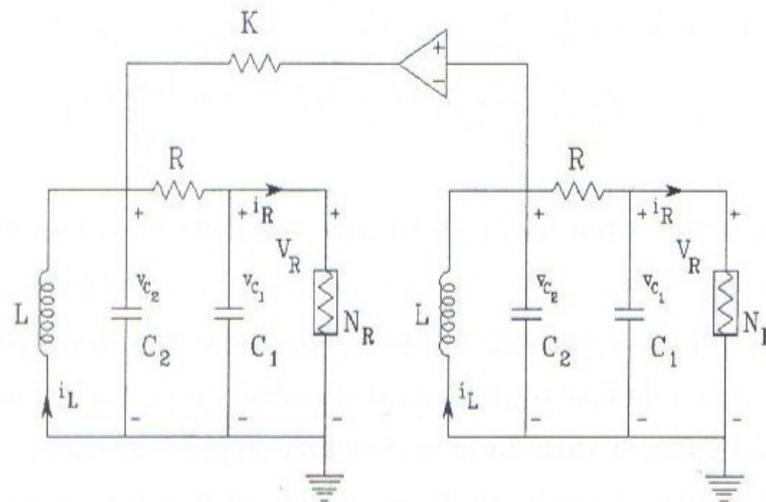


Figura 8.4: Diagrama esquemático para a sincronização de dois circuitos de Matsumoto-Chua acoplados unidirecionalmente.

### 8.4.1 Acoplamento unidirecional

Consideremos dois circuitos em regime caótico. Devido à instabilidade local das trajetórias desses atratores, as oscilações em circuitos desacoplados ( $R \rightarrow \infty$ ); sendo  $R$  a resistência do resistor de acoplamento, são descorrelacionadas. Temos que os modos de oscilações nos circuitos mestre e escravo são idênticos, porém independentes. Ao se introduzir o acoplamento, fazemos com que o modo de oscilação do circuito mestre suprima o comportamento inicial descorrelacionado do circuito escravo. O mecanismo físico dessa supressão é a dissipação de energia no resistor de acoplamento. A diferença nas tensões induz uma corrente nesse resistor. Com um baixo valor da resistência  $R$ , uma corrente alta é induzida no resistor. Se a dissipação é suficiente para suprimir a instabilidade no circuito escravo, então ambos circuitos passam a apresentar oscilações caóticas idênticas.

Estes acoplamentos, mostrados na Figura 8.4, podem ser modelados da seguinte forma: sejam dois sistemas caóticos, representados pelas variáveis  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ . Usamos o seguinte procedimento:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) \\ \dot{\mathbf{Y}} &= \mathbf{F}(\mathbf{Y}) + \mathbf{KE}(\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i)\end{aligned}\quad (8.17)$$

onde  $E$  é a matriz que determina a combinação linear das componentes  $\mathbf{X}$  que serão us-

adas no controle de realimentação (*feedback*). O parâmetro  $K$  determina a intensidade do acoplamento. Este procedimento geral é ilustrado na Figura 8.5.

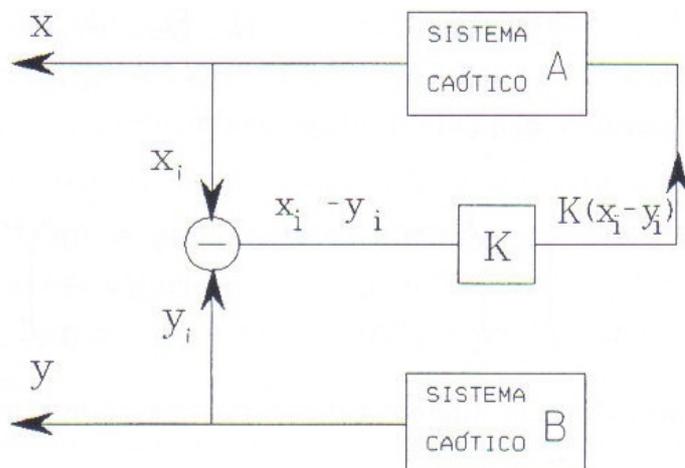


Figura 8.5: Sincronização através do método de realimentação . Constante de acoplamento  $K$ .

Para o circuito de Matsumoto-Chua, temos: Circuito mestre:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{C_{1m}}}{dt} &= g(V_{C_{2m}} - V_{C_{1m}}) - i_{NRm}(V_{C_{1m}}), \\ C_2 \frac{dV_{C_{2m}}}{dt} &= g(V_{C_{1m}} - V_{C_{2m}}) + i_{Lm}, \\ L \frac{di_{Lm}}{dt} &= -V_{C_{2m}}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Circuito escravo:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{C_{1e}}}{dt} &= g(V_{C_{2e}} - V_{C_{1e}}) - i_{NRe}(V_{C_{1e}}), \\ C_2 \frac{dV_{C_{2e}}}{dt} &= g(V_{C_{1e}} - V_{C_{2e}}) + i_{Le} + K(V_{C_{2e}} - V_{C_{2m}}), \\ L \frac{di_{Le}}{dt} &= -V_{C_{2e}}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Neste caso, escolhemos:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para qualquer valor de  $K$ , podemos calcular os expoentes de Lyapunov transversos (definido pelas variáveis perpendiculares ao plano de sincronização) das equações anteriores. Usamos novamente as variáveis transversas ao plano de sincronização ( $V_{C_{1\perp}} = V_{C_{1m}} - V_{C_{1e}}, V_{C_{2\perp}} = V_{C_{1m}} - V_{C_2}, i_{L\perp} = i_{L_m} - i_{L_e}$ ). Fazendo este procedimento, usando as Equações 8.18 e 8.19, determinamos a equação variacional (sistema linear dependente do sistema não linear) do sistema acoplado unidirecionalmente:

$$\begin{pmatrix} \frac{dV_{C_{1\perp}}}{dt} \\ \frac{dV_{C_{2\perp}}}{dt} \\ \frac{di_{L\perp}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10(g + F) & 10g & 0 \\ g & -(g + K) & 1 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.20)$$

onde  $F$ , é agora determinado pela diferença das curvas características ( $F_{\perp} = i_{NL_m} - i_{NL_e}$ ), sendo:

$$i_{NL_m} = \begin{cases} B_p(m_0 - m_1) + m_0 V_{C_{1m}} \\ m_1 V_{C_{1m}} \\ B_p(m_1 - m_0) + m_0 V_{C_{1m}} \end{cases} \quad (8.21)$$

e

$$i_{NL_e} = \begin{cases} B_p(m_0 - m_1) + m_0 V_{C_{1e}} \\ m_1 V_{C_{1e}} \\ B_p(m_1 - m_0) + m_0 V_{C_{1e}} \end{cases} \quad (8.22)$$

Portanto, a diferença nas curvas características é dada por:

$$F_{\perp} = i_{NL_m} - i_{NL_e} = \begin{cases} m_0(V_{C_{1e}} - V_{C_{1m}}) = m_0(V_{C_{1m}} - V_{C_{1e}}) \\ m_1(V_{C_{1e}} - V_{C_{1m}}) = m_1(V_{C_{1m}} - V_{C_{1e}}) \\ m_0(V_{C_{1e}} - V_{C_{1m}}) = m_0(V_{C_{1m}} - V_{C_{1e}}) \end{cases} \quad (8.23)$$

Temos então que:

$$\frac{\partial F_{\perp}}{\partial V_{C_{1\perp}}} = F = \begin{cases} m_0 & D^+ \\ m_1 & D^0 \\ m_0 & D^- \end{cases} \quad (8.24)$$

### 8.4.2 Diagrama no espaço dos parâmetros do expoente de Lyapunov condicional transverso

A partir da equação variacional 8.20 (Jacobiana usando as variáveis transversas) e da Equação 8.18, do circuito mestre, podemos determinar os expoentes de Lyapunov condicionais transversos ( $\lambda_{\perp}$ ). O expoente de Lyapunov condicional é calculado como descrito no Capítulo 3, ou seja, de acordo com o método de Wolf *et al.* [14]. Como anteriormente, vamos analisar o maior dos expoentes. Verifica-se que a única diferença na equação variacional (ou Jacobiana) para o sistema com e sem acoplamento é a presença do fator de acoplamento  $K$ , responsável por fazer o expoente de Lyapunov condicional transverso do circuito escravo ser menor que zero, quando excitado pelo circuito mestre.

Na Figura 8.6, temos um diagrama do expoente de Lyapunov condicional em função dos parâmetros  $K$  e  $g$  (inverso da resistência linear) para o acoplamento unidirecional. Uma grade de  $300 \times 300$  valores foi usada para gerar o diagrama. Nessa figura, quanto mais escuro, menor o expoente condicional. A sincronização, em geral, ocorrerá para o par de parâmetro  $K$  e  $g$ , tais que o expoente seja menor que zero. Entretanto, é possível encontrar uma condição inicial que leva o sistema a um estado não sincronizado para os mesmos valores de  $K$  e  $g$  que outra condição inicial levou a um estado sincronizado. A questão da condição inicial será tratada posteriormente. A partir do gráfico podemos concluir que o expoente de Lyapunov condicional será negativo, para qualquer valor do parâmetro  $g$  a partir de  $K \approx 2$ . Vale ressaltar, que para certos valores de  $g$ , teremos movimento periódico nos circuitos. A sincronização é confinada ao plano de sincronização, de forma que o Lyapunov condicional deve ser negativo para qualquer tipo de sincronização no regime caótico ou periódico.

Mostramos na Figura 8.7, a ampliação de uma região da Figura 8.6, na transição do expoente de Lyapunov condicional transverso, de positivo para negativo, o que ocorre entre  $0,0 < K < 2,5$ . Para acoplamento unidirecional usando a variável  $V_{C_2}$ , com a variável mestre atuando no circuito escravo, percebe-se através do diagrama de Lyapunov condicional que a sincronização ocorrerá, em média, para valores da constante de acoplamento acima de  $K = 0,5$ , aproximadamente, como pode ser visto no gráfico, uma vez que o expoente condicional torna-se negativo a partir desse valor.

Modificamos a forma de apresentação dos gráficos para mostrar a transição onde o expoente de Lyapunov transverso passa de positivo para negativo. Consideramos apenas duas cores, preto para indicar expoente condicional positivo ( $\lambda_{\perp} > 0,02$ ) e branco para indicar se o expoente condicional é negativo ( $\lambda_{\perp} < -0,02$ ). Mostramos na Figura 8.8 a região de

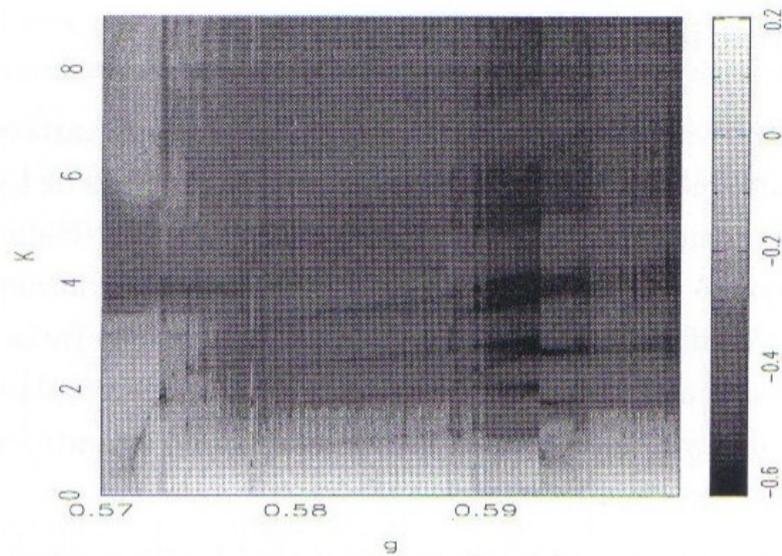


Figura 8.6: Diagrama no espaço dos parâmetros  $K$  e  $g$  para expoente de Lyapunov condicional das variáveis transversas à variedade de sincronização. Quanto mais escura a cor, menor o valor do expoente  $e$ , portanto indicando que ocorrerá sincronização para o par de parâmetros escolhidos.

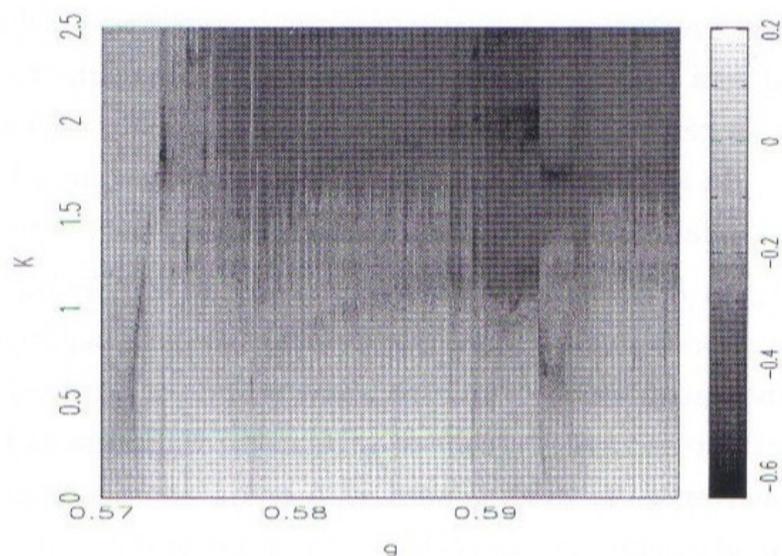


Figura 8.7: Ampliação do diagrama no espaço dos parâmetros  $K$  e  $g$  para expoente de Lyapunov condicional das variáveis transversas à variedade de sincronização. Região de transição do expoente positivo para negativo.

transição para o intervalo  $0,575 < g < 0,578$ . Verificamos que a transição ocorre para um valor de  $K$  que depende de  $g$ . Entretanto, esses valores estão em torno de  $K \approx 0,5$ .

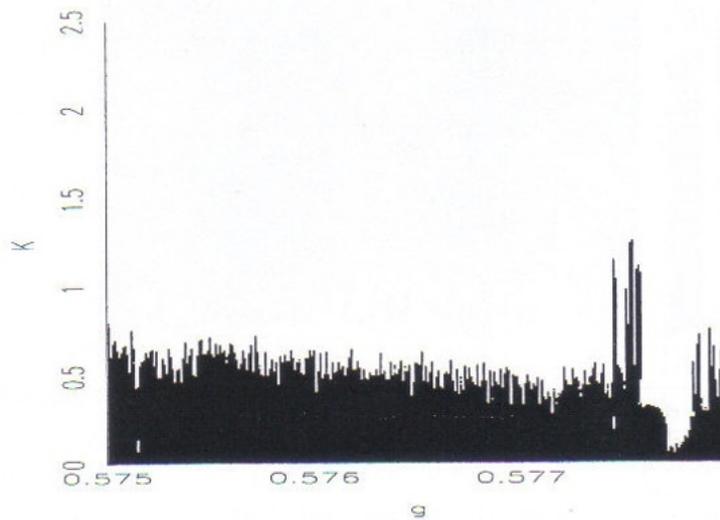


Figura 8.8: Região de transição (de positivo para negativo) do expoente de Lyapunov condicional. Região em preto: expoente de Lyapunov positivo ( $\lambda_{\perp} > 0,02$ ); região em branco: expoente de Lyapunov negativo ( $\lambda_{\perp} < -0,02$ ).

### 8.4.3 Acoplamento mútuo

Quando o circuito mestre e escravo são acoplados através de uma mesma variável com uma realimentação em ambos os circuitos, temos o acoplamento mútuo. Neste caso, a dissipação, induzida pelo acoplamento mútuo, gera um regime energeticamente favorável ao estabelecimento de comportamento comum e, portanto, a sincronização. Este acoplamento pode ser modelado da seguinte forma: sejam dois circuitos caóticos descritos por  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$ . A evolução das variáveis é determinada pelas equações:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{X}_1) + KE(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \\ \dot{\mathbf{X}}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{X}_2) + KE(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)\end{aligned}\quad (8.25)$$

As equações seguintes definem o acoplamento mútuo de dois circuitos de Matsumoto-Chua, acoplados através da variável  $V_{C_2}$ :

Circuito mestre:

$$\begin{aligned}
C_1 \frac{dV_{C_{1m}}}{dt} &= g(V_{C_{2m}} - V_{C_{1m}}) - i_{NRm}(V_{C_{1m}}), \\
C_2 \frac{dV_{C_{2m}}}{dt} &= g(V_{C_{1m}} - V_{C_{2m}}) + i_{Lm} + K(V_{C_{2m}} - V_{C_{2e}}), \\
L \frac{di_{Lm}}{dt} &= -V_{C_{2m}}.
\end{aligned} \tag{8.26}$$

Circuito escravo:

$$\begin{aligned}
C_1 \frac{dV_{C_{1e}}}{dt} &= g(V_{C_{2e}} - V_{C_{1e}}) - i_{NRe}(V_{C_{1e}}), \\
C_2 \frac{dV_{C_{2e}}}{dt} &= g(V_{C_{1e}} - V_{C_{2e}}) + i_{Le} + K(V_{C_{2e}} - V_{C_{2m}}), \\
L \frac{di_{Le}}{dt} &= -V_{C_{2e}}.
\end{aligned} \tag{8.27}$$

Para o sistema acoplado, descrito pelas Equações (8.26) e (8.27), podemos fazer também a transformação de coordenadas anterior 8.16, a fim de analisarmos se os sistemas irão sincronizar para um tempo futuro ( $t \rightarrow \infty$ ), através do expoente de Lyapunov condicional. Seja novamente ( $V_{C_{1\perp}} = V_{C_{1m}} - V_{C_{1e}}$ ,  $V_{C_{2\perp}} = V_{C_{1m}} - V_{C_{2e}}$ ,  $i_{L\perp} = i_{Lm} - i_{Le}$ ). Fazemos a análise das equações para  $V_{C_{1\perp}}$ ,  $V_{C_{2\perp}}$  e  $i_{L\perp}$  no limite onde essas variáveis são muito pequenas. Este procedimento, semelhante ao que usamos no caso de acoplamento unidirecional, nos leva à equação variacional com uma pequena modificação. A presença do acoplamento mútuo modifica o fator de acoplamento, fazendo-o duas vezes maior que no caso do item anterior:

$$\begin{pmatrix} \frac{dV_{C_{1\perp}}}{dt} \\ \frac{dV_{C_{2\perp}}}{dt} \\ \frac{di_{L\perp}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10(g + F) & 10g & 0 \\ g & -(g + 2K) & 1 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.28}$$

A presença do fator 2 é a única diferença significativa em relação à Equação 8.20. A variável  $F$  é dada pela equação (8.24) calculada anteriormente para o caso de acoplamento unidirecional.

A Figura 8.9 é o diagrama no espaço dos parâmetros  $K$  e  $g$ , do expoente de Lyapunov condicional transverso, para circuitos com acoplamento mútuo. Comparando com a Figura 8.7, não vemos grandes diferenças significativas entre os dois diagramas. A presença do fator  $2K$  na equação variacional diminui o valor crítico de transição na passagem do expoente de Lyapunov de positivo para negativo, como pode ser visto na Figura 8.9 se comparada com a Figura 8.7.

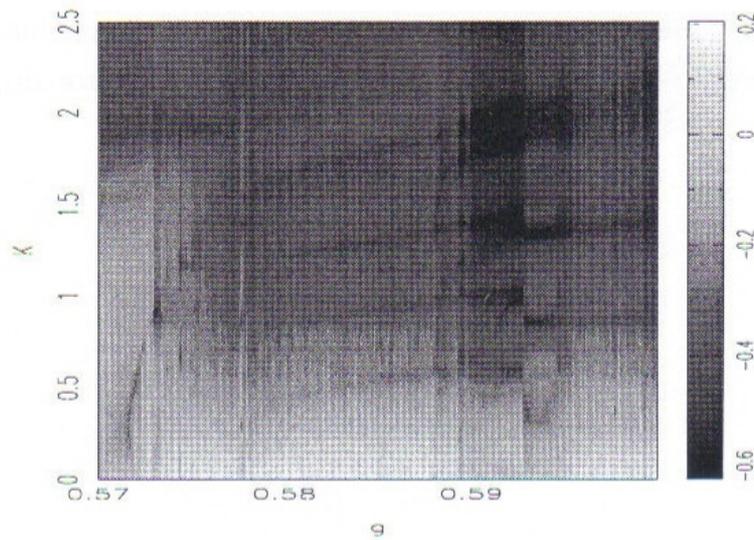


Figura 8.9: Diagrama no espaço dos parâmetros  $K$  e  $g$ , acoplamento mútuo entre os circuitos. Maior expoente de Lyapunov condicional das variáveis transversas à variedade de sincronização. Quanto mais escura a cor, menor o valor do expoente  $e$ , portanto indicando que ocorrerá sincronização para o par de parâmetros escolhidos.

## 8.5 Método de Jackson e Hübbler aplicado à sincronização

### 8.5.1 Sincronização em sistemas com coexistência de atratores

Em sistemas com coexistência de atratores, acoplados unidirecionalmente, estudos mostram que o processo de sincronização não ocorrerá [22][96][23] se as condições iniciais dos circuitos mestre e escravo estiverem em bacias de atração diferentes. De fato, se a trajetória de um dos circuitos estiver na bacia,  $b(A_1)$ , do atrator caótico  $A_1$  e a trajetória do outro estiver na bacia,  $b(A_2)$ , do outro atrator coexistente  $A_2$ , para conseguirmos sincronizar os sistemas, temos que perturbar a trajetória que está na bacia de  $A_1$ , de tal modo que esta se dirija ou migre para a bacia de atração do atrator  $A_2$ . Com referência a Figura 8.10, temos que  $e(A_1)$  representa a região do espaço de fase em que a trajetória perturbada  $\mathbf{X}(t)$  evolui e  $A_1, A_2$ , representam dois atratores caóticos coexistindo. As regiões  $b(A_1)$  e  $b(A_2)$ , representam as bacias de atração dos atratores. Uma condição necessária para que ocorra sincronização é dada por:

$$e(A_1) \cap b(A_2) \neq \emptyset. \quad (8.29)$$

Ou seja, é necessário que a região da evolução da trajetória perturbada  $e(A_1)$  encontre uma região de interseção com a bacia de atração do outro atrator do sistema que se quer sincronizar.

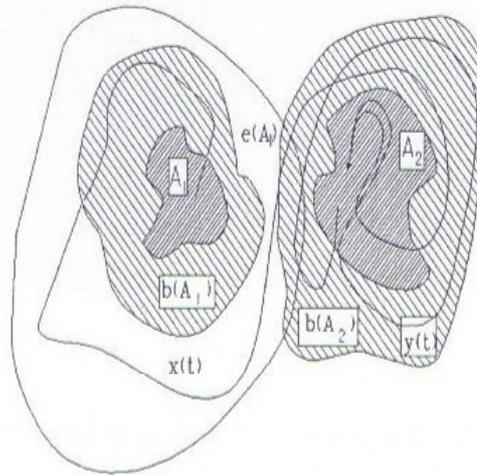


Figura 8.10: Ilustração para compreender a condição necessária para a sincronização de dois sistemas caóticos com atratores distintos  $A_1$  e  $A_2$ . Bacias de atração dos atratores  $b(A_1)$  e  $b(A_2)$ . Uma trajetória do atrator  $A_1$  tem que ser perturbada de modo a migrar para a bacia  $b(A_2)$  do atrator  $A_2$ .

Na Figura 8.11, mostramos o resultado da tentativa de sincronizar dois circuitos de Matsumoto-Chua, no regime tipo Rössler, acoplados unidirecionalmente, através do método de realimentação (item 1.4), para sistema mestre e escravo inicialmente em diferentes atratores. Mesmo com um transiente longo não foi possível sincronizar o sistema, como se mostra na Figura 8.11.

Vimos no Capítulo 7 que o método OPCL é um método eficaz no processo de migração quando há coexistência de atratores. É conveniente usar este método para sincronizar sistemas que apresentem coexistência de atratores. Assim, usamos o método juntamente com a sincronização unidirecional, de forma que a trajetória migre para a bacia do outro atrator e inicie o processo de sincronização. Pela natureza do método, um período de tempo curto é necessário para que o sistema migre e o método OPCL possa então ser retirado do processo, deixando somente o método de sincronização. A aplicação conjunta dos métodos não interfere em cada um dos seus objetivos. Esta aplicação conjunta exige mudança menor da dinâmica do sistema do que uma outra proposta apresentada em [13]. Esta última, para o mesmo problema e o mesmo sistema, sugere mudar o parâmetro do circuito mestre de forma

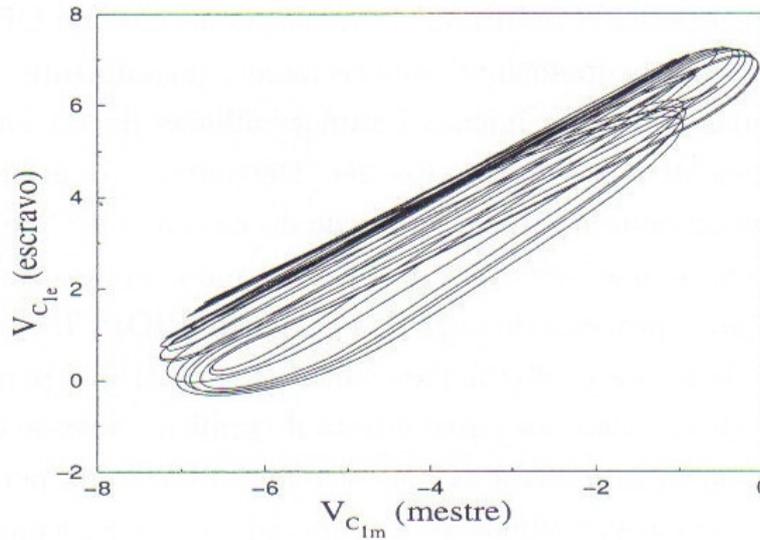


Figura 8.11: Projeção do atrator caótico no plano  $(V_{C_{1e}}, V_{C_{1m}}$  após a tentativa de sincronização de dois circuitos de Chua com trajetórias inicialmente em atratores caóticos tipo Rössler distintos ( $g = 0,575$ ). Método de realimentação unidirecional com constante de acoplamento  $K = 2,0$ , usando a variável mestre  $V_{C_{2m}}$ .

a colocá-lo no regime de Espiral-Dupla para em seguida alterar o parâmetro novamente, em um tempo conveniente, de forma que o sistema mestre migre para a bacia desejada. Em seguida são aplicados os métodos tradicionais de sincronização. Um inconveniente desse método é que o parâmetro escolhido, em geral, não é acessível para realizar esta operação.

O sistema de equações que descreve o sistema escravo de Matsumoto-Chua, quando este passa pelo processo de migração, juntamente com a sincronização unidirecional, usando o método de realimentação é:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_{C_{1e}}}{dt} &= \frac{1}{C_1} [g(V_{C_{2e}} - V_{C_{1e}}) - i_{NR}(V_{C_{1e}}) \\
 &+ S[(\frac{1}{C_1}(g + di_{NR}/dV_{C_{1m}}) + P)(V_{C_{1e}} - V_{C_{1m}})], \\
 \frac{dV_{C_{2e}}}{dt} &= \frac{1}{C_{2e}} [g(V_{C_{1e}} - V_{C_{2e}}) + i_{Le}] + K(V_{C_{2e}} - V_{C_{2m}}), \\
 \frac{di_{Le}}{dt} &= -\frac{1}{L} V_{C_{2e}}.
 \end{aligned} \tag{8.30}$$

Nesta equação o termo  $S[\bullet]$  representa a perturbação do método OPCL, responsável pela migração, e o termo  $K(V_{C_{2e}} - V_{C_{2m}})$  representa a perturbação devido ao método de sincronização. A equação do circuito mestre é idêntica à Equação 8.18.

Na Figura 8.12, mostramos o resultado da aplicação do método OPCL juntamente com o método de Pyragas com acoplamento unidirecional. Inicialmente, temos dois circuitos no regime caótico, cujas condições iniciais foram escolhidas de tal forma que os circuitos operassem em diferentes atratores do tipo Rössler. Deixamos os dois circuitos evoluírem por um determinado intervalo de tempo, sem aplicação do método OPCL e, como já mostramos (Figura 8.11), os circuitos não sincronizam. Em seguida, aplicamos, juntamente com o método de sincronização, o processo de migração pelo método OPCL. A trajetória do circuito escravo é perturbada de forma a migrar para outro atrator, o que permite a sincronização dos sistemas, como pode ser visto na parte direita do gráfico. Nota-se que, quando o termo responsável pela sincronização passa a agir no sistema, o termo da perturbação diminui de amplitude, até chegar a valores próximos de zero, quando os sistemas finalmente sincronizam.

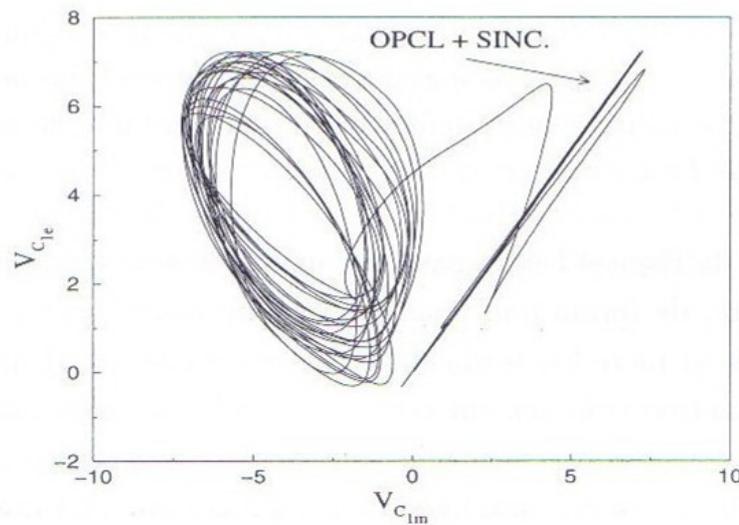


Figura 8.12: Projeção do atrator caótico no plano  $(V_{C_{1e}}, V_{C_{1m}})$  antes e após a sincronização de dois circuitos de Matsumoto-Chua com trajetórias inicialmente em atratores caóticos distintos do tipo Rössler ( $g = 0,575$ ). Os circuitos sincronizam após os métodos de migração OPCL e sincronização serem aplicados às trajetórias ( $P = -10$  e  $K = 2.0$ ).

Na Figura 8.13, mostramos as diferenças entre duas variáveis dos sistemas mestre e escravo quando usamos o método de sincronização de realimentação com o auxílio do método OPCL. Na Figura 8.13 a), mostramos a tentativa de sincronização usando somente o método de realimentação unidirecional. Notamos que as variáveis transversas não tendem a zero. Na Figura 8.13 b), mostramos as variáveis transversas quando se usa o método OPCL. Nota-se a perfeita sincronização dos sistemas, pois as variáveis transversas são nulas.

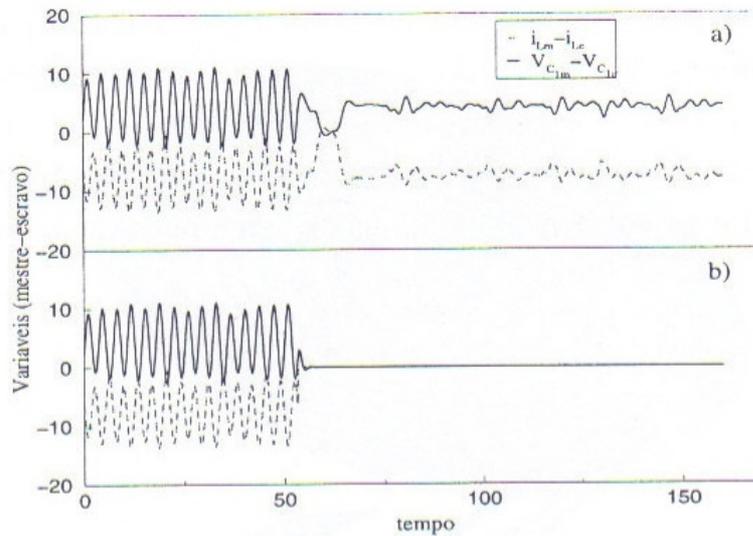


Figura 8.13: Diferença entre as variáveis  $V_{C_1}$  e  $i_L$  dos circuitos mestre e escravo, antes e após a sincronização de dois circuitos de Chua com trajetórias inicialmente em atratores caóticos tipo Rössler distintos. a) Método de Pyragas aplicado: não há sincronização; b) Método OPCL juntamente com método de Pyragas aplicado: circuitos sincronizam ( $P = -10$  e  $K = 2.0$ ).

## 8.6 Bacias de sincronização

### 8.6.1 Bacia de atração - atratores tipo Rössler

Para circuitos com coexistência de atratores, vimos que o processo de sincronização requer que haja uma região de interseção no espaço de fase, com a trajetória perturbada do circuito mestre dirigindo-se à bacia de atração do circuito escravo. Portanto, as condições iniciais, dos circuitos mestre e escravo, desempenham um papel fundamental no processo de sincronização [22] [142]. As condições iniciais que geram sincronização, ou seja, aquelas que levam à variedade de sincronização, formam a bacia de sincronização para o sistema acoplado. Essas bacias para alguns sistemas não são triviais apresentando geometria complexa, levando algumas vezes, ao fenômeno de bacia crivada (*riddled basin*) [146], onde a sensibilidade às condições iniciais é máxima e não há maneira de se determinar a evolução final do sistema.

Para o circuito de Matsumoto-Chua, no regime caótico tipo atrator de Rössler ( $g = 0,5750$ ), reproduzimos nas Figuras 8.14 e 8.15 os atratores caóticos coexistentes (observados para condições iniciais diferentes) e a bacia de atração para um circuito. A Figura 8.15 é uma seção transversal da bacia nas variáveis  $V_{C_1}$  e  $V_{C_2}$  (a bacia é tridimensional) para

$i_L = 0,0$ . Pontos em pretos correspondem às condições iniciais que são atraídas para o atrator caótico da direita ( $V_{C_1} > 0$ ), pontos em cinza correspondem às condições iniciais que são atraídas para o atrator caótico da esquerda ( $V_{C_1} < 0$ ). Os pontos em branco correspondem às condições que são atraídas pelo atrator infinito. A estrutura geométrica da bacia determinará a forma subsequente da bacia de sincronização, como veremos adiante.

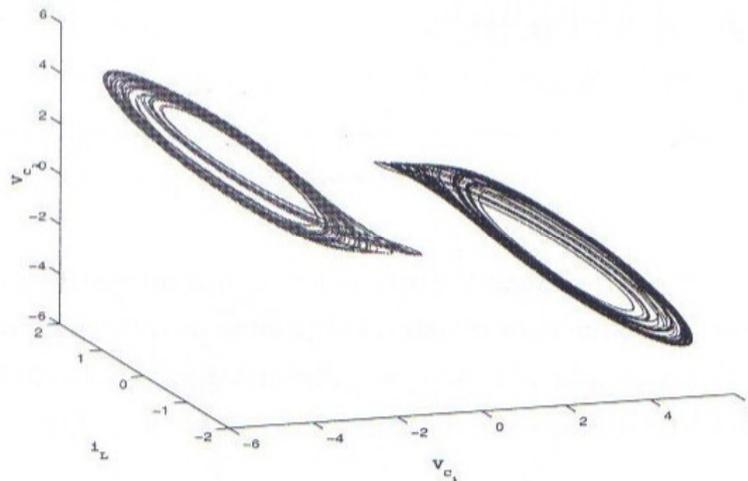


Figura 8.14: Atratores caóticos tipo Rössler coexistindo no espaço de fase do circuito de Matsumoto-Chua,  $g = 0,575$ .

A Figura 8.16 representa os possíveis comportamentos, para dois circuitos operando no regime caótico tipo Rössler ( $g = 0,575$ ). Dependendo da condição inicial em que os circuitos iniciaram sua evolução, podemos ter sincronização (retas diagonais de linhas fina e grossa), ou não (emaranhado superior e inferior do gráfico). No regime caótico tipo Rössler, cada circuito possui dois atratores coexistentes, o que gera quatro estados diferentes de comportamento para o sistema acoplado, dependendo da condição inicial, como mostraremos adiante.

Juntamente com as condições iniciais, o fator de acoplamento,  $K$ , tem sua influência medida através do expoente de Lyapunov condicional transversal,  $\lambda_{\perp}$ . Na Figura 8.17, mostramos a variação do expoente de Lyapunov em função do parâmetro de acoplamento, para os dois circuitos operando no regime caótico tipo Rössler, sob a ação do método de sincronização unidirecional de realimentação, apresentado anteriormente. Para  $K = 0$  os sistemas encontram-se desacoplados, a medida que aumentamos  $K$ , inserimos a realimentação negativa responsável pela sincronização. Pelo gráfico do expoente condicional transversal, vemos que a sincronização ocorrerá a partir do valor crítico  $K_r \approx 0,58$ .

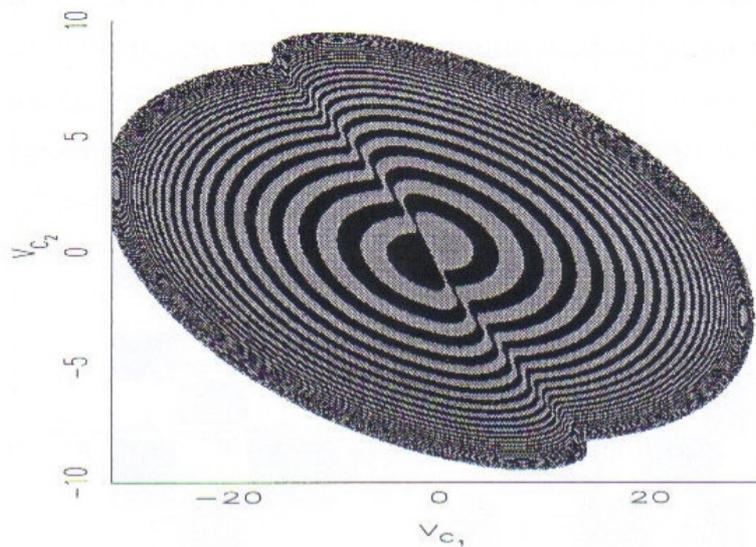


Figura 8.15: Bacia de atração do sistema Matsumoto-Chua em regime caótico tipo Rössler. Pontos em preto (cinza) correspondem a condições iniciais que se dirigem para o atrator caótico tipo Rössler da direita (esquerda) da Figura 8.14, respectivamente. Outros pontos (branco) vão para o atrator infinito.  $g = 0,5750$  e  $i_L(0) = 0,0$ .

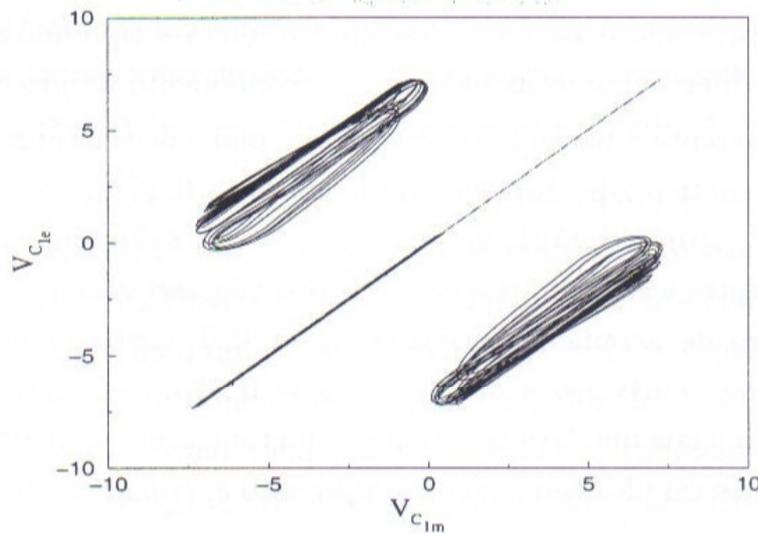


Figura 8.16: Projeção das variáveis  $V_{C_{1m}}$  versus  $V_{C_{1e}}$ , dos circuitos mestre e escravo. Os dois emaranhados correspondem ao estado de não sincronização. A diagonal representa o estado sincronizado, sendo possível a sincronização entre os dois atratores simétricos (reta fina e grossa do gráfico).

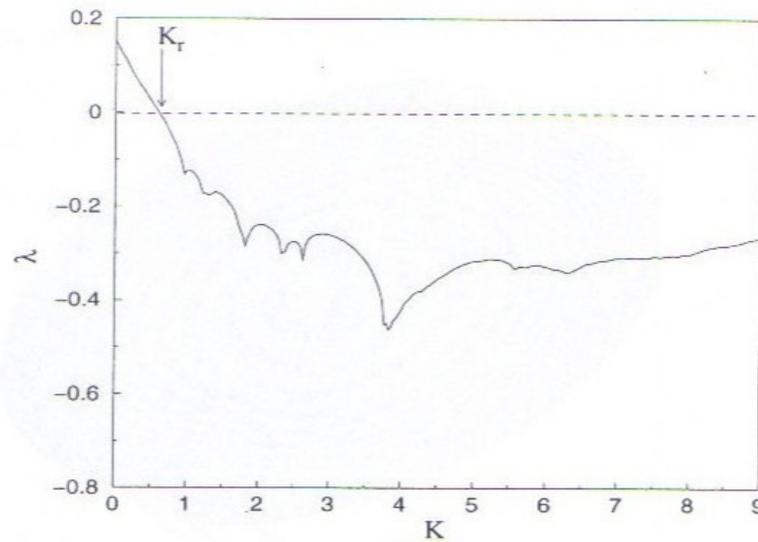


Figura 8.17: Lyapunov condicional transverso para sincronização através do método de realimentação unidirecional (variável mestre  $V_{C_{2m}}$ ) para circuitos mestre e escravo no regime caótico tipo Rössler. Em  $K_r \approx 0,58$  ocorre a transição do expoente de Lyapunov condicional positivo para negativo.

### 8.6.2 Bacia de sincronização para acoplamento unidirecional

Mostraremos agora, como o valor da constante  $K$  afeta o tipo de bacia de sincronização obtida. Em seguida, diferenciamos as bacias com acoplamento unidirecional e mútuo.

A Figura 8.18 representa a bacia de atração para o plano de sincronização de dois circuitos operando no regime caótico tipo Rössler acoplados ( $g = 0,575$ ). As condições iniciais são fixadas ( $V_{C_{2m}}(0) = V_{C_{2e}}(0) = 0,2334$ ,  $i_{L_m}(0) = i_{L_e}(0) = 0,845$ ), enquanto as variáveis  $V_{C_{1m}}$  e  $V_{C_{1e}}$ , do circuito mestre e escravo, respectivamente, são variadas numa grade de  $400 \times 400$  pontos. O parâmetro de acoplamento usado,  $K = 2,0$ , corresponde à região em que o expoente de Lyapunov transverso é negativo e  $g = 0,575$ . As regiões em branco correspondem às condições iniciais que levam o sistema à sincronização, enquanto as regiões preta e cinza correspondem aos estados sem sincronização, isto é, cujas trajetórias se localizam fora das linhas diagonais, mostradas na Figura 8.16. A forma geométrica da bacia mostrada pode ser entendida a partir da bacia de atração mostrada na Figura 8.15. Em geral, quando  $V_{C_{1e}}(0)$  e  $V_{C_{1m}}(0)$  pertencem à mesma bacia de atração de um dos atratores tipo Rössler, teremos sincronização, caso contrário teremos regiões onde as condições iniciais não levam ao mesmo atrator. Apesar do expoente de Lyapunov transverso para o parâmetro de acoplamento usado ser negativo, a coexistência de atratores faz com que apareçam regiões de não-sincronização.

Nota-se, inclusive, que estas regiões estão próximas das diagonais da Figura 8.16, onde as condições iniciais iguais geram sincronização. Chamamos atenção para o fato de que mudar a condição inicial para  $i_{Le} = i_{Lm} = 0,0$  na construção da bacia mostrada na Figura 8.18 (como foi feito na Figura 8.15) não elimina o o embaralhamento das diferentes bacias da Figura 8.18.

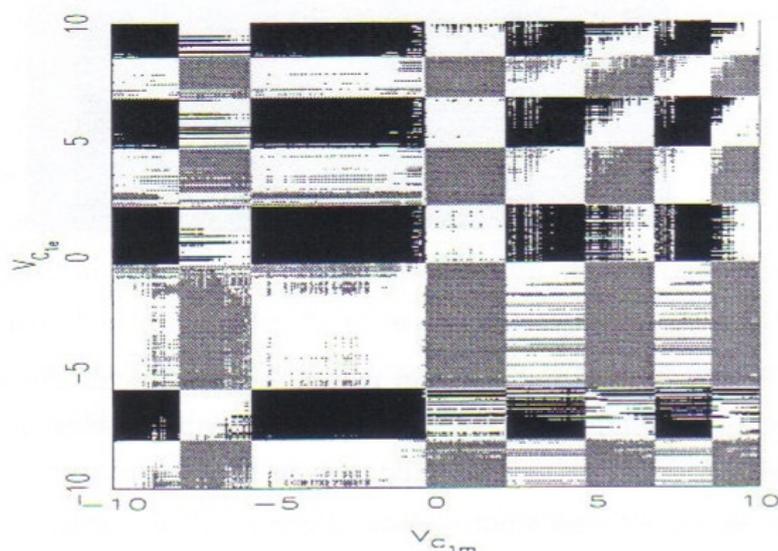


Figura 8.18: Bacia de sincronização através do método de realimentação unidirecional,  $K = 2,0$  (variável mestre  $V_{C_{2m}}$ ) para circuitos mestre e escravo no regime caótico tipo Rössler. Condições iniciais nas regiões em branco sincronizam. Condições iniciais nas regiões em preto e cinza não sincronizam, levando ao estado não sincronizados mostrados na Figura 8.16, respectivamente.

Determinamos também a bacia de sincronização, para uma constante de acoplamento  $K = 0,5$ , próximo ao valor crítico  $K_C$ , mostrado na Figura 8.17. A bacia com esta constante de acoplamento é mostrada na Figura 8.19. A bacia não apresenta comportamento de bacia crivada *riddled basin* (estado final indeterminado), como era de se esperar, pois  $\lambda > 0$ . Nota-se que a sincronização é muito pouco provável. Este valor de  $K$  é um pouco inferior ao valor crítico  $K_C \approx 0,58$  para o qual o expoente de Lyapunov condicional é nulo, como pode ser visto na Figura 8.17. Inúmeros trabalhos têm mostrado que nessas condições ocorrem *estouros* da variedade de sincronização, aparecendo um tipo de intermitência denominada de intermitência liga-desliga (*on-off intermittency*) [147] [148] [149]. Na Figura 8.20, usando a constante de acoplamento  $K = 0,5$ , mostramos este comportamento intermitente entre o estado sincronizado ( $V_{C_{1m}} - V_{C_{1e}} = 0$ ) e os estouros, provocados pela quebra de sincronização ( $V_{C_{1m}} - V_{C_{1e}} \neq 0$ ).

Qual o mecanismo responsável pelos estouros mostrados na Figura 8.20? Em primeiro

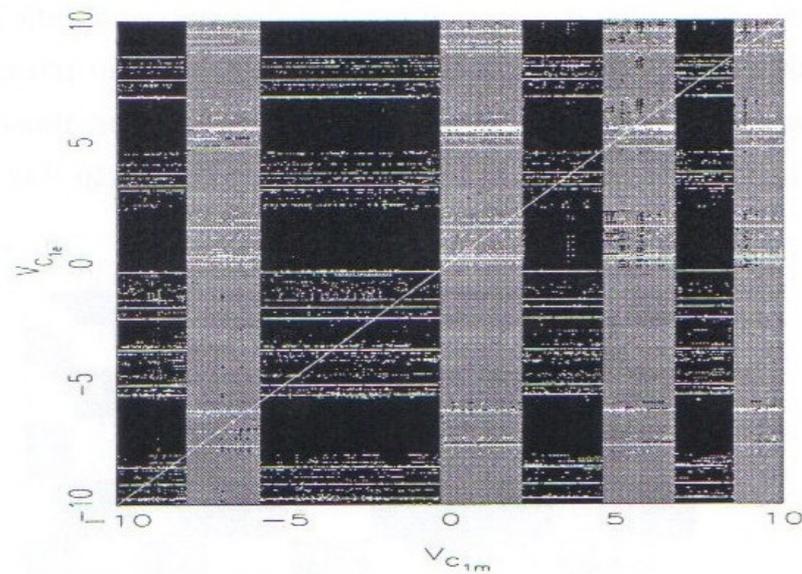


Figura 8.19: Bacia de sincronização através do método de realimentação unidirecional (variável mestre  $V_{C_{2m}}$ ) para circuitos mestre e escravo no regime caótico tipo Rössler. Constante de acoplamento  $K = 0,5$  próximo ao valor crítico do expoente de Lyapunov condicional transverso. Condições iniciais nas regiões em branco sincronizam. Para condições iniciais nas regiões em preto e cinza não há sincronização, levando ao comportamento do emaranhado superior ou inferior da Figura 8.16.

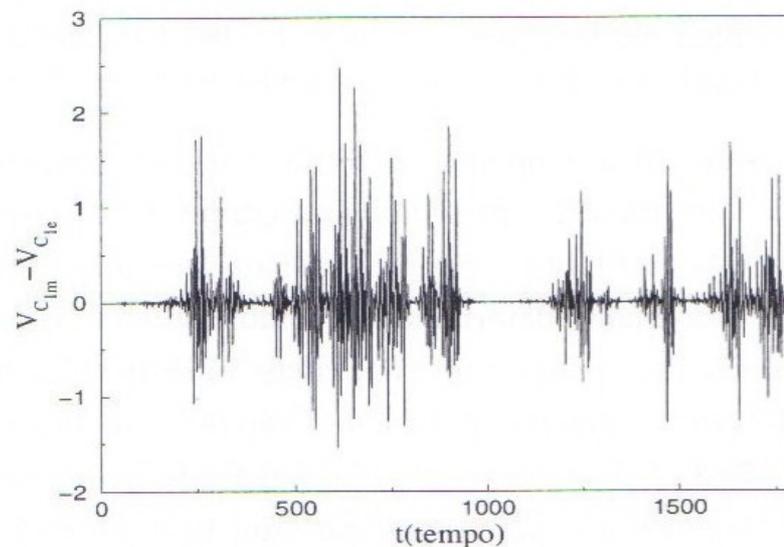


Figura 8.20: Intermittência liga-desliga (*on-off*) (entre os estado sincronizado e não sincronizado). Evolução da diferença entre as variáveis  $V_{C_{1m}}$  e  $V_{C_{1e}}$ , dos circuitos mestre e escravo no regime caótico tipo Rössler, constante de acoplamento  $K = 0,5$  e  $g = 0,575$ .

lugar devemos lembrar que o expoente de Lyapunov condicional abaixo do valor crítico (para  $K < K_c$ ) é positivo. Porém, este expoente é calculado por uma média ergódica sobre o atrator [4]. O fenômeno de liga-desliga (*on-off*) é devido às flutuações, que mudam o sinal do expoente condicional de seu valor positivo típico para valores negativos. Heagy *et al.* [150] mostraram que esses estouros estão diretamente associados às órbitas instáveis presentes no atrator caótico resultante da sincronização, aos conjuntos invariantes existentes no seu interior tais como: pontos fixos, variedades invariantes e conjunto de Cantor invariantes. Esses conjuntos invariantes possuem expoente de Lyapunov transverso positivo, até mesmo quando o maior expoente de Lyapunov transverso do atrator como um todo é negativo. Na média, a repulsão que as órbitas ainda sentem é relativamente fraca, contudo, uma trajetória pode gastar um tempo longo na vizinhança da variedade de sincronização (ou plano de sincronização). De tempos em tempos, o caráter repulsor destes estados manifesta-se e a trajetória é ejetada da variedade de sincronização ao longo da variedade transversa. A bifurcação na qual o primeiro expoente de Lyapunov transverso torna-se positivo é chamada de bifurcação *blowout* [146][147]. A complexidade da bacia gerada explica a dificuldade de sincronizar os dois circuitos nas proximidades do valor crítico; as condições iniciais dos circuitos certamente influenciam o comportamento do atrator gerado pela sincronização. Os estouros fazem com que a trajetória migre para diferentes regiões gerando novos estados de sincronização assintótica. A existência neste sistema de quatro estados possíveis (conforme mostrado na Figura 8.16), contribui para o comportamento complexo observado na bacia. A linha diagonal branca, na Figura 8.19, reflete o caso trivial de sincronização; onde os dois circuitos iniciam com as mesmas condições iniciais e, desse modo, sincronizam.

Determinamos em seguida a bacia de sincronização para  $K < K_c$  ( $K = 0,6$ ) com acoplamento unidirecional. Nestas condições esperaríamos obter o comportamento de bacia crivada, pois o expoente de Lyapunov condicional é negativo com esta constante de acoplamento. No entanto, não obtivemos este comportamento no plano  $V_{C_{2m}} = V_{C_{2e}} = 0,2334$  e  $i_{Lm} = i_{Le} = 0,845$  para as variáveis  $V_{C_{1m}}$  (eixo horizontal) e  $V_{C_{1e}}$  (eixo vertical) como mostrado na Figura 8.21. Podemos ver que as fronteiras da bacia são contínuas (mas não suaves), e portanto, não apresentando características de bacia fractal ou de bacia crivada. A bacia de sincronização ainda apresenta um tamanho considerável em comparação com a bacia onde não ocorre sincronização. Embora esta bacia da Figura 8.21 não apresente comportamento crivado, foi mostrado experimentalmente por Kapitaniak *et al.* [151] que, para este sistema acoplado operando no regime caótico do tipo Rössler, o seu comportamento futuro tem uma forte dependência das condições iniciais sobre o plano ou variedade de sincronização ( $3 - D$ ).

Esta é uma evidência de que a bacia de condições iniciais apresenta comportamento do tipo crivada (*riddled basin*) que existe somente no plano de sincronização. Portanto, o caráter crivado (*riddled*) é realmente local (plano de sincronização) e não global (espaço de fase) como foi possível constatar.

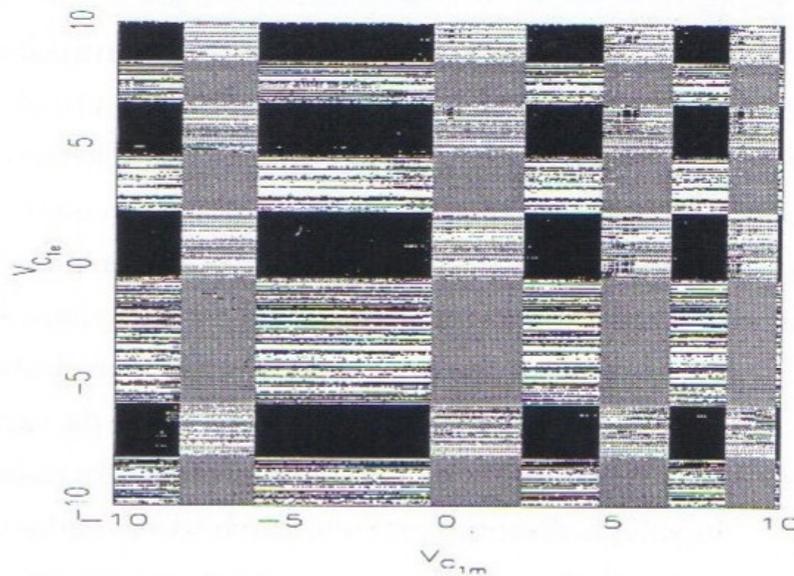


Figura 8.21: Bacia de sincronização através do método de realimentação unidirecional (variável mestre  $V_{C_{2m}}$ ) para circuitos mestre e escravo no regime caótico tipo Rössler,  $g = 0,5750$ . Constante de acoplamento  $K = 0,6$  próximo ao valor crítico do expoente de Lyapunov condicional transverso. Para condições iniciais nas regiões em branco sincronizam. Para condições iniciais nas regiões em preto e cinza não há sincronização, levando ao comportamento do emaranhado superior ou inferior da Figura 8.16.  $g = 0,575$ .

### 8.6.3 Bacia de sincronização para acoplamento mútuo

Com o objetivo de diminuir a influência das condições iniciais na sincronização, aplicamos um acoplamento mútuo aos dois circuitos, usando o método de realimentação, mantendo as mesmas condições para gerar a Figura 8.18. A Figura 8.22, mostra como varia o expoente de Lyapunov condicional transverso em função do parâmetro de acoplamento  $K$  (linha cheia). Como mostramos anteriormente, pelos diagramas no espaço dos parâmetros, o acoplamento mútuo diminui o valor crítico  $K_C$ . Além disso, comparando as Figuras 8.17 e 8.22 vemos que há uma diminuição satisfatória do valor do Lyapunov condicional para diferentes valores de  $K$ , quando se acopla mutuamente.

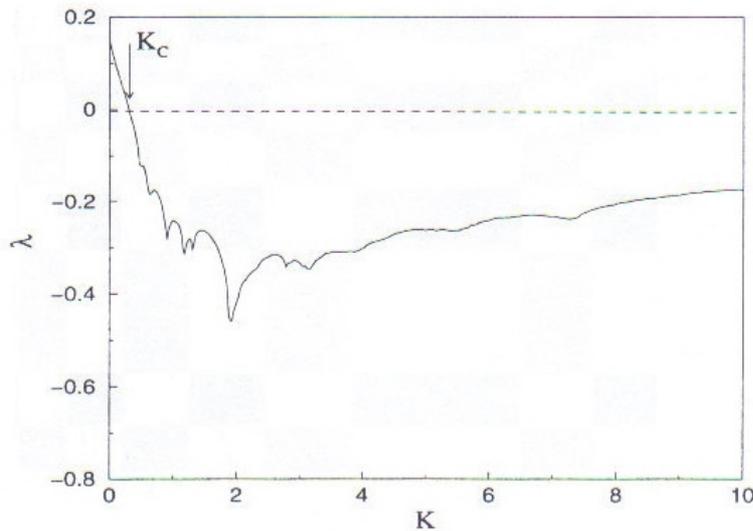


Figura 8.22: Maior expoente de Lyapunov condicional transverso para sincronização mútua, através do método de realimentação (variável acoplada  $V_{C_{2m}}$ ). Circuitos mestre e escravo no regime caótico tipo Rössler. Em  $K_r \approx 0,3$  ocorre a transição do expoente de Lyapunov condicional positivo para negativo.

Na Figura 8.23, mostramos a bacia de sincronização encontrada usando o acoplamento mútuo para  $K = 2,0$ , igual ao acoplamento da Figura 8.18. Nesta figura vê-se que o acoplamento mútuo aumenta a quantidade de condições iniciais que levam à sincronização. O maior expoente de Lyapunov condicional do sistema acoplado mutuamente é menor que o maior expoente de Lyapunov condicional do sistema acoplado unidirecionalmente. Portanto, espera-se que mais condições iniciais levem a sincronização. Mesmo assim, continuam existindo regiões de condições iniciais que levam a comportamentos futuros pouco previsíveis.

## 8.7 Bacia de sincronização - regime Espiral-Dupla

### 8.7.1 Acoplamento unidirecional

Consideramos nesta seção, o acoplamento unidirecional de dois circuitos operando no regime caótico de Espiral-Dupla descritos pelas Equações 8.18 e 8.19. Nos experimentos numéricos subsequentes consideramos o inverso da resistência linear  $g = 0,6$ ; assim, para  $K = 0$  os circuitos tem a dinâmica do atrator caótico de Espiral-Dupla.

A Figura 8.1, vista anteriormente, mostra a evolução temporal das variáveis  $V_{C_{1m}}$  e  $V_{C_{1e}}$  dos circuitos mestre e escravo, para os sistemas sem sincronização. As trajetórias do

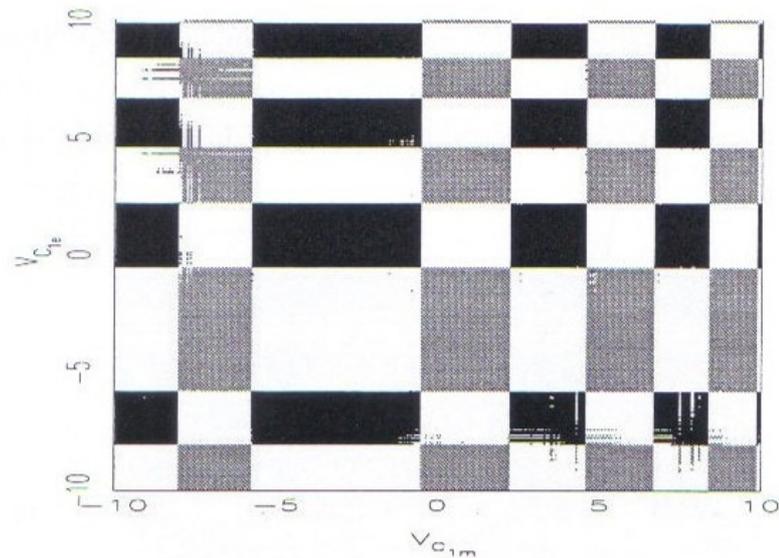


Figura 8.23: Bacia de sincronização através do método de realimentação com acoplamento bidirecional,  $K = 2,0$  e  $g = 0,575$ , (variável acoplada  $V_{C_2}$ ) para circuitos mestre e escravo no regime caótico tipo Rössler. Condições iniciais nas regiões em branco sincronizam. Condições iniciais nas regiões em preto e cinza não sincroniza.

circuito mestre, geradas pelas Equações 8.18, estão localizadas sobre uma variedade tridimensional. Se as trajetórias dos circuitos acoplados estiverem também localizadas nesta variedade tridimensional (o atrator caótico gerado pela sincronização está imerso num subespaço tridimensional do espaço de dimensão 6 dos circuitos acoplados), e então, o circuito escravo simplesmente reproduz a oscilação caótica do circuito mestre. Neste caso, todas as trajetórias convergem ao atrator gerado pela equação do circuito mestre (Equação 8.18) e ambos circuitos sincronizam. O espectro dos expoentes de Lyapunov para o sistema acoplado, pode ser dividido em dois subconjuntos,  $\lambda_{\parallel}$  e  $\lambda_{\perp}$ , ao longo e ortogonal à variedade de sincronização, respectivamente. O primeiro conjunto de expoentes de Lyapunov é associado com o circuito mestre (Equação 8.18) e consiste de três expoentes descrevendo a evolução da perturbação tangente à variedade de sincronização. O segundo conjunto de expoentes de Lyapunov descreve, como já vimos anteriormente, a evolução da perturbação transversa à variedade. Segundo Vieira *et al.* [143], quando pelo menos um dos expoentes de Lyapunov transverso for positivo se observa o regime de hipercaos (o sistema apresenta duas direções de instabilidade, e portanto, mais de um expoente de Lyapunov positivo). A mesma referência mostra que os expoentes de Lyapunov transversos são os expoentes de Lyapunov condicionais introduzidos por Pecora e Carroll [130], [142], de forma que usaremos essas duas denominações como sinônimos.

A Figura 8.24, mostra a variação do primeiro expoente de Lyapunov condicional transverso em função do parâmetro de acoplamento  $K$ . O valor do parâmetro crítico em que ocorre a bifurcação explosiva (*blowout*) para este regime é em torno de  $K_C \approx 0,33$ .

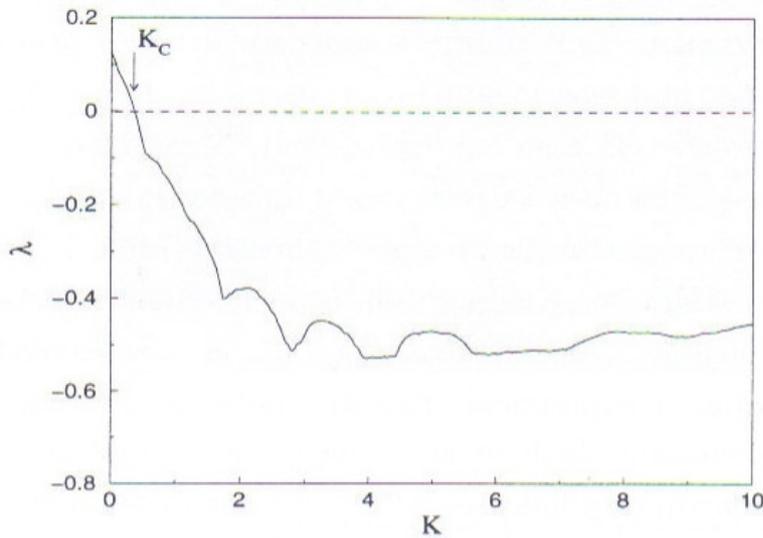


Figura 8.24: Maior expoente de Lyapunov condicional transverso para sincronização unidirecional, para o método de realimentação (variável acoplada  $V_{C_{2m}}$ ). Circuitos mestre e escravo no regime caótico tipo Espiral-Dupla ( $g = 0,6$ ). Em  $K_r \approx 0,33$  ocorre a transição do expoente de Lyapunov condicional positivo para negativo.

### 8.7.2 Bacia crivada

Nas proximidades do valor crítico  $K_C = 0,33$  ocorre a transição do expoente de Lyapunov transverso ( $\lambda_{\perp}$ ) de positivo para negativo. Em torno desse valor crítico podemos ter intermitências liga-desliga (*on-off*) para  $\lambda_{\perp} > 0$  ou bacia crivada (*Riddled Basin*)  $\lambda_{\perp} < 0$ . Apesar da variedade de sincronização, sob estas condições, ser na média atrativa, órbitas específicas (geralmente de baixa periodicidade) presentes no atrator gerado pela sincronização (*embedded*), podem tornar-se transversalmente instáveis. Nestas condições, o estado caótico sincronizado é fracamente estável segundo a definição de Minor [146],[149], ou seja: ele atrai um conjunto de condições de medida de Lebesgue positiva de sua vizinhança. Contudo, arbitrariamente próximo a quaisquer desses pontos, podemos encontrar um conjunto de pontos com medida de Lebesgue positiva repelidos pelo atrator de sincronização, gerando uma bacia de atração que é localmente *fat-fractal* (apresentam dimensão quase inteira) [146]. A bifurcação para  $K = K_r$ , na qual uma órbita imersa (*embedded*) no estado sincronizado perde sua

estabilidade transversal, é comumente chamada de transição borbulhante (*bubbling*) [152] ou bifurcação crivante (*riddling bifurcation*). Para  $K_r < K < K_c$  a bacia crivada pode existir. Para que ocorra intermitência liga-desliga (*on-off*) ou bacia crivada (*riddled basin*) o sistema deve obedecer algumas condições básicas. O sistema deve possuir uma variedade invariante contendo um conjunto caótico. Portanto, a variedade deve ser pelo menos tri-dimensional para fluxo e pelo menos bi-dimensional para um mapa inversível, enquanto, para um mapa não-inversível pode ocorrer em caso uni-dimensional. Além disso, a dimensionalidade total do espaço de fase do sistema deve ser pelo menos uma vez maior do que a variedade. E por último, o sistema deve apresentar algum tipo de simetria [146], [149], [147],[153].

A partir dessas considerações, e notando que o nosso sistema no estado sincronizado evolui num subespaço de dimensão 3, em um espaço total (do sistema acoplado unidirecionalmente) de dimensão 6, realizamos o experimento numérico para nosso sistema no regime de Espiral-Dupla ( $g = 0,6$ ) procurando obedecer às condições que geram uma bacia crivada, para o parâmetro de acoplamento escolhido  $K = 0,4$ . Na Figura 8.25, temos a bacia gerada por uma grade de  $400 \times 400$  pontos das condições iniciais  $V_{C_{1m}}(0)$  e  $V_{C_{1e}}(0)$ , onde as condições iniciais das outras variáveis são:  $V_{C_{2e}}(0) = V_{C_{2e}}(0) = i_{Lm}(0) = i_{Le}(0) = 0$ . A cada par das variáveis mestre e escravo escolhidas, que levam os circuitos à sincronização (após o transiente), graficamos pontos em preto. Graficamos em branco os pares de pontos que não levam à sincronização. Nota-se pelo gráfico o comportamento imprevisível presente na bacia. As Figuras 8.26 e 8.27 são ampliações sucessivas geradas com a mesma grade de pontos, mostrando o comportamento complexo da presença dos estados sincronizado e não sincronizado. Nesta figura, vê-se que existem faixas horizontais brancas representando a bacia de não sincronização. Se tomarmos um círculo de raio arbitrariamente pequeno centrado em um ponto da bacia de sincronização encontraremos nele um ponto da bacia de não sincronização. Ou seja, a bacia de não sincronização criva a bacia de sincronização. O contrário não acontece, ou seja a bacia de sincronização não criva a bacia de não sincronização. Isto é uma consequência do tipo de acoplamento ser unidirecional.

### 8.7.3 Expoente de incerteza - $\alpha$

O comportamento imprevisível do sistema acoplado pode ser visualizado através das sucessivas ampliações da bacia crivada da Figura 8.25, mostradas nas Figuras 8.26 e 8.27. Para quantificar a dependência hipersensível às condições iniciais do sistema acoplado dessa bacia, calculamos numericamente o expoente de incerteza  $\alpha$  introduzido por MacDonald *et al.* [37]. Este expoente mede o grau de indeterminação do estado final de sincronização.

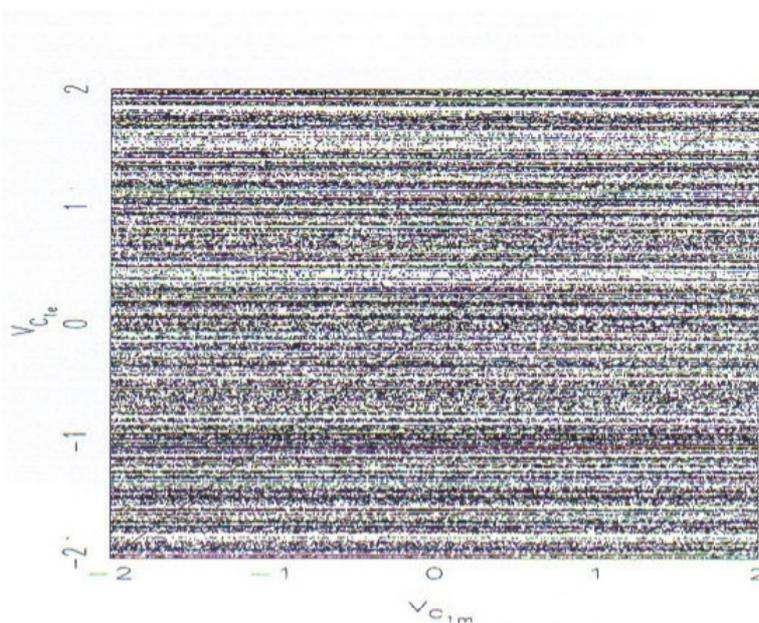


Figura 8.25: Bacia de sincronização através do método realimentação com acoplamento unidirecional (variável acoplada  $V_{C_2}$ ,  $K = 0,4$ ) para circuitos mestre e escravo no regime caótico tipo Dupla-Esoiral  $g = 0,6$  (*Double Scroll*). Para condições iniciais nas regiões em preto há sincronização. Para condições iniciais nas regiões em branco não.

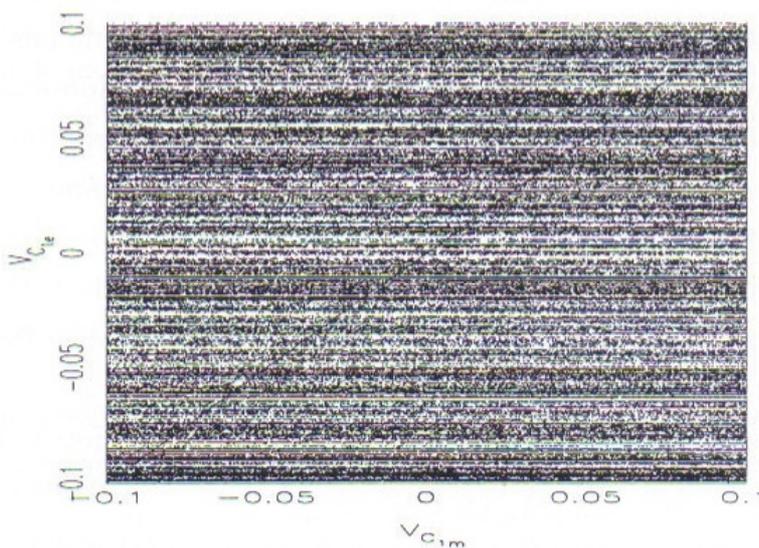


Figura 8.26: Ampliação da Figura 8.25.

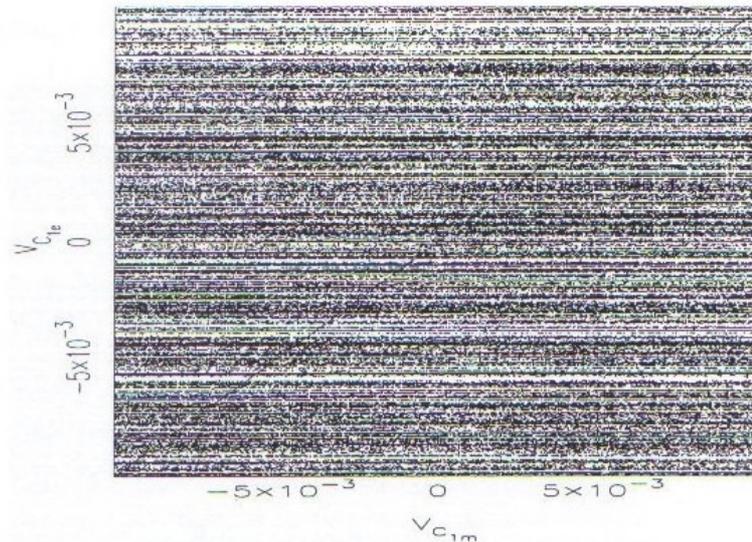


Figura 8.27: Ampliação da Figura 8.26.

Para o cálculo desse expoente ( $\alpha$ ), escolhemos 10000 (dez mil) pares de pontos aleatoriamente pertencentes à bacia mostrada na Figura 8.26. Cada condição inicial gerada aleatoriamente  $(V_{C_{1m}}, V_{C_{1e}})$ , é então perturbada por um pequeno valor  $\epsilon$  gerando duas novas condições iniciais,  $(V_{C_{1m}}, V_{C_{1e}} - \epsilon)$  e  $(V_{C_{1m}}, V_{C_{1e}} + \epsilon)$ . Utilizando essas três condições iniciais iteramos o sistema acoplado. Eliminando o transiente (intervalo de tempo longo em torno de 40 ciclos em torno do atrator) determinamos o estado final do sistema (sincronizado ou não sincronizado) para cada condição inicial. Se as três condições iniciais não geram o mesmo estado final, contamos a condição sem perturbação (gerada aleatoriamente) como incerta. Obtemos com isso a fração  $f(\epsilon)$  de pontos incertos. Repetimos esse procedimento para onze valores de  $\epsilon$  em potências regressivas de 10 ( $10^{-2}$  a  $10^{-10}$ ). Utilizando o procedimento acima obtivemos a Figura 8.28. Esta figura mostra o resultado obtido da fração  $f(\epsilon)$  em função de  $\epsilon$ . A reta representa a interpolação dos dados gerados usando o procedimento descrito. Calculamos o coeficiente angular da reta obtendo o valor  $0,0006 \pm 0,0006$ . Este é o valor do expoente de incerteza  $\alpha$  para a bacia mostrada na Figura 8.26. Este valor, juntamente com as argumentações anteriores, nos fornece fortes indícios de que as bacias mostradas nas Figuras 8.25 a 8.27 possuem características de bacia crivada (*riddled basin*).

Uma consequência da característica do comportamento *riddled* da bacia é que o comportamento assintótico do sistema acoplado possui uma extrema dependência hipersensível às condições iniciais e é imprevisível. Para ilustrar a implicação desta dependência, imaginemos que podemos especificar uma condição inicial do circuito escravo dentro de uma precisão da ordem

de  $10^{-16}$ , mesmo com esta precisão há uma probabilidade de  $f(\varepsilon) \sim 10^{-0,0006 \times (-16)} \approx 0,98$  (98%) de que o comportamento assintótico calculado usando esta condição inicial seja incerto. Aumentar a precisão com que se especifica a condição inicial oferece pouca vantagem na probabilidade de computar com precisão o estado futuro do sistema, no caso, se irá sincronizar ou não. Por exemplo, suponhamos que para um novo cálculo aumentamos a precisão para  $10^{-26}$ . A probabilidade de computarmos incorretamente o estado final do sistema é ainda  $f(\varepsilon) \sim 10^{-0,0006 \times (-26)} \approx 0,96$ , o que é pouca vantagem em comparação com a precisão numérica usada no cálculo anterior.

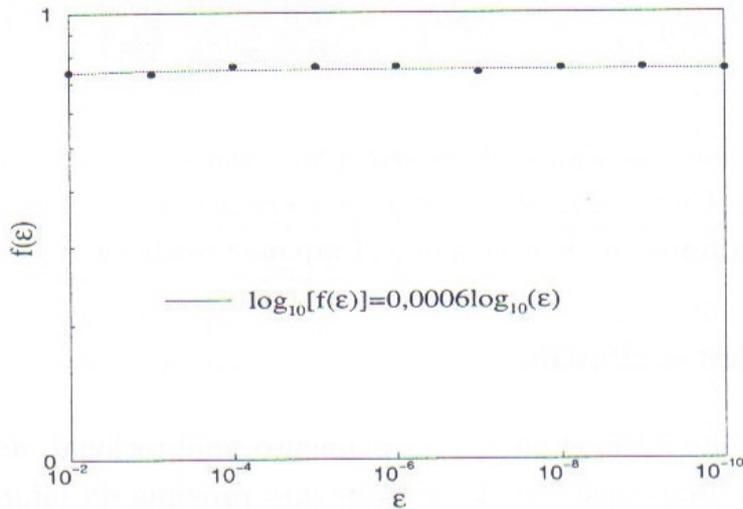


Figura 8.28: A fração de incerteza  $f(\varepsilon)$  versus  $\varepsilon$  em escala logarítmica de base-10 referente à bacia mostrada na Figura 8.27. Linha reta: interpolação linear, expoente de incerteza  $\alpha = 0,0006 \pm 0,0006$

#### 8.7.4 Acoplamento mútuo

Consideramos nessa seção os circuitos mestre e escravo operando no regime de Espiral-Dupla ( $g = 0,6$ ) com acoplamento mútuo na variável  $V_{C_2}$ . O acoplamento mútuo, como já vimos anteriormente, reduz o valor da variável de acoplamento onde ocorre a bifurcação *blowout*. Isto faz com que o valor crítico  $K_C$  seja menor. Mostramos na Figura 8.29 a variação do expoente condicional transversal em função do parâmetro de acoplamento  $K$ , para este acoplamento. Neste caso o parâmetro crítico onde ocorre a bifurcação *blowout* é igual a  $K_C = 0,18$ .

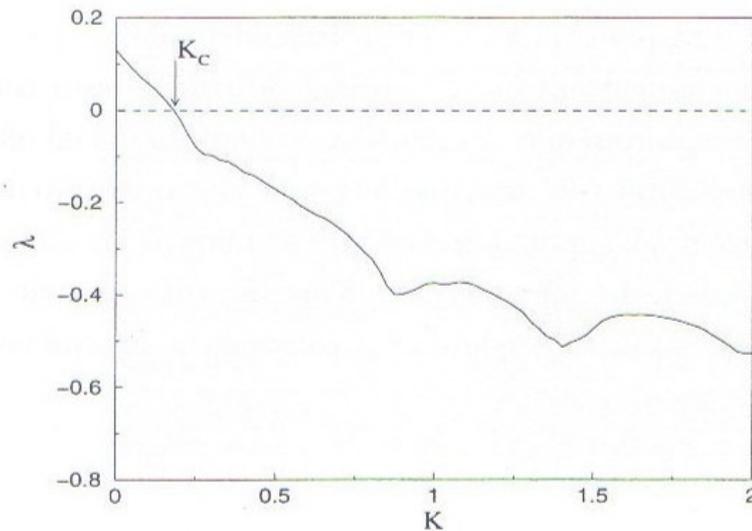


Figura 8.29: Lyapunov condicional transverso para sincronização mútua, método de Pyragas (variável acoplada  $V_{C_2}$ ). Circuitos mestre e escravo no regime caótico tipo Espiral-Dupla ( $g = 0, 6$ ). Em  $K_r \approx 0,18$  ocorre a transição do expoente de Lyapunov condicional positivo para negativo.

### 8.7.5 Bacia inter-crivada

Da mesma forma que fizemos para o acoplamento unidirecional, determinamos a bacia de sincronização para uma constante de acoplamento próxima da bifurcação *blowout*. Para a constante escolhida,  $K = 0,2$ , o maior expoente de Lyapunov condicional já é negativo de forma que o caráter crivado (*riddled*) é esperado para esta bacia como podemos observar pela Figura 8.30 e a sua ampliação mostrada na Figura 8.31. Diferentemente do acoplamento unidirecional, há agora a presença de uma simetria na bacia; o acoplamento mútuo faz com que as bacias se crivem. Isto pode ser visto através do expoente de incerteza calculado para a bacia mostrada na Figura 8.31, para a qual obtivemos o valor do expoente de incerteza  $\alpha = 0,0005 \pm 0,0003$ . Este expoente de incerteza, mostrando o caráter inter-crivado da bacia é menor que o expoente de incerteza calculado para o acoplamento unidirecional, embora muito próximo. Portanto podemos concluir que o acoplamento mútuo aumenta a incerteza na previsão do comportamento futuro do sistema acoplado, pois o caráter de bacia é inter-crivado *intermingled basin* (as duas bacias se crivam). Essa previsão é esperada uma vez que: consideramos um expoente de Lyapunov condicional negativo próximo ao valor zero (transição *blowout*), um atrator caótico gerado pela sincronização (tridimensional), imerso numa dimensão menor que a dimensão total do sistema (dimensão 6), quando não há sincronização.

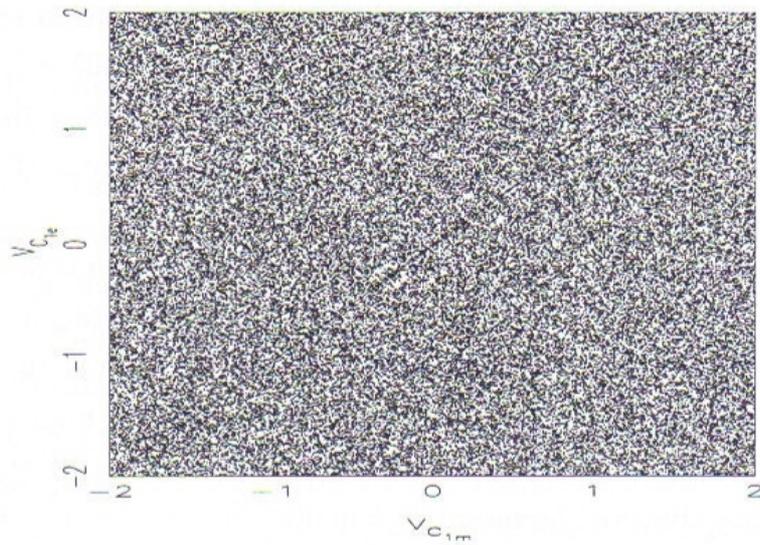


Figura 8.30: Bacia inter-crivada (*intermingled basin*) de sincronização através do método de realimentação com acoplamento mútuo (variável acoplada  $V_{C_2}$ ;  $K = 0,2$ ) para circuitos mestre e escravo no regime caótico tipo Espiral-Dupla  $g = 0,6$  (*Double Scroll*). Condições iniciais nas regiões em preto sincronizam. Condições iniciais nas regiões em branco não sincronizam.

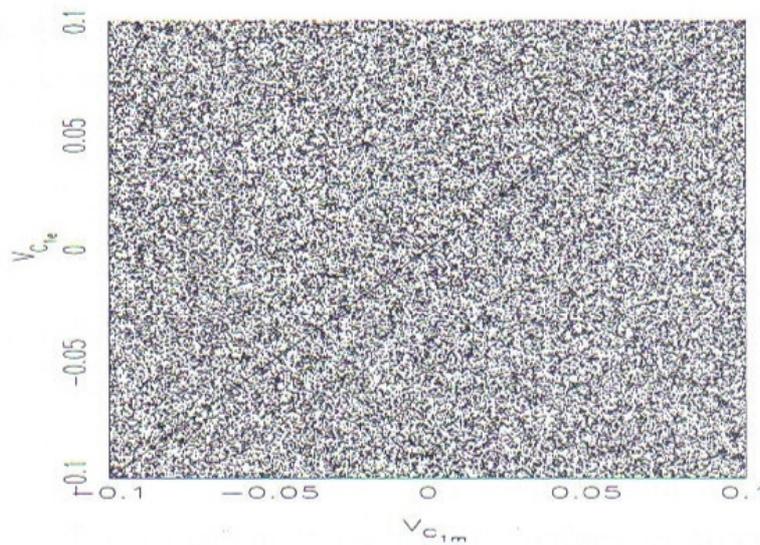


Figura 8.31: Ampliação da Bacia inter-crivada Figura 8.30. Condições iniciais nas regiões em preto sincronizam. Condições iniciais nas regiões em branco não sincronizam.

A variação da fração  $f(\varepsilon)$ , de condições incertas, com a variação da perturbação  $\varepsilon$  pode ser visto na Figura 8.32. Através da declividade da reta determinamos o expoente de incerteza para a Figura 8.31. Obtivemos o expoente de incerteza  $\alpha = 0,0005 \pm 0,0003$ , o que revela o caráter crivado da bacia - não há variação significativa na diminuição da incerteza, quanto a determinação do comportamento futuro do sistema, a medida que se diminui a perturbação  $\varepsilon$  nas condições iniciais.

Uma diferença das bacias das Figuras 8.18 e 8.30 é que enquanto a bacia da Figura 8.18 tem a bacia de não sincronização crivando a bacia de sincronização, na bacia da Figura 8.30, ambas as bacias (sincronização e não sincronização) crivam-se uma a outra, formando o que se denomina de bacia inter-crivada (*intermingled*). Isto é uma consequência do tipo de acoplamento ser bidirecional. Vale salientar ainda que o comportamento crivado dessas bacias é completamente eliminado quando  $K$  é maior do que um certo valor crítico, e todas as condições iniciais que não se dirigem ao atrator infinito levam à sincronização.

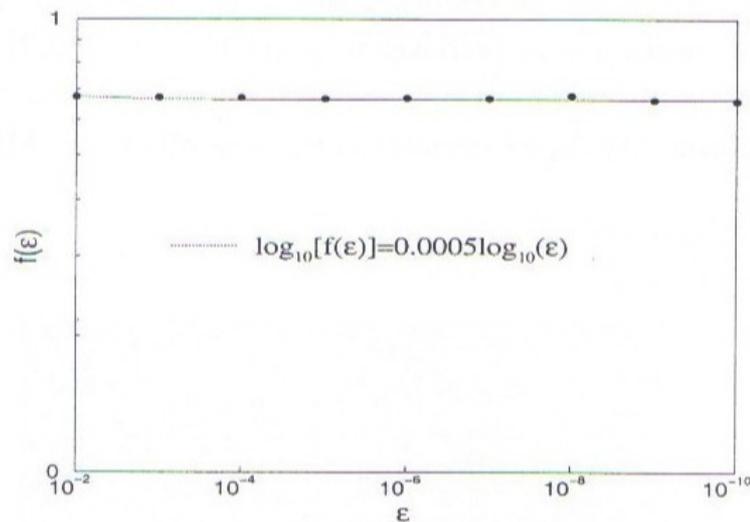


Figura 8.32: A fração de incerteza  $f(\varepsilon)$  versus a incerteza  $\varepsilon$  em escala logaritmica de base-10 referente a bacia mostrada na Figura 8.31. Linha reta: ajuste linear, expoente de incerteza  $\alpha = 0,0005 \pm 0,0003$ .

## 8.8 Sincronização de caos aplicado a comunicação

A aplicação de caos em comunicação está ligada à teoria de informação. Um sistema caótico pode ser considerado como uma fonte de informação. A conexão formal entre

dinâmica caótica e teoria de informação começa pela introdução, na teoria da medida, do conceito de entropia e teoria ergódica [3].

A dependência hipersensível às condições iniciais pode ser usada para introduzir informação. Podemos olhar esta dependência hipersensível através da informação gerada pela dinâmica do sistema caótico, ou através da medida da perda da informação causada pelo movimento. Por exemplo, sejam dois pontos inicialmente localizados tão próximos de forma que somos incapazes de distinguí-los no início da evolução do sistema. Então, a medida que a separação espacial aumenta, eles se tornam mais e mais distinguíveis. É nesse sentido que dizemos que a informação foi gerada pelo movimento. Por outro lado, se fixarmos os pontos iniciais com alta precisão, a informação continua decrescendo com a continuidade do movimento, devido à mesma instabilidade (crescimento exponencial) e precisão finita da medida. Ambos pontos de vista levam a noção de entropia. Sistemas caóticos são caracterizados por terem entropia positiva e, portanto, são fontes de informação. De forma sucinta, a informação contida em um número  $N$  de trajetórias distintas cresce com o tempo de forma:

$$N \propto e^{St}, \quad (8.31)$$

sendo  $S$ , a grandeza que caracteriza a taxa média de geração de informação, a entropia topológica do sistema. O valor  $S^{-1}$ , com dimensão de tempo, mede a previsibilidade temporal a partir das condições iniciais fixas [77].

Construindo um alfabeto discreto em relação ao espaço de estados do sistema, usando o formalismo da dinâmica simbólica [77], o sistema caótico torna-se uma fonte de símbolo e como ele é uma fonte de sinal ondulatório contínuo no tempo, ele é também uma fonte de sinal digital [3]. Um sistema caótico pode ser uma fonte de sinal de comunicação digital. Esta propriedade foi usada na referência [125]. Controlando a saída de um oscilador através de um pequeno pulso de corrente é possível a transmissão de uma mensagem desejada sem efetivamente alterar a dinâmica do sistema. Por exemplo, um oscilador caótico bipolar pode produzir uma sequência randômica de picos de tensões positivas e negativas [3]. Se a esses picos fizermos corresponder os símbolos binários 0 e 1, então o sinal pode ser visto como uma onda de comunicação binária. Dessa forma pode-se codificar qualquer mensagem desejada na onda usando pequenos pulsos de perturbação para controlar a sequência de picos representando os símbolos 0 e 1.

### 8.8.1 Esquema de Cuomo e Hoppenheim

Nesta subseção, vamos exemplificar, com o esquema proposto por Cuomo e Hoppenheim [128], a aplicação da sincronização de caos em um esquema simples de comunicação.

No esquema proposto, um sinal de informação contendo a mensagem  $m_e$  é transmitida usando um sinal caótico como uma onda portadora de banda larga em frequência. Em seguida, para se conseguir a recuperação da informação no receptor, é necessário sincronizar o transmissor com o receptor. O sinal caótico, por sua irregularidade, serve para mascarar a informação e, ao mesmo tempo, para sincronizar os sistemas de forma que se consiga extrair a mensagem enviada, ou seja, um único canal de comunicação é usado para se enviar a mensagem e sincronizar os sistemas.

A Figura 8.33, ilustra o processo. O circuito mestre ( $V_{C_{1m}}, V_{C_{2m}}, i_{Lm}$ ), serve como transmissor. Usamos  $V_{C_{1m}}$  como o sinal portador, adicionando a este um sinal senoidal (mensagem), do tipo  $m_e = 0.5 \text{sen} 2\pi(0.12t)$ . O sinal composto, mensagem mais sinal caótico  $S(t) = V_{C_{1m}}(t) + m_e(t)$ , será injetado no circuito escravo ( $V_{C_{1e}}, V_{C_{2e}}, i_{Le}$ ), que simula o receptor, na forma mostrado no diagrama esquemático. A mensagem enviada  $m_e(t)$ , pode ser recuperada devido à sincronização dos sistemas. Quando os circuitos sincronizam, temos que  $V_{C_{1m}} \cong V_{C_{1e}}$ , a mensagem pode então ser detectada, obtendo-se a mensagem recebida  $m_r = S(t) - V_{C_{1e}}$ .

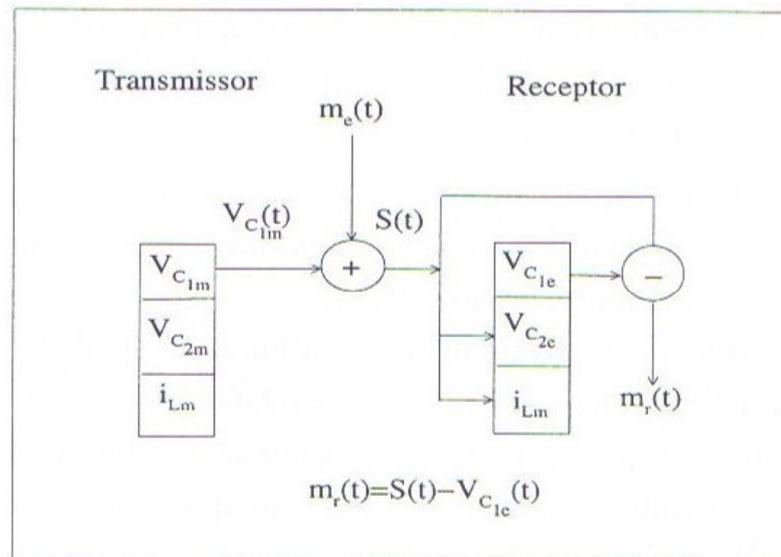


Figura 8.33: Diagrama do esquema de comunicação de Cuomo e Hoppenheim. A mensagem enviada  $m_e(t)$  é mascarada com o sinal caótico de  $V_{C_{1m}}(t)$ . Sinal injetado no receptor  $S(t) = m_e(t) + V_{C_{1m}}(t)$ . Mensagem recuperada após a sincronização  $m_r = S(t) - V_{C_{1e}}(t)$ .

Na Figura 8.34, mostramos o sinal do circuito transmissor ( $V_{C_{1m}}$ ), sem a mensagem  $m_e(t)$  e o sinal transmitido para o receptor ( $S(t) = V_{C_{1m}} + m_e$ ), fica evidente, pela figura, que a presença da mensagem no sinal aumenta sua amplitude. O sinal caótico mascara a onda senoidal uma vez que a última apresenta amplitude menor que o sinal.

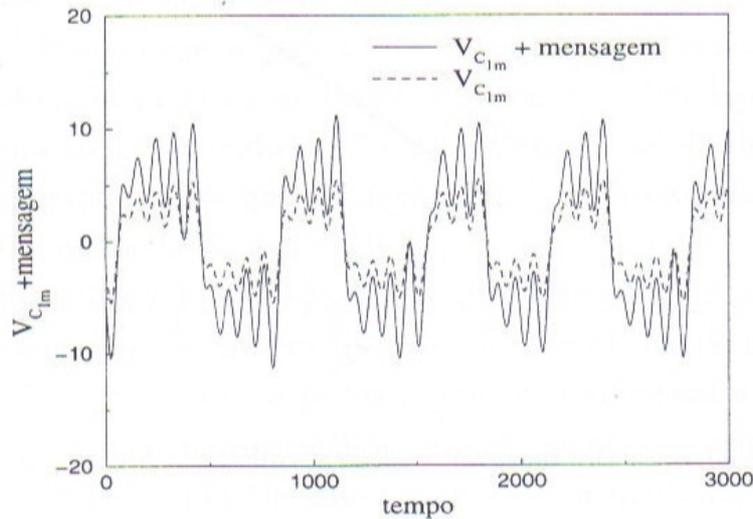


Figura 8.34: Sinal caótico  $V_{C_{1m}}$  (linha pontilhada), gerado pelo circuito mestre no regime *Double Scroll* ( $g = 0.6$ ), simulando o transmissor. Sinal enviado  $S(t) = m_e + V_{C_{1m}}$  (linha sólida). Mensagem enviada  $m_e = 0,5 \text{sen}2.\pi(0.12t)$ .

Mostramos o processo de sincronização do receptor com o transmissor, na Figura 8.35. Projetamos o atrator sincronizado nas variáveis  $V_{C_{1m}}$  versus  $V_{C_{1e}}$ , dos circuitos mestre e escravo (transmissor, receptor).

A Figura 8.36, ilustra a capacidade de recuperação da mensagem pelo método descrito. A mensagem recuperada (linha sólida), diferencia-se pouco da mensagem original enviada (linha pontilhada). O processo físico de dissipação usado para sincronizar, se manifesta na diminuição da amplitude da mensagem recebida, porém a diferença, como podemos ver, é quase imperceptível.

### 8.8.2 Segurança em comunicação

Havíamos comentado no início deste capítulo que a sincronização é um fator essencial para qualquer esquema de comunicação, usando caos ou não [142]. No entanto, ocorrem vários problemas relacionados à segurança na transmissão da mensagem. O principal problema está relacionado ao fato do transmissor ter que transmitir ao receptor uma parte da informação

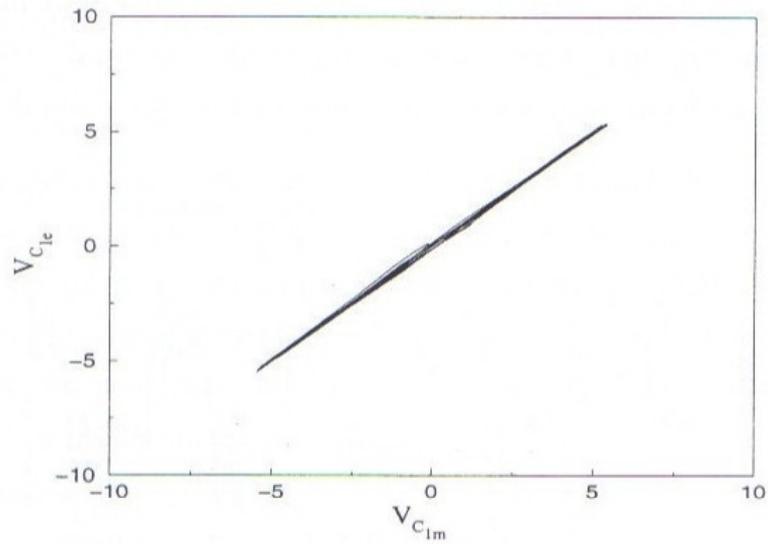


Figura 8.35: Sincronização do receptor com transmissor. Mensagem enviada  $m_e = 0.4 * \text{sen}(2.\pi ft)$ .

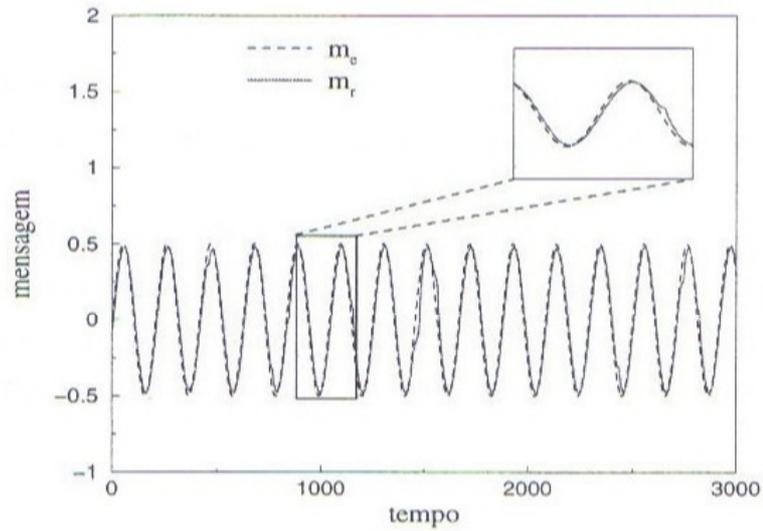


Figura 8.36: Mensagem enviada ( $m_e$ -linha pontilhada) e mensagem recuperada ( $m_r$ -linha sólida), após a sincronização. Quadro menor ampliado pra mostrar a presença dos dois sinais.

do sistema dinâmico (no caso do esquema de Pecora-Carroll [130] isto é feito, como vimos, por meio da transmissão de uma das variáveis do sistema). Como consequência, um espião pode interceptar a comunicação e reconstruir a dinâmica total do sistema, e dessa forma decodificar a mensagem. Com o objetivo de evitar a reconstrução da mensagem Cuomo e Hoppenheim propuseram o método de mascaramento da mensagem, como mostramos na subseção anterior. Posteriormente, Perez e Cerdeira [154] mostraram que a mensagem mascarada por uma dinâmica caótica de baixa dimensão pode ser interceptada e extraída. Outras implementações com o método de Pecora e Carroll usando dinâmica de mais alta dimensão surgiram na esperança de que, aumentando-se a imprevisibilidade do sistema, a segurança na comunicação melhorasse [155][3].

Um outro problema no uso do método de Pecora e Carroll é que os subsistemas para serem sincronizados, como vimos, devem ter expoentes condicionais negativos. Ou seja, a sincronização ocorre de forma linear, e por isso, um sinal adicional usado para esconder a mensagem funciona como uma perturbação ao próprio sinal, enquanto que mascarando a mensagem com um sinal de amplitude maior pode levar a perda da sincronização [3]. A referência [156] descreve a aplicação de um esquema adaptado para sincronização caótica, semelhante ao método de Pyragas, e mostra como o nível de segurança da mensagem pode ser melhorado contra a interceptação externa, até mesmo nos casos em que se usa sistemas caóticos de baixa dimensão. Um outro método [157] generaliza o método de Pecora e Carroll e o sinal com a mensagem é injetado dentro da dinâmica do sistema transmissor, melhorando com isso a segurança da mensagem enviada.

### 8.8.3 Conclusão do capítulo

Neste capítulo aplicamos dois métodos de sincronização ao sistema formado por dois circuitos de Matsumoto-Chua. Através do primeiro método, desenvolvido por Pecora e Carroll [130], introduzimos os conceitos gerais de sincronização, tais como: bacia de sincronização e Lyapunov condicional. Obtivemos a sincronização total (seguindo a definição de Aframovich [139]) de dois circuitos operando no regime caótico de Espiral-Dupla. Esta sincronização foi alcançada usando duas variáveis diferentes do circuito mestre para forçamento do circuito escravo. Ambas configurações foram eficientes no processo de sincronização. Através do segundo método, de realimentação negativa (semelhante a idéia de Pyragas para controle de Caos) determinamos a bacia de atração de sincronização para os dois circuitos operando no regime caótico tipo Rössler. Mostramos que a geometria da bacia de sincronização está diretamente relacionada com a geometria da bacia de um único circuito operando neste

regime. As intersecções das variedades criam *ilhas* de condições iniciais que possibilitam a sincronização. Intercaladas com estas, há regiões de condições iniciais que não geram sincronização, mas geram uma estrutura geométrica semelhante a um tabuleiro de xadrez. A análise da condição para que ocorra sincronização assintótica foi realizada usando-se o valor do maior expoente de Lyapunov condicional. A partir deste expoente construímos os diagramas no espaço dos parâmetros  $g$  e  $K$ , lembrando que  $g$  é o inverso da resistência linear cujo valor determina os diferentes tipos de comportamento do circuito (periódico ou caótico) e  $K$  é a constante de acoplamento que permite a sincronização entre os circuitos. Mostramos que o acoplamento mútuo ou bidirecional reduz o valor crítico da constante de acoplamento  $K$  (onde o valor do expoente condicional muda de positivo para negativo). Dessa forma, o acoplamento mútuo favorece a sincronização entre os circuitos. Isto pode ser verificado através da bacia de sincronização com acoplamento mútuo comparada com a bacia com acoplamento unidirecional, a primeira possui regiões bem menores de indeterminação quanto ao comportamento assintótico do processo de sincronização. Verificamos ainda que a bacia de sincronização próxima a bifurcação *blowout* (onde o expoente condicional muda de sinal) para os circuitos operando no regime caótico tipo Rössler, não apresenta caráter crivado (*riddled*) global, embora tenha uma geometria bastante complexa.

Aplicamos o método OPCL com o método de realimentação, para mostrar a eficiência deste método no processo de sincronização quando os dois circuitos operam no regime caótico com coexistência de atratores.

Mostramos que as bacias de sincronização, com os acoplamento unidirecional e mútuo e os circuitos operando no regime caótico de Espiral-Dupla, apresentam caráter crivado (*riddled*) próxima à transição *blowout*. As regiões de condições iniciais que levam a sincronização assintótica possuem regiões intercaladas com regiões que não levam à sincronização, produzindo uma bacia complexa semelhante a um crivo. Determinamos o expoente de incerteza para estas bacias e verificamos que o acoplamento mútuo aumenta a incerteza na determinação do comportamento assintótico do sistema acoplado. Em outras palavras, não é possível diminuir a incerteza quanto ao comportamento futuro do sistema (sincronizado ou não-sincronizado), à medida que se aumenta a precisão das condições iniciais. Esta extrema dependência às condições iniciais se manifesta com os circuitos acoplados unidirecionalmente ou com acoplamento mútuo, para as regiões em que  $K_r < K < K_c$ .

E finalmente, mostramos um esquema simples de comunicação usando caos, desenvolvido por Cuomo e Hoppenheim, para mostrar a aplicação de sincronização no processo de transmissão e recepção de uma mensagem mascarada por um sinal caótico.

# Capítulo 9

## Conclusão

Pelo trabalho apresentado nesta tese, concluímos que o circuito de Matsumoto-Chua é um sistema versátil e útil para a análise e a verificação da teoria da dinâmica de sistemas não-lineares e suas aplicações.

Através da introdução da equação de sensibilidade, mostramos que as soluções geradas pelas equações do circuito de Matsumoto-Chua são mais sensíveis às variações no parâmetro  $g(1/R)$  do que às variações nos parâmetros  $C_1$ ,  $C_2$  e  $L$ . Essas soluções mostraram sensibilidades equivalentes para os parâmetros  $C_1$ ,  $C_2$  e  $L$ .

Desenvolvemos um programa para o cálculo dos expoentes de Lyapunov, usado para caracterizar o comportamento dinâmico do circuito investigado. Assim, para diferentes conjuntos de dois parâmetros, determinamos diagramas que indicam os valores do maior expoente de Lyapunov no espaço de parâmetros. Alguns desses diagramas mostram resultados coincidentes com os dos diagramas isoperiódicos calculados para órbitas recorrentes vistos em [40]. Utilizando esses diagramas identificamos a rota de Feigenbaum para o caos, regiões periódicas que surgem por bifurcações tangentes e coexistência de atratores.

Verificamos que a coexistência de atratores periódicos podem gerar bacias de atração complexas com estruturas do tipo fractal.

Usando as propriedades de simetria, desenvolvemos um programa e, com ele, determinamos as bacias de atração para os dois atratores caóticos tipo Rössler coexistentes antes da crise de fusão, a partir da qual surge o atrator Espiral-Dupla. Observamos, através destas bacias, que a variedade estável do ponto  $P^0$  cria uma região de acumulação na fronteira da bacia do atrator infinito, com uma estrutura do tipo conjunto de Cantor. Desenvolvemos um outro programa para o algoritmo do tempo de escape e, com ele, determinamos também, a bacia de atração do atrator Espiral-Dupla. Mostramos ainda, que este atrator aumenta

de tamanho, diminuindo sua bacia de atração, até sofrer uma crise de fronteira ao colidir com a órbita instável tipo sela. O atrator Espiral-Dupla então desaparece do espaço de fase conjuntamente com sua bacia.

Utilizamos o espectro de autocorrelação para construir diagramas no espaço dos parâmetros. Estes diagramas são muito mais fáceis de obter por usarem *FFT* e o teorema de Wiener-Khinchin (o que permite determinar a autocorrelação a partir do espectro de potência) e serem mais rapidamente calculados do que os diagramas do expoente de Lyapunov, embora a sua resolução seja inferior à obtida com esse expoente.

Consideramos uma perturbação externa do tipo senoidal em série com o indutor  $L$  do circuito original. Com este forçamento surgem movimentos quase periódicos. Com isto, foi possível estudar novas rotas para o caos. Fizemos para o sistema perturbado a mesma análise sistemática feita para o sistema sem forçamento. Conjuntamente com os parâmetros do sistema original, variamos a amplitude e a frequência do forçamento, gerando novos diagramas no espaço de parâmetros. Determinamos quatro cenários para o caos a partir do movimento quase periódico. Dois destes seguem a rota de Curry-Yorke. Uma das rotas é a crise cíclica, vista pela primeira vez no circuito de Matsumoto-Chua. A outra rota ocorre por uma sequência de duplicação de períodos a partir de uma órbita periódica correspondente a uma língua Arnold. Os outros dois cenários (que não seguem a rota de Curry-Yorke) são a quebra abrupta do toro e o dobramento do toro, este último visto também pela primeira vez no circuito de Matsumoto-Chua. Neste último cenário, o toro sofre contínuos dobramentos de períodos, seguindo a rota de Feigenbaum. Mostramos que a quebra de toro abrupta pode ocorrer a partir da presença de um único ponto de sela externo ao toro. Verificamos que estes quatro cenários, dois via Curry-Yorke, um terceiro pela quebra abrupta do toro e um quarto pelo dobramento do toro, possuem espectros distintos dos expoentes de Lyapunov. Isto permitiu-nos distinguir os diferentes atratores caóticos gerados pelas diferentes rotas. A partir dessa observação, especulamos que a transição direta de comportamento quase periódico para caos somente pode ser observado quando  $k + 1$  parâmetros podem ser variados simultaneamente, onde  $k$  representa o número de expoentes de Lyapunov positivos. Esta hipótese abre perspectivas de investigação para trabalhos futuros.

Analisamos a transição do regime caótico tipo Rössler para o regime caótico de Espiral-Dupla através do biespectro com a transformada de ondaletas. Verificamos que o atrator caótico do tipo Rössler possui um alto acoplamento quadrático entre os três modos, enquanto que o atrator Espiral-Dupla possui um acoplamento quadrático quase nulo, indicando uma distribuição de modos espontâneos e fases aleatoriamente distribuídas. Com base no livro

de Holmes *et al.* e referências ali citadas, elaboramos a hipótese da simetria e a presença de ciclos homoclínicos (ou heteroclínicos) perturbados serem os responsáveis pela perda do acoplamento quadrático. As órbitas do atrator Espiral-Dupla ao passar de uma espiral para outra geram novos modos e, portanto, fases aleatoriamente distribuídas. Dessa forma, os modos observados não se acoplam quadraticamente. Mostramos que, na transição caos-caos, há um comportamento intermitente do acoplamento quadrático. Para intervalos de tempo em que a órbita é gerada por um dos antigos atratores tipo Rössler, o acoplamento quadrático é alto. Para intervalos em que a órbita analisada tem transições ocorrendo entre os dois antigos atratores, o acoplamento é quase nulo, e de acordo com a nossa conjectura. Mostramos ainda que o sistema de Lorentz, por obedecer uma propriedade de simetria e ter a presença de ciclos homoclínicos, semelhantes aos sistemas analisados por Holmes *et al.*, possui acoplamento quase nulo. Como era de se esperar pela nossa hipótese.

Aplicamos cinco métodos de controle de caos ao circuito de Matsumoto-Chua: o método de controle por travamento de frequência, o método de Huwang, o método OGY, o método de realimentação negativa e o método OPCL. O método por travamento de frequência se mostrou eficaz para o forçamento com amplitude baixa com uma frequência sub-múltipla da frequência característica do sistema sem perturbação. Para forçamentos com amplitudes maiores tivemos que lançar mão dos diagramas no espaços de parâmetros, para determinar regiões periódicas no interior das regiões caóticas, tais como as línguas de Arnold. Através do método de Huwang estabilizamos o comportamento caótico do sistema nos seus pontos fixos. Este método se mostrou eficaz e eficiente para o objetivo proposto. O método OGY, embora exija um maior empreendimento numérico, explora as propriedades dos atratores caóticos e a amplitude da perturbação usada para controle é muito pequena. Por se basear nas propriedades do atrator caótico, sua aplicação é bastante geral. Aliado a um processo de direcionamento de trajetórias, a aplicação deste método se mostra bastante promissora e com larga aplicação. O método de realimentação aplicado ao controle de uma órbita instável do atrator se mostrou mais eficiente com a realimentação aplicada na variável  $V_{C_1}$  e na variável  $V_{C_2}$ . Mostramos através do cálculo do expoente de Lyapunov condicional que a realimentação usando a variável  $V_{C_1}$  exige uma constante de acoplamento  $K$  bastante alta (acima de 10). A realimentação usando a variável  $V_{C_2}$  é a que oferece menor valor da constante de acoplamento para se conseguir um expoente de Lyapunov condicional negativo, e com uma grande faixa de valores para  $K$ . Mostramos, ainda, que a realimentação com duas variáveis torna o expoente de Lyapunov mais negativo e, portanto, mais eficiente quanto ao controle. Finalmente com o método de controle OPCL mostramos que a trajetória do sistema pode ser transferida entre

os cinco atratores coexistentes, usando um tempo curto dos sinais pré-gravados de cada um dos atratores. Além disso, usando trajetórias não geradas pelo circuito, mostramos que o método é capaz de fazer com que as órbitas do sistema se comportem da mesma forma que as órbitas escolhidas. Testamos a capacidade do método OPCL para uma órbita migrar para diferentes pedaços de órbitas pré-gravadas e este se mostrou eficiente. Isto possibilita a aplicação deste método a sistemas de comunicação baseados em migração de órbitas.

Apresentamos diferentes tipos de acoplamento para a sincronização de dois circuitos de Matsumoto-Chua operando no regime caótico. Inicialmente, aplicamos o método de Pecora e Carroll para dois circuitos operando no regime de Espiral-Dupla. Este método se mostrou eficaz com as duas variáveis de acoplamento  $V_{C_1}$  e  $V_{C_2}$ .

Implementando o método de realimentação, analisamos a dependência da sincronização às condições iniciais com base no cálculo dos expoentes de Lyapunov condicionais. Analisamos esta dependência com os circuitos acoplados unidirecionalmente e bidirecionalmente (tanto os circuitos operando no regime caótico do tipo Rössler quanto no regime de Espiral-Dupla). Verificamos que o acoplamento unidirecional do sistema de Matsumoto-Chua operando no regime caótico tipo Rössler, embora apresente coexistência de atratores, não apresenta comportamento do tipo bacia crivada na bacia de sincronização. Em geral, para este regime, quando as condições iniciais de um dos circuitos estão em uma bacia diferente do circuito acoplado, não ocorre a sincronização, independente do valor da constante de acoplamento  $K$ . Nestes casos, sugerimos e mostramos que o método OPCL de migração entre atratores é eficaz para se conseguir a sincronização.

Para sincronização de circuitos operando no regime de Espiral-Dupla, ainda que neste regime cada circuito não apresente coexistência de atratores, o comportamento da bacia de sincronização é muito mais complexo do que aquele obtido no regime do tipo Rössler. Apresentando para certas regiões do parâmetro de acoplamento  $K_r < K < K_c$ , comportamento de bacia crivada (acoplamento unidirecional) e bacia inter-crivada (acoplamento mútuo). Logo, quando se usa o sistema acoplado para certos valores de  $g$  (como, por exemplo  $g = 0,6$ ), este intervalo de  $K$  deve ser evitado.

Com vista a possíveis aplicações em comunicação, usando o circuito de Matsumoto-Chua, podemos concluir que a trajetória do atrator Espiral-Dupla é capaz de carregar muito mais informação do que a trajetória do sistema operando no regime tipo Rössler (por apresentar maior expoente de Lyapunov do que o atrator do tipo Rössler). No entanto, é muito mais difícil sincronizar os circuitos operando no regime de Espiral-Dupla.

Caracterizamos a existência de bacias crivadas e inter-crivadas através do expoente de

incerteza. Estes cálculos mostraram que o estado final do sistema acoplado é indeterminado quando se obtêm bacias crivadas.

Como uma possível aplicação de sincronização, simulamos o envio de uma mensagem pelo esquema proposto por Cuomo-Opennheim. Vimos que após a sincronização a mensagem enviada foi totalmente recuperada no receptor.

Ressaltamos o fato de que desenvolvemos todos os programas numéricos usados nesta tese, com exceção dos programas para o cálculo do diagrama no espaço das frequências e do biespectro.

A partir dos resultados obtidos nesta tese, e com objetivo de melhor compreensão dos resultados, algumas linhas de novas investigações podem ser traçadas, como a análise da transição para o caos com a transformada de ondaletas com objetivo de se determinar possíveis estruturas coerentes, aplicação da análise do biespectro nos atratores caóticos gerados por movimento quase periódico, investigação da presença de órbitas homo(hetero)clínicas presentes no circuito de Matsumoto-Chua e verificação dos resultados obtidos por Holme *et al.*, simulação do método de comunicação proposto por Baptista *et al.* com a ajuda do método OPCL de migração entre órbitas, verificação das diferentes rotas para o caos via quase periodicidade e comprovação da hipótese de que a transição direta de quase periódico para caos só é possível quando  $k + 1$  parâmetros podem ser variados simultaneamente ( $k$  é o número de expoentes positivos), idealização de um meio de eliminar e substituir a matriz  $A$  no método OPCL de tal forma que seja de fácil implementação experimental.

# Apêndice A

## Programa em C para o cálculo dos expoentes de Lyapunov

Neste apêndice desenvolvemos o algoritmo e o respectivo programa em linguagem C usado para a determinação dos expoentes de Lyapunov para qualquer sistema descrito por equações diferenciais de primeira ordem.

Inicialmente, vamos definir e considerar o cálculo da *equação variacional* usada constantemente no decorrer da tese. Considere um sistema de ordem- $n$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \quad (\text{A.1})$$

com solução  $\phi_t(\mathbf{X}_0, t)$ , i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_t(\mathbf{X}_0, t_0) &= \mathbf{F}(\phi_t(\mathbf{X}_0, t_0), t) \\ \phi_{t_0}(\mathbf{X}_0, t_0) &= \mathbf{X}_0. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Diferenciando A.2 com relação a  $\mathbf{X}_0$ , obtemos

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{X}_0} \dot{\phi}_t(\mathbf{X}_0, t_0) &= D_{\mathbf{X}} \mathbf{F}(\phi_t(\mathbf{X}_0, t_0), t) D_{\mathbf{X}_0} \phi_t(\mathbf{X}_0, t_0), \\ D_{\mathbf{X}_0} \phi_{t_0}(\mathbf{X}_0, t_0) &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Chamando  $\Phi_t(\mathbf{X}_0, t_0) = D_{\mathbf{X}_0} \phi_t(\mathbf{X}_0, t_0)$ , em A.3, temos

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_t(\mathbf{X}_0, t_0) &= D_{\mathbf{X}} \mathbf{F}(\phi_t(\mathbf{X}_0, t_0), t) \Phi_t(\mathbf{X}_0, t_0), \\ \Phi_{t_0}(\mathbf{X}_0, t_0) &= \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

esta é a **Equação variacional** (uma matriz calculada variando no tempo através de uma equação diferencial linear). Note que sua solução depende da integração conjunta do sistema A.1, ou seja, se as trajetórias geradas pelo sistema A.1 mudam, da mesma forma muda a equação variacional.

A solução numérica da **equação variacional** A.4 é feita da seguinte forma: integra-se simultaneamente a equação do sistema A.1 e a equação matricial A.4, pois a equação variacional depende de ambos as soluções  $\phi$  (o fluxo) e  $\Phi$  (a solução da equação matricial). Dessa forma integramos o sistema de equações ,

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \\ D_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\Phi \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

o qual é integrado a partir da condição inicial

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}(t_0) \\ \Phi(t_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}(0) \\ \mathbf{I} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

**Expoente de Lyapunov:** Escolha uma condição inicial qualquer  $\mathbf{X}_0$  para o sistema A.1, de preferência que esta condição se encontre dentro da bacia de atração do atrator gerado por A.1. Seja  $m_1(t), \dots, m_n(t)$  os autovalores de  $\Phi_t(\mathbf{X}_0)$ . Os expoentes de Lyapunov de  $\mathbf{X}_0$  são definidos como,

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |m_i(t)|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.7})$$

O cálculo dos expoentes através do uso direto da definição esbarra em duas dificuldades:

i) Para sistemas caóticos, pelo menos um expoente de Lyapunov é positivo, o que implica que  $\Phi_t(\mathbf{X}_0)$  não é limitado para um intervalo finito de tempo, com isso gerando *estouro numérico* na solução da integração .

ii) Considere um sistema de terceira ordem linearizado tendo autovalores reais  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ , com autovetores correspondentes  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ . (Se os autovalores são reais, eles são iguais aos expoentes de Lyapunov). A solução do sistema linearizado tem a forma

$$\delta\mathbf{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \eta_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \eta_2 + C_3 e^{\lambda_3 t} \eta_3. \quad (\text{A.8})$$

É quase certo que cada coluna de  $\Phi_0(\mathbf{X})(= \mathbf{I})$  se localiza no subespaço de maior perturbação , isto é, para cada coluna de  $\Phi_0(\mathbf{X})$ ,  $C_1 \neq 0$ . Portanto, todas as outras colunas tendem a se alinhar com o autovetor  $\eta_1$ . Este alinhamento ocorre também em sistemas não-lineares, o que implica que para grandes intervalos de integração não se consegue distinguir os

diferentes vetores da equação  $\Phi_t(\mathbf{X})$ , novamente gerando problemas numéricos. A solução, para ambos os problemas, consiste em ortogonalizar esses vetores de tempos em tempos, em outras palavras o sistema A.5 é integrado por um intervalo de tempo  $\tau$ , se aplica um processo de ortogonalização (nesta tese usamos Gram Schimdt), e se repete o processo. Dessa forma evitamos problemas numéricos no cálculo. As propriedades matriciais nos assegura que o volume gerado pelo elipsóide se mantém constante na ortogonalização. Assim, usamos o seguinte algoritmo para o cálculo dos expoentes de Lyapunov desta tese

```

    elimine o transiente do sistema;
    faça  $\mathbf{X}_0 = \phi_t$ ; condição inicial
    faça  $u[] = \mathbf{I}$ ; matriz dos vetores unitários
    para  $i$  de 1 até  $n$  faça;  $n$  a dimensão do sistema
    {
         $\lambda[i] = 0$ ; inicializando os expoentes em zero
         $soma[i] = 0$ ; variável para armazenar a soma
    }
    faça  $k = 0$ ;
    para  $j$  de 1 até NTOTAL faça; NTOTAL-número de iterações
    {
         $\lambda_{ant}[] = \lambda[]$ ; armazena num vetor coluna os antigos expoentes
         $\delta x[][] = \Phi_\tau(\mathbf{X}[])u[][]$ ; integra a eq. variacional por um tempo  $\tau$ 
         $\mathbf{X}[] = \phi_\tau(\mathbf{X}[])$ ; armazene as soluções do sist.não-linear
        aplique o processo de ortogonalização de Gram-Shmidt
        para  $i$  de 1 até  $n$  faça
        {
             $v[][i] = \delta x[][i]$ ; armazene o vetor- $i$  correspondente a coluna- $i$  da matriz  $\delta x[][i]$ 
            para  $j$  de 1 até  $(i - 1)$  faça
            {
                 $v[][i] = v[][i] - \langle v[][i], u[][j] \rangle u[][j]$ ; processo de ortogonalização
            }
             $u[][i] = v[][i] / \|v[][i]\|$ ; normaliza o vetor fazendo-o unitário
            se  $i$  for maior do que NTRANS faça; para transiente
            {
                 $k = k + 1$ ;
                 $soma[i] = soma[i] + \ln \|v[][i]\|$ ; soma para o Lyapunov
            }
        }
    }
    para  $i$  de 1 até  $n$  faça;
    {
        Escreva  $\lambda[i] = soma[i] / k\tau$ ; valores dos expoentes de Lyapunov
    }

```



```

double derivs(double, double y[], double, int );
double t, znorm[N], y[12], gsc[N], cum[N];
double lyap1, lyap2, lyap3, T0,h=H, hh;
double m_z = MZ, m_u = MU, g;
double T,tt=0;
int i, j, l, k, m, nv, np;

main()
{

    unsigned long n, kk;
    FILE *fpout;                /* salva os valores em lyapchua.dat */
    if((fpout=fopen("lyapchua.dat","w"))==NULL)
    {
        printf("Arquivo % nao pode ser aberto\n");
        exit(0);
    }

    g=0.6;    /* parametro de controle */
    //Condicoes iniciais para o sistema nao-linear

    y[0] = 0.029;                /* x inicial */
    y[1] = 0.2334;              /* y inicial */
    y[2] = 0.845;                /* z inicial */
    T0 = 0.0;                    /* tempo inicial */
    t=T0;
    for(j=1; j <= NTRANS; j++)    /* elimina o transiente do atrator */
    {
        rk4(t, N, y, h, g);
        t+=h;
    }

    //Condicoes iniciais para o sistema linear e os vetores unitarios u[][]

```

```

for (i=N+1; i<= NN; i++)
{
    y[i-1]=0.0;    //X[] []
}

for (i=1; i<= N; i++)
{
    y[(N+1)*i-1]=1.0; //u[] []
    cum[i-1]=0.0;
}

t=0.0;
lyap1 = 0.0;
lyap2 = 0.0;
lyap3 = 0.0;
kk=0;
for(n=1; n<= NPT; n++)          /* numero total de iteracoes */
{
    //Integra a equacao variacional por quinze passos de integracao
    for(j=1; j <= 15; j++)
    {
        rk4(t, NN, y, h, g);
        t+=h;
    }
    T=15.*h; //tempo para cada ortogonalizacao
//Constroi uma nova base ortonormal por Gram-Schmidt
    //Normaliza o primeiro vetor
    znorm[0]=0.0;
    for(j = 1; j <= N; j++)
    {
        znorm[0]=znorm[0]+pow(y[N*j],2.);
    }

    znorm[0] = sqrt(znorm[0]);

```

```
for(j = 1; j<=N; j++)
{
    y[N*j] = y[N*j]/znorm[0];
}

//Gera um novo conjunto ortonormal de vetores
for(j = 2; j <= N; j++)
{
    //Gera J-1 coeficientes para Gram-Schmidt
    for(k = 1; k <= (j-1);k++)
    {
        gsc[k-1] = 0.0;

        for(l = 1; l <= N; l++)
        {
            gsc[k-1]=gsc[k-1]+y[N*l+j-1]*y[N*l+k-1];
        }
    }
    //Constroi um novo vetor
    for( k = 1 ; k<= N; k++)
    {
        for(l=1; l <= (j-1); l++)
        {
            y[N*k+j-1] = y[N*k+j-1] - gsc[l-1]*y[N*k+l-1];
        }
    }
    //Calcula a norma do vetor
    znorm[j-1]=0.0;

    for(k = 1; k <= N; k++)
    {
        znorm[j-1] = znorm[j-1] + pow( y[N*k+j-1],2.);
    }
}
```

```

}

znorm[j-1] = sqrt(znorm[j-1]);

//Normaliza o novo vetor
for(k = 1; k <= N; k++)
{
    y[N*k+j-1] = y[N*k+j-1]/znorm[j-1];
}
}

//calcula a soma apos o transiente
if(n>LYAP_TRAN)
{
    tt+=h;
    kk++;
    for(k = 1; k <= N; k++) cum[k-1] += log(fabs(znorm[k-1]));
}

}

for(k = 1; k <= N; k++) /* calculo dos expoentes */
{
    lyap1=cum[0]/(kk*T);
    lyap2=cum[1]/(kk*T);
    lyap3=cum[2]/(kk*T);
}

printf("lyap1=%lf; lyap2=%lf; lyap3=%lf", lyap1, lyap2, lyap3); //no video
fprintf(fpout,"%lf %lf %lf\n", lyap1, lyap2, lyap3);// em arquivo
fclose(fpout); //fecha arquivo
}

/*-----fim do programa principal-----*/

/* Subrotina de Runge Kutta - quarta ordem*/

```

```

void rk4(double t, int nv, double y[], double h, double g)
{
    double hh=h/2.0,                /* passo intermediario */
           t1[NN], t2[NN], t3[NN],  /* armazenamento temporario */
           k1[NN], k2[NN], k3[NN], k4[NN]; /* para Runge-Kutta */
    int i;

    for (i=0; i<nv; i++) t1[i] = y[i]+0.5*(k1[i]=h*derivs(t, y, g, i));

    for (i=0; i<nv; i++) t2[i] = y[i]+0.5*(k2[i]=h*derivs(t+hh, t1, g, i));

    for (i=0; i<nv; i++) t3[i] = y[i]+    (k3[i]=h*derivs(t+hh, t2, g, i));

    for (i=0; i<nv; i++) k4[i] =                h*derivs(t + h, t3, g, i);

    for (i=0; i<nv; i++) y[i] += (k1[i]+2.0*k2[i]+2.0*k3[i]+k4[i])/6.0;
}
/*-----*/
/* Definicao das derivadas das equacoes do atrator de Matsumoto-Chua */
double derivs(double t, double y[], double g, int i)
{
    double k, F;
    k=m_z*y[0]+0.5*(m_u-m_z)*(fabs(y[0]+1.0))+0.5*(m_z-m_u)*(fabs(y[0]-1.0));
    if (i == 0) return(10.0*(g*(y[1]-y[0])-k));
    if (i == 1) return(g*(y[0]-y[1])+y[2]);
    if (i == 2) return(-6.0*y[1]);
    if (y[0] < -1.0 || y[0] > 1.0) F = m_z;
        else F = m_u;
    //Equacoes linearizadas (Jacobiana) do sistema
    if (i == 3) return(-10.0*(g+F)*y[3] + 10.0*g*y[6]);
    if (i == 4) return(-10.0*(g+F)*y[4] + 10.0*g*y[7]);
    if (i == 5) return(-10.0*(g+F)*y[5] + 10.0*g*y[8]);
    if (i == 6) return(g*y[3]-g*y[6]+y[9]);
    if (i == 7) return(g*y[4]-g*y[7]+y[10]);
}

```

```
if (i == 8) return(g*y[5]-g*y[8]+y[11]);  
if (i == 9) return(-6.0*y[6]);  
if (i == 10) return(-6.0*y[7]);  
if (i == 11) return(-6.0*y[8]);  
return(0);
```

```
}
```

# Apêndice B

## Bicoerência do atrator de Rössler

Neste apêndice escrevemos as equações dos atratores de Lorenz e de Rössler usados no Capítulo 4 na análise biespectral. Mostramos ainda o biespectro com as curvas de níveis para o atrator de Rössler. Sendo seu acoplamento não linear explicitamente quadrático ( $\mathbf{ZX}$ ) é de se esperar que o biespectro seja quase um, como pode ser visto na Figura B.1.

### Atrator de Lorenz

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma(X - Y) & \sigma &= 10 \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ & r &= 28 \\ \dot{Z} &= XY - bZ & b &= 8/3\end{aligned}\tag{B.1}$$

### Atrator de Rössler

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y - Z \\ \dot{Y} &= X + aY & a &= 0,3982 \\ \dot{Z} &= b + \mathbf{ZX} - c & b &= 2 \quad c = 4\end{aligned}\tag{B.2}$$

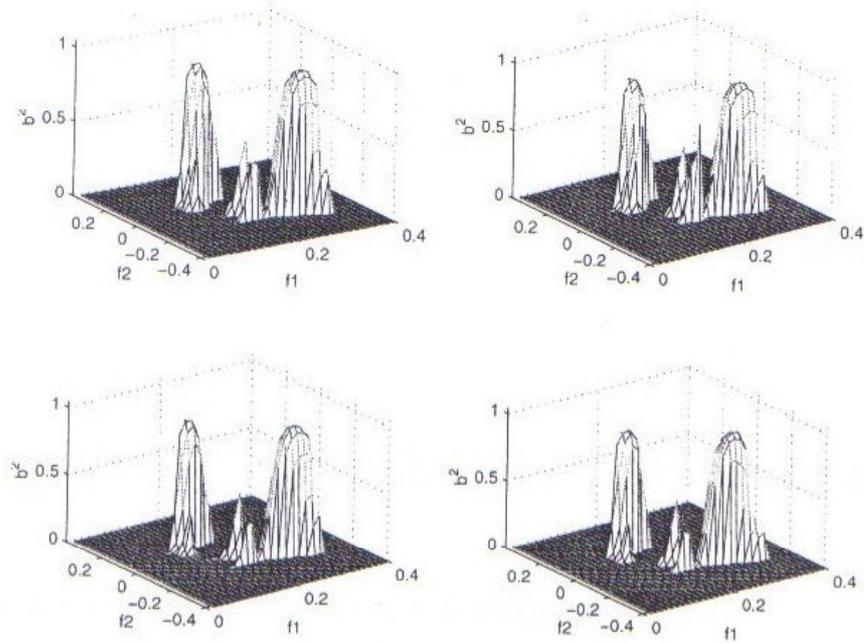


Figura B.1: Bicoerência para atrator caótico de Rössler ( $a = 0,3982$ ;  $b = 2,0$ ;  $c = 4,0$ ). Análise de quatro intervalos temporais sucessivos, cada um com 1024 valores com intervalo de amostragem  $\Delta t = 0,36$ .

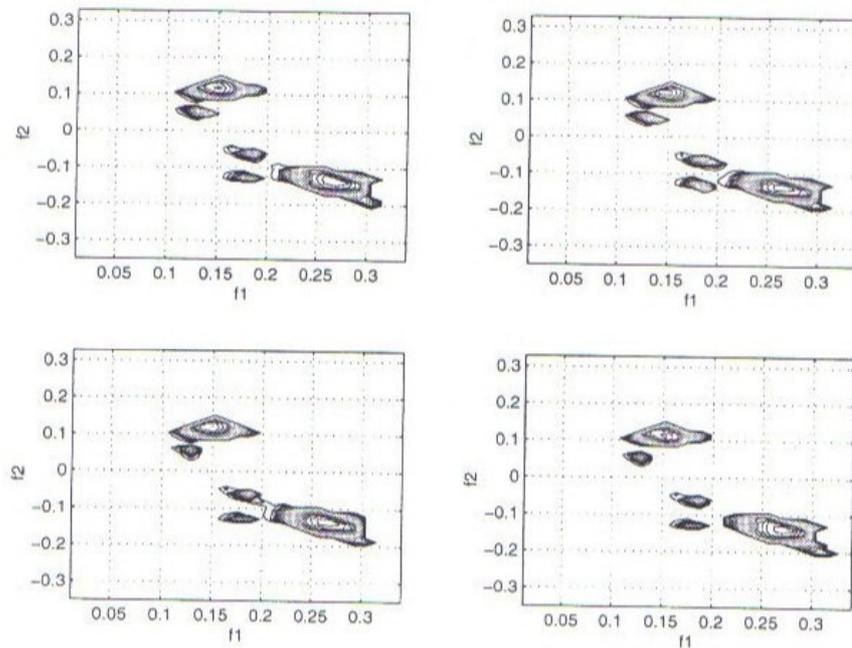


Figura B.2: Curvas de nível para a bicoerência da Figura B.1 mostrando acoplamento quadrático de frequências.

# Bibliografia

- [1] P. Cvitanovic (Editor). *Universality in Chaos*. Adam Hilger, Bristol, 1989.
- [2] E. A. Jackson. *Perspective of nonlinear dynamic*. Cambridge, New York, 1992.
- [3] S. Boccaletti et al. "The control of chaos: theory and applications". *Physics Reports*, 329:103–197, 2000.
- [4] J. P. Eckmann e D. Ruelle. "Ergodic theory of chaos and strange attractors". *Reviews of Modern Physics*, 57:617–655, 1985.
- [5] J. D. Farmer et al. "The dimensions of chaotic attractors". *Physica D*, 7:153–180, 1983.
- [6] M.J. Feigenbaum. "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations". *J. Stat. Phys.*, 19:25–52, 1978.
- [7] O. de Almeida. *Sistemas Hamiltonianos, Caos and Quantização*. Editora da UNICAMP, Campinas, 1995.
- [8] A.L. Lichtenberg e M.A. Lieberman. *Regular and Stochastic Motion*. Springer Verlag, New York, 1983.
- [9] T. Matsumoto e L.O. Chua. "The double scroll". *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-32:797–818, 1985.
- [10] L. O. Chua (Editor). *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos*. World Scientific, Singapore, 1993.
- [11] C. Grebogi et al. "Chaos, strange attractors and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics". *Science*, 238:632–638, 1987.

- [12] T. S. Parker e L. O. Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [13] J. L. Kaplan e J. A. Yorke. *Chaotic Behavior of Multidimensional Difference Equations*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [14] A. Wolf et al. "Determining Lyapunov exponents from a time series". *Physica D*, 16:285–317, 1985.
- [15] P. A. Morettin. *Ondas e Ondaletas*. EDUSP, São Paulo, 1999.
- [16] G. Kaiser. *A Friendly Guide to Wavelets*. Birkhäuser, Massachusetts, 1994.
- [17] M. S. Baptista e I. L. Caldas. "Dynamics of the two-frequency torus breakdown in the driven double scroll circuit". *Physica D*, 132:325–329, 1999.
- [18] E. Ott et al. "Controlling Chaos". *Phys. Rev. Lett.*, 64:1196–1199, 1990.
- [19] C. C. Hwang. "A linear continuous feedback control of Chua's circuit". *Chaos, Solitons & Fractals*, 8:1507–1515, 1997.
- [20] K. Pyragas. "Continuous control of chaos by self-controlling feedback". *Phys. Lett. A*, 170:421–428, 1992.
- [21] E. A. Jackson. "On the control of complex dynamics systems". *Physica D*, 50:341–366, 1991.
- [22] T. L. Carrol. "Multiple attractors and periodic transients in synchronized nonlinear circuits". *Physics Letters A*, 238:365–368, 1998.
- [23] T. Kapitaniak. *Controlling Chaos - Theoretical and Practical Methods in Non-linear Dynamics*. Academic Press Inc., San Diego CA, 1996.
- [24] J. Guckenheimer e Philip Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [25] R. Gilmore. *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*. Dover Publications, Inc., New York, 1981.
- [26] L. O. Chua et. al. "The double scroll family". *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 34:1072–1118, 1986.

- [27] L. P. Shil'nikov. "A case of the existence of a denumerable set of periodic motion". *Dokl. Sov. Math.*, 6:163–166, 1965.
- [28] A. Aneodo et al. "Oscillators with chaotic behaviour: an illustration of a theorem by Shil'nikov". *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 27:171–182, 1982.
- [29] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [30] H. G. Schuster. *Deterministic Chaos*. Physik Verlag, Berlin, 1984.
- [31] J. Argyris et al. *An Exploration of Chaos an Introduction for Natural Scientists and Engineers*. Elsevier Science B.V., North-Holland, 1994.
- [32] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge, New York, 1993.
- [33] K. T. Alligood et al. *Chaos an Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [34] D. Ruelle. "Strange attractors". *The Mathematical Intelligence*, 2:126–137, 1980.
- [35] D. Ruelle e F. Takens. "On the nature of turbulence". *Comm. Math. Phys.*, 20:167–192, 1971.
- [36] C. Grebogi et al. "Basin boundary metamorphoses: changes in accessible boundary orbits". *Physica D*, 24:243–262, 1987.
- [37] W. McDonald et al. "Fractal basin boundaries". *Physica D*, 7:125–153, 1985.
- [38] G. Pegna et al. "Experimental definition of the basin of attraction for chua's circuit". *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 10:959–970, 2000.
- [39] M. Komuro et al. "Global bifurcation analysis of the double scroll circuit". *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1:139–182, 1991.
- [40] M. S. Baptista. "Perturbando Sistemas Não-Lineares Uma Abordagem ao Controle de Caos". *Tese de doutorado - IF. USP*, 1996.
- [41] S. Wiggins. *Introduction a Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York, 1990.

- [42] P. Holmes et al. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge University Press, New York, 1996.
- [43] W. H. Press et al. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, New York, 1992.
- [44] R. Badii e A. Politi. *Complexity Hierarchical Structures and Scaling in Physics*. Cambridge University Press, New York, 1997.
- [45] J. M. Greene e J. S. Kim. "The calculation of Lyapunov spectra". *Physica D*, 24:213–225, 1987.
- [46] H. Fujisaka. "Statistical dynamics generated by fluctuations of local Lyapunov exponents". *Prog. of Theo. Physics*, 70:1264–1275, 1983.
- [47] M. Sano e Y. Sawada. "Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series". *Phys. Rev. Letters*, 55:1082–1085, 1985.
- [48] E. N. Helena e J. A. Yorke. *Dynamics: Numerical Explorations*. Springer Verlag, New York, 1991.
- [49] C. Grebogi et al. "Crises, sudden changes in chaotic attractors". *Physica D*, 7:181–200, 1983.
- [50] K. Ullmann. "Métodos de Análise de Mapeamentos Não-Lineares com Aplicações à Física de Plasmas". *Tese de doutorado - IF. USP*, 1997.
- [51] K. Ullmann e I. L. Caldas. "A symplectic mapping for the ergodic magnetic limiter and its dynamical analyses". *Chaos, Solitons, and Fractals*, 11:2129–2140, 2000.
- [52] J. A. C. Gallas. "Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical models". *Physica A*, 202:196–223, 1994.
- [53] C. Grebogi et al. "Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems". *Phys. Rev. Letters*, 57:1284–1287, 1986.
- [54] E. G. Gwinn e R. M. Westervelt. "Intermittent chaos and low-frequency noise in the driven damped pendulum". *Phys. Rev. Letters*, 54:1613–1616, 1985.

- [55] I. M. Kyprianidis et al. "Crises-induced intermittency in a third-order electrical circuit". *Phys. Rev. E*, 52:2268–2273, 1995.
- [56] M. V. A. P. Heller et al. "Scrape-off layer intermittency in the Castor tokamak". *Phys. Plasma*, 6:846–853, 1999.
- [57] K. Hasselman et al. *Bispectra of Ocean Waves in Time Series Analysis*. John Wiley, New York, 1963.
- [58] M. D. Godfrey. "An exploration study of the bispectrum of economic time series". *Appl. Statist.*, 14:48–69, 1965.
- [59] T. K. Sato et al. "Real time bispectral analysis of gear noise and its applications to contactless diagnosis". *J. Acoust. Soc. Am.*, 2:382–387, 1977.
- [60] K. S. Lii et al. "Bispectral measurements in turbulence". *J. Fluid. Mech.*, 77:46–52, 1976.
- [61] K. S. Lii e M. Rosenblat. "Deconvolution and estimation of transfer function phase coefficients for non-gaussian linear process". *Ann. Statist.*, 10:1195–1208, 1982.
- [62] K. N. Holland et al. *Bispectra and Energy Transfer Grid Generated Turbulence in Development in Statistics*. Academic Press, New York, 1979.
- [63] M. Casdagli e S. Eubank. *Nonlinear Modelling and Forecastin*. Addison-Wesley, California, 1992.
- [64] C. K. Chui. *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, New York, 1992a.
- [65] C. K. Chui (editor). *Wavelets: A tutorial in Theory and Applications*. Academic Press, New York, 1992b.
- [66] I. Daubechies. "The wavelet transform, time-frequency localization an signal analysis". *IEEE Trans. Inform. Theory*, 36:961–1005, 1990.
- [67] Y. Meyer. *Wavelets and Operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993a.
- [68] Y. Meyer. *Wavelets: Algorithms and Applications*. SIAM, Philadelphia, 1993b.
- [69] S. Mallat e S. Zhong. "Multiresolution approximation and wavelets". *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315:69–88, 1989.

- [70] A. A. Ferreira et al. "Mode coupling and plasma turbulence induced by magnetic fields". *Phys. Plasma*, 7:3567–3572, 2000.
- [71] P. Gaspard e G. Nicolis. "What can we learn from homoclinic orbits in chaotic dynamics". *J. Stat. Phys.*, 31:499–518, 1983.
- [72] S. Smale. "Differentiable dynamical systems". *Bull. Amer. J. Math*, 88:747–817, 1967.
- [73] E. Stone e P. Holmes. "Noise induced intermittency in a model of a turbulent boundary layer". *Physica D*, 37:20–32, 1989.
- [74] E. Stone e P. Holmes. "Random perturbations of heteroclinic cycles". *SIAM J. on Appl. Math.*, 50:726–743, 1990.
- [75] E. Stone e P. Holmes. "Unstable fixed points, heteroclinic cycles and exponential tails in turbulence production". *SIAM J. on Appl. Math.*, 50:726–743, 1990.
- [76] C. Sparrow. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [77] H. Bai-Lin. *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems*. World Scientific, Singapore, 1989.
- [78] P. Bak et al. "Mode-locking and the transition to chaos in dissipative systems". *Physica Scripta*, T9:50–58, 1985.
- [79] P. Bergé et al. *Order Within Chaos*. John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [80] J. H. Curry e J. A. Yorke. *Lect. Notes in Math*. Springer Verlag, New Yorke, 1977.
- [81] S. Kim et al. "Resonance regions for families of torus maps". *Nonlinearity*, 2:391–404, 1989.
- [82] S. Ostlund et al. "Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems". *Physica D*, 8:303–342, 1983.
- [83] D. G. Aronson et al. "Bifurcation from an invariant cicle for two-parameters families of maps of the plane: a computer-assited study". *Commun. Math. Phys.*, 83:303–354, 1982.

- [84] J. F. Heagy e S. M. Hammel. "The birth of strange nonchaotic attractors". *Physica D*, 70:140–153, 1994.
- [85] Y. Gu et al. "Crises and hysteresis in coupled logistic maps". *Phys. Rev. Letters*, 52:701–704, 1984.
- [86] J. M. T. Thomsom e H. B. Stewart. *Nonlinear Dyanamics and Chaos*. John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [87] C. Lettelier et al. "Experimental evidence for a torus breakdown through a global bifurcation in a glow discharge plasma". *Physica D*, 15:354–373, 2000.
- [88] Y. Pomeau e P. Manneville. "Crisis, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos". *Commun. Math. Phys.*, 74:189–197, 1980.
- [89] C. Lettelier. "A ser publicado".
- [90] A. Aneodo et al. "Cascade of period doubling of tori". *Physics Letters*, 94:1–5, 1983.
- [91] H. Tominaga e H. Mori. "Hopf bifurcations and chaos in the S-shaped I-V characteristic systems". *Prog. of Theor. Phys.*, 91:1081–1099, 1994.
- [92] M. Hénon. "A two-dimensional mapping with a strange attractor". *Commun. in Math. Phys.*, 50:69–77, 1976.
- [93] B. P. Bezruchko et al. "Experimental observation of dynamics near the torus-doubling terminal critical point". *Physical Review E*, 62:7828–7830, 2000.
- [94] J. J. Stagliano et al. "Doubling bifurcations of destroyed  $T^2$  tori". *Physica D*, 92:164–177, 1996.
- [95] P. Cvitanovic. "Periodic orbits as the skeleton of classical and quantum chaos". *Physica D*, 51:138–151, 1991.
- [96] T.L. Carroll e L.M. Pecora. "Using multiple attractor chaotic systems for communication". *Chaos*, 9:445–451, 1999.
- [97] A. Hübler. "Adaptive control of chaotic systems". *Helvetica Physica Acta*, 62:343–346, 1989.

- [98] W.X. Ding et. al. "Controlling chaos in a discharge plasma". *Phys. Rev. Lett.*, 72:96–99, 1994.
- [99] A. Azevedo e S. Rezende. "Controlling chaos in spin-wave instabilities". *Phys. Rev. Lett.*, 66:1342–1345, 1991.
- [100] A. Garfinkel et. al. "Controlling cardiac chaos". *Science*, 257:1230–1235, 1992.
- [101] D.J. Chrisini e J.J. Collins. "Using chaos control and tracking to suppress a pathological nonchaotic rhythm in a cardiac model". *Phys. Rev. E*, 53:R49–R52, 1996.
- [102] S. J. Schiff et. al. "Controlling chaos in the brain". *Nature*, 370:615–620, 1994.
- [103] R. Roy et. al. "Dynamical control of a chaotic laser: experimental stabilization of a globally coupled system". *Phys. Rev. Lett.*, 68:1259–1262, 1992.
- [104] J.M. Perez et. al. "Control of chaos in  $CO_2$  laser". *Appl. Phys. Lett.*, 65:1216–1218, 1994.
- [105] V. Petrov et. al. "Controlling Chaos in the Belousov-Zhabotinsky reaction". *Nature*, 361:240–2243, 1993.
- [106] Y. Braiman e I. Goldhirsch. "Taming chaotic dynamics with weak periodic perturbations". *Phys. Rev. Lett.*, 66:2545–2548, 1991.
- [107] T. Kapitaniak et al. "Chaotic behaviour of an anharmonic oscillator with almost periodic excitation". *L. Phys. A: Math. Gen.*, 20:355–358, 1987.
- [108] A. S. Pikovsky et al. "Attractor-repeller collision eyelet intermittency at the transition to phase synchronization". *Phys. Rev. Letters*, 79:47–50, 1997.
- [109] U. Parlitz et. al. "Subharmonic entrainment of unstable period orbits and generalized synchronization". *Phys. Rev. Letters*, 79:3158–3161, 1997.
- [110] T. Kapitaniak et al. "Chaotic behaviour of an anharmonic oscillator with almost periodic excitation". *J. Phys. A: Math. Gen.*, 20:355–358, 1987.
- [111] H.D.I. Abarbanel et. al. "The analysis of observed chaotic data in physical systems". *Rev. Mod. Phys.*, 65:1331–1392, 1993.

- [112] H. D. I. Abarbanel. "The analysis of observed chaotic data in physical systems". *Rev. Mod. Physics*, 65:1331–1392, 1993.
- [113] T. Shinbrot et al. "Using chaos to direct trajectories to targets". *Phys. Rev. Lett.*, 65:3215–3217, 1990.
- [114] K. Pyragas. "Predictable chaos in slightly perturbed unpredictable chaotic systems". *Phys. Lett. A*, 181:203–208, 1993.
- [115] L.M. Pecora e T. L. Carrol. "Synchronization in chaotic systems". *Phys. Rev. Lett.*, 64:821–824, 1990.
- [116] E. A. Jackson. "The OPCL control method for entrainment, model-resonance, and migration actions on multiple-attractors systems". *Chaos*, 7:550–559, 1997.
- [117] J. M. Nese. "Quantifying local predictability in phase space". *Physica D*, 35:237–250, 1989.
- [118] E.A. Jackson e A. Kodogeorgiou. "Entrainment and migration controls of two-dimensional maps". *Physica D*, 54:253–265, 1992.
- [119] E. A. Jackson. "Controls of dynamics flow with attractors". *Physical Review A*, 44:4839–4853, 1991.
- [120] E. A. Jackson e I. Grosu. "An Open-Plus-Closed-Loop (OPCL) controle of complex dynamic systems". *Physica D*, 85:1–9, 1995.
- [121] E. A. Jackson e I. Grosu. "Toward experimental implementation of migration controls". *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 5:1767–1772, 1995.
- [122] D. Gligoroski et al. "A method for encoding messages by time targeting of the trajectories of chaotic systems". *Int. J. Bif. and Chaos*, 6:2119–2125, 1996.
- [123] E. M. Bollt e J. D. Meiss. "Targeting chaotic orbits to the Moon through recurrence". *Phys. Lett. A*, 204:373–378, 1995.
- [124] E. J. Kostelich et al. "Higher-dimensional targeting". *Phys. Rev. E*, 47:305–310, 1993.
- [125] S. Hayes et al. "Communication with chaos". *Phys. Rev. Lett.*, 70:3031–3034, 1993.

- [126] M. S. Baptista. "Targeting applying  $\epsilon$ -bounded orbit correction perturbations". *Int. J. Bif. and Chaos*, 8:1575–1584, 1998.
- [127] M. S. Baptista et al. "Integrated chaotic communication scheme". *Phys. Review E*, 62:4835–4845, 2000.
- [128] K.M. Cuomo e A.V. Hoppenheim. "Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications". *Phys. Rev. Lett.*, 71:65–69, 1993.
- [129] L. Glass e M.C. Mackey. *From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life*. Princeton University Press, Princeton, 1988.
- [130] L.M. Pecora e T.L. Carroll. "Synchronization in chaotic systems". *Phys. Rev. Lett.*, 64:821–824, 1991.
- [131] S. Bellett. *Clinical Disorders of the Heartbeat*. Lea e Febiger, Philadelphia, 1971.
- [132] D. Curzi et al. "Respiratory variability according to sleep states during mechanical ventilation: a polygraphic study in a baby with bilateral diaphragmatic paralysis". *Neuropaediatric*, 10:361–369, 1979.
- [133] B. Van der Pol. "Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance". *Philos. Mag.*, 3:65–80, 1927.
- [134] V.I. Arnold. *Geometrical Method in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [135] N.F. Rulkov. "Images of synchronized: Experiments with circuits". *Chaos*, 6:262–279, 1996.
- [136] K. Pyragas. "Weak and strong synchronization of chaos". *Phys. Rev. E*, 54:45088–4511, 1996.
- [137] T. Kapitaniak e M.S. El Naschie. "A note on randomness and strange behaviour". *Phys. Lett.*, A154:249–253, 1991.
- [138] H. Fujisaka e T. Yamada. "Stability theory os synchronized motions in coupled oscillator systems". *Prog. Theor. Phys.*, 69:32–46, 1984.

- [139] V.S. Afraimovich et. al. "Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems". *Inv. Vuz. Rasiofiz. RPQAEC*, 29:795-803, 1986.
- [140] L. Kocarev e U. Parlitz. "General Approach for chaotic synchronization with applications to communication". *Phys. Rev. Letters*, 74:5028-5031, 1995.
- [141] L. Kocarev and U. Parlitz. "Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionality coupled dynamical systems". *Phys. Rev. Letters*, 76:1816-1819, 1996.
- [142] L.M. Pecora et. al. "Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications". *Chaos*, 7:520-543, 1997.
- [143] M. S. Vieira et. al. "Self-synchronization of many coupled oscillators". *Int. J. Bif. Chaos*, 4:1563-1578, 1994.
- [144] T. Kapitaniak. "Chaos-hyperchaos intermittency". *Prog. Theor. Phys.*, 92:1033-1037, 1994.
- [145] T. Kapitaniak e W.H. Steeb. "Transition to hyperchaos in coupled generalized van der Pol's equations". *Phys. Lett. A*, 152:33-36, 1991.
- [146] E. Ott et. al. "Scaling behavior of chaotic systems with riddled basins". *Phys. Rev. Lett.*, 71:4134-4137, 1993.
- [147] E. Ott e J.C. Sommerer. "Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency". *Phys. Lett. A*, 188:39-47, 1994.
- [148] J.F. Heagy et. al. "Characterization of on-off intermittency". *Phys. Rev. E*, 49:1140-1150, 1994.
- [149] E. Ott e J.C. Sommerer. "Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency". *Phys. Letters A*, 188:39-47, 1994.
- [150] J.F. Heagy et. al. "Desynchronization by periodic orbits". *Physical Review E*, 52:1253-1256, 1995.
- [151] T. Kapitaniak et. al. "Experimental Evidence of Locally Intermingled Basins of Attraction in Coupled Chua's Circuits". *Chaos, Solitons & Fractals*, 8:1517-1522, 1997.

- [152] P. Ashwin et. al. "Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators". *Physics Letter A*, 193:126–139, 1994.
- [153] J. F. Heagy et. al. "Experimental and numerical evidence for riddled basins in coupled chaotic systems". *Phys. Rev. Lett.*, 73:3528–3531, 1994.
- [154] G. Perez e H.A. Cerdeira. "Extracting messages masked by chaos". *Phys. Rev. Lett.*, 74:1970–1973, 1995.
- [155] M. Ding et al. "Control and synchronization of chaos in high dimensional systems: review o some recents results". *Chaos*, 7:644–652, 1997.
- [156] S. Boccaletti et al. "Adaptive strategies for recognition, control and synchronization of chaos". *Chaos, Solitons & Fractals*, 8:1431–1448, 1997.
- [157] L. Kocarev e U. Parlitz. "General approach for chaotic synchronization with applications to communication". *Phys. Rev. Lett.*, 76:1816–1819, 1996.