Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Mapas Simpléticos com Correntes Reversas em Tokamaks

Bruno Figueiredo Bartoloni

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Tese de doutorado apresentada
ao Instituto de Física para a obtenção do título de
Doutor em Ciências

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (IFUSP)
Prof. Dr. José Carlos Sartorelli - IFUSP
Prof. Dr. Zwinglio de Oliveira Guimarães Filho - IFUSP
Prof^{a}. Dr^{a}. Marisa Roberto - ITA
Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana - UFPR

São Paulo
2016

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Giacomo e Laura, e meus irmãos, Fábio e Felipe, pelo total apoio recebido.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas, pelo imprescindível papel nesta etapa acadêmica, transmitindo seus conhecimentos, não apenas científicos, que foram de grande valia em minha formação pessoal e profissional.

A todos os colegas do grupo Controle de Oscilações do IFUSP, que sempre me ajudaram em nossas inúmeras discussões.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de estudos de Doutorado.

Ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, pelos auxílios financeiros concedidos para participações em congressos.

Resumo

Desenvolvemos um modelo na forma de um mapeamento bidimensional simplético (conservativo) para estudar a evolução das linhas de campo magnético de um plasma confinado no interior de um tokamak. Na primeira parte, consideramos dois perfis estudados na literatura para a densidade de corrente no plasma: um monotônico e um não-monotônico, que dão origem a diferentes perfis analíticos do fator de segurança. Nas simulações, consideramos inicialmente o sistema no equilíbrio, onde observamos, nas seções de Poincaré, apenas linhas invariantes. Em seguida, adicionamos uma perturbação (corrente externa), onde observamos cadeias de ilhas e caos no sistema. Na segunda parte consideramos um perfil também não-monotônico, mas com uma região na qual a densidade de corrente no plasma torna-se negativa, estudo ainda em aberto na literatura, que causa uma divergência no perfil do fator de segurança. Mesmo considerando o sistema apenas no equilíbrio, surgiram cadeias de ilhas muito pequenas em torno de curvas sem *shear* e caos localizado no sistema, característica não verificada para os outros perfis estudados no equilíbrio. Variando parâmetros relacionados à expressão da densidade de corrente, conseguimos controlar o aparecimento de regiões com cadeias de ilhas em torno de curvas sem *shear* e regiões caóticas. Para comprovar os resultados, aplicamos o perfil considerado a um outro mapa simplético da literatura (tokamap). Na parte final, consideramos a configuração do perfil do fator de segurança na forma de um divertor. Nessa configuração também temos uma divergência na expressão do perfil do fator de segurança. Observamos características similares (cadeias de ilhas em torno de curvas sem*shear* e caos) quando consideramos o perfil não-monotônico com densidade de corrente reversa.

Palavras-chave: mapas simpléticos, densidade de corrente reversa, fator de segurança, curvas sem *shear*, cadeias de ilhas, caos.

Abstract

We develop a symplectic (conservative) bidimensional map to study the evolution of magnetic field lines of a confined plasma in a tokamak. First, we considered two profiles for the plasma current density, studied in the literature: monotonic and non-monotonic, which give rise to different profiles for the poloidal magnetic field and different analytical profiles for the safety factor. In our simulations, we consider the system initially at equilibrium, where we observe, in Poincaré sections, only invariant lines. Then, we add a perturbation (external current), where we observe island chains and chaos in the system. In the second part, we consider a non-monotonic profile, but with a region which the current density becomes negative, which causes a divergence in the safety factor profile. Even considering only the sistem at equilibrium, very small island chains appeared around the shearless curves, and localized chaos. This feature was not observed for the other profiles at equilibrium. We can control the appearance of the regions with island chaind around the shearless curves and chaotic regions, by variation of parameters related to the density current expression. To comprove our results, we aplly the same profile to the other symplectic map. Finally, we consider a safety factor profile in a divertor configuration. We also have a divergence on in the safety factor profile. We observe similar features (island chains around shearless curves and localized chaos) when we consider a non-monotonic safety factor profile with a reversed density current.

Keywords: symplectic maps, reversed current density, safety factor, shearless curves, island chains, chaos.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A geração de eletricidade por meio de fusão nuclear sempre configurou uma situação desejada para as sociedades preocupadas com as fontes de energia sustentáveis [1]. Para que o processo de fusão ocorra, a repulsão entre os íons deve ser superada, o que é eficientemente atingido em plasmas a altas temperaturas ($\sim 10^8 K$) [2]. Um meio é classificado como plasma quando satisfaz alguns critérios [3]. Na temperatura necessária para a fusão nuclear, praticamente toda a matéria está ionizada e podemos tratar o plasma como um fluido carregado eletricamente, fato que será abordado adiante através do uso das equações magnetohidrodinâmicas. O plasma precisa estar confinado em algum reator de fusão, por se tratar de um gás e não deve tocar as paredes do reator para não danificá-lo, devido à alta temperatura. Por estarmos tratando de um gás eletricamente carregado podemos confiná-lo através de campos eletromagnéticos.

Um tokamak [4] é uma máquina com uma câmara toroidal na qual se estabelecem campos magnéticos para o confinamento de plasmas. O plasma é contido pela superposição do campo toroidal produzido pelas espiras em torno da câmara e do campo poloidal gerado pela própria corrente do plasma [4]. O tokamak foi criado com o objetivo de sustentar, no plasma confinado, uma reação de fusão nuclear que permita a geração de energia elétrica por meio do calor gerado no processo. Para que possamos usar o tokamak como um reator, dois problemas precisam ser contornados: o de conseguirmos obter um valor de temperatura suficientemente alto e o de obter um confinamento estável.

Em nosso trabalho, estudamos a distribuição do transporte das linhas de campo magnético no interior de um tokamak por meio de mapeamentos. O nosso sistema é quase-integrável ao adicionarmos perturbações. Mais especificamente, vamos considerar sistemas quase integráveis que podem ser transformados em mapas, uma aplicação que evolui o sistema, descrevendo todas as características dinâmicas do sistema estudado. A vantagem desses mapas é facilitar experiências numéricas para a investigação do sistema, variando-se os parâmetros de controle e as condições iniciais. Nesse procedimento, o tempo de computação é bem menor do que o necessário para investigação similar com um sistema de equações diferenciais.

Mapa é um sistema dinâmico determinado por uma função f em que a evolução (percurso) é discreta, com a variável de estado x num instante $n+1$ sendo função de seu valor no instante imediatamente anterior n, pela iteração de f. O mapa também pode ter duas equações, com uma relação de recorrência entre elas, como será o nosso caso. Para obtermos as linhas de campo, partimos de uma condição inicial desejada. Portanto, a estrutura das linhas de campo em um tokamak pode ser mais facilmente apreciada por meio de um mapa de retorno – cujas trajetórias são obtidas das trajetórias contínuas arbitrando-se uma região no espaço de fases e retendo-se os valores das coordenadas apenas no local do retorno da trajetória à essa região. Um mapa de retorno consiste em um mapa de Poincaré denotando as coordenadas sobre a superfície de seção no instante n, ou seja, as coordenadas da n-ésima intersecção de uma linha de campo com a superfície, fornecem a posição da seguinte. A trajetória da linha de campo pode ser regular e situa-se sobre um toro fechado ou sobre uma cadeia de ilhas magnéticas, ou a linha de campo em questão pode ser caótica. Vamos analisar esses tipos de comportamentos que as trajetórias deste sistema podem apresentar, e métodos para caracterizar estes comportamentos, entre eles o cálculo do número da rotação da trajetória, um método muito utilizado em estudos de sistemas dinâmicos [5, 6, 7].

A Teoria do Caos, assim denominada pelo matemático estadunidense James Yorke [8, 9], teve, em seus estudos iniciais, os trabalhos do matemático francês Henri Poincaré [10] e do meteorologista, também estadunidense, Edward Lorenz [11]. Poincaré conseguiu demonstrar que sistemas muito simples, como uma partícula movendo-se em uma superfície bidimensional, poderiam apresentar movimentos altamente complexos e instáveis. A instabilidade deste novo tipo de movimento estava associada à grande sensibilidade às condições iniciais, ou seja, duas trajetórias que tivessem condições iniciais muito próximas se afastariam de tal modo que após um certo intervalo de tempo não havia como prever o comportamento do sistema. Dentro da física clássica, o caos pode se manifestar de duas formas distintas, dependendo de haver ou não conservação de energia. O caso dissipativo foi estudado por Lorenz na investigação do comportamento de um sistema envolvendo três equações relacionadas à pressão atmosférica, temperatura e velocidade dos ventos [11]. Em nosso trabalho, trataremos do caso conservativo [12]. Com o desenvolvimento da teoria, de uma ideia inicial associando caos a movimentos irregulares e imprevisíveis, surgiram conceitos mais definidos e métodos para a identificação e análise das trajetórias caóticas e também foram desenvolvidos algoritmos para controlar o caos, provocando-o ou eliminando-o no sistema estudado, conforme a necessidade [13, 14].

Vamos considerar tokamaks de grande razão de aspecto, cuja razão entre o raio maior e o raio menor é muito grande e para tais o campo magnético toroidal de equilíbrio é aproximadamente uniforme, portanto podemos adotar uma geometria cilíndrica para o tokamak com uma pequena correção toroidal. Temos neste caso que as linhas de campo magnético de equilíbrio localizam-se sobre superfícies cilíndricas. As linhas de campo magnético resultantes da soma das componentes poloidal e toroidal terão um formato helicoidal e definimos o fator de segurança, correspondente à helicidade das linhas de campo ou ao número de rotação delas. Podemos calcular o campo através da densidade de corrente, pela Lei de Ampère. O objetivo do trabalho é investigar o comportamento das linhas de campo considerando diferentes perfis para a densidade de corrente. Com isso, teremos diferentes perfis do campo magnético poloidal e, consequentemente, diferentes perfis para o fator de segurança.

Na literatura existem estudos considerando perfis monotônicos para a densidade de corrente [15, 16]. Primeiramente, vamos considerar dois perfis já estudados: um monotônico e um não-monotônico. Inicialmente, consideramos o plasma no equilíbrio. Apresentamos as perturbações impulsivas na borda através de um limitador ergódico [17], utilizando um modelo na forma de um mapa bidimensional conservativo, que consiste em uma extensão de modelos já existentes [18, 19]. Construímos seções de Poincaré e calculamos numericamente os fatores de segurança das trajetórias. Observamos, para os dois perfis, que na situação de equilíbrio no plasma, aparecem apenas órbitas regulares. Quando adicionamos a perturbação, há ocorrência de caos no sistema [15, 16]. No caso do perfil não-monotônico, também observamos o fenômeno da reconexão [16]. O perfil não-monotônico do fator de segurança implica pares de cadeias de ilhas com o mesmo valor do fator de segurança, separadas por curvas invariantes. Aumentando o valor da perturbação, as ilhas se alargam e as linhas invariantes se combinam, e dependendo do quão grande for o valor da perturbação, uma cadeia de ilhas pode desaparecer e ficamos com uma barreira invariante separando a cadeia que sobrou do regime caótico [16].

Em seguida, na parte central do nosso estudo, passamos a considerar novamente um perfil de densidade de corrente não-monotônico, mas com corrente reversa [20, 21, 22], ou seja, uma pequena região no plasma em que a corrente torna-se negativa, e estudaremos os fenômenos que essa mudança pode causar. Este é um estudo ainda em aberto na literatura, apesar de encontramos alguns trabalhos, já que nos últimos anos houve um debate acerca da reprodução experimental de se considerar um perfil de densidade de corrente reversa, pois acreditava-se que a instabilidade do plasma não permitiria, mas não foi possível verificar a instabilidade prevista teoricamente por alguns modelos[23, 20]. Como o campo magnético passa a ser nulo na posição em que a corrente se torna reversa, temos o aparecimento de uma divergência no perfil do fator de segurança e observamos uma característica relevante: o surgimento de cadeias de ilhas em torno de curvas sem *shear* e caos quando reproduzimos as seções de Poincaré, mesmo eliminando a perturbação. Podemos controlar o aparecimento e o tamanho das cadeias de ilhas e o aparecimento de caos variando parâmetros do perfil da densidade de corrente, entre eles a correção toroidal (ao introduzirmos a correção para levar em conta os efeitos da geometria toroidal, quebramos a integrabilidade do sistema e geramos caos). Para investigar mais profundamente a natureza e as características do sistema, fazemos a expansão do mapeamento em torno de duas regiões: da linha sem *shear* e da curva de divergência, localizadas no centro do plasma quando consideramos o perfil de densidade de corrente com corrente reversa.

Por fim, consideramos um perfil do fator de segurança na forma de um divertor[24, 25, 26, 27], um dispositivo que tem como finalidade remover as impurezas do plasma, facilitando o seu confinamento. Nessa configuração, temos um ponto onde o campo magnético poloidal torna-se nulo, observando características similares (cadeias de ilhas em torno de curvas sem *shear* e caos) de quando consideramos o perfil não-monotônico com densidade de corrente reversa.

Esta tese se divide em oito capítulos. A partir do capítulo 4 estão contidos os resultados numéricos. Neste capítulo, os resultados numéricos foram observados na literatura. Nos capítulos 5, 6 e 7 estão contidos os resultados originais.

No capítulo 2, escrevemos sobre alguns sistemas de coordenadas (retangular, polar, toroidal e polar toroidal). Em seguida, apresentamos as equações do equilíbrio magnetohidrodinâmico para descrever o plasma e a equação de Grad-Shafranov em uma forma mais simplificada, onde o fluxo magnético poloidal depende apenas da coordenada espacial. Por fim, apresentamos a expressão para o fator de segurança, necessária para os cálculos usando os diferentes perfis de densidade de corrente nos próximos capítulos.

No capítulo 3, apresentamos as perturbações impulsivas, introduzimos o conceito de limitador ergódico e analisamos os modelos já existentes e suas limitações. Apresentamos o modelo de Viana e Caldas, que é baseado diretamente na equação de evolução das linhas de campo magnético ($\vec{B} \times \vec{dl} = 0$) e apresenta correções toroidais de primeira ordem, porém não é simplético.

No capítulo 4 tratamos do conceito de mapas para descrever a evolução de sistemas dinâmicos e passamos a considerar o mapeamento bidimensional conservativo deduzido para descrever a evolução das linhas de campo magnético no vaso do tokamak sob influência da ação dos limitadores ergódicos magnéticos, considerando dois perfis já estudados: um monotônico e um não-monotônico.

No capítulo 5 passamos a considerar novamente um perfil de densidade de corrente não-monotônico com corrente reversa, e analisaremos as características do sistema estudado. No final do capítulo, apresentamos uma breve discussão sobre a adição da perturbação.

No capítulo 6 apresentamos as expansões do mapeamento nas duas regiões consideradas para complementar a análise feita no capítulo anterior.

No capítulo 7 continuamos a considerar um perfil do fator de segurança na forma de um divertor, no qual teremos a liberdade de escolher a região onde queremos que haja a divergência. Novamente, no final do capítulo, apresentamos uma breve discussão sobre a adição da perturbação.

No capítulo 8 apresentamos as conclusões do trabalho e perspectivas para futuros estudos.

Capítulo 2

Superfícies magnéticas

Neste capítulo vamos detalhar os diversos tipos de sistemas de coordenadas existentes, tratar das equações no equilíbrio magneto-hidrodinâmico para descrever o plasma e terminaremos apresentando a equação de Grad-Shafranov.

2.1 Sistemas de coordenadas

A geometria de um tokamak está esquematizada na figura 2.1. O vaso toroidal é caracterizado por seu raio maior R_0, que define o eixo geométrico circular em torno do eixo do toróide, e por seu raio menor b. Costuma-se definir a razão de aspecto do tokamak como sendo $\epsilon = \frac{R_0}{b}$. As coordenadas r e θ são, respectivamente, o raio a partir do eixo geométrico e o ângulo poloidal, e φ é o ângulo toroidal.

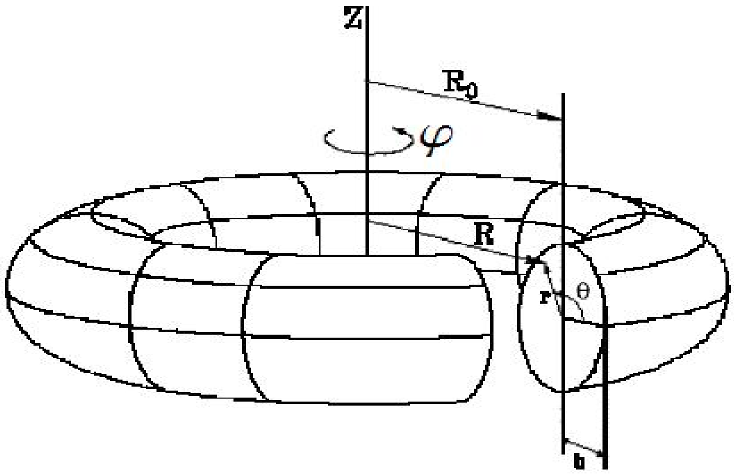


Figura 2.1: Representação esquemática de um tokamak.

O ponto de partida para o estudo das linhas de campo magnético caóticas em tokamaks é a configuração de equilíbrio. Esta configuração é obtida através das equações da teoria magnetohidrodinâmica (MHD) [28]. Tais equações podem, quando existir simetria azimutal, ser sintetizadas em uma só equação diferencial parcial, a chamada equação de Grad-Shafranov. A resolução de tal equação torna-se mais simples ao escolhermos um sistema de coordenadas que representa corretamente a simetria do sistema.

Vamos fazer uma breve abordagem sobre o sistema de coordenadas utilizado e obteremos a equação de Grad-Shafranov neste sistema (considerando alta razão de aspecto) e os campos magnéticos de equilíbrio derivados da solução desta equação.

O sistema de coordenadas polares toroidais foi proposto por Kucinski *et al.* [29] a fim de melhor representar a simetria do sistema que será estudado. Trataremos a seguir três sistemas: o sistema polar local, o sistema toroidal e o sistema polar toroidal. Assim representaremos as coordenadas de um sistema em termos de outro anteriormente tratado.

As coordenadas polares locais resultam em seções transversais $\varphi = constante$, representadas pelas coordenadas polares (r, θ). Na figura 2.1 usamos este sistema para representar o tokamak. Em termos das coordenadas cilíndricas (R, ϕ, Z) podemos escrever as coordenadas polares locais

(r, θ, φ) como:

$$R = R_0 + rcos\theta \tag{2.1}$$

$$Z = rsen\theta \tag{2.2}$$

$$\phi = \varphi \tag{2.3}$$

onde R_0 é a posição do eixo geométrico do toróide, conforme ilustrado na figura 2.1. Da mesma maneira que as coordenadas polares locais, as coordenadas toroidais (ξ, ω, φ) também podem ser relacionadas com as cilíndricas (R, ϕ, Z), pelas relações [30]:

$$R = \frac{R_0' senh\xi}{cosh\xi - cos\omega} \tag{2.4}$$

$$Z = \frac{R_0' sen\omega}{cosh\xi - cos\omega} \tag{2.5}$$

$$\phi = \varphi \tag{2.6}$$

Neste sistema as superfícies $\xi = constante$ formam toróides de raio menor $R_0'/senh\xi$ e raio maior $R_0' coth\xi$, onde R_0' é a coordenada do eixo geométrico neste sistema de coordenadas. Tomando $\omega = constante$ teremos o traçado de superficies esféricas de raio $R_0'/senh\omega$ e centradas no eixo Z em $Z = R_0' cot\omega$.

Apesar do sistema toroidal ser mais sofisticado que o sistema de coordenadas polares locais, ainda é insatisfatório para a resolução do nosso problema, pois as superfícies de coordenadas constantes ainda não coincidem com as superfícies magnéticas que serão abordadas e os cálculos analíticos ficam muito complexos.

A fim de conciliar simetria e simplicidade, Kucinski *et al.* [29] propuseram um sistema de coordenadas polares toroidais.

Escrevemos as coordenadas polares toroidais $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$ em termos das coordenadas toroidais (ξ, ω, φ) como:

$$r_t = \frac{R'_0}{cosh\xi - cos\omega} \tag{2.7}$$

$$\theta_t = \pi - \omega \tag{2.8}$$

$$\varphi_t = \varphi \tag{2.9}$$

onde

$$R^2 = R_0'^2 \left[1 - 2\frac{r_t}{R'_0} cos\theta_t - \left(\frac{r_t}{R'_0}\right)^2 sen^2\theta_t\right] \tag{2.10}$$

relaciona o eixo do sistema polar toroidal com a coordenada cilíndrica R.

Estas coordenadas possuem a vantagem de coincidirem com as polares locais no limite de alta razão de aspecto (explicaremos ao longo do trabalho). As seguintes relações entre as coordenadas polares locais e polares toroidais tornam possível a verificação desta afirmação:

$$r_t = r\left[1 - \frac{r}{R'_0} cos\theta + \left(\frac{r}{2R'_0}\right)^2\right]^{1/2} \tag{2.11}$$

$$sen\theta_t = sen\theta \left[1 - \frac{r}{R'_0} cos\theta + \left(\frac{r}{2R'_0}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{2.12}$$

2.2 Equilíbrio MHD para razão de aspecto grande

Para descrever o equilíbrio magneto-hidrodinâmico necessário para o confinamento de plasmas devemos utilizar um modelo físico simples, mas capaz de descrever qualitativa e quantitativamente o comportamento de plasmas a temperaturas termonucleares. As equações MHD reunem as equações de Maxwell e as de Navier Stokes de forma a fornecer uma descrição do plasma como um fluído condutor. Sob configurações com simetria axial na condição de equilíbrio (derivadas temporais nulas) estas equações podem ser sintetizadas numa única equação diferencial parcial elíptica denominada equação de Grad-Shafranov [31]. Sob condições de equilíbrio as equações MHD são expressas:

$$\nabla P = \vec{J} \times \vec{B} \tag{2.13}$$

$$\mu_0 \vec{J} = \nabla \times \vec{B} \tag{2.14}$$

$$\nabla . \vec{B} = 0 \tag{2.15}$$

onde P é a pressão, $\vec{J}$ é a densidade de corrente elétrica e $\vec{B}$ é o campo magnético de equilíbrio.

Obtemos de 2.13 que:

$$\vec{J} . \nabla P = \vec{B} . \nabla P = 0 \tag{2.16}$$

Assim, tanto o campo magnético quanto a densidade de corrente encontram-se sobre superfícies isobáricas ou superfícies magnéticas. Além da condição 2.13 as superfícies magnéticas precisam ser fechadas para assegurar o confinamento do plasma. Considerando então um plasma com simetria azimutal com densidade de corrente na direção toroidal, as superfícies magnéticas devem formar toróides inscritos uns aos outros. A superfície mais interna, no limite de $r_t \to 0$, leva o nome de eixo magnético.

Podemos associar a cada superfície magnética um respectivo fluxo magnético poloidal $2\pi\Psi_p$. Este é o fluxo de linhas de campo passando através de um plano que estende-se do eixo magnético até a superfície magnética específica, circulando todo o eixo maior. Como o fluxo poloidal será constante em todos os pontos da superfície magnética, Ψ_p agirá como um rótulo de cada superfície. Outra quantidade superficial será o fluxo da densidade de corrente poloidal $2\pi I$. Este fluxo é referente ao mesmo plano especificado para o fluxo poloidal. Sendo I, Ψ_p e a pressão P quantidades superficiais, podemos considerar $P(\Psi_p)$ e $I(\Psi_p)$.

A equação $\nabla . \vec{B} = 0$ permite-nos escrever o campo magnético de equilíbrio em termos do gradiente de uma função escalar independente da coordenada azimutal. Podemos então utilizar

Ψ_p para expressar o campo de equilíbrio. Em coordenadas polares toroidais $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$ esta expressão é dada por [32]:

$$\vec{B} = \frac{\vec{e_\varphi}}{r_t senh\xi} \times \nabla\Psi_p + B_\varphi \frac{\vec{e_\varphi}}{r_t senh\xi} \tag{2.17}$$

onde ξ é a coordenada toroidal em relação a qual define-se a coordenada polar toroidal r_t em 2.7.

2.3 Equação de Grad-Shafranov

Calculando $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ e fazendo uso do restante das equações MHD, encontramos a equação de Grad-Shafranov, que deve ser satisfeita para Ψ_p. Em coordenadas polares-toroidais a equação de Grad-Shafranov assume uma forma complicada que não vamos mostrar aqui [29].

Estamos mais interessados em obter uma forma mais simples dela. Sempre consideraremos um tokamak de alta razão de aspecto $(r_t/R'_0 \to 0)$ e podemos admitir a aproximação que $\Psi_p(r_t)$ não depende da coordenada poloidal θ_t [29, 32]. Estas aproximações simplificam a equação a:

$$\frac{1}{r_t}\frac{d}{dr_t}\left(r_t \frac{d\Psi_p}{dr_t}\right) = \mu_0 J_\varphi(r_t) \tag{2.18}$$

Cálculos mostraram [32] que as superfícies magnéticas assim obtidas, admitindo-se $\Psi_p(r_t)$, diferiram muito pouco das calculadas considerando uma correção de primeira ordem $\delta\Psi_p(r_t, \theta_t)$. Isto garante a validade da aproximação acima. Entretando convém notar que $\Psi_p(r_t) = \Psi_p(r, \theta)$, pois $r_t = r_t(r, \theta)$.

A equação de Grad-Shafranov coincide com a obtida para um plasma cilíndrico considerando coordenadas polares locais. As soluções para Ψ_p, no entanto, diferem entre si nestes casos. Apesar de terem a mesma forma analítica, os fluxos poloidais não são os mesmos devido à não coincidência das coordenadas r e r_t. Tomando-se uma seção transversal $\varphi = 0$ as superfícies magnéticas obtidas de $\Psi_p(r_t)$ formam círculos não-concêntricos, deslocados para fora. Este deslocamento é conhecido como deslocamento de Shafranov e se deve à toroidicidade do sistema, como vemos na figura 2.2, onde fica claro o desvio do eixo magnético em relação ao eixo geométrico R_0. Percebemos então a ineficiência do uso de coordenadas polares locais para descrever o sistema.

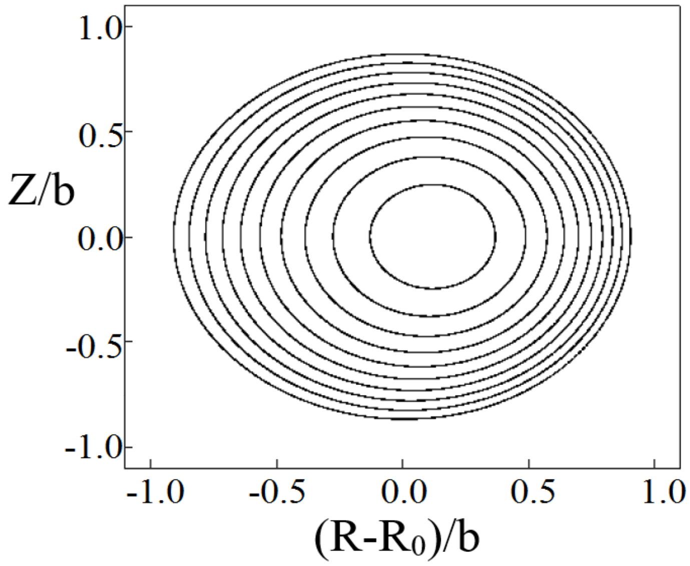


Figura 2.2: Superfícies magnéticas representadas em coordenadas cilíndricas.

Nota-se agora, de 2.18 , que assumir as funções $P(\Psi_p)$ e $I(\Psi_p)$ *a priori* equivale a admitirmos J_φ *a priori*.

Percebemos que esse sistema de coordenadas é útil para descrever a equação de Grad-Shafranov de forma simplificada, por isso a importância em citá-lo, mas em nosso trabalho vamos usar um sistema de coordenadas ainda mais simples.

Vamos considerar tokamaks de grande razão de aspecto, e para tais o campo magnético toroidal de equilíbrio é aproximadamente uniforme e, portanto, o efeito da curvatura toroidal pode ser tratado como um fator perturbativo. Então podemos adotar uma geometria cilíndrica, de periodicidade $2\pi R_0$, como mostra a figura 2.3. O sistema de coordenadas retangular, adequado para descrever nosso problema, é dado pelas equações:

$$x = b\theta \tag{2.19}$$

$$y = b - r \tag{2.20}$$

$$z = R_0\phi \tag{2.21}$$

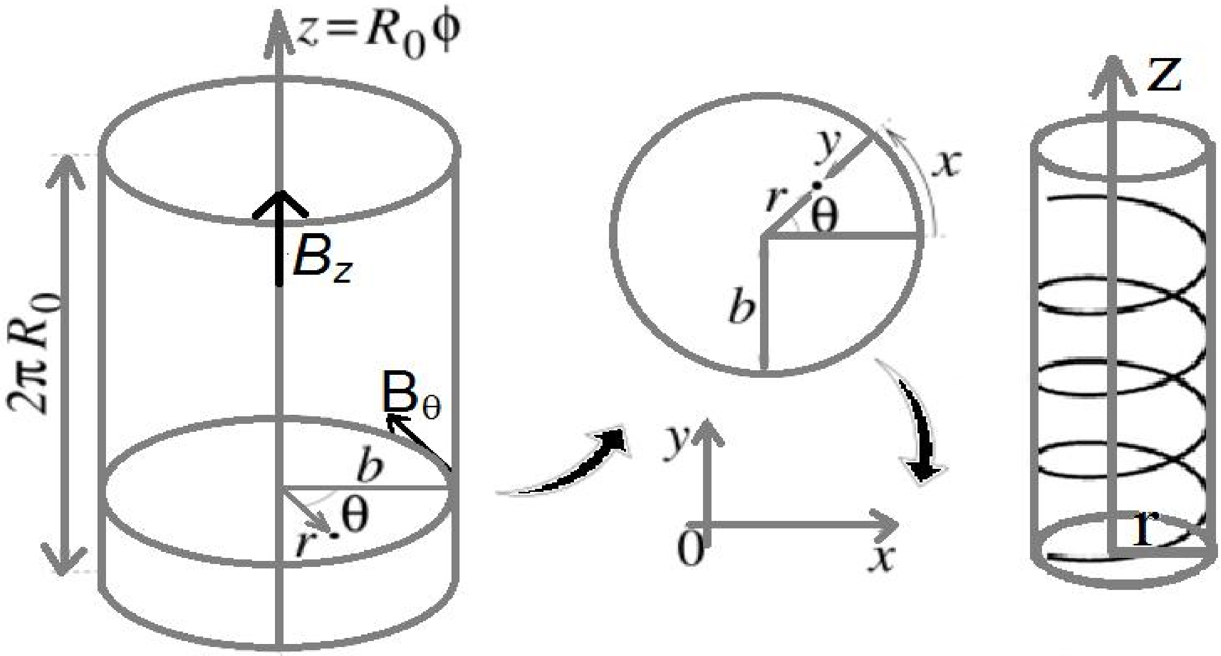


Figura 2.3: Toro representado como um cilindro periódico e as coordenadas retangulares. Também representamos os campos magnéticos poloidal e toroidal e o formato helicoidal das linhas de campo resultantes.

As equações apresentadas no trabalho serão escritas em coordenadas cilíndricas; para os resultados apresentados nos gráficos utilizaremos coordenadas cartesianas.

2.4 Fator de segurança

As linhas de campo magnético resultantes da soma das componentes poloidal e toroidal terão um formato helicoidal, como podemos ver na figura 2.3. Nesta tese vamos considerar densidades de corrente j = j(r). Podemos obter as linhas de campo magnético através da equação:

$$\vec{B} \times \vec{dl} = 0 \tag{2.22}$$

onde $\vec{dl}$ é um deslocamento infinitesimal ao longo da linha de campo. Temos que:

$$\nabla.\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = 0 \tag{2.23}$$

Como a densidade de corrente só depende de r, então temos B_r=0.

A equação 2.22 pode ser escrita como:

$$\frac{1}{r}\frac{dz}{d\theta} = \frac{B_z}{B_\theta} \tag{2.24}$$

As linhas de campo executam um deslocamento angular $\Delta\theta = \iota$ a cada volta toroidal $\Delta z = 2\pi R$. Podemos definir $dz/d\theta$ a inclinação local das linhas de campo. Na literatura, ι é definido como o número de rotação. Da equação 2.24, podemos escrever:

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{rB_z}{B_\theta} \tag{2.25}$$

Integrando, temos:

$$\int_0^\iota d\theta = \int_0^{2\pi R} dz \frac{B_\theta}{rB_z} \tag{2.26}$$

$$\iota = 2\pi \frac{RB_\theta}{rB_z} \tag{2.27}$$

Na literatura é usado também o fator de segurança, definido como:

$$\iota = \frac{2\pi}{q} \tag{2.28}$$

Pela equação 2.27, a expressão do fator de segurança é calculada como:

$$q = \frac{rB_z}{RB_\theta} \tag{2.29}$$

No equilíbrio, para órbitas regulares, calculamos o fator de segurança pela equação **??**. Nesses casos, as superficies magnéticas têm seções circulares e q = q(r).

Portanto, vemos que o fator de segurança está relacionado com a helicidade das linhas do campo. Como vamos estudar diversos tipos de perfis de densidade de corrente, seremos levados a diversos perfis do fator de segurança, e essa expressão permitirá calculá-los. O nome se deve ao fato de que, para evitar instabilidades, q na borda do plasma deve ser maior ou igual a 2 no eixo magnético [33].

No caso mais geral, em que a seção não é circular, obtemos o fator de segurança a partir do valor médio de ι. Calculamos, para cada iteração, a variação na posição angular da trajetória e somamos para todas as iterações, usando a equação a seguir:

$$q \equiv \lim_{k \to \infty} \frac{2\pi k}{\sum_{j=0}^{k} (\theta_{j+1} - \theta_j)} \tag{2.30}$$

Portanto:

$$q = \frac{2\pi}{< \Delta\theta >} = \frac{2\pi}{\iota} \tag{2.31}$$

Capítulo 3

Perturbações ressonantes e limitador ergódico

Neste capítulo vamos tratar das perturbações impulsivas, que provocam ressonância no sistema para uma dada região do espaço de fase, e do conceito de limitador ergódico, que dará origem a campos perturbativos.

3.1 Perturbações ressonantes

O estudo do comportamento de sistemas dinâmicos na presença de perturbações [5, 6] tem sido um tópico de grande relevância, devido à sua importância no controle de caos [34]. No nosso caso, estudaremos perturbações que provocam ressonância no espaço de fase para certos valores dos parâmetros.

Vamos analisar sistemas quase-integráveis, isto é sistemas integráveis perturbados por ressonâncias de pequena amplitude. Eventualmente, um sistema quase integrável de equações diferenciais pode ser transformado em um mapa [35], ou seja, uma aplicação que evolui o sistema, fornecendo assim uma amostra discreta do estado do sistema, descrevendo, na maioria das vezes, todas as características dinâmicas do sistema estudado de forma bem completa. Vamos trabalhar com essa representação mais adiante em nosso trabalho.

3.2 Limitador ergódico

Um dos grandes problemas no confinamento de plasmas em tokamaks é a presença de impurezas. Mas uma das principais fontes de impurezas são as colisões de partículas com a parede do vaso do tokamak. No final da década de 70 alguns autores sugeriram criar então uma camada de linhas de campo caóticas na borda do tokamak, que servisse como um limitador[17, 36, 37, 38], uniformizando a interação do plasma com a parede e baixando o nível de impurezas no centro do plasma[17, 39].

O conceito de limitador ergódico magnético consiste na idéia de criar esta região de linhas de campo magnético caóticas na borda do plasma através da superposição de cadeias de ilhas magnéticas ressonantes, geradas por perturbações externas de corrente sobre o campo magnético de equilíbrio. Uma primeira ideia para a criação destas ressonâncias é a colocação de m pares de fios metálicos, carregando uma corrente I_h, de forma helicoidal, em torno do vaso do tokamak, de forma a acompanharem as linhas de campo da superfície magnética de equilíbrio a ser perturbada. É importante salientar que as correntes são de sinais contrários em fios vizinhos, como vemos na figura 3.1. Podemos usar a equação de Laplace para o cálculo dos campos magnéticos pertubativos. Para a finalidade do nosso trabalho, cabe apenas citar as expressões. Considerando que os fios conduzem correntes em direções alternadas, temos que na aproximação cilíndrica os campos magnéticos perturbativos são dados por[18]:

$$B_r(r,\theta,\phi) = -\frac{\mu_0 m\epsilon}{\pi b}\left(\frac{r}{b}\right)^{m-1} sen(m\theta - \phi) \tag{3.1}$$

$$B_\theta(r,\theta,\phi) = -\frac{\mu_0 m\epsilon}{\pi b}\left(\frac{r}{b}\right)^{m-1} cos(m\theta - \phi) \tag{3.2}$$

onde $\epsilon \equiv I_h/I_p$, em que I_h é a corrente em cada fio e I_p é a corrente do plasma, m é o número de pares de fios, b é o raio menor do toróide e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo.

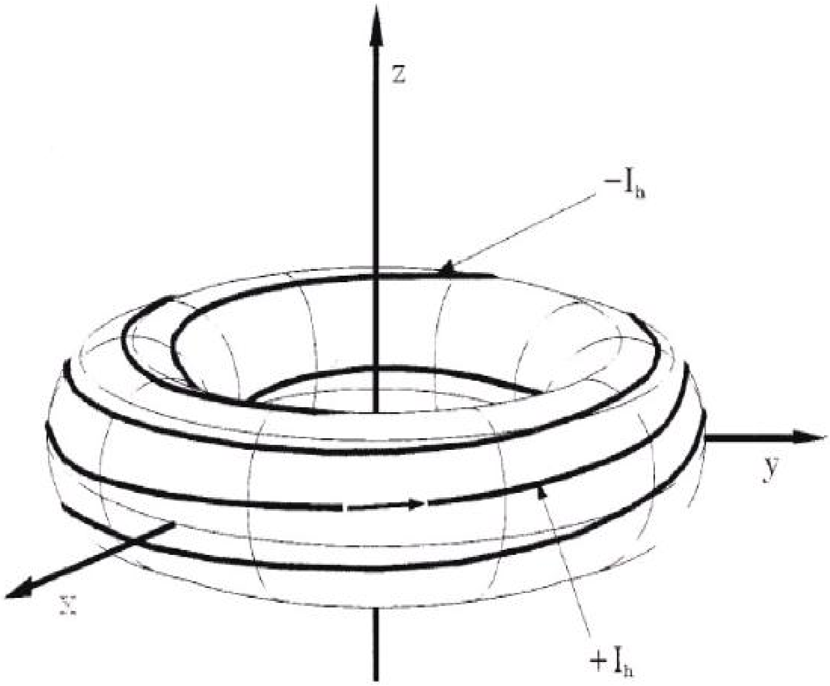


Figura 3.1: Esquema da corrente em fios vizinhos em um enrolamento helicoidal.

Esta ideia não é muito prática, pois os fios ocupam boa parte da superfície do tokamak, tornando difícil a instalação de janelas para medidas, entre outros inconvenientes. Em consequência disto, foi introduzido o limitador ergódico que consiste em um enrolamento helicoidal como descrito acima, mas reduzido apenas a uma faixa toroidal de largura g (figura 3.2) e interligando os vários fios. Foram obtidas evidências, tanto teóricas quanto experimentais, de que esta perturbação é suficiente para criar a faixa de linhas de campo magnético caóticas desejada na borda do tokamak[40].

As componentes do campo magnético das equações 3.1 e 3.2 serão usadas nas aplicações desta tese para introduzir perturbações ressonantes aos equilíbrios considerados.

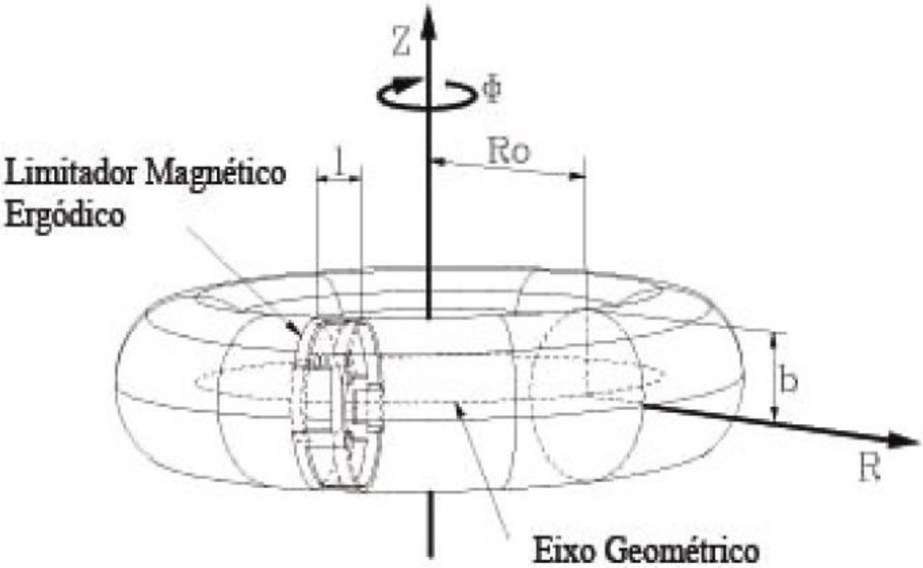


Figura 3.2: Esquema do limitador ergódico magnético no tokamak.

Capítulo 4

Mapas

Neste capítulo, vamos abordar brevemente o mapa padrão, que possui características do sistema que estudaremos e trataremos da definição de mapas simpléticos, também presente em nosso estudo. Em seguida, vamos desenvolver o nosso mapeamento bidimensional conservativo para descrever a evolução das linhas de campo magnético no interior de um tokamak. Inicialmente consideraremos o plasma no equilíbrio, depois adicionaremos uma perturbação na forma de um limitador ergódico magnético. Vamos estudar dois casos para o perfil da densidade de corrente: um perfil monotônico e um perfil não-monotônico, o que nos levará a diferentes perfis para o fator de segurança. Vamos aplicar esses dois perfis ao mapeamento e discutir o que ocorre no sistema.

4.1 O mapa padrão

Mapa é um sistema dinâmico determinado por uma função f em que a evolução (percurso) é discreta, com a variável de estado x num instante $n+1$ sendo função de seu valor no instante imediatamente anterior, n, pela iteração de f, ou seja: $x_{n+1} = f(x_n)$. O mapa também pode ter duas equações, com uma relação de recorrência entre as equações, como acontece no mapa padrão.

O mapa padrão é comumente utilizado no estudo de propriedades fundamentais de sistemas hamiltonianos. O mapa padrão *twist* é dado pelas equações:

$$r_{n+1} = r_n + Ksen(\theta_n) \tag{4.1}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + r_{n+1} \tag{4.2}$$

onde K é a intensidade da perturbação. Temos que o fator de segurança de equilíbrio ($K = 0$) é $q(r) = 1/(\theta_{n+1} - \theta_n) = r$. Devido à sua relativa simplicidade, o mapa padrão se mostra um mapa muito apropriado para descrever os fenômenos básicos de sistemas hamiltonianos bidimensionais, e também constitui um modelo aproximado para linhas de campo magnético em tokamaks.

O mapa padrão é um mapa simplético, termo que explicaremos adiante, podendo ser obtido da função geratriz através das equações:

$$r_{n+1} = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_{n+1}} \tag{4.3}$$

$$\theta_n = \frac{\partial F_2}{\partial r_n} \tag{4.4}$$

$$F_2(r_{n+1}, \theta_n) = \frac{1}{2} r_{n+1}^2 + r_{n+1}\theta_n + Kcos(\theta_n) \tag{4.5}$$

Embora o mapa padrão seja um modelo altamente idealizado para as linhas de campo magnético - com um perfil pouco realístico do fator de segurança e uma perturbação particularmente simples - ele apresenta as propriedades fundamentais de modelos mais sofisticados, e se mostra particularmente útil na descrição da dinâmica local de mapas mais complexos (é um modelo bem simples de um sistema conservativo que apresenta caos). Essas características estarão presentes nos mapas que estudaremos.

4.2 Mapas simpléticos

Vamos recuperar a equação 2.22, que permite obter as linhas de campo magnético de equilíbrio dado um campo magnético $\vec{B}$:

$$\vec{B} \times \vec{dl} = 0 \tag{4.6}$$

onde $\vec{dl}$ é um deslocamento ao longo da linha de campo. No caso da aproximação cilíndrica esta equação pode ser resolvida de forma analítica. A equação 4.6 pode ser escrita como:

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{R_0 dz}{B_0} \tag{4.7}$$

onde R_0 é o raio maior do toróide e B_0 é o campo magnético toroidal, cujos valores serão definidos na próxima seção.

Para obtermos as linhas de campo de equilíbrio basta integrarmos a equação:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{R_0 B_\theta(r_0)}{rB_0} \tag{4.8}$$

a partir da condição inicial (r_0, θ_0) desejada. Temos neste caso que as linhas de campo magnético de equilíbrio localizam-se sobre superfícies cilíndricas de raio fixo r_0. A variável z desempenha, neste caso, o papel de um tempo canônico ao longo do qual calculamos a evolução das linhas de campo magnético. A estrutura das linhas de campo em um tokamak pode ser mais facilmente apreciada por meio de um *mapa de retorno* - cujas trajetórias são obtidas das trajetórias contínuas arbitrando-se uma região no espaço de fases e retendo-se os valores das coordenadas apenas no instante do retorno da trajetória a essa região. Um mapa de retorno na coordenada z consiste, dada a periodicidade desta, em um mapa de Poincaré sobre a seção $z = constante$, com variáveis (r_n, θ_n) ou (x_n, y_n) denotando as coordenadas sobre a superfície de seção no instante n, ou seja, as coordenadas da n-ésima intersecção de uma linha de campo com a superfície, fornece a posição da seguinte. O mapa, numa forma geral, é escrito como:

$$r_{r+1} = f(r_n, \theta_n) \tag{4.9}$$

$$\theta_{r+1} = g(r_n, \theta_n) \tag{4.10}$$

em que f e g dependem do campo magnético. Devido à conservação do fluxo magnético, áreas no espaço de fases devem ser preservadas pelo mapa, isto é, o mapa deve apresentar jacobiano unitário. Uma dada "nuvem"de pontos em torno de uma condição inicial deve ter a sua área preservada quando a condição viaja para outro ponto. Aos mapas que respeitam essa propriedade, damos o nome de *simpléticos* [41, 42].

Em tokamaks [2], uma corrente toroidal de plasma é induzida, originando um campo magnético poloidal, B_θ, e bobinas montadas sobre a câmara produzem um campo magnético toroidal, B_z^0 - a soma destes campos constitui a configuração magnética de equilíbrio típica de um tokamak, B^0. Deste modo, é proveitoso ilustrar a obtenção de um mapa, a partir de um dado campo magnético, considerando um campo helicoidal, na descrição cilíndrica:

$$B^0 = (B_r^0 = 0, B_\theta^0(r), B_z^0) \tag{4.11}$$

As equações das linhas de campo magnético para este campo são:

$$\frac{dr}{dz} = 0 \tag{4.12}$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{R_0 B_\theta^0(r)}{rBz^0} = \frac{1}{q(r)} \tag{4.13}$$

que podem ser facilmente integradas de $z = constante$ a $z = constante + 2\pi$, isto é, entre intersecções sucessivas com a superfície de seção $z = constante$, resultando no mapa:

$$r_{n+1} = r_n \tag{4.14}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{2\pi}{q(r)} \tag{4.15}$$

que descreve círculos concêntricos invariantes, correspondente a uma estrutura magnética formada por toros alinhados. Este é o protótipo do mapa de equilíbrio de um tokamak, que pode ser então perturbado pela aplicação de um segundo mapa - como, de fato, será feito ao longo da tese.

Temos que esse mapa é simplético e que suas equações podem ser derivadas a partir de uma função geratriz de segunda ordem, $F_2(r_{n+1}, \theta_n)$, por meio das equações:

$$r_n = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_n} \tag{4.16}$$

$$\theta_{n+1} = \frac{\partial F_2}{\partial r_{n+1}} \tag{4.17}$$

sendo que, para o mapa das equações 4.14-4.15, a função geratriz é dada por:

$$F_2(r_{n+1}, \theta_n) = r_{n+1}\theta_n + \int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{1}{q(r')} dr' \tag{4.18}$$

Sabe-se[43] que um valor racional de $q, l/k$, implica órbitas periódicas de período l, isto é, linhas de campo que se fecham após l revoluções toroidais e k voltas poloidais. Um valor irracional de l corresponde a órbitas quase-periódicas, que preenchem densamente a superfície magnética. Da teoria de sistemas dinâmicos sabemos que as órbitas periódicas ressoam com a perturbação, dando origem a cadeias de ilhas, e que órbitas quase periódicas, os chamados toros (ou curvas) KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), sobrevivem a perturbações suficientemente pequenas, sendo mais resistentes às curvas mais irracionais. No caso da integrabilidade ser quebrada, as separatrizes e parte das curvas KAM podem ser destruídas, dando lugar a regiões caóticas.

Neste momento vamos apresentar dois perfis de densidade de corrente considerados: um monotônico e outro não-monotônico, já estudados na literatura [16, 44, 25]. No próximo capítulo vamos propor um perfil também não-monotônico, mas com densidade de corrente negativa no centro do plasma.

4.3 Perfil de $\vec{j}$ monotônico

A partir desta seção, e ao longo de todo o trabalho, apresentaremos os resultados numéricos obtidos, por esse motivo vamos listar os valores dos parâmetros usados em todas as simulações: $a = 0,18m$ (raio da coluna de plasma); $b = 0,21m$ (raio menor do toróide); $R_0 = 0,61m$ (raio maior do toróide); $B_0 = 1,0T$ (campo toroidal de equilíbrio); $q_a = 5,0$ (fator de segurança na borda do plasma); $g = 0,08m$ (largura do limitador ergódico); $I_p = 40000A$ (corrente do plasma); $\gamma = 4$ (expoente do perfil do campo). Esses parâmetros são equivalentes aos do tokamak TCABR instalado no Instituto de Física da Universidade de São Paulo. Como dito na seção 2.1, vamos utilizar nos gráficos o sistema de coordenadas cartesianas nos gráficos; já as equações são descritas em coordenadas cilíndricas. Para normalizar os eixos, vamos fazer

$$y = (b - r)/b \tag{4.19}$$

$$x = b\theta/2\pi b \tag{4.20}$$

Em nosso trabalho, inicialmente escolhemos um perfil de densidade de corrente monotônico[45, 46] dado por:

$$\vec{J}_z(r) = j_0(r)\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^\gamma \Theta(a - r)\hat{e}_\phi \tag{4.21}$$

onde a é o raio da coluna de plasma, $\Theta(x)$ é a função escada de Heavyside, e j_o e γ são parâmetros ajustáveis para a descrição de descargas típicas no tokamak.

Utilizando a lei de Ampère, o perfil de densidade de corrente da equação 4.21 leva ao perfil do campo magnético poloidal $B_\theta(r)$. No nosso caso, ele é dado por:

$$B_\theta(r) = \frac{aB_\theta(a)}{r}\left[1 - \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^\gamma \Theta(a - r)\right] \tag{4.22}$$

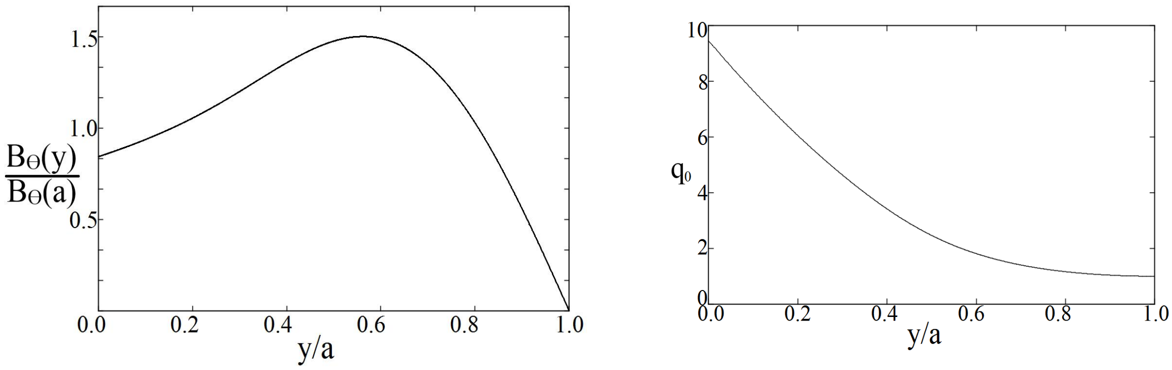
onde $B_\theta(a)$ é a intensidade de campo poloidal na borda da coluna de plasma, de raio a. O campo magnético toroidal é constante ($B_z = B_0$).

No nosso caso, o perfil do fator de segurança é dado por:

$$q_0(r) = q_a \frac{r^2}{a^2} \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^5 \Theta(a - r) \right]^{-1} \tag{4.23}$$

onde q_a é o fator de segurança na borda do plasma e o índice em q_0 representa o fator de segurança considerando nossa aproximação cilíndrica.

Na figura 4.1 reproduzimos os perfis do campo magnético poloidal e do fator de segurança. Podemos ver que, considerando um perfil de densidade de corrente monotônico, o campo poloidal vai a zero apenas no centro do plasma ($r = 0$ e, portanto, $y = 1,0$), e o perfil do fator de segurança se mostra monotônico.



(a) (b)

Figura 4.1: Perfis do campo magnético poloidal e do fator de segurança.

Vamos abordar brevemente o mapa derivado que procede diretamente das equações do campo magnético (4.22, 4.6 e 3.2) e admite correções toroidais [18, 47]. Este modelo propõe um mapeamento bidimensional composto por dois mapeamentos sucessivos: o primeiro descreve a evolução da linha de campo magnético no equilíbrio ao longo do vaso; o segundo descreve a perturbação introduzida pelo limitador ergódico.

Começamos com o mapeamento para a seção de Poincaré do campo magnético de equilíbrio no caso cilíndrico. Neste caso as linhas de campo magnético estão situadas sobre superfícies magnéticas de raio constante, e portanto:

$$r_n^* = r_n \tag{4.24}$$

onde r_n é a coordenada radial da linha de campo magnético antes da volta no tokamak, e r_n^* a mesma coordenada radial ao final da volta. Substituindo a equação 4.22 em 4.8 e integrando ao longo de uma volta na coordenada toroidal ϕ, obtemos:

$$\theta_n^* = \theta_n + \frac{2\pi R_0}{B_0}\frac{B_\theta(r_n)}{r_n} \tag{4.25}$$

O conjunto de equações 4.24-4.25 compõe então um mapeamento que descreve a seção de Poincaré das linhas de campo magnético de equilíbrio na aproximação cilíndrica.

Para introduzir correções toroidais de primeira ordem, este modelo adota um campo magnético toroidal de equilíbrio do tipo:

$$B_z(r,\theta) = \frac{B_0}{1 + \frac{r}{R_0}cos\theta} \tag{4.26}$$

que, substituindo em 4.8 nos leva a:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta(r)(1 + \frac{r}{R_0}cos\theta)R_0}{rB_0} \tag{4.27}$$

Integrando esta equação, obtemos que:

$$\theta_n^* = 2arctan[\lambda(r_n)tan(\Omega(r_n) + arctan\Xi(r_n,\theta_n))] + 2\pi \tag{4.28}$$

onde definimos as seguinte variáveis auxiliares:

$$\epsilon(r_n) = \frac{r_n}{R_0} \tag{4.29}$$

$$\lambda(r_n) = \frac{1 - \epsilon(r_n)}{\sqrt{1 - \epsilon^2(r_n)}} \tag{4.30}$$

$$\Omega(r_n) = \frac{\pi R_0 B_\theta(r_n)(1-\epsilon(r_n))}{B_0 r_n \lambda(r_n)} \tag{4.31}$$

$$\Xi(r_n, \theta_n) = \frac{1}{\lambda(r_n)} tan\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \tag{4.32}$$

Como continuamos com o campo radial nulo nesta aproximação, a equação 4.24 continua válida para a iteração da coordenada radial, e em conjunto com a equação 4.28 fornece um mapeamento para a seção de Poincaré das linhas de campo magnético de equilíbrio com correções toroidais de primeira ordem.

Para obtermos um mapeamento para a perturbação introduzida pelos campos magnéticos do limitador ergódico, vamos supor que este seja suficientemente estreito em relação à dimensão toroidal ($g/2\pi R_0 << 1$) de forma a poder ser considerado como uma perturbação impulsiva sobre as linhas de campo do equilíbrio. Esta suposição leva a resultados numéricos válidos, conforme foi mostrado através da comparação com integrações numéricas dos campos originais[48]. Temos então que os campos magnéticos perturbativos devido ao limitador ergódico podem ser representados, de forma aproximada, por:

$$B_r(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 m \epsilon}{\pi b}\left(\frac{r}{b}\right)^{m-1} sen(m\theta) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(z - 2\pi j) \tag{4.33}$$

$$B_\theta(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 m \epsilon}{\pi b}\left(\frac{r}{b}\right)^{m-1} cos(m\theta) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(z - 2\pi j) \tag{4.34}$$

onde $\delta(x)$ representa a função delta de Dirac. Integrando, chegamos ao mapeamento bidimensional:

$$r_{n+1} = r_n^* - \frac{\mu_0 g m \epsilon}{\pi b B_0}\left(\frac{r_n^*}{b}\right)^{m-1} sen(m\theta_n^*) \tag{4.35}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n^* - \frac{\mu_0 g m \epsilon}{\pi b^2 B_0}\left(\frac{r_n^*}{b}\right)^{m-2} cos(m\theta_n^*) \tag{4.36}$$

que representa a perturbação introduzida pelo anel do limitador ergódico.

O conjunto de equações apresentado nos permite obter uma série de seções de Poincaré para as linhas de campo magnético, sendo que os parâmetros a serem variados são o número m de pares de espiras no anel e a corrente I_h no limitador ergódico, pois $\epsilon \equiv I_h/I_p$, onde I_p é a corrente fixa do plasma.

Este modelo, conhecido como mapeamento de Viana e Caldas, deduzido diretamente das equações de campo magnético, representa de forma bastante fiel as posições radiais e as larguras das cadeias de ilhas magnéticas criadas devido às ressonâncias provocadas pelo limitador ergódico. Mesmo assim, não é adequado para o tipo de análise dinâmica que pretendemos efetuar, pois o mapeamento de Viana e Caldas não é simplético. Temos que estes termos contradizem a equação da divergência nula das linhas de campo magnético ($\nabla.\vec{B} = 0$, uma das equações fundamentais da física clássica, segundo a qual todo mapeamento, para descrever a evolução das linhas de campo magnético, deve ser conservativo).

Para contornarmos esse problema, vamos introduzir um mapeamento conservativo, baseado em parte no mapeamento de Viana e Caldas, para descrevermos a seção de Poincaré das linhas de campo magnético no interior de um tokamak, sob influência de um limitador ergódico magnético.

4.4 O mapeamento da perturbação introduzida pelo limitador ergódico

Para o caso do equilíbrio cilíndrico, o mapeamento de Viana e Caldas em coordenadas cilíndricas é dado por:

$$r_n^* = r_n \tag{4.37}$$

$$\theta_n^* = \theta_n + \frac{2\pi}{q(r_n)} \tag{4.38}$$

onde $q(r)$ é o perfil do fator de segurança. Temos que a matriz jacobiana deste mapeamento é dada por:

$$J_{cil} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial r_n^*}{\partial r_n} & \frac{\partial r_n^*}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_n^*}{\partial r_n} & \frac{\partial \theta_n^*}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2\pi}{q^2}\frac{dq}{dr} & 1 \end{pmatrix}$$

e portanto temos que:

$$det(J_{cil}) = 1 \tag{4.39}$$

ou seja, o mapeamento é conservativo (sem levar em conta a correção toroidal). Como todo mapeamento conservativo ele pode ser derivado de uma função geratriz, e escolhendo a função geratriz nas coordenadas (r_n^*, θ_n) vemos que ela pode ser escrita como:

$$G_{cil}(r_n^*, \theta_n) = \theta_n r_n^* + 2\pi \int_0^{r_n^*} \frac{d\xi}{q(\xi)} \tag{4.40}$$

O mapeamento do equilíbrio cilíndrico pode ser derivado desta função geratriz através das relações:

$$r_n = \frac{\partial G_{cil}(r_n^*, \theta_n)}{\partial \theta_n} \tag{4.41}$$

$$\theta_n^* = \frac{\partial G_{cil}(r_n^*, \theta_n)}{\partial r_n^*} \tag{4.42}$$

Por outro lado, o mapeamento introduzido por Viana e Caldas, para a descrição do equilíbrio com correções toroidais, apresenta pequenos termos dissipativos, portanto devemos apresentar um mapa que seja conservativo. Este novo mapa deve apresentar as seguintes propriedades: para $\eta \equiv \dfrac{R}{R_0} \to 0$ ele deve se reduzir ao mapeamento do caso cilíndrico, que é válido para grandes razões de aspecto, e ele deve ser derivável de uma função geratriz, o que nos garante que ele é conservativo.

Este novo mapeamento, conhecido como mapeamento de Ulmann-Caldas, propõe uma função geratriz genérica que leva a um mapeamento com as propriedades acima:

$$G_{tor}(r_n^*, \theta_n) = G_{cil}(r_n^*, \theta_n) + \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left(\frac{r_n^*}{R_0}\right)^l cos^l\theta_n \tag{4.43}$$

onde os coeficientes a_l são coeficientes genéricos a serem ajustados.

Retendo apenas o primeiro termo da somatória, impondo $a_l = 0 (l \geq 2)$, e derivando a função geratriz obtemos o mapa:

$$r_n^* = \frac{r_n}{1 - a_1 sen\theta_n} \tag{4.44}$$

$$\theta_n^* = \theta_n + \frac{2\pi}{q_0(r_n^*)} + a_1 cos\theta_n \tag{4.45}$$

onde $a_1 = -0,04$ é a correção devido ao efeitos toroidais e q_0 é o perfil do fator de segurança na aproximação cilíndrica.

O valor do parâmetro a_1 foi obtido pela comparação do perfil do fator de segurança considerando o mapeamento de Viana-Caldas e o mapeamento de Ulmann-Caldas. Foi escolhido o valor do parâmetro para o qual os dois perfis coincidem [44].

Vamos incluir a perturbação efetuada sobre as linhas de campo magnético pelos anéis do limitador ergódico. A perturbação é descrita pelo par de equações:

$$r_{n+1} = r_n^* - bC \left(\frac{r_n^*}{b} \right)^{m-1} sen(m\theta_n^*) \tag{4.46}$$

$$\theta_n^* = \theta_{n+1} - C \left(\frac{r_n^*}{b} \right)^{m-2} cos(m\theta_n^*) \tag{4.47}$$

Temos, nesse mapa, que $C = \frac{\mu_0 m \epsilon g}{B_0 \pi b^2}$, onde os parâmetros a serem variados são a razão ϵ entre a corrente do limitador ergódico e a corrente do plasma (I_p) e o número m de pares de espiras no anel. Os demais parâmetros permanecem com os mesmos valores listados na seção 4.3.

Para as regiões de interesse das coordenadas r e θ, temos que em geral $|| \frac{\theta_{n+1} - \theta_n^*}{r_{n+1} - r_n^*} || >> 1$, ou seja, a perturbação angular é muito mais relevante do que a perturbação radial. Na dedução, retemos a equação angular dentro da qual fazemos a aproximação $r_{n+1} \approx r_n^*$, e integramos para obter a função geratriz. Já que $\theta_{n+1} \equiv \frac{\partial G_{pert}}{\partial r_{n+1}}$ temos que:

$$G_{pert}(r_{n+1}, \theta_n) = \int dr_{n+1} \theta_{n+1}(r_{n+1}, \theta_n^*) \tag{4.48}$$

o que nos leva a:

$$G_{pert}(r_{n+1},\theta_n^*) = r_{n+1}\theta_n^* - \frac{Cb}{m-1}\left(\frac{r_{n+1}}{b}\right)^{m-1} cos(m\theta_n^*) \tag{4.49}$$

e utilizando a definição adicional $r_n^* \equiv \frac{\partial G_{pert}}{\partial \theta_n^*}$ obtemos as equações para o mapeamento de Ulmann-Caldas considerando a perturbação do limitador ergódico magnético:

$$r_n^* = r_{n+1} + \frac{mCb}{m-1}\left(\frac{r_{n+1}}{b}\right)^{m-1} sen(m\theta_n^*) \tag{4.50}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n^* - C\left(\frac{r_{n+1}}{b}\right)^{m-2} cos(m\theta_n^*) \tag{4.51}$$

Ressaltamos aqui o fato da equação radial ser obtida em forma inversa, e podemos isolar o valor de r_{n+1} apenas para alguns valores especiais de m de pouco interesse prático. Portanto utilizamos o método de Newton para determinar os zeros da função a cada iteração do mapa. O conjunto das equações 4.44, 4.45, 4.50 e 4.51 compõem o mapa de Ulmann-Caldas que descreve as seções de Poincaré das linhas de campo magnético dentro de um tokamak sob a inflência de limitadores ergódicos.

4.4.1 Seções de Poincaré

Inicialmente colocamos um gráfico das seções de Poincaré do mapeamento sem a perturbação, na figura 4.2, considerando o perfil do fator de segurança $q_0(r)$ da equação 4.23:

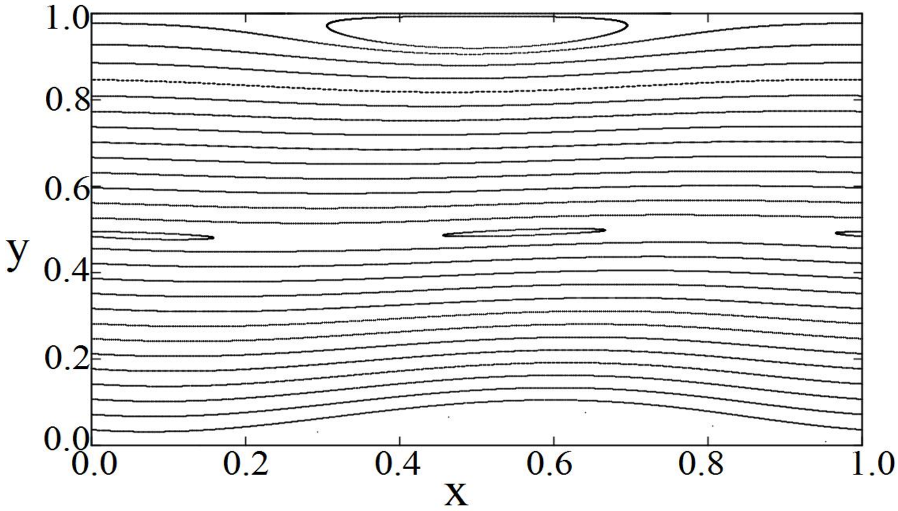


Figura 4.2: Seção de Poincaré para o mapeamento sem a perturbação.

Nesse gráfico não observamos a formação de cadeias de ilhas, mas apenas linhas invariantes, onde para uma dada condição inicial na linha, as linhas de campo permanecerão na mesma linha ao longo da evolução do mapa. Também não observamos a formação de caos. Esse comportamento é esperado, uma vez que não adicionamos a perturbação.

Em seguida, analisamos as seções de Poincaré do mapeamento bidimensional conservativo obtido. Para tanto calculamos o mapa para valores de m e ϵ. No cálculo de cada seção, utilizamos 30 condições iniciais (r_n, θ_n) e iteramos 2000 vezes. Para $m = 6$ e correntes mais baixas ($\epsilon = 0,01$), temos a figura 4.3a), onde vemos que apenas duas cadeias de ilhas apresentam largura significativa: a cadeia principal com 6 ilhas, em torno da qual existe uma estreita faixa de regime caótico, devido à presença da corrente externa e, de forma menos acentuada, a sua cadeia vizinha com 7 ilhas. Na figura 4.3c), para $\epsilon = 0,03$, vemos que as cadeias com 6 e 7 ilhas já estão bastante destruídas, com largas faixas caóticas as englobando. Para $m = 7$ e $\epsilon = 0,01$, temos a figura 4.3b). Para $m = 7$ e $\epsilon = 0,03$, temos a figura 4.3d). O que determina o comportamento é a mudança na corrente do limitador. Nessas duas figuras, observamos comportamento semelhante. A cadeia principal possui 7 ilhas e com o aumento da corrente também fica bastante destruída.

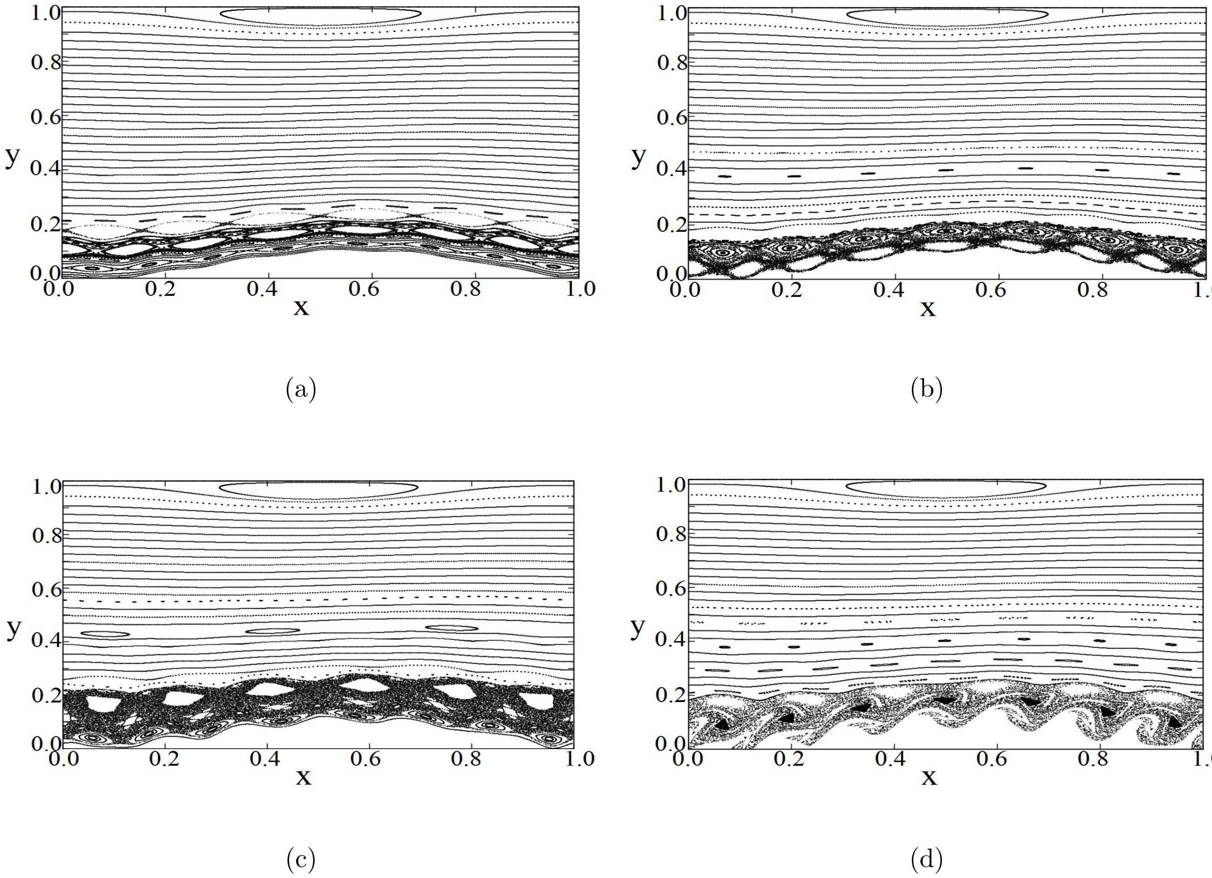


Figura 4.3: Seções de Poincaré para o mapa bidimensional conservativo com correções toroidais para (a) $m = 6$ e $\epsilon = 0,01$, (b) $m = 7$ e $\epsilon = 0,01$, (c) $m = 6$ e $\epsilon = 0,03$ e (d) $m = 7$ e $\epsilon = 0,03$.

Fizemos também gráficos de trajetórias do mapeamento. Fizemos duas trajetórias regulares na figura 4.4 e uma caótica na figura 4.5:

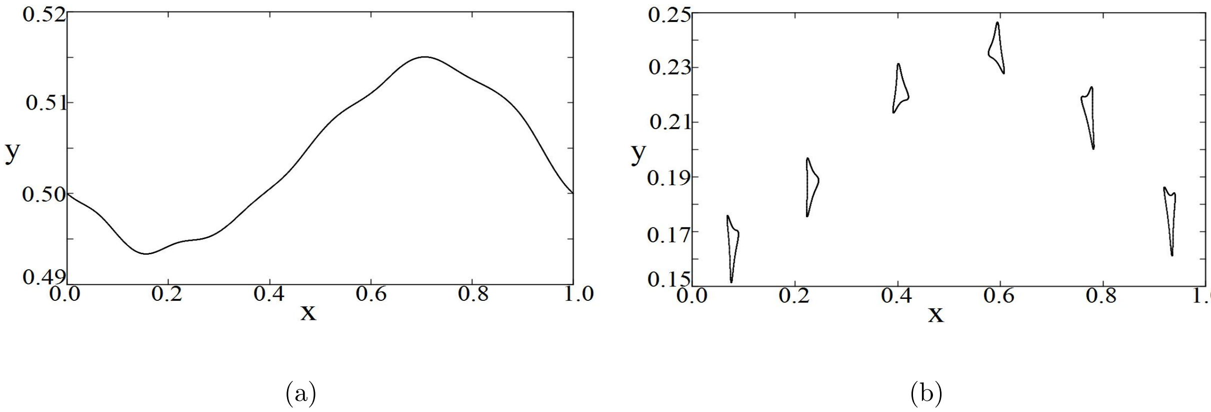


Figura 4.4: Trajetórias regulares do mapeamento bidimensional conservativo para $\epsilon = 0,01$ e $m = 6$ com condições iniciais (a) $x_0 = 0$ e $y_0 = 0,5$ e (b) $x_0 = 0,07$ e $y_0 = 0,17$.

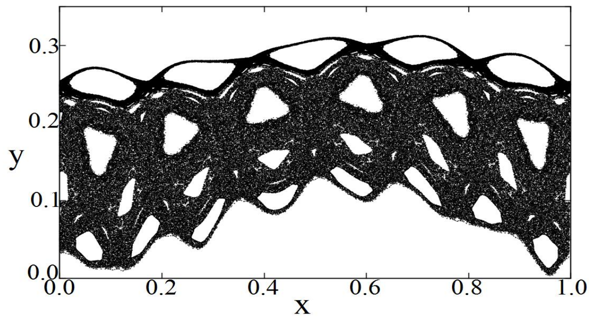


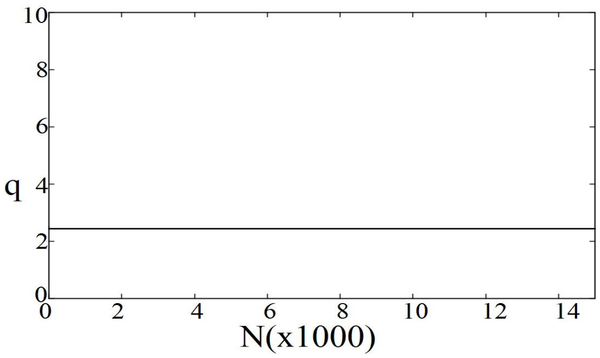
Figura 4.5: Trajetória caótica do mapeamento bidimensional conservativo para $\epsilon = 0,01$ e $m = 6$ com condições iniciais $x_0 = 0$ e $y_0 = 0,2$.

4.4.2 Fatores de segurança do mapeamento

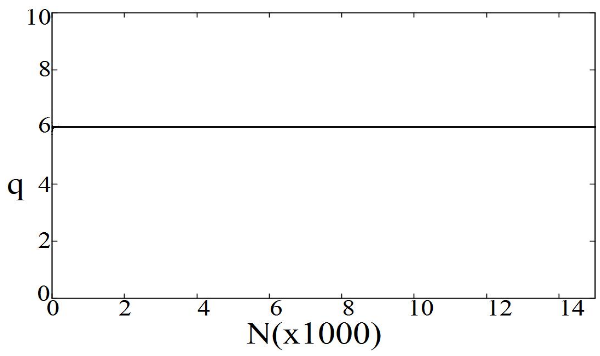
Nesta seção, faremos o cálculo numérico do fator de segurança de uma linha de campo, que descreve o inverso do deslocamento angular médio por iteração. O cálculo é feito da seguinte maneira, como discutido na seção 2.4: verificamos a variação na posição angular de cada ponto da trajetória em relação ao ponto anterior, somamos as variações para todas as iterações, e tomamos a média. Essa é a definição do número de rotação ι, apresentado na referida seção. Para obtermos a definição do fator de segurança numérico, invertemos o resultado obtido. A expressão a seguir está escrita descrevendo a variação na posição angular em termos da coordenada cartesiana x:

$$q \equiv \lim_{k\to\infty} \frac{2\pi k}{\sum_{j=0}^{k}(x_{j+1} - x_j)} \tag{4.52}$$

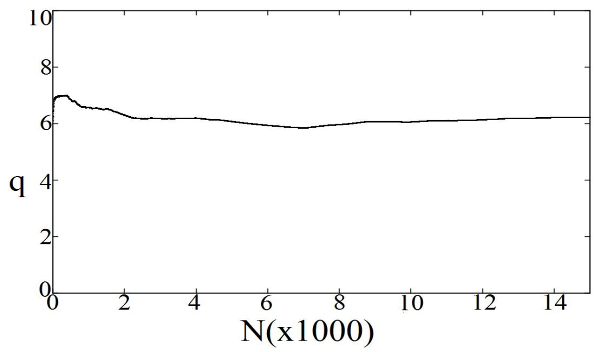
A linha de campo pode ser classificada como pertencente a uma das três categorias seguintes, conforme o seu fator de segurança: (i) se q converge para um número irracional, a linha de campo é regular e situa-se sobre um toro fechado; (ii) se q converge para um número racional a linha de campo pode estar sobre um toro ressonante (para $I_h = 0$) ou sobre uma cadeia de ilhas magnéticas (para $I_h > 0$); (iii) se q não converge (oscila numa região delimitada), a linha de campo em questão é caótica. Calculando numericamente o fator de segurança para algumas linhas de campo, vemos que, de fato, para a trajetória sobre um toro fechado (4.4a)), ele converge imediatamente para um número irracional, como na figura 4.6a). Já para a trajetória situada sobre a cadeia com 6 ilhas (figura 4.4b)), q também converge muito rapidamente para o número 6. De fato, o valor de q está diretamente relacionado com o número de ilhas da cadeia (para obtermos essa correspondência direta é que o fator 2π foi incluído na definição. Na figura 4.6c), correspondente à trajetória da figura 4.5, o fator de segurança não converge, mas fica oscilando dentro de uma faixa de valores delimitada pelas ilhas imersas na região caótica permitida.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.6: Convergência do fator de segurança para uma trajetória com condições iniciais (a) $x_0 = 0$ e $y_0 = 0,5$ e (b) $x_0 = 0,07$ e $y_0 = 0,17$. Em (c) $x_0 = 0$ e $y_0 = 0,2$, q varia com N.

Utilizamos os métodos expostos para analisarmos com mais detalhes as trajetórias do mapeamento bidimensional conservativo ao longo de segmentos de reta dentro do espaço de parâmetros. Consideramos cortes sobre uma seção de Poincaré com m e ϵ fixos, como na figura 4.7:

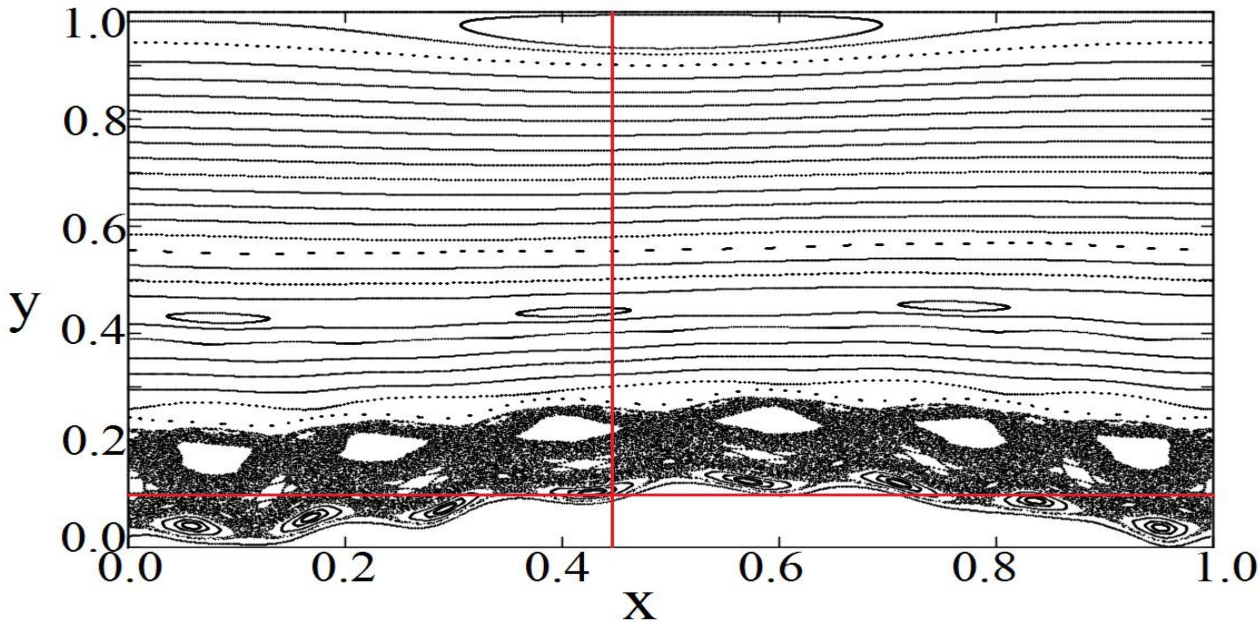


Figura 4.7: Seção de Poincaré do mapeamento bidimensional conservativo com $m = 6$ e $\epsilon = 0,03$, e os cortes vertical e horizontal.

Fizemos a análise ao longo de um segmento de reta de posição radial inicial fixa ($y_0 = 0,095$) e variando o ângulo inicial em todo o intervalo $[0, 2\pi]$. Observamos na seção de Poincaré que o corte efetuado começa na região caótica, ao sair dela passa pela cadeia principal de 8 ilhas e volta à região do caos. Fizemos o gráfico dos fatores de segurança (figura 4.8) utilizando a equação 4.52. Para x fixo, calculamos a variação média na coordenada y e somamos sobre todas as iterações.

Pudemos ver de forma bem definida os patamares correspondentes às passagens pelas cadeias de ilhas principais, e ainda algumas curvas de passagem por superfícies toroidais irracionais ainda não destruídas pela perturbação. Por uma questão de melhor visualização, apenas plotamos os valores dos fatores de segurança que convergiam.

Também analisamos o sistema ao logo de um segmento de reta com ângulos iniciais fixos e posições radiais iniciais variáveis, utilizando como exemplo o corte vertical com $x_0 = 0,45$, utilizando também a equação 4.52. Para y fixo, calculamos a variação média na coordenada x e somamos sobre todas as iterações.

Este corte começa em um faixa de regime caótico, passa pelas cadeias principais, volta para o caos e entra na região das superfícies toroidais fechadas. No gráfico dos fatores de segurança (figura 4.9), vemos uma espécie de *escada do diabo* descendente [49], interrompida apenas por intervalos correspondentes às regiões de regime caótico. O nome se dá pelo fato de que a estrutura é fractal, de modo que nunca se pode chegar ao final da escada.

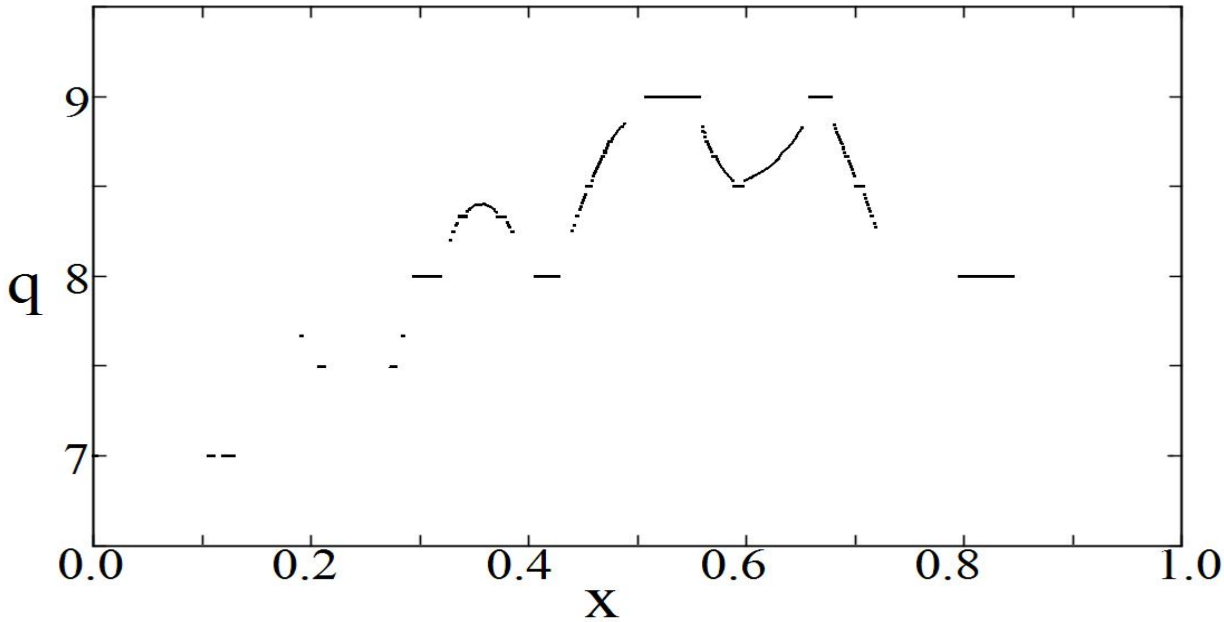


Figura 4.8: Fator de segurança para o mapeamento bidimensional conservativo com $m = 6$, $\epsilon = 0,03$ e $y_0 = 0,095m$.

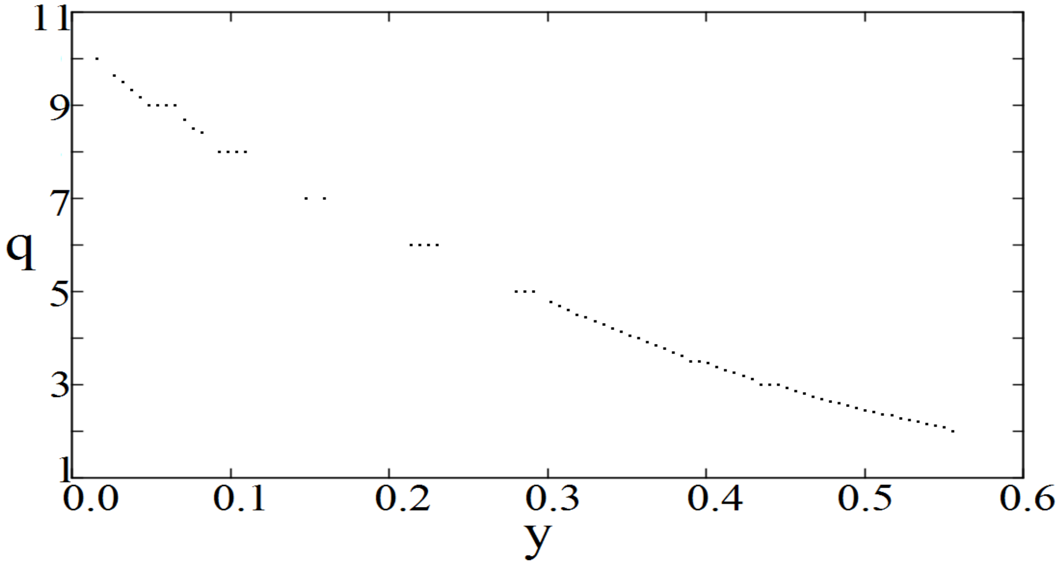


Figura 4.9: Fator de segurança para o mapeamento bidimensional conservativo com $m = 6$, $\epsilon = 0,03$ e $x_0 = 0,45m$.

4.5 Perfil de $\vec{J}$ não-monotônico

Vamos mudar o perfil da densidade de corrente. Notamos que, da equação 2.18, ter que assumir as funções $P(\Psi_p)$ e $I(\Psi_p)$ *a priori* equivale a admitirmos J_φ *a priori*. Vamos considerar um perfil radial não-monotônico de J_φ, em coordenadas cilíndricas, J_z, como observado em algumas experiências [50]:

$$J_z = \frac{I_p R_0}{\pi a^2} \frac{(\gamma+2)(\gamma+1)}{\beta+\gamma+2} \left(1+\beta\frac{r^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^\gamma \tag{4.53}$$

onde I_p é a corrente total de plasma, γ e β são parâmetros ajustáveis e a é o raio da coluna de plasma.

Aplicando a Lei de Ampère, obtemos a expressão para o campo poloidal:

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi r^2}\left[1-\left(1+\beta'\frac{r^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{\gamma+1}\right] \tag{4.54}$$

onde $\beta' \equiv \beta(\gamma+1)/(\beta+\gamma+2)$.

Esse perfil da densidade de corrente corresponde ao seguinte perfil do fator de segurança:

$$q(r) = q_a \frac{r^2}{a^2} \left[1 - \left(1 + \beta' \frac{r^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\gamma+1} \Theta(a-r) \right]^{-1} \tag{4.55}$$

onde $q_a = 5,0$, $\beta = 2$ e $\gamma = 1$.

Reproduzimos a figura do perfil do fator de segurança:

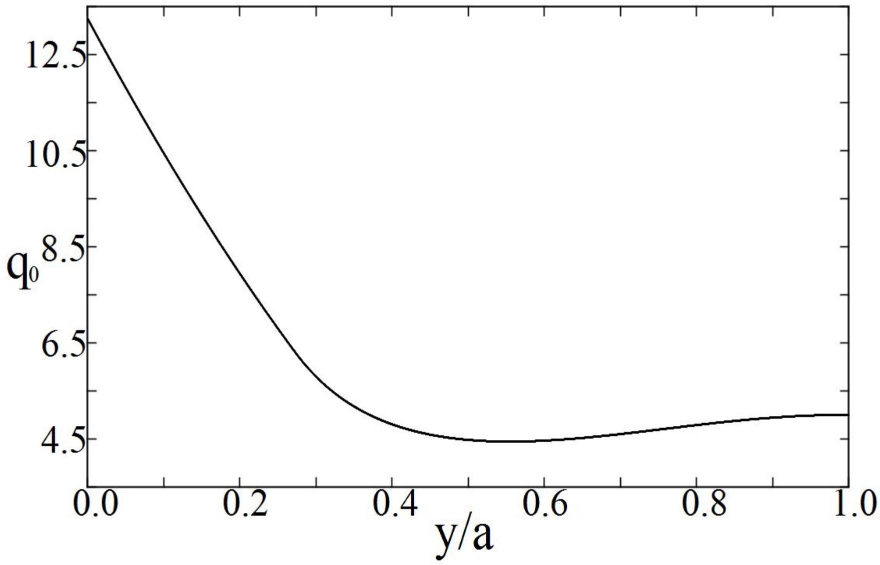


Figura 4.10: Perfil não-monotônico para o fator de segurança.

Em seguida colocamos um mapa das seções de Poincaré para o mapa das equações 4.44 e 4.45, sem incluir a perturbação, e obtivemos a figura 4.11, onde vemos o mesmo comportamento do perfil monotônico da figura 4.2, o caos não aparece quando não há perturbação.

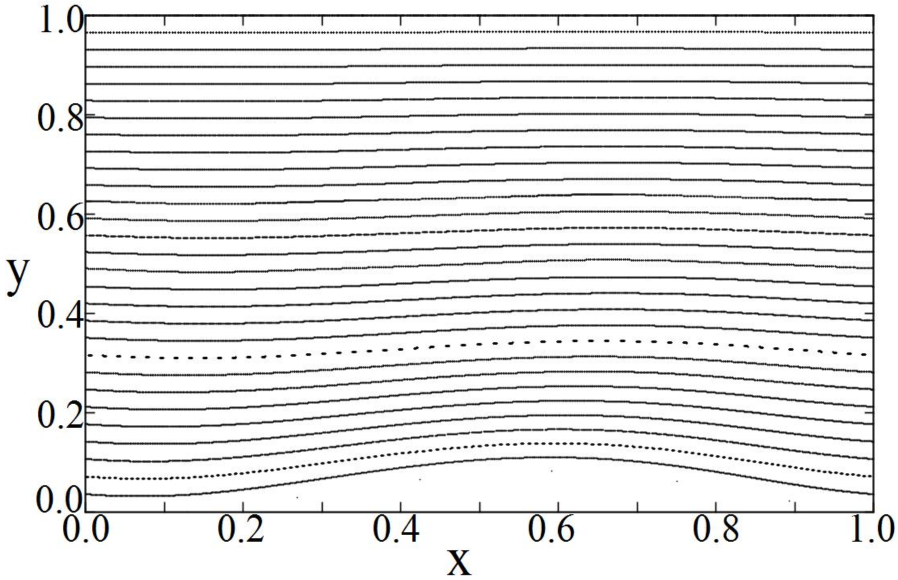
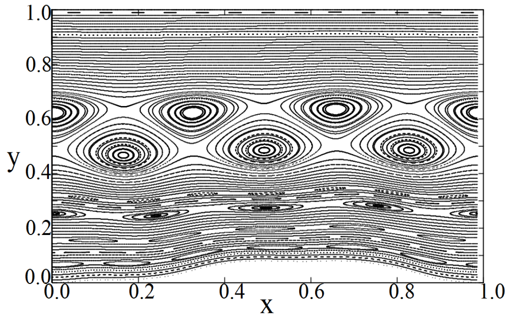


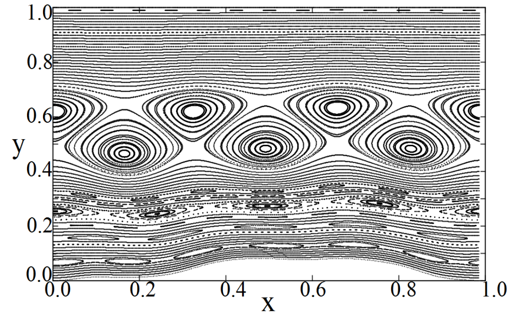
Figura 4.11: Seções de Poincaré para o perfil não-monotônico, sem perturbação.

Quando acrescentamos a perturbação, vemos que ocorre o fenômeno da reconexão. O perfil não-monotônico do fator de segurança implica pares de cadeias de ilhas com o mesmo valor do fator de segurança, separadas por curvas invariantes. Aumentando o valor da perturbação, as ilhas se alargam e as linhas invariantes se combinam, e dependendo do quão grande for o valor da perturbação, uma cadeia de ilhas pode sumir e ficamos com uma barreira invariante separando a cadeia que sobrou do regime caótico. Trata-se de uma reconexão simplética (não-resistiva) [51].

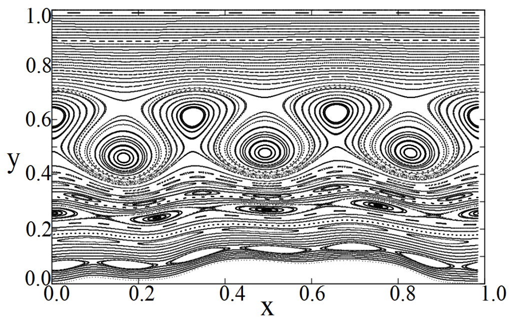
Deste capítulo concluímos que, considerando o perfil monotônico para o fator de segurança, observamos cadeias de ilhas e caos apenas quando adicionamos a perturbação introduzida pelo limitador ergódico magnético. No equilíbrio, observamos linhas invariantes. Quando consideramos o perfil não-monotônico do fator de segurança, observamos as mesmas características no equilíbrio e com a adição de perturbação, e também o fenômeno da reconexão ao aumentarmos a intensidade da corrente no limitador ergódico.



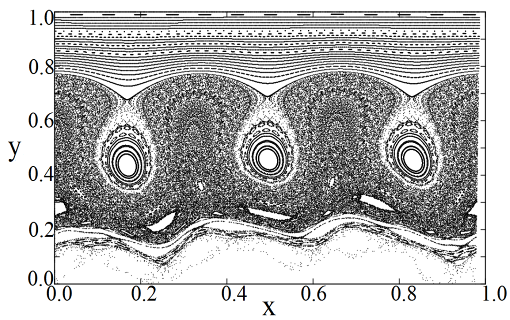
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.12: Seção de Poincaré para o mapa bidimensional conservativo considerando o perfil não monotônico do fator de segurança com correções toroidais para (a) $m = 3$ e $\epsilon = 0,01$, (b) $m = 3$ e $\epsilon = 0,035$, (c) $m = 3$ e $\epsilon = 0,05$ e (d) $m = 3$ e $\epsilon = 0,0635$. Podemos observar o cenário de reconexão.

Capítulo 5

Perfil de $\vec{J}$ com inversão de corrente

Neste capítulo vamos mostrar a parte principal do nosso trabalho, onde consideramos um perfil não-monotônico para a densidade de corrente, mas que também assumirá valores negativos, que chamamos de corrente reversa. Aplicaremos o mapeamento bidimensional no equilíbrio, considerando o novo perfil do fator de segurança. Essa mudança implicará o surgimento de linhas sem *shear* e o consequente aparecimento de cadeias de ilhas quando reproduzimos as seções de Poincaré, mesmo no equilíbrio. Vamos estudar a causa da existência e as características da natureza dessas ilhas. No final do capítulo, faremos uma breve discussão do que ocorre com a adição da perturbação.

5.1 Equilíbrio sem correção toroidal

Vamos considerar um perfil não-monotônico de densidade de corrente J, como observado em algumas experiências [50, 21, 22]:

$$J_z = \frac{I_p R_0}{\pi a^2} \frac{(\gamma+2)(\gamma+1)}{\beta+\gamma+2} \left(1+\beta\frac{r^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{\gamma} \tag{5.1}$$

onde I_p é a corrente total de plasma, γ e β são parâmetros ajustáveis e a é o raio da coluna de plasma.

Utilizando a expressão para o perfil de $\vec{J}$ dada pela equação 5.1, podemos aplicar a lei de Ampère e obter a expressão para o campo poloidal:

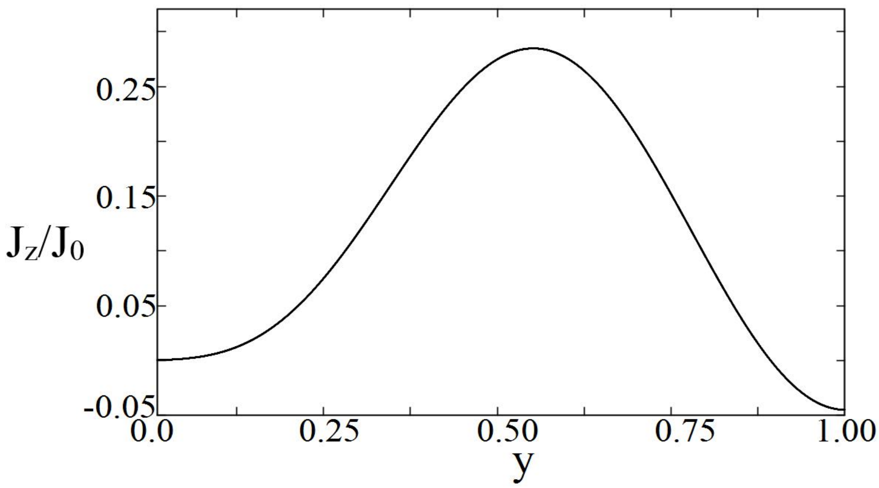


Figura 5.1: Perfil da densidade de corrente.

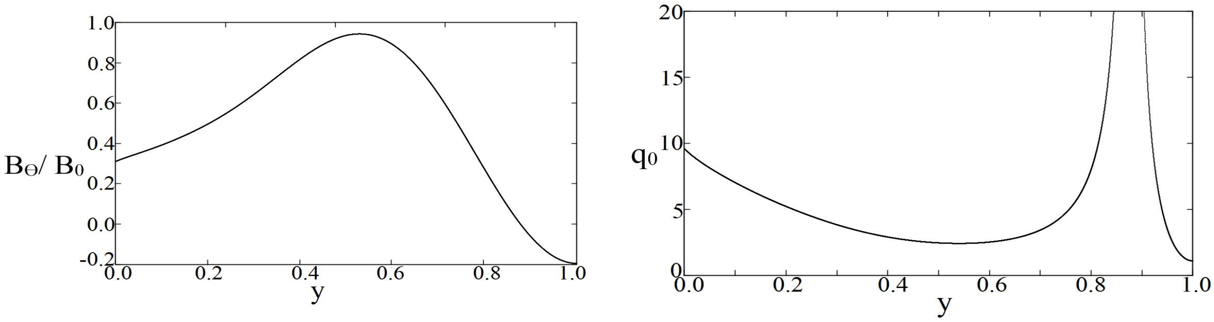
$$B_\theta = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi r^2}\left[1 - \left(1 + \beta' \frac{r^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\gamma+1}\right] \tag{5.2}$$

Esse campo assume um valor zero na região de $y = 0,876$. Isso fará com que a expressão para o $q(r)$ terá uma divergência nesse ponto.

Usando a equação 2.29 do fator de segurança, obtemos:

$$q_0(r) = \frac{\epsilon a^2}{{R_0}^2}\frac{r^2}{a^2}\left[1 - \left(1 + \beta' \frac{r^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\gamma+1}\right]^{-1}\left[1 - 4\left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{5.3}$$

Temos uma figura do perfil do campo poloidal e do perfil do fator de segurança:



(a) (b)

Figura 5.2: Perfis do campo magnético poloidal e do fator de segurança.

5.2 Surgimento de linhas sem *shear*

Nesta seção vamos considerar o nosso mapeamento bidimensional conservativo no equilíbrio com o perfil de densidade de corrente reversa. Fizemos a seção de Poincaré (figura 5.3) sem a adição da perturbação e observamos, na região próxima ao centro do plasma, um comportamento diferente com relação ao mapeamento com os perfis monotônico e não-monotônico para a densidade de corrente. Se ampliarmos aquela região (mostraremos adiante) é possível verificar a existência de cadeias de ilhas, algo que ocorreu nos outros casos apenas quando a perturbação foi introduzida.

Com o objetivo de investigar mais a fundo esse comportamento para o mapa com esse perfil, fixamos um valor de x em 0,51 (figura 5.3) e calculamos numericamente o fator de segurança (lembrando que agora entrará em consideração a correção toroidal), como fizemos com o perfil monotônico para a densidade de corrente (figura 5.4).

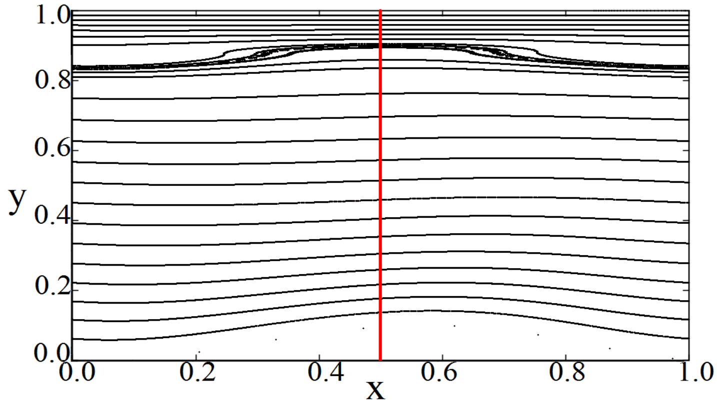


Figura 5.3: Seção de poincaré para o mapeamento com o perfil da densidade de corrente reversa. Temos também a linha que indica o valor que fixamos para x.

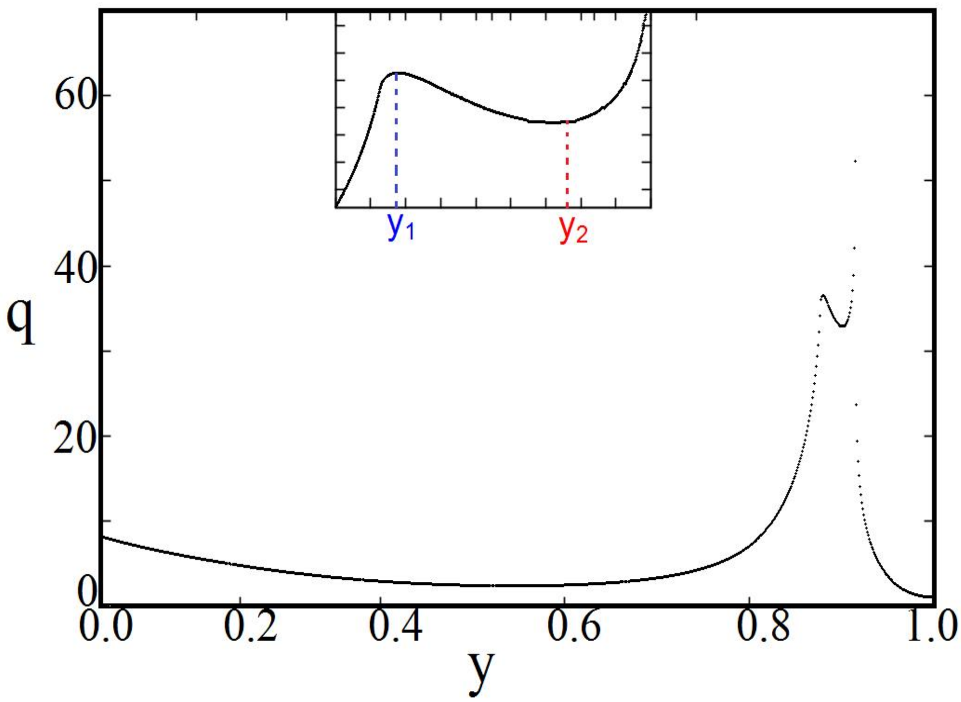


Figura 5.4: Perfil numérico do fator de segurança. No *inset* destacamos os pontos de mínimo e máximo.

Com esse perfil, podemos perceber uma região onde está situada a curva de divergência (em torno $y = 0,914$), e os pontos onde temos linhas invariantes sem *shear*, onde temos dq/dr=0 (em torno de $y = 0,895$ e $y = 0,867$); definiremos pontos críticos aqueles que satisfazem essa condição. Traçamos essas três curvas na figura 5.5. Mas neste gráfico percebemos que a posição da curva de divergência não coincide com o ponto onde o campo magnético poloidal vai a zero. Isso ocorre devido à correção toroidal que provoca esse deslocamento. Para analisar esse fato, fizemos esse perfil para vários valores do parâmetro a_1, e obtivemos que conforme o parâmetro assume valores próximos de zero, a posição da curva de divergência coincide com o ponto onde $B_\theta = 0$. Para $a_1 = -0,02$, a curva de divergência fica na posição $y = 0,906$, para $a_1 = -0,01$, a curva de divergência fica na posição $y = 0,899$, para $a_1 = -0,005$, a curva de divergência fica na posição $y = 0,879$ e para $a_1 = 0$, a curva de divergência fica na posição $y = 0,876$.

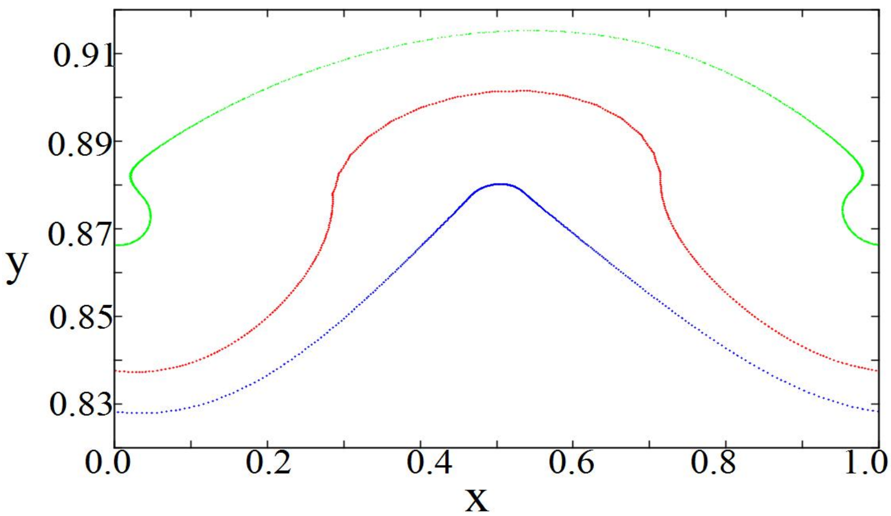


Figura 5.5: Linhas sem shear (curvas vermelha e azul) e curva de divergência (curva verde).

A existência dos dois pontos críticos sugere que encontremos cadeias de linhas gêmeas em torno dessas linhas sem shear. Para a primeira linha (em vermelho no gráfico), encontramos as cadeias e então as apresentamos na figura 5.6.

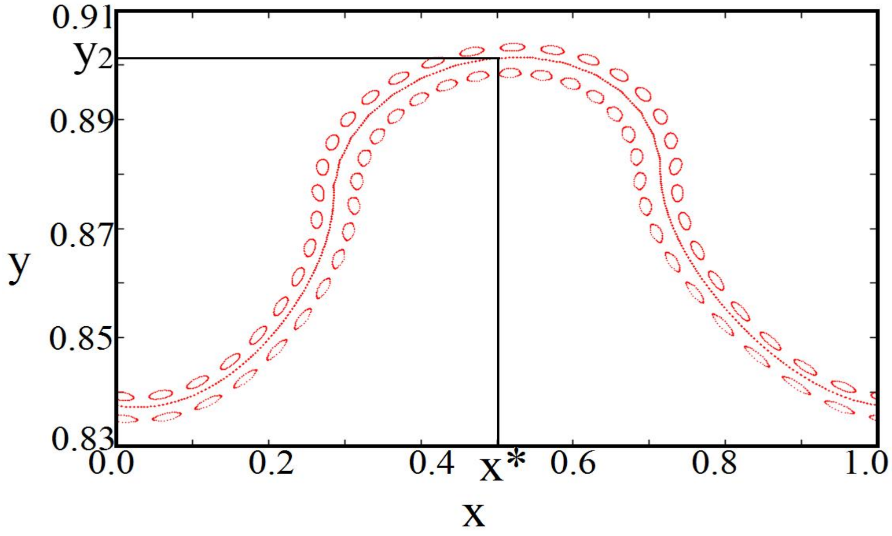


Figura 5.6: Linha e cadeias.

Para a segunda ilha, foi necessário ampliar a região 150 vezes e aumentar 20 vezes o número de condições iniciais para observar as cadeias de ilhas, como mostrado na figura a seguir:

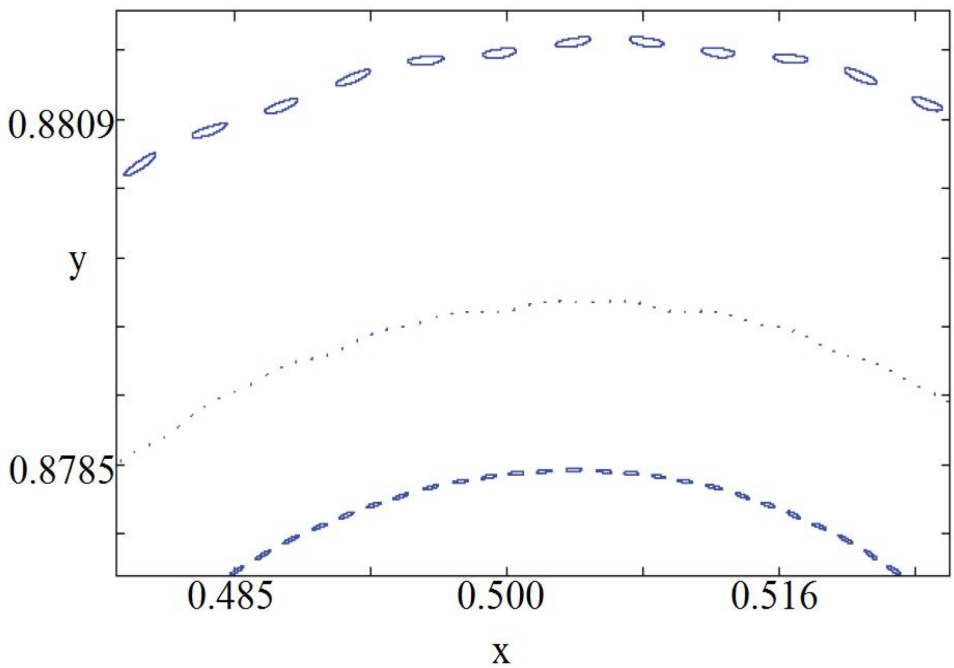


Figura 5.7: Ampliação da linha sem shear e as cadeias de ilhas gêmeas em torno.

Embora não possamos visualmente constatar que as cadeias são gêmeas, devido ao grande número de ilhas que cada uma delas possui, calculamos o número de rotação para uma dada condição inicial pertencente à cada cadeia, e encontramos o mesmo valor para ambas as condições iniciais, logo concluimos que as duas cadeias têm de fato o mesmo número de ilhas e, portanto, são gêmeas.

5.2.1 Variação do parâmetro β

Para estudar qual é a causa do aparecimento das ilhas, vamos variar o parâmetro β da expressão do perfil da densidade de corrente. Recuperamos a expressão:

$$J_z = \frac{I_p R_0}{\pi a^2} \frac{(\gamma+2)(\gamma+1)}{\beta+\gamma+2} \left(1+\beta\frac{r^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{\gamma} \tag{5.4}$$

Na figura 5.8, colocamos os perfis para cinco valores diferentes do parâmetro. Iniciamos com valor $\beta = -100.2$ e fomos aumentando, em módulo. Percebemos que o intervalo para o qual a corrente se torna reversa diminui com o aumento, em módulo, de β, e as curvas terminam cada vez mais próximas do zero. A curva preta corresponde a um valor de β onde a densidade de corrente termina no valor zero, ou seja, o perfil torna-se apenas não-monotônico, e não mais com corrente reversa. A curva em cinza corresponde a um valor positivo de β, e vemos que o perfil da densidade de corrente termina em um valor positivo, e o perfil também torna-se apenas não-monotônico.

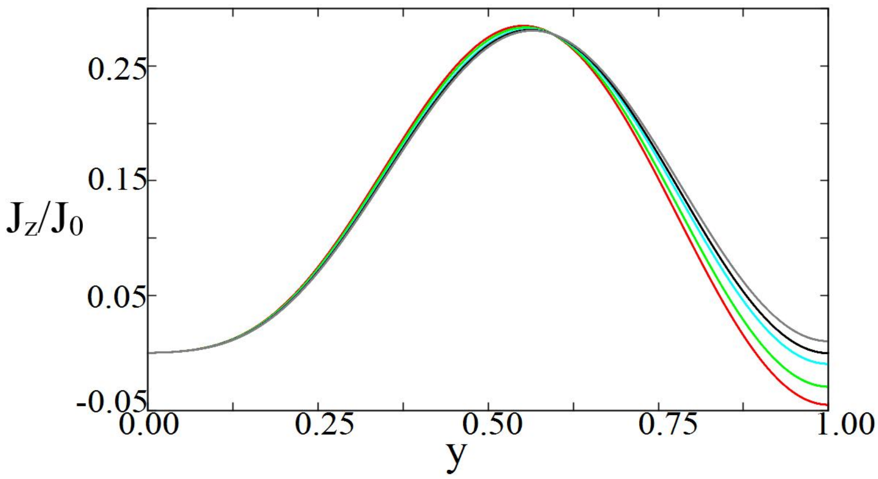


Figura 5.8: Gráficos dos perfis da densidade de corrente considerando diferentes valores do parâmetro β. A região onde ocorre a densidade de corrente reversa vai diminuindo, até atingirmos as curvas preta e cinza, onde o perfil torna-se apenas não-monotônico Temos os seguintes valores do parâmetro β: -100,2 (curva vermelha), -250,2 (curva verde), -400,2 (curva azul), -46000,2 (curva preta), 100,2 (curva cinza).

Também reproduzimos os cálculos numéricos dos perfis do fator de segurança para os mesmos valores de β. Na figura 5.9, fizemos um *zoom* na região onde ocorrem os pontos críticos. Podemos observar que a distância ente os pontos críticos de cada perfil vai diminuindo, até obtermos a curva preta, onde os pontos críticos não existem mais. A curva preta corresponde ao caso em que o perfil da densidade de corrente torna-se apenas não-monotônico e não assume valores negativos (curva preta da figura 5.8), e também não possui mais os pontos críticos. Quando o valor de β torna-se positivo (curva cinza da figura 5.8), esperamos que a divergência no perfil desapareça, como realmente acontece na curva também cinza da figura 5.9.

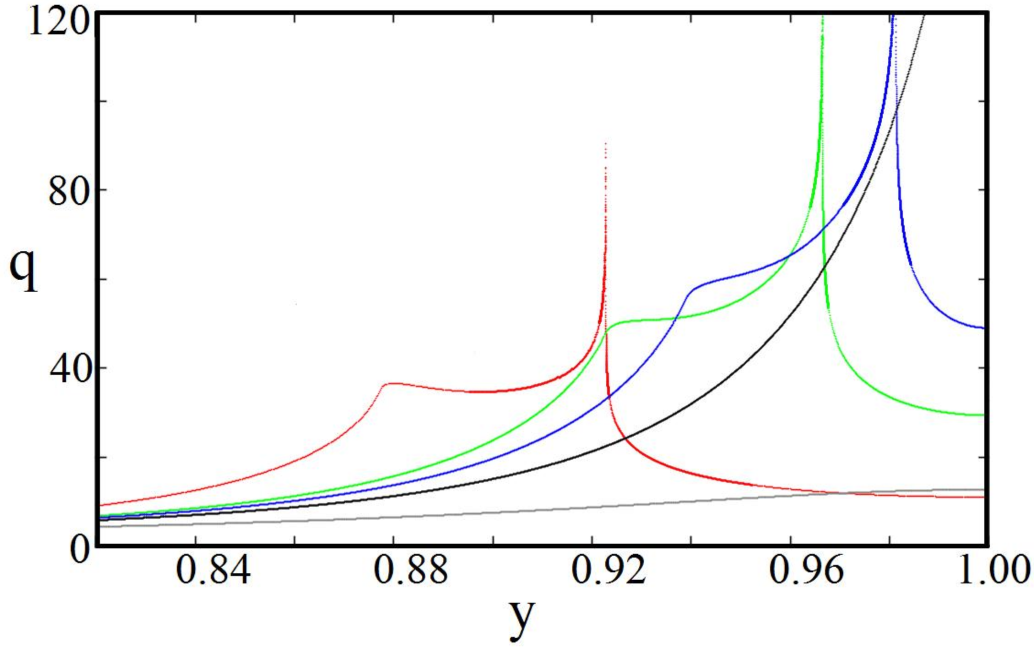


Figura 5.9: Gráficos dos perfis obtidos de modo numérico para o fator de segurança considerando diferentes valores do parâmetro β. A linha preta corresponde ao caso onde temos $\beta = -46000, 2$ onde o perfil torna-se apenas não-monotônico; já a curva vermelha corresponde a $\beta = -100, 2$, habitualmente usado no trabalho. Na curva cinza utilizamos um valor positivo ($\beta = 100, 2$) e a divergência não aparece.

Numericamente comprovamos que realmente os pontos críticos vão se aproximando. Essa característica pode indicar que o tamanho das cadeias de ilhas diminui com a variação do parâmetro, que é o que justamente ocorre. Na figura 5.10 observamos que o tamanho das cadeias de ilhas diminui. As cores das curvas correspondem aos mesmos valores de β usados nas figuras 5.8 e 5.9, exceto a linha azul clara que foi trocada pela cor azul escura para facilitar a visualização. Na linha azul escura, as ilhas se tornam imperceptíveis na escala utilizada na figura, então fizemos um zoom para destacar a existência delas. Na linha preta, como temos o perfil da densidade de corrente apenas não-monotônico, não há mais ilhas, o que observamos é uma linha invariante. Na curva cinza temos o valor do parâmetro β para o qual o perfil da densidade de corrente assume apenas valores positivos, e também não observamos mais ilhas, também temos uma linha invariante.

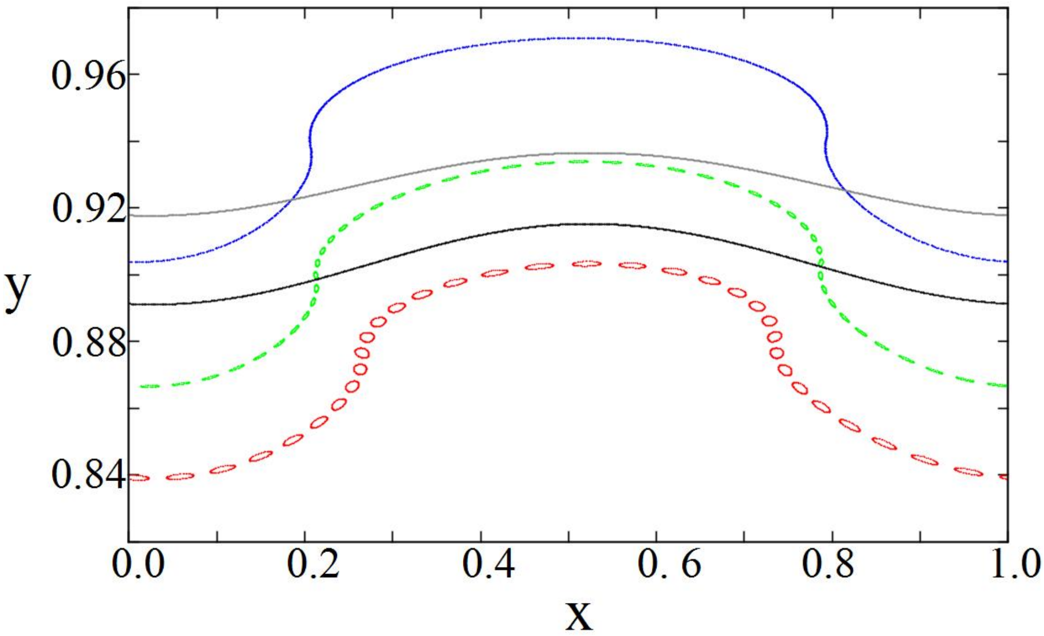


Figura 5.10: Cadeias de ilhas para diferentes valores do parâmetro β. Observamos que o tamanho das ilhas diminui com o aumento, em módulo, de β. Na linha verde, $\beta = -250,2$; na cor azul escura, para $\beta = -400,2$, as ilhas são muito pequenas. Nas linhas preta ($\beta = -46000,2$) e cinza ($\beta = 100,2$), não há mais inversão de corrente e vemos apenas linhas invariantes.

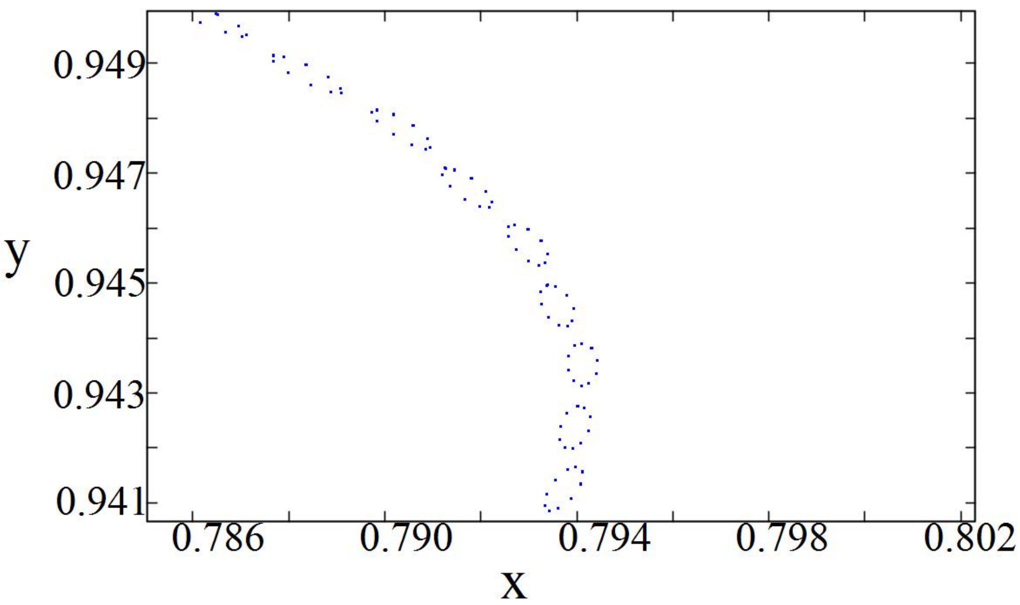


Figura 5.11: *Zoom* da linha azul clara da figura 5.10 para mostrar que há ilhas, uma vez que o perfil do fator de segurança ainda possui pontos críticos.

Quando atingimos um valor do parâmetro β para o qual o perfil da densidade de corrente torna-se apenas não-monotônico, sem inversão de corrente, reproduzido novamente, agora de forma isolada na figura 5.12, temos que a seção de Poincaré, mostrada na figura 5.13 torna-se semelhante às seções mostradas quando consideramos os perfis monotônico e não-monotônico, nas seções 4.4.1 e 4.5 da presente tese.

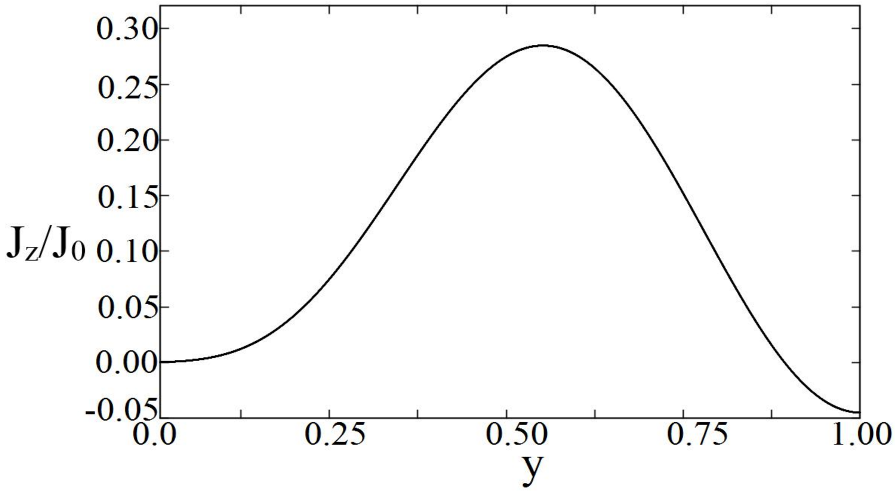


Figura 5.12: Perfil não-monotônico da densidade de corrente, mas sem inversão de corrente.

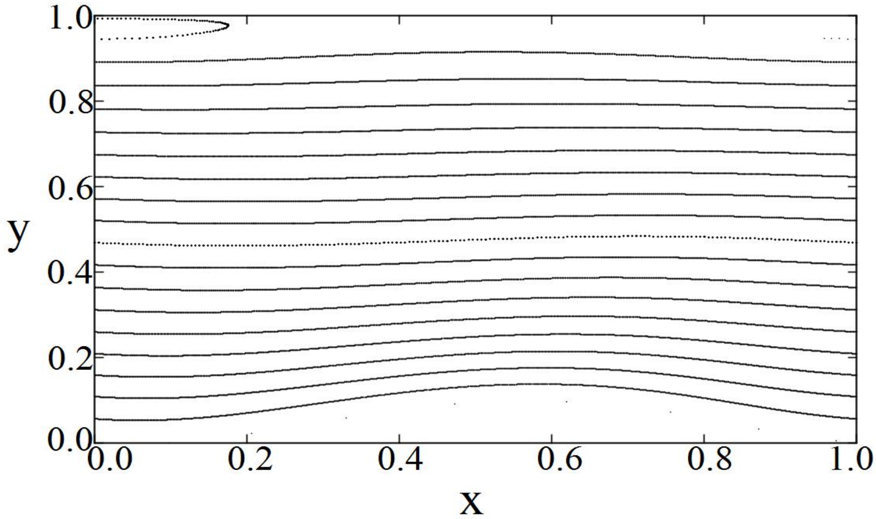


Figura 5.13: Seção de Poincaré quando consideramos o perfil não-monotônico para a densidade de corrente, mas sem inversão de corrente.

Podemos então aferir que, com a variação do parâmetro β podemos obter a região onde o perfil da densidade de corrente assume valores negativos. Também concluimos que esta característica está diretamente relacionada com o aparecimento das cadeias de ilhas no equilíbrio, pois vimos que o tamanho delas vai diminuindo até que somem quando o perfil torna-se apenas não-monotônico.

5.2.2 Variação do parâmetro a_1

Também investigamos a relação da variação do parâmetro a_1, relacionado com a correção toroidal. Na figura 5.14, colocamos os perfis numéricos do fator de segurança para vários valores de a_1. O valor de β é fixo para todas curvas e vale -100,2. Iniciamos do valor $a_1 = -0,04$ (curva vermelha). Conforme diminuimos o valor, em módulo, do parâmetro, percebemos que a distância entre os pontos críticos também vai diminuindo, até a curva preta, onde o valor de a_1 torna-se zero, e os pontos críticos desaparecem. Na curva cinza, o valor de a_1 torna-se positivo. Percebemos o mesmo comportamento quando variamos o parâmetro β.

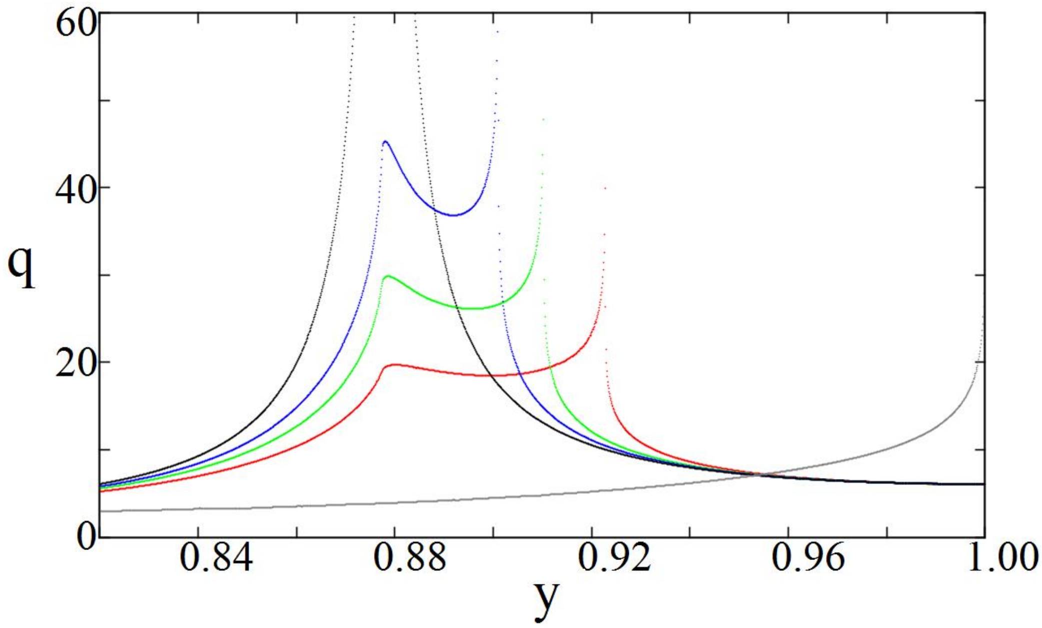


Figura 5.14: Cadeias de ilhas para diferentes valores do parâmetro a_1. A curva vermelha corresponde a $a_1 = -0,04$; a curva preta corresponde a $a_1 = 0$, onde não temos mais os pontos críticos; curva verde: $a_1 = -0,03$; curva azul: $a_1 = -0,01$; curva cinza: $a_1 = 0,04$.

5.3 Estudo das cadeias de ilhas

Passamos agora a estudar com mais detalhes as ilhas que surgiram em decorrência da inversão da corrente. Colocamos então uma região ampliada com algumas cadeias de ilhas observadas na figura 5.15:

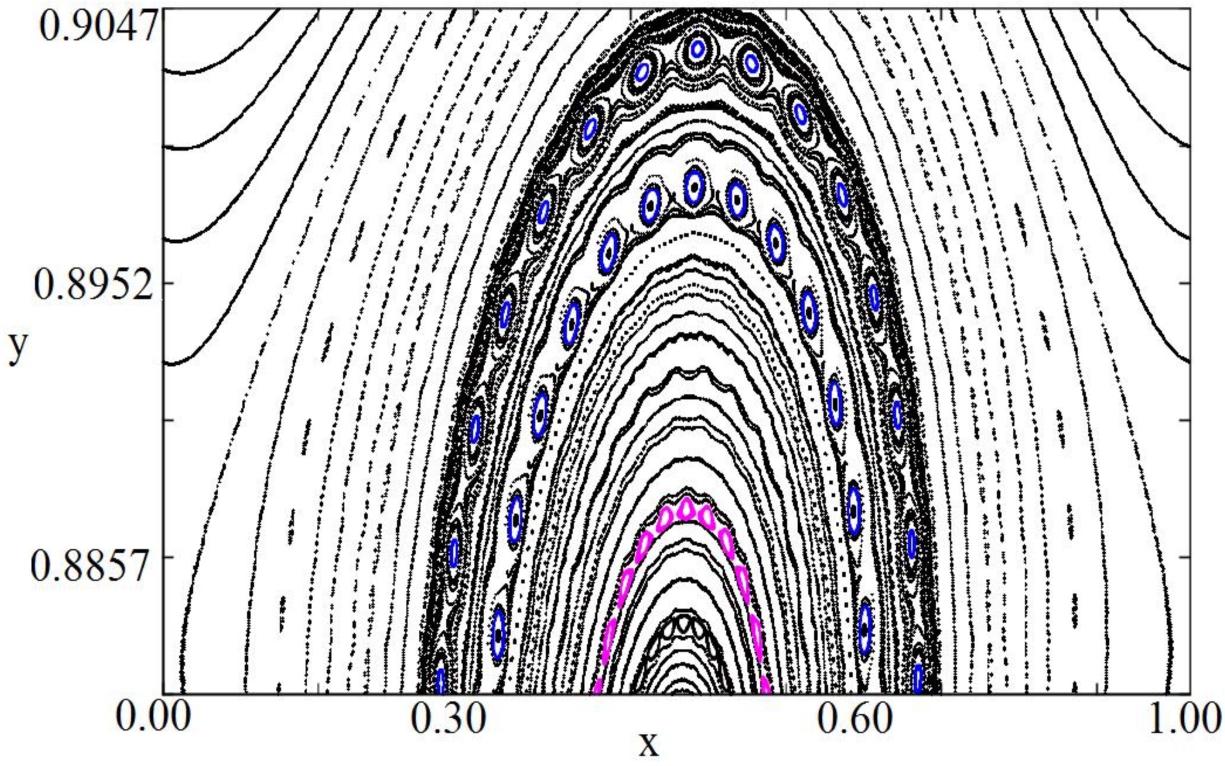
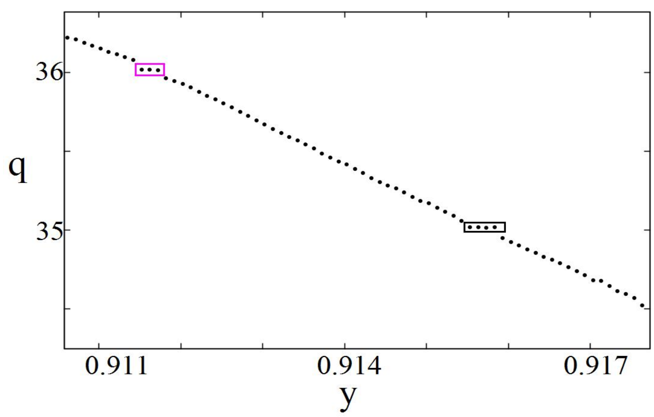
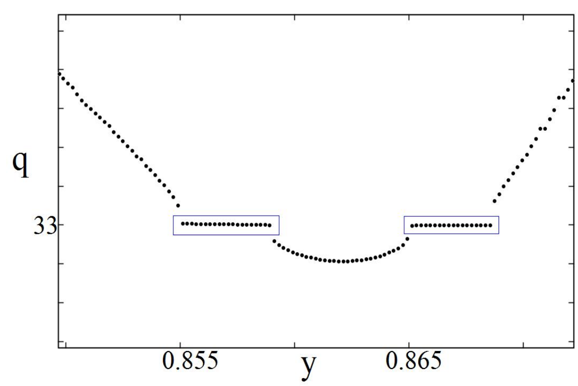


Figura 5.15: Ampliação da região em torno da linha de divergência para observarmos melhor as cadeias de ilhas.

Também fizemos uma ampliação do cálculo numérico do fator de segurança da figura 5.4:



(a)



(b)

Figura 5.16: Ampliações do cálculo numérico do fator de segurança.

Para a primeira cadeia de ilhas vermelhas, pudemos contar 33 ilhas. E no gráfico observamos a passagem correspondente a essas cadeias de ilhas, pois o número do fator de segurança fica constante na passagem por essa região. Para a outra cadeia, calculamos numericamente o fator de segurança e encontramos o número 20, mas não colocamos o gráfico aqui até então porque teríamos que fazer muitos zooms, e o tempo computacional para se fazer esse gráfico é relevante.

Ilustramos aqui que o fator de segurança atravessa várias cadeias de ilhas, pois passa por vários números racionais (aqui, por coincidência, não só racionais, mas também inteiros). Quando o valor do fator de segurança coincide com um número racional m/n, m corresponde ao número de ilhas da cadeia, e o denominador corresponde ao número de ilhas que a linha se desloca na direção poloidal a cada volta toroidal. Para as cadeias da figura 5.15, claramente temos muito mais do que 20 ilhas. Podemos ter 100 ilhas, por exemplo, e o número m/n está dando 20. O valor da fração corresponde exatamente ao valor do fator de segurança sobre a cadeia de ilhas.

Na figura 5.15, em azul destacamos as duas cadeias de ilhas gêmeas, com 33 ilhas cada, separadas por uma linha sem *shear*.

Primeiramente, queremos verificar se a cadeia em questão possui as mesmas características de movimentos oscilatórios. Para isso, isolamos uma determinada ilha da cadeia (figura 5.17)e calculamos a média da variação da posição angular de cada condição inicial (que vamos chamar de frequência) em função da distância ao centro da ilha, como mostra a figura 5.18:

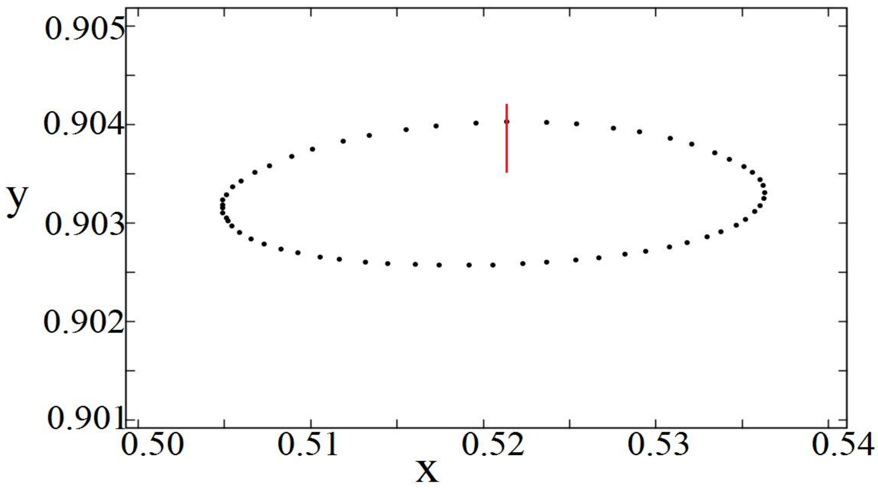


Figura 5.17: Linha mostrando como variamos as condições iniciais para calcular a frequência.

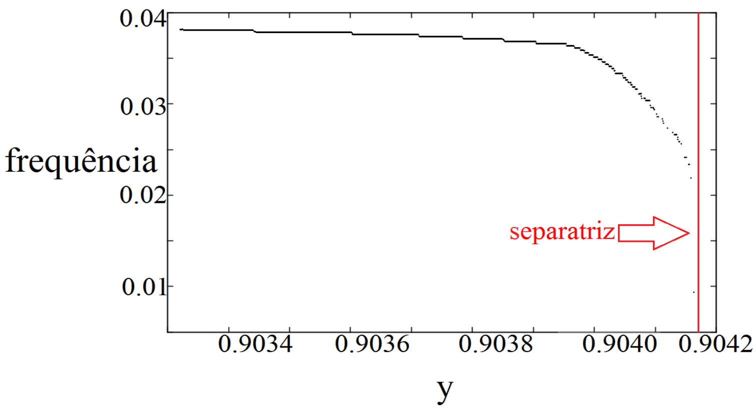


Figura 5.18: Frequência em função da distância ao centro da ilha.

Assim como em ilhas observadas no espaço de fase para movimentos oscilatórios de pêndulos, a frequência vai a zero quando nos aproximamos da separatriz.

Também podemos observar diversos patamares no gráfico, ou seja, regiões onde a variação angular permanece constante. Tal fato sugere que há diversas ilhas internas dentro da ilha isolada da figura 5.17. Para observar essas ilhas, fazemos um zoom em torno da ilha (figura 5.19).

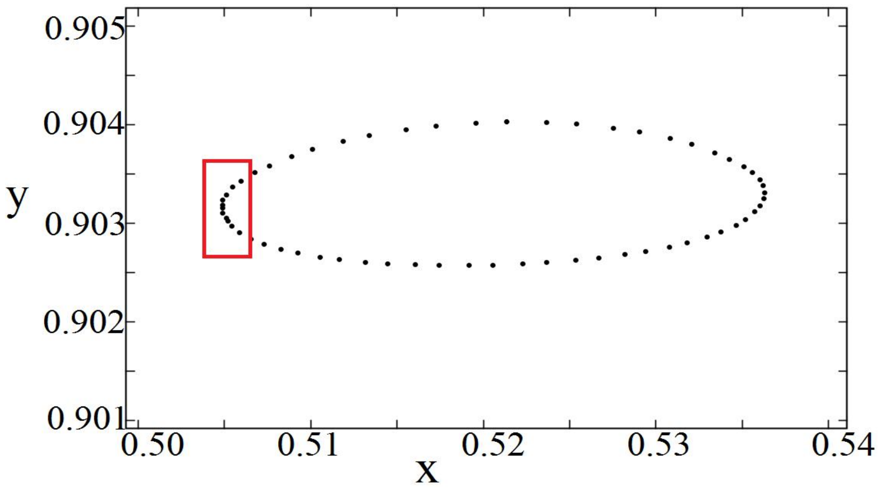


Figura 5.19: Região destacada que escolhemos para fazer um zoom da ilha.

Desse retângulo, temos a figura 5.20:

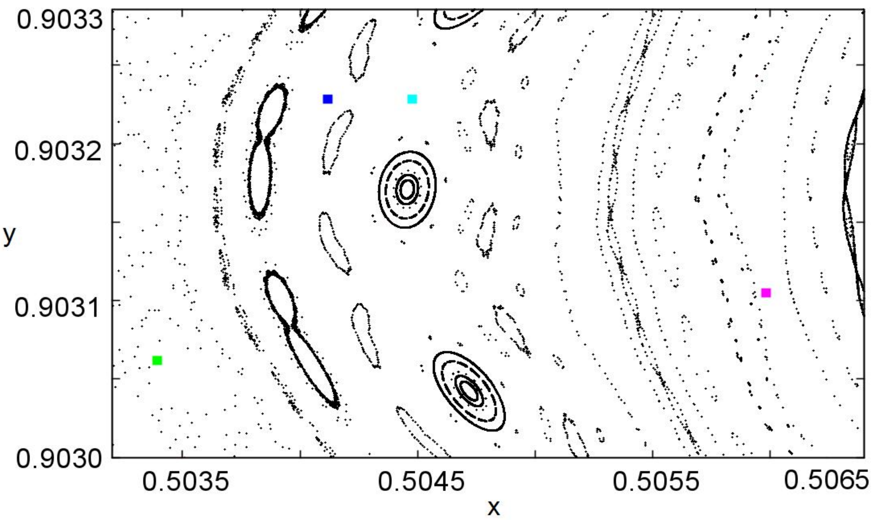
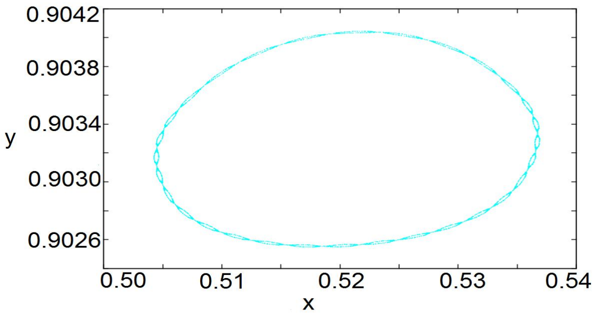
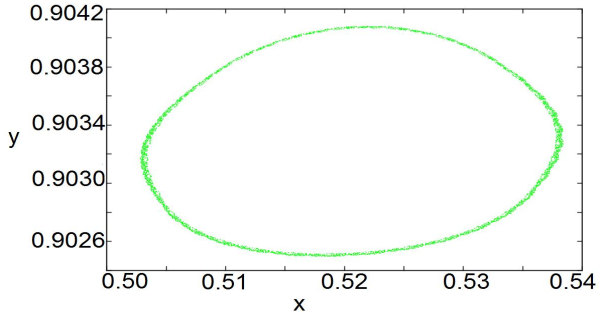


Figura 5.20: Seção de Poincaré na região retangular destacada na figura anterior. Os retângulos coloridos indicam as condições iniciais escolhidas para verificar a trajetória a partir delas.

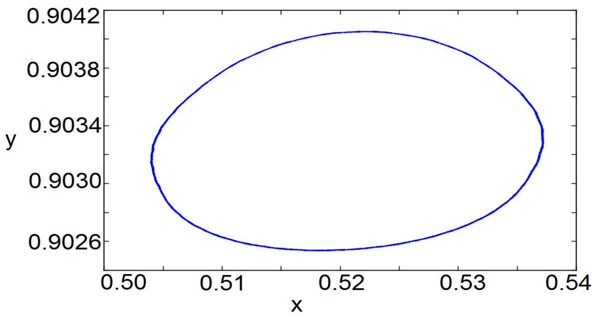
De acordo com a figura, comprovamos a existência de ilhas dentro da ilha pertencente à cadeia azul da figura 5.15. Selecionamos as condições iniciais destacadas na figura 5.20 para verificar o comportamento, e obtivemos o conjunto de figuras 5.21.



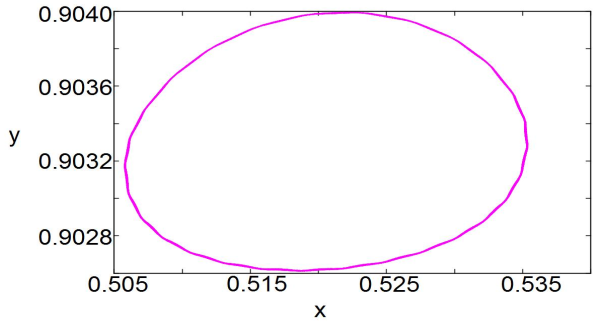
(a)



(b)



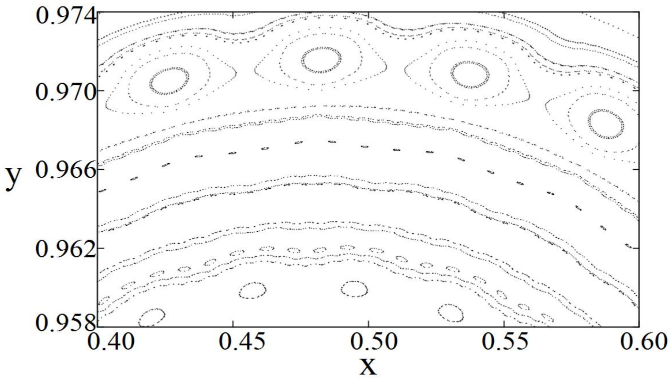
(c)



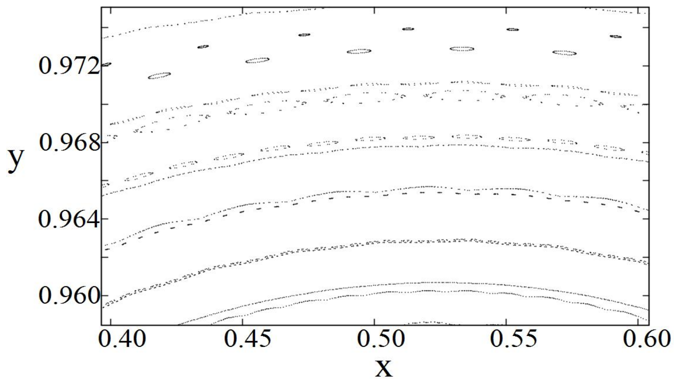
(d)

Figura 5.21: Comportamento de diferentes condições iniciais selecionadas da figura 5.20.

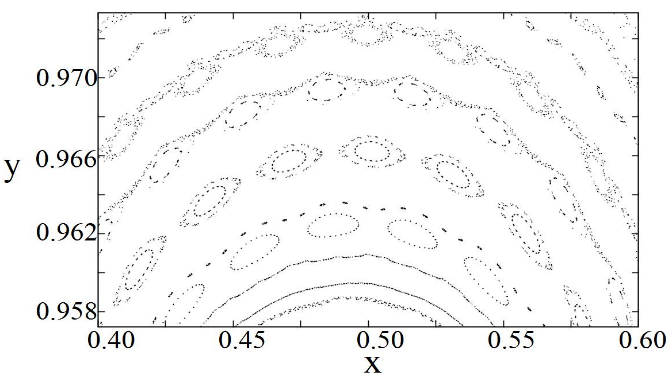
Os resultados que obtivemos podem sugerir que não há caos no mapeamento, ou que ele está bem localizado, que de fato é observado na figura 5.22. Nas figuras de a) até d) reproduzimos 30 condições iniciais iteradas 2000 vezes cada. Quando variamos o parâmetro a_1, podemos perceber a passagem de um caos localizado para o caos global quando reproduzimos as seções de Poincaré. Na figura e) temos a trajetória de uma condição inicial iterada 2000 vezes, para $a_1 = 0,50$. Embora não tenhamos muita liberdade quanto à variação de a_1, pois está relacionado à correção toroidal, temos um efeito de relevante importância relacionado a sistemas dinâmicos quando aumentamos, em módulo, o parâmetro.



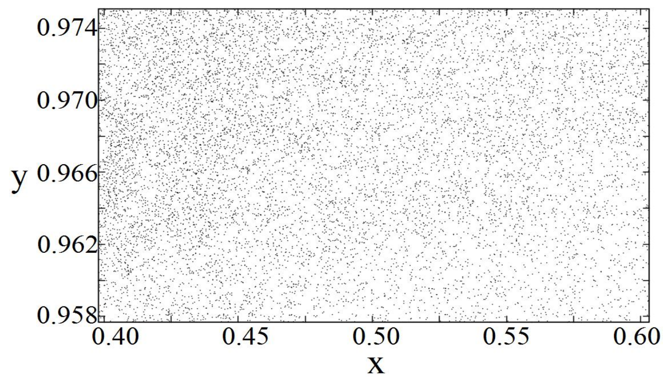
(a)



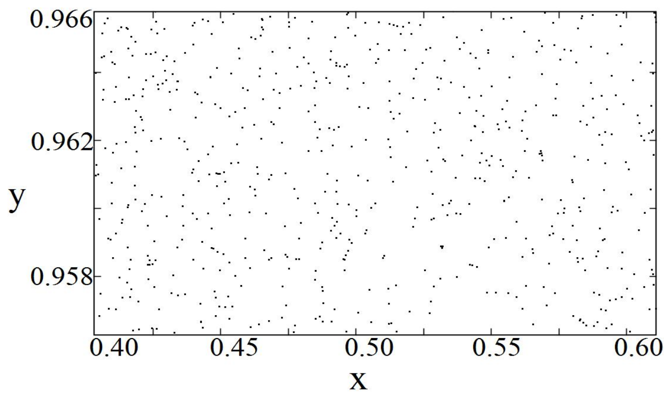
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 5.22: Seções de Poincaré para o mapa exato considerando a_1 valendo a)-0,04; b)-0,08; c)-0,20 e d)0,50. Na figura e) temos a reprodução de uma única condição inicial para $a_1 = 0,50$. Temos uma passagem do caos local para o caos global conforme aumentamos, em módulo, o parâmetro.

5.4 Tokamap

Os resultados mencionados neste capítulo foram comprovados, para outro mapa simplético, por Adriane Schelin e os resultados se encontram no artigo recentemente publicado [52].

Foi aplicado um mapeamento conhecido na literatura como tokamap, que foi introduzido no trabalho para também descrever tokamaks de grande razão de aspecto para analisar as dinâmicas das linhas de campo no plasma confinado, com o perfil do fator de segurança considerado neste capítulo.

O mapeamento bidimensional considerado nesta tese é mais conveniente para se comparar com os resultados experimentais, porque ele consegue introduzir os parâmetros correspondentes aos perfis experimentais, como a densidade de corrente no plasma. Embora os parâmetros no tokamap não correspondam aos valores experimentais do tokamak, esse mapa é apropriado para investigar efeitos dinâmicos gerais em tokamaks, como caos e bifurcações.

O tokamap é um mapa simplético proposto por Balescu et al. para modelar linhas de campo magnéticos compatíveis com uma geometria toroidal [53]. A evolução das linhas de campo magnético é descrita relacionando o ponto de intersecção (da linha de campo com a seção poloidal constante) com a próxima iteração depois de uma volta toroidal. Há um parâmetro perturbativo no tokamak, denominado de parâmetro estocástico. No tokamap original, se consideramos um valor muito pequeno para esse parâmetro, observamos apenas linhas invariantes nas seções de Poincaré. No entanto, ao se considerar o perfil do fator de segurança considerado neste capítulo, mesmo com esse parâmetro pequeno, foram observadas curvas sem *shear* com muitas cadeias de ilhas pequenas em torno delas e caos localizado, mesmos efeitos observados para o mapeamento bidimensional.

Dessa forma foram comprovados os resultados obtidos no mapa que consideramos nesta tese foram também obtidos no tokamap [52].

5.5 Adição da perturbação

Quando incluímos a perturbação introduzida pelo limitador ergódico, nas figuras 5.23(a), (b), (c) e (d), podemos observar que o aparecimento das cadeias de ilhas é um efeito robusto, que não sofre alteração mesmo com o aumento da perturbação, pois ela tem a sua região de atuação concentrada no centro do plasma, e o limitador atua na borda do plasma.

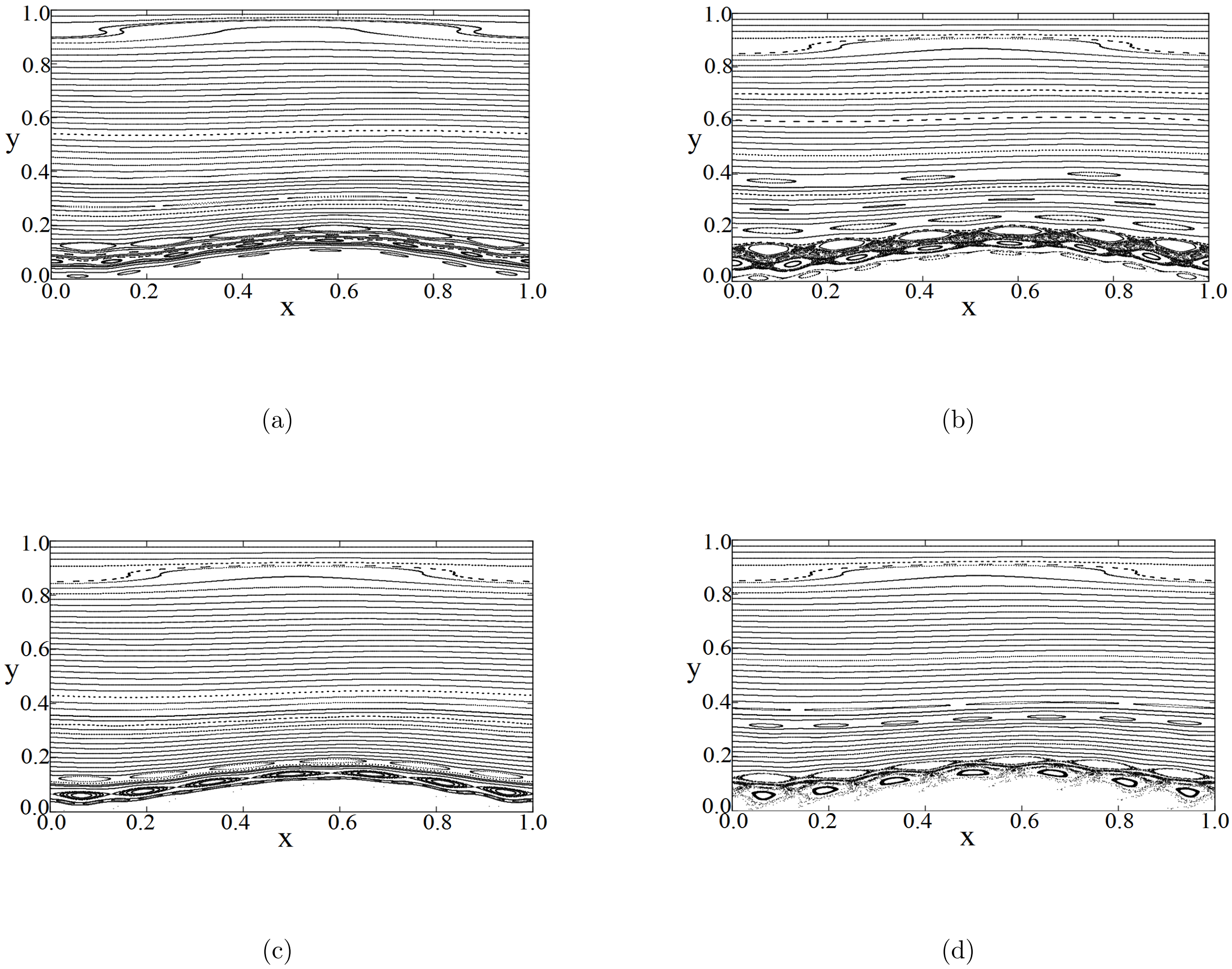


Figura 5.23: Seções de Poincaré para o mapa bidimensional conservativo com correções toroidais para (a) $m = 6$ e $\epsilon = 0,01$, (b) $m = 7$ e $\epsilon = 0,01$, (c) $m = 6$ e $\epsilon = 0,03$ e (d) $m = 7$ e $\epsilon = 0,03$.

Deste capítulo correspondente, concluímos que a introdução do perfil do fator de segurança corresponde à densidade de corrente reversa provocou o surgimento de diversas cadeias de ilhas e caos localizado, mesmo no equilíbrio (sem a adição introduzida pelo limitador ergódico magnético). Essas características, para os perfis considerados no capítulo anterior, não eram observadas no equilíbrio. Variando parâmetros relacionados à expressão da densidade de corrente, podemos controlar o aparecimento e o tamanho das cadeias de ilhas. A variação da correção toroidal produz o mesmo efeito, além de provocar a passagem de um caos localizado para o caos global.

Essas características, juntamente com a presença de linhas sem *shear*, podem influenciar no transporte das linhas de campo magnético no plasma, melhorando seu confinamento.

Capítulo 6

Mapas locais

Neste capítulo, para investigar mais detalhadamente se no mapeamento bidimensional no equilíbrio ocorre caos, vamos obter mapas locais em torno da curva sem *shear* e em torno da curva de divergência. Vamos calcular pontos fixos e auto-valores do mapeamento de forma analítica e reproduziremos as seções de Poincaré para investigar com mais detalhes as características das ilhas e reforçar a existência de caos localizado no sistema.

6.1 Mapa local em torno da curva sem *shear*

Temos as equações para o mapeamento no equilíbrio:

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{1 - a_1 sen\theta_n} \tag{6.1}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{2\pi}{q_0(r_{n+1})} + a_1 cos\theta_n \tag{6.2}$$

Vamos fazer a seguinte aproximação: como $|a_1| << 1$. Podemos reescrever a segunda equação como:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(r_{n+1}) \tag{6.3}$$

sendo $\alpha(r_{n+1}) \equiv \frac{1}{q_0(r_{n+1})}$

Vamos expandir $\alpha(r)$ em torno do ponto r^* localizado na curva sem *shear*, onde

$$\left.\frac{d\alpha(r)}{dr}\right|_{r=r^*} = \left.\frac{d\alpha(r)}{dq_0}\frac{dq_0}{dr}\right|_{r=r^*} = 0 \tag{6.4}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\left[\alpha(r^*) + \left.\frac{d\alpha(r)}{dr}\right|_{r=r^*}(r_{n+1}-r^*) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\alpha(r)}{dr^2}\right|_{r=r^*}(r_{n+1}-r^*)^2\right] \tag{6.5}$$

Lembrando que o segundo termo da expansão é zero, podemos escrever:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\left[\alpha(r^*) + \frac{\alpha^{''}(r^*)}{2}(r_{n+1}-r^*)^2\right] \tag{6.6}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(r^*) + \pi\alpha^{''}(r^*)(r_{n+1}-r^*)^2 \tag{6.7}$$

Para a primeira equação, podemos expandir:

$$\frac{1}{1 - a_1 sen\theta_n} = 1 + a_1 sen\theta_n \tag{6.8}$$

pois $(1-x)^{-1} = 1 + x$, para $x << 1$.

Então, teremos:

$$r_{n+1} = r_n(1 + a_1 sen\theta_n) = r_n + r_n a_1 sen\theta_n \tag{6.9}$$

Temos $r_{n+1} \cong r^*$, então:

$$r_{n+1} = r_n + r^* a_1 sen\theta_n \tag{6.10}$$

6.1.1 Pontos fixos e Auto-valores

Nosso mapa local é dado por:

$$r_{n+1} = r_n + r^* a_1 sen\theta_n \tag{6.11}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(r^*) + \pi\alpha^{''}(r^*)(r_{n+1} - r^*)^2 \tag{6.12}$$

Para calcular os pontos fixos, fazemos $r_{n+1} = r_n$ e $\theta_{n+1} = \theta_n$, e obtemos:

$$0 = r^* a_1 sen\theta_n \tag{6.13}$$

$$\theta_f = (0, \pi) \tag{6.14}$$

$$0 = 2\pi\alpha(r^*) + \pi\alpha^{''}(r^*)(r_{n+1} - r^*)^2 \tag{6.15}$$

$$r_f = \pm\sqrt{\frac{-2\alpha(r^*)}{\alpha^{''}(r^*)}} + r^* \tag{6.16}$$

A matriz jacobiana é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{n+1}}{\partial r_n} & \frac{\partial r_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial r_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{pmatrix}$$

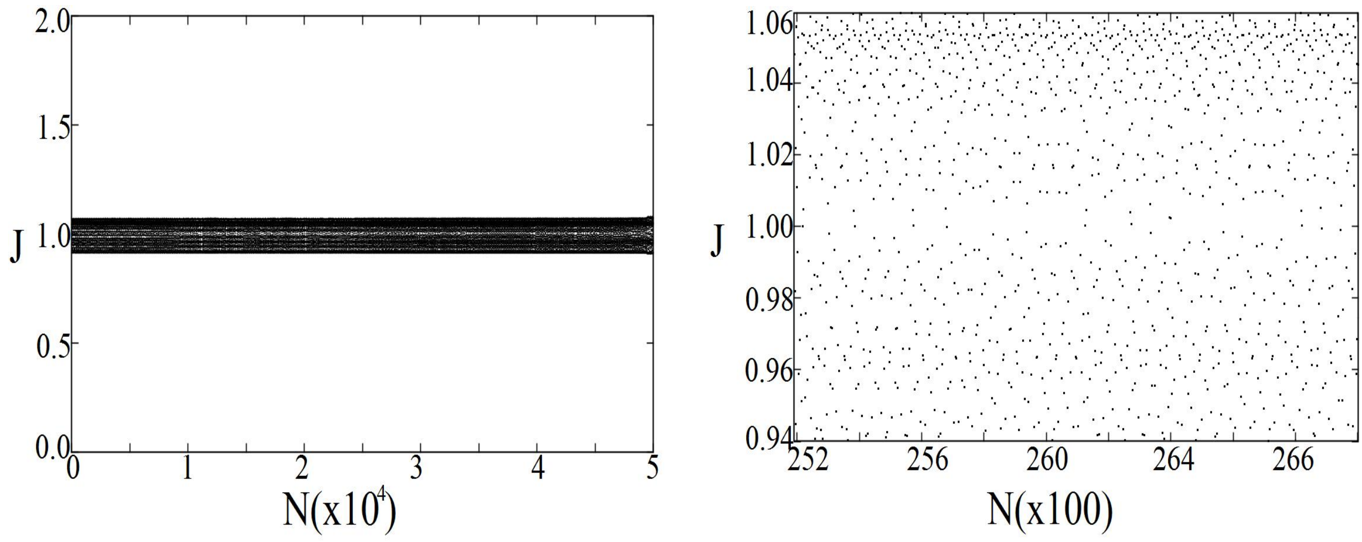
Para o nosso mapa, temos:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & r^* a_1 cos\theta_n \\ 2\pi\alpha^{''}(r^*)(r_n - r^* + r^* a_1 sen\theta_n) & 1 + 2\pi\alpha^{''}(r^*)(r_n - r^* + r^* a_1 sen\theta_n)(r^* a_1 cos\theta_n) \end{pmatrix}$$

Se calculamos o jacobiano, teremos:

$$\begin{aligned} 1((1 + 2\pi\alpha^{''}(r^*)(r_n - r^* + r^* a_1 sen\theta_n)(r^* a_1 cos\theta_n)) \\ -2\pi\alpha^{''}(r^*)(r_n - r^* + r^* a_1 sen\theta_n)(r^* a_1 cos\theta_n) \\ = 1 \end{aligned}$$

Portanto o mapa local é simplético. Para o mapa exato, apenas conseguimos calcular o jacobiano numericamente. Selecionamos uma condição inicial e iteramos 50000 vezes para verificar como o cálculo numérico do jacobiano se comporta (6.1, e obtemos que o valor oscila em torno de 1. Para verificar que a oscilação é aleatória, colocamos um *zoom*.



(a) (b)

Figura 6.1: Cálculo numérico do jacobiano considerando a) 50000 iterações para uma dada condição inicial; também fizemos um b) zoom para verificar que a oscilação é aleatória.

Colocamos em destaque na figura 6.2 a região próxima à linha sem *shear*, em torno da qual fizemos a expansão. Reproduzimos na figura 6.3a) a seção de Poincaré do mapa exato mostrando a região onde estamos fazendo a expansão, destacando a posição das cadeias e da linha sem *shear*. Fazendo a seção de Poincaré do mapa local temos a figura 6.3b).

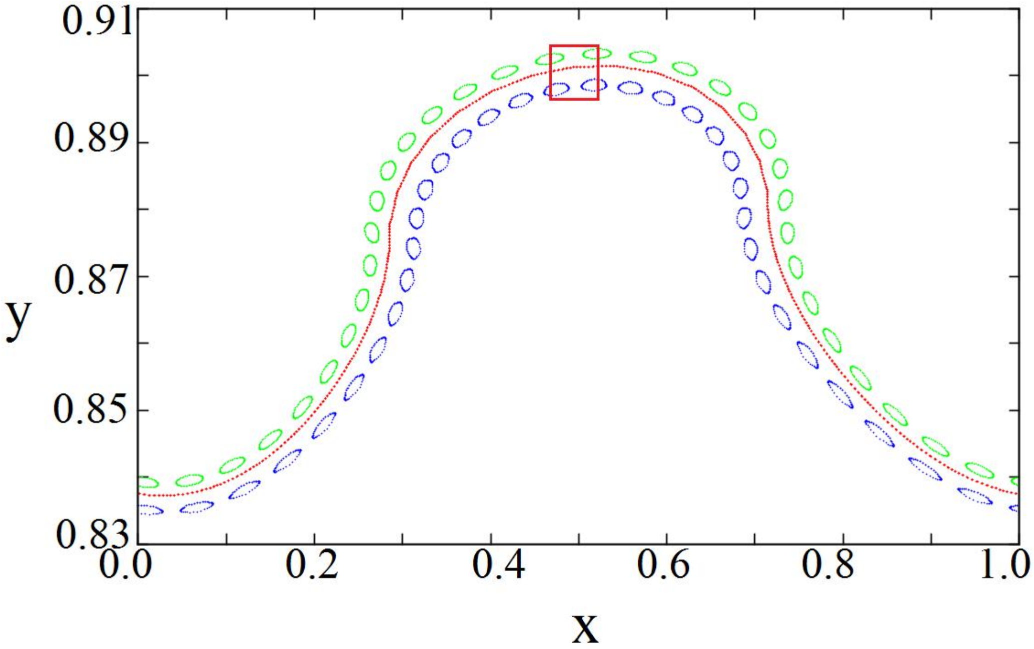


Figura 6.2: Retângulo destacando a região onde fizemos a expansão em torno da linha sem *shear* para obter o mapa local.

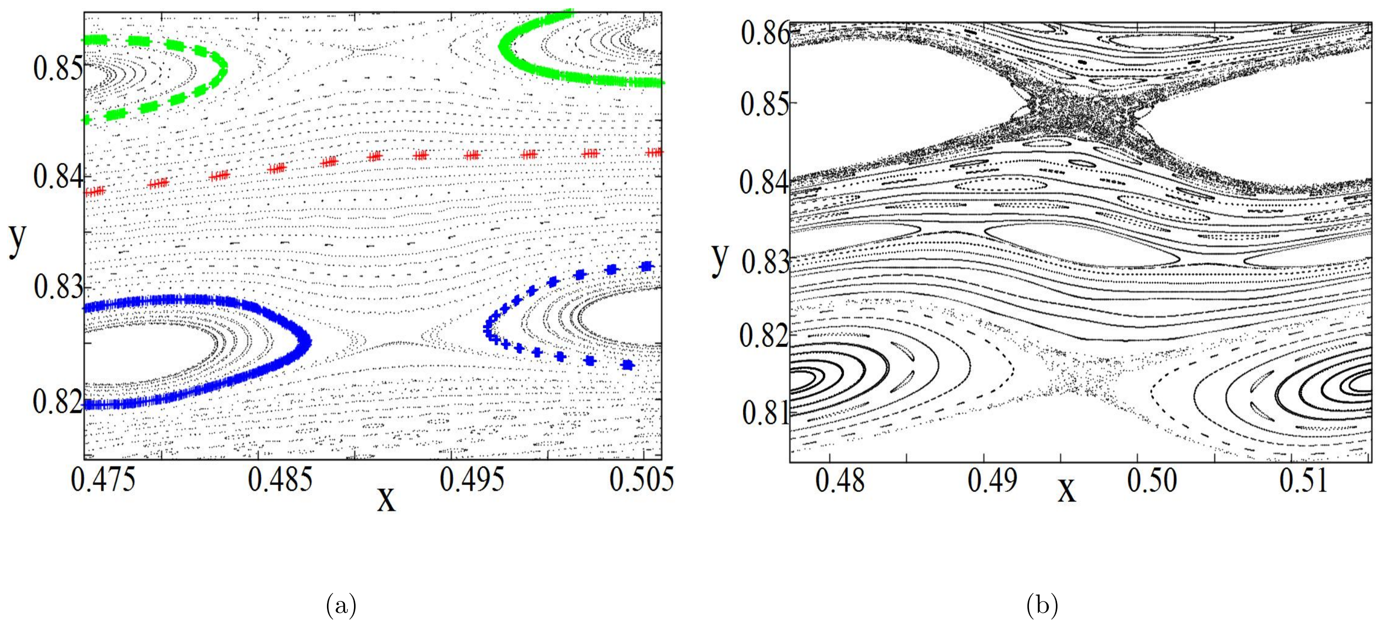


Figura 6.3: Seções de Poincaré para a)o mapa exato e b)o mapa aproximado.

Podemos observar nas figuras 6.3a) e b), que temos a ocorrência de um caos localizado, que se manifesta de modo mais acentuado quando fazemos a seção de Poincaré para a expansão. Agora passamos ao cálculo dos auto-valores:

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$$

Vamos calcular seus auto-valores, fazendo $det[J - I\lambda] = 0$

$$(J_{11} - \lambda)(J_{22} - \lambda) - J_{12}J_{21} = 0 \tag{6.17}$$

$$J_{11}J_{22} - J_{11}\lambda - J_{22}\lambda + \lambda^2 - J_{12}J_{21} = 0 \tag{6.18}$$

$$\lambda^2 - \lambda(J_{11} + J_{22}) + J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = 0 \tag{6.19}$$

Como $J_{11} + J_{22} = TrJ$ e $J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = detJ = 1$, podemos escrever:

$$\lambda^2 - \lambda(TrJ) + 1 = 0 \tag{6.20}$$

Portanto:

$$\lambda_{1,2} = \frac{TrJ \pm \sqrt{(TrJ)^2 - 4}}{2} \tag{6.21}$$

Se $|TrJ| > 2$, teremos um ponto hiperbólico; se $|TrJ| < 2$, teremos um ponto elíptico. Vamos agora escrever a matriz jacobiana nos pontos fixos:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \pm r^* a_1 \\ 2\pi\alpha''(r^*)\sqrt{\frac{2\alpha(r^*)}{\alpha''(r^*)}} & 1 \pm 2\pi\alpha''(r^*)r^*a_1\sqrt{\frac{2\alpha(r^*)}{\alpha''(r^*)}} \end{pmatrix}$$

Para $\theta_f = \pi$, temos $|TrJ| = 2,17$, portanto o ponto é hiperbólico. Para esse caso, os auto valores são $\lambda_1 = 0,18$ e $\lambda_2 = 2,0$. Colocamos na figura 6.4 a localização desse ponto (0,5, 0,88) com a seção de Poincaré para o mapa local. Para $\theta_f = 0, 2\pi$, temos $|TrJ| = 1,82$, portanto o ponto é elíptico.

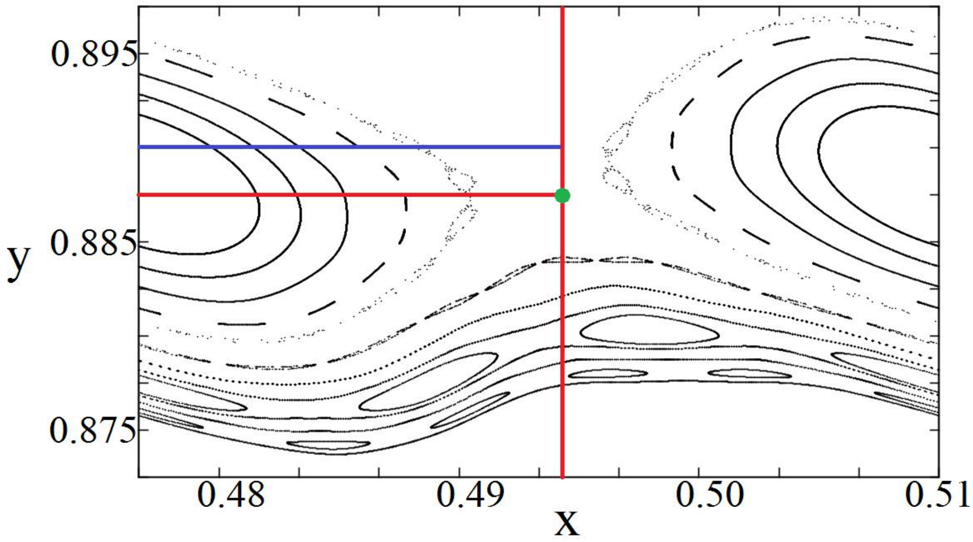
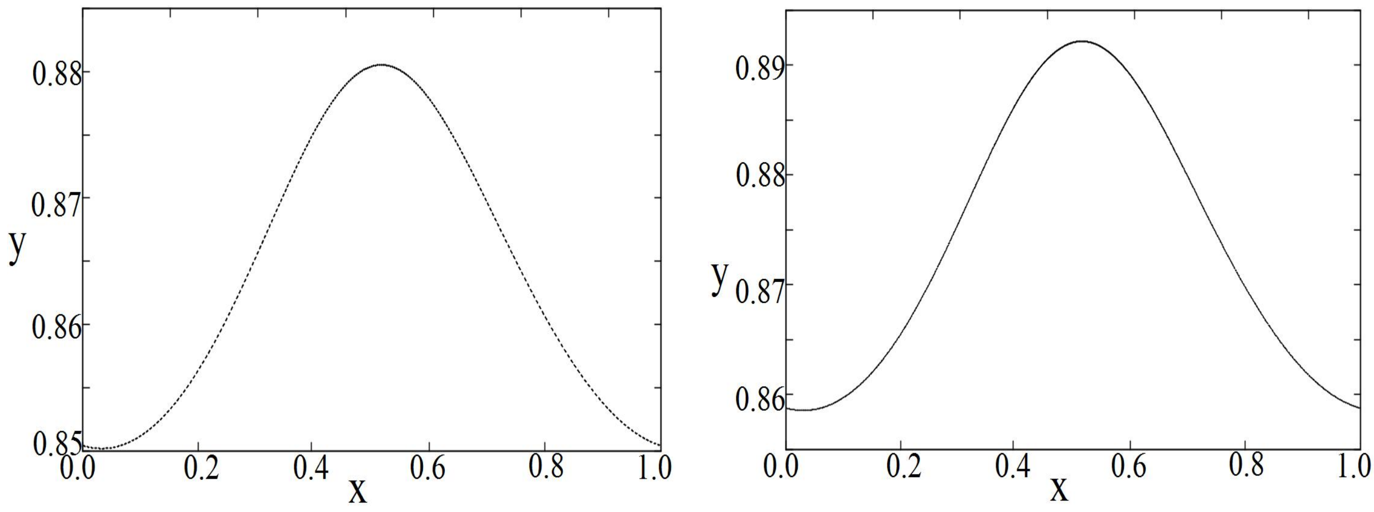


Figura 6.4: Seção de Poincaré para o mapeamento local, com a indicação do ponto fixo hiperbólico. As linhas indicam como variamos os valores nos eixos x e y para o cálculo do número de rotação (linhas vermelhas) e frequência (linha azul, feitos mais adiante.

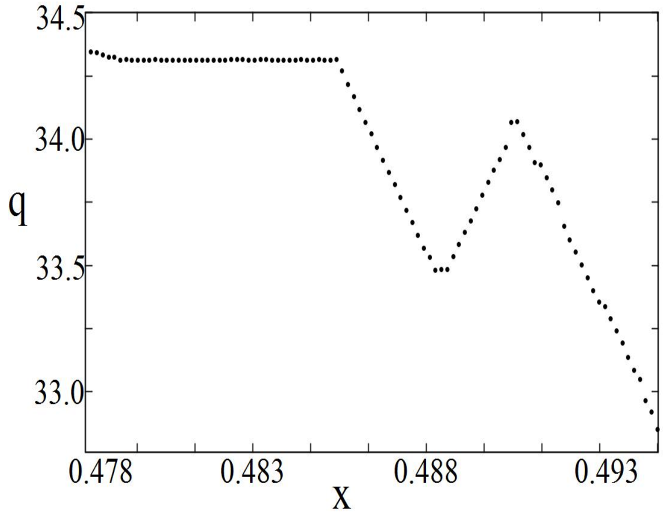
Selecionamos algumas condições iniciais perto do ponto hiperbólico para verificar o comportamento:



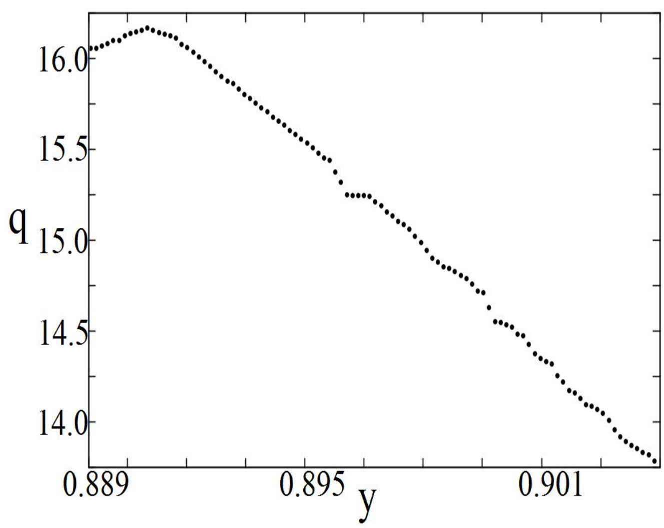
(a) (b)

Figura 6.5: Comportamento de duas condições iniciais perto do ponto hiperbólico da figura 6.4.

Fizemos dois gráficos do cálculo numérico do fator de segurança na figura 6.6. As linhas vermelhas destacadas na figura 6.4) indicam como variamos os valores nos eixos x e y. Observamos que, para a grande maioria das condições iniciais, o cálculo numérico converge, reforçando a condição de que o caos é bastante localizado, temos poucas regiões onde os valores não convergem. Além disso, podemos observar os patamares correspondentes às passagens pelas ilhas.



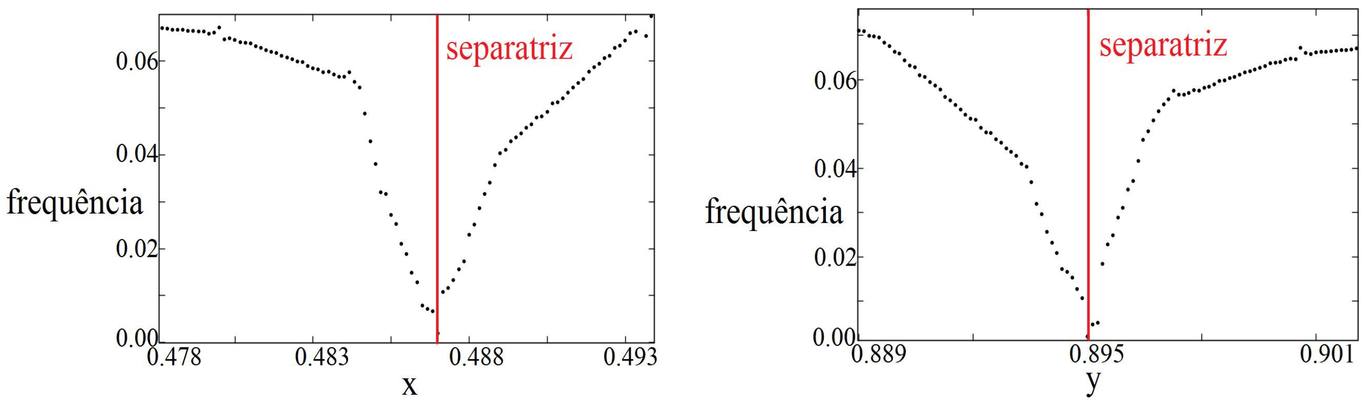
(a)



(b)

Figura 6.6: Gráfico do cálculo numérico do fator de segurança para o mapa local, variando as condições inicias ao longo do a) eixo x e do b) eixo y. Temos os patamares correspondentes às passagens pelas ilhas, e observamos que para todas as condições iniciais, o cálculo converge.

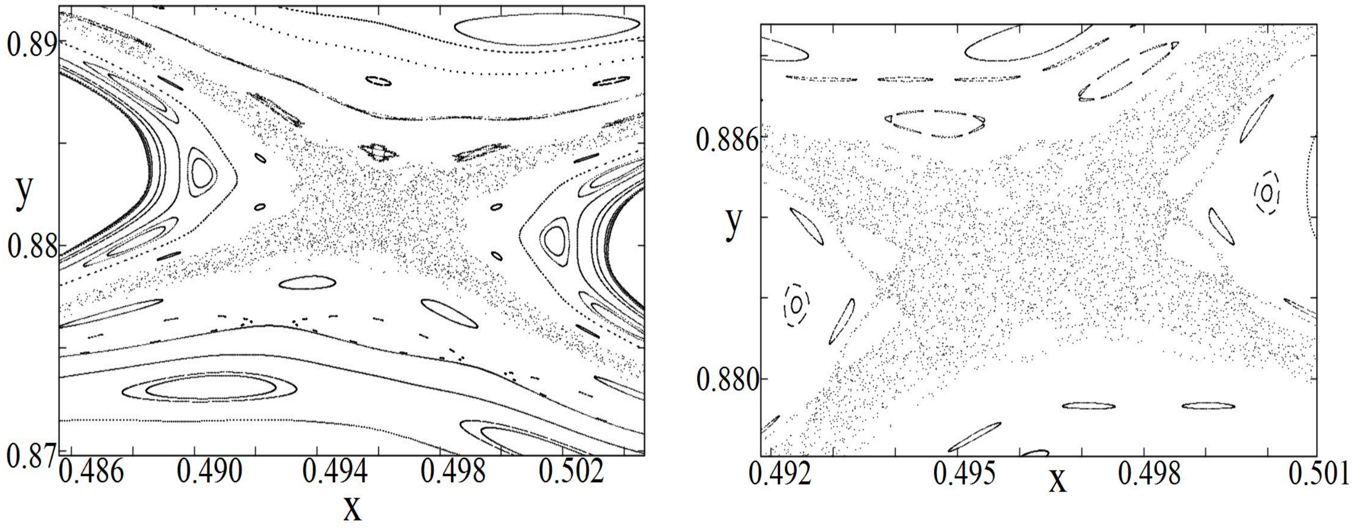
Como anteriormente, vamos fazer o gráfico da frequência em função da distância ao centro da ilha na figura 6.7. A linha azul horizontal e a linha vermelha vertical (a mesma utilizada para o cálculo numérico do fator de segurança) na figura 6.4 indicam como variamos os valores nos eixos x e y. Também observamos que os valores convergem para zero quando nos aproximamos da separatriz. Assim podemos inferir que as características das ilhas foram preservadas quando fizemos a expansão.



(a) (b)

Figura 6.7: Gráfico da frequencia em função da distância ao centro da ilha. Podemos observar a região onde ocorre a separatriz, indicando que as ilhas possuem a mesma natureza daquelas pertencentes ao mapa exato.

Podemos notar que as ilhas da figura 6.4 mais próximas ao ponto hiperbólico não estão muito bem definidas. Podemos fazer um *zoom* em torno do ponto hiperbólico para melhorá-la e continuar investigando se de fato não observamos caos. Na figura 6.8 colocamos duas ampliações para mostrar que, ao fazer os *zooms*, a precisão fica melhor, e novas ilhas vão surgindo.

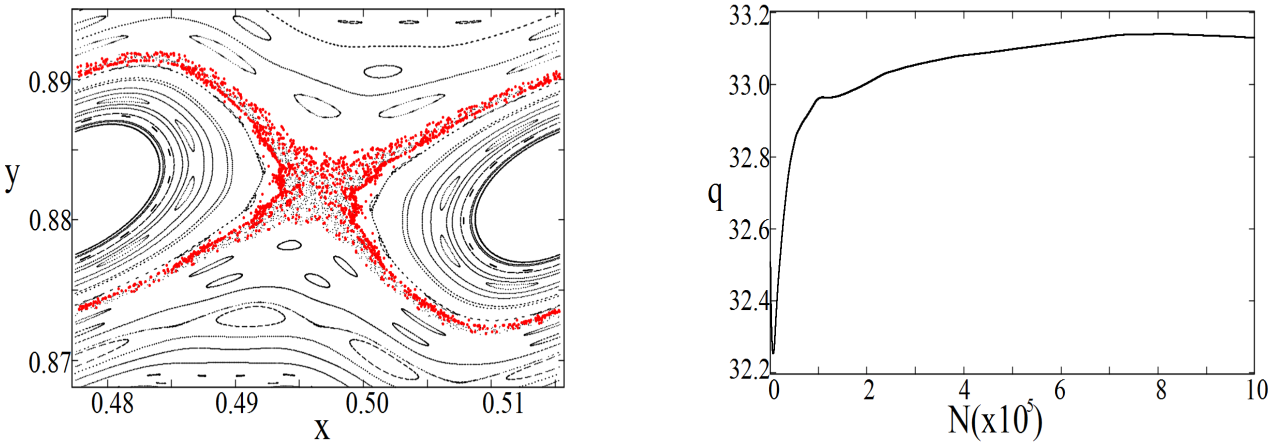


(a) (b)

Figura 6.8: Ampliações da região em volta do ponto hiperbólico para o mapa local.

E podemos observar um caos localizado, como no caso do mapa exato.

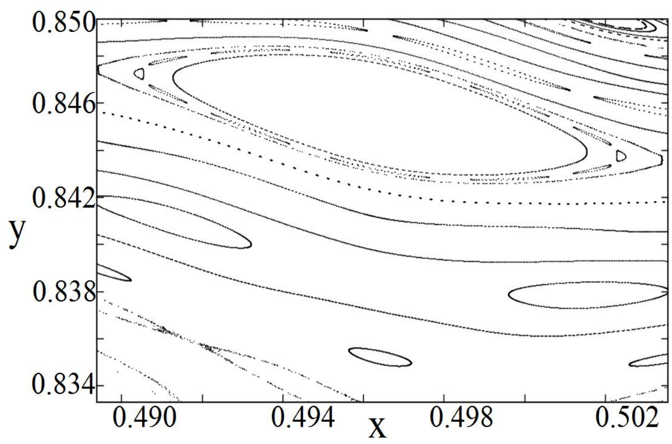
Se escolhemos uma condição inicial tão próxima do ponto hiperbólico quando pudermos, e iteramos 2000 vezes, observamos o comportamento apresentado na figura 6.9. A trajetória é caótica, mas calculando numericamente o fator de segurança da trajetória, vemos que ele converge para 1000000 de iterações, indicando que o caos realmente é localizado. Além disso, o número converge para 33, que é o número de ilhas pertence à cadeia principal.

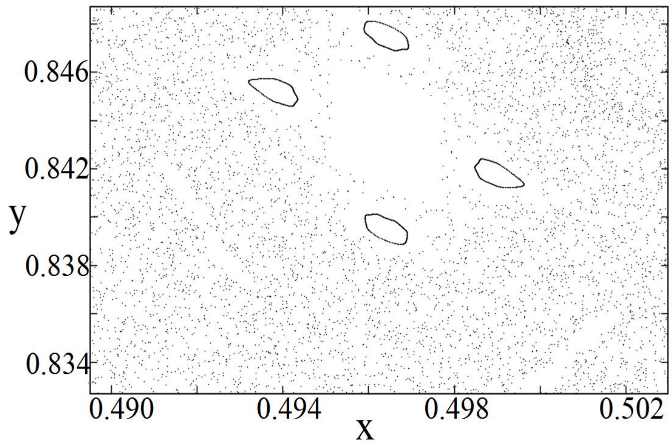


(a) (b)

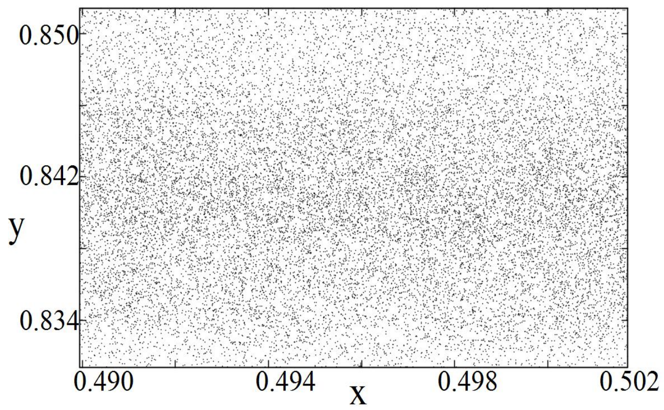
Figura 6.9: a)Trajetória de uma condição inicial no ponto hiperbólico e b) seu respectivo cálculo numérico do fator de segurança em função do número de iterações, podendo concluir que o número converge.

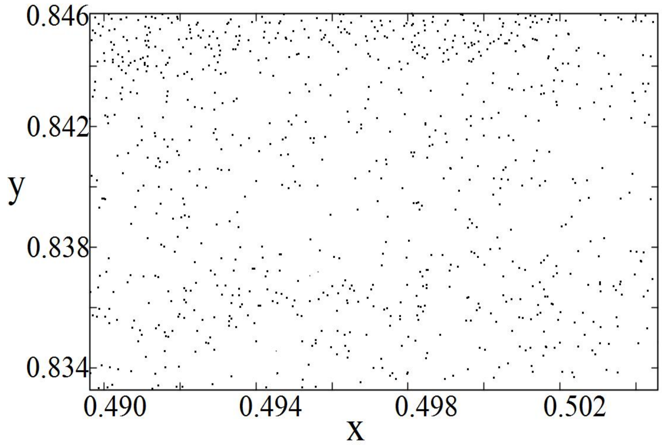
Quando variamos o parâmetro a_1, podemos perceber a passagem de um caos localizado para o caos global quando reproduzimos as seções de Poincaré, na figura 6.10, como fizemos para o mapa exato, com 30 condições iniciais iteradas 2000 vezes, exceto para a figura d), onde temos uma única condição inicial iterada 2000 vezes. A diferença que percebemos é uma maior sensibilidade à variação, ou seja, para o mapa local uma menor variação do parâmetro já estabelece o caos global.





(a) (b)





(c) (d)

Figura 6.10: Seções de Poincaré para o mapa local considerando o parâmetro a_1 valendo a)-0,04; b) -0,08 e c)0,16. Na figura d) temos a trajetória de uma condição inicial para $a_1 = 0,16$.

6.2 Mapa local em torno da curva de divergência

Vamos estudar a região próxima à curva de divergência.

Fazemos a seção de Poincaré na figura 6.11, onde podemos observar várias ilhas muito pequenas:

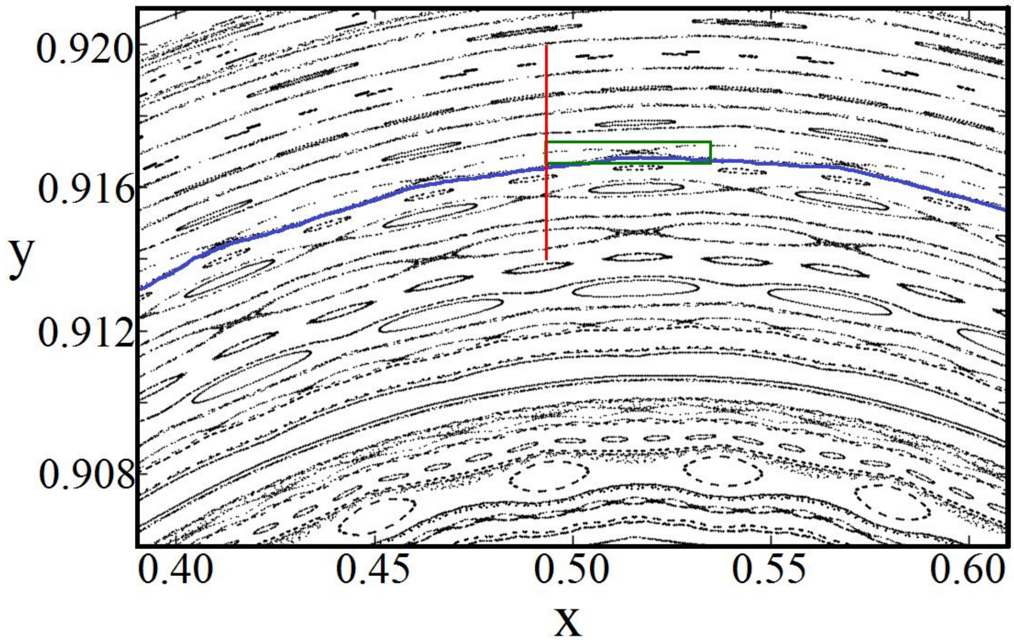


Figura 6.11: Seção de Poincaré do mapeamento bidimensional, ampliada em torno da curva de divergência, representada em azul. O retângulo verde indica a região onde faremos a expansão local. A linha vermelha indica a região na qual faremos o cálculo numérico do fator de segurança, mais adiante.

Como fizemos na região em torno da linha sem *shear*, vamos expandir o nosso mapa para a região próxima à curva de divergência. Na figura 6.11, indicamos no retângulo verde a região onde será feita a expansão. As contas são muito similares às feitas no caso anterior. Temos as equações para o mapeamento no equilíbrio:

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{1 - a_1 sen\theta_n} \tag{6.22}$$

$$\theta_{n+1} = \theta n + \frac{2\pi}{q_0(r_{n+1})} + a_1 cos\theta_n \tag{6.23}$$

Vamos fazer a seguinte aproximação: como $|a_1| << 1$. Podemos reescrever a segunda equação como:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(r_{n+1}) \tag{6.24}$$

sendo $\alpha(r_{n+1}) \equiv \frac{1}{q_0(r_{n+1})}$

Vamos expandir $\alpha(r)$ em torno do ponto r^* localizado na curva de divergência.

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi \left[\alpha(r^*) + \left. \frac{d\alpha(r)}{dr} \right|_{r=r^*} (r_{n+1} - r^*) \right] \tag{6.25}$$

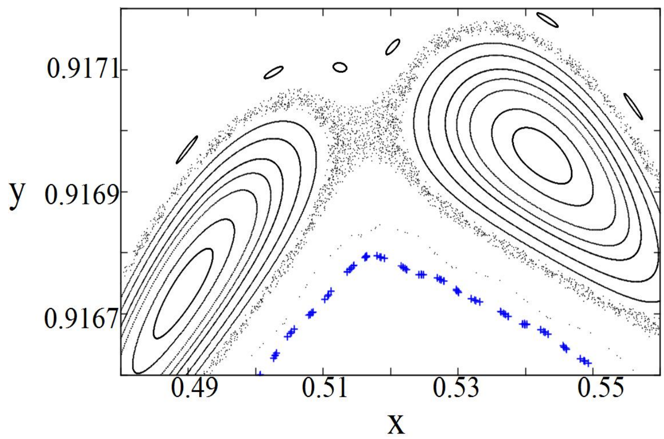
Podemos escrever:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi[(\alpha(r^*) + \alpha^{'}(r^*)](r_{n+1} - r^*) \tag{6.26}$$

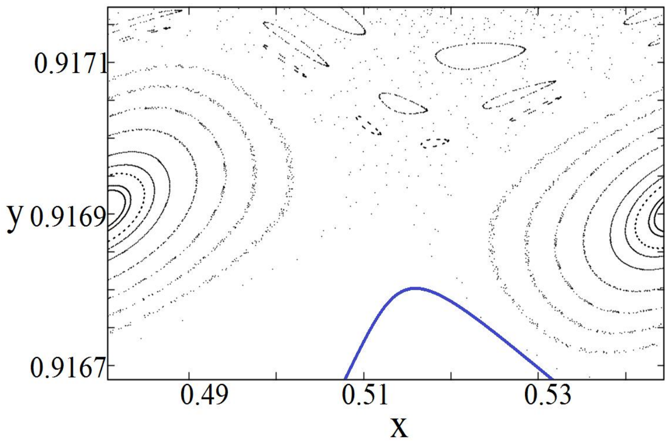
Para a primeira equação, podemos fazer a mesma expansão que fizemos anteriormente, e teremos:

$$r_{n+1} = r_n + r^* a_1 sen\theta_n \tag{6.27}$$

Na figura 6.12 colocamos as seções de Poincaré da região do mapa exato indicada pelo retângulo na figura 6.11 e do mapeamento local. As linhas azuis indicam a curva de divergência.



(a)

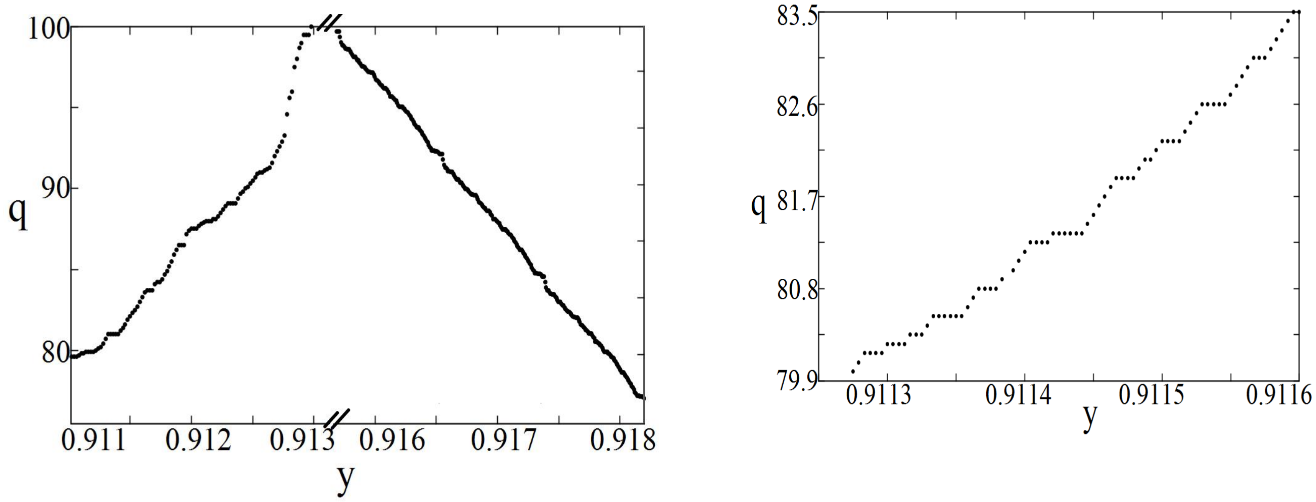


(b)

Figura 6.12: Seções de Poincaré do a) mapa exato, mostrando a região indicada pelo retângulo verde na figura 6.11, e do b) mapa local.

6.2.1 Analogia com o mapa do círculo

Nesta seção, vamos interpretar porque aparecem tantas ilhas no nosso mapa. Vamos fazer o gráfico numérico do fator de segurança (figura 6.13a) na região indicada na figura 6.11(ao longo da linha vermelha). Podemos observar diversos patamares que virão a formar a escada do diabo.



(a) (b)

Figura 6.13: a)Gráfico do cálculo numérico do fator de segurança ao longo da linha verde na seção de Poincaré (figura 6.11) mostrando diversos patamares. Há uma descontinuidade na escala na região onde a linha cruza a curva de divergência, já que o cálculo numérico também diverge. Se fizermos um b)*zoom*, percebemos mais patamares que formam a *escada do diabo*.

Para interpretar essa característica, vamos fazer uma analogia com um mapa muito conhecido na literatura: o mapa do círculo, um mapa bom para estudar atratores e acoplamento entre modos. Para esse mapa, temos a equação:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} sen(2\pi\theta_n) \tag{6.28}$$

Nesse mapa, K é um parâmetro de controle. Apesar desse mapa não ser conservativo, podemos fazer uma correspondência com o nosso mapeamento no equilíbrio. Vamos recuperar a equação

4.45:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{2\pi}{q_0(r_{n+1})} + a_1 cos\theta_n \tag{6.29}$$

Próximo à divergência, temos que $q(r)$ diverge, e portanto o segundo termo da equação é pequeno, correspondendo ao termo Ω no mapa do círculo, e o parâmetro a_1 corresponde ao termo $\frac{K}{2\pi}$.

Para variações de Ω e K, podemos fazer o gráfico que segue:

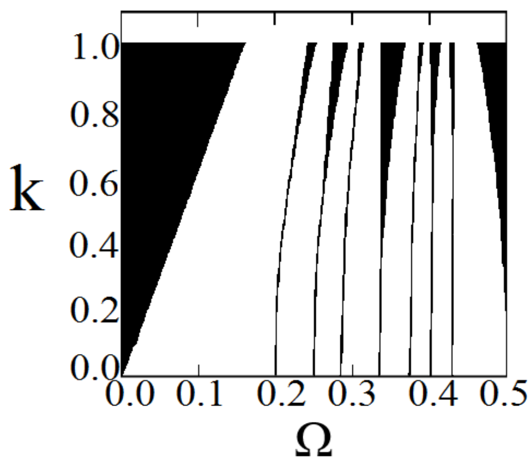


Figura 6.14: Mapa do círculo com a variação dos parâmetros Ω e K.

Nesse mapa, podemos observar o que é conhecido na literatura como línguas de Arnold[54, 49], na região preta o número de rotação é racional e as órbitas são periódicas; fora dela o número não é racional e as órbitas são quase-periódicas. Este comportamento depende da variação dos parâmetros. Se fixamos um valor de K também podemos fazer um gráfico para obter diversos patamares correspondentes às passagens por órbitas periódicas, como obtivemos no nosso mapeamento, na figura 6.13b).

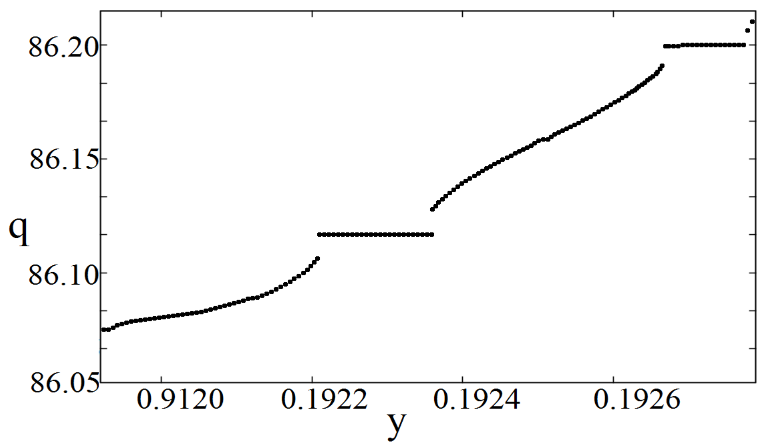


Figura 6.15: Fatores de segurança para o mapeamento no equilíbrio com a densidade de corrente reversa.

Vemos características semelhantes entre o nosso mapeamento no equilíbrio e o mapa do círculo.

Deste capítulo concluímos que as características observadas para o mapeamento exato no capítulo anterior são preservadas quando realizamos as expansões próximas às curvas sem *shear* e de divergência, sendo portanto mais uma ferramenta para investigar o transporte das linhas de campo magnético no plasma.

Capítulo 7

Novo perfil do fator de segurança

Neste capítulo, vamos considerar uma configuração no perfil do campo conhecida como divertor [24]. Aplicaremos o nosso mapeamento bidimensional conservativo considerando o novo perfil do fator de segurança, inicialmente no equilíbrio. Faremos o cálculo numérico do perfil do fator de segurança para investigar se podemos encontrar curvas sem *shear* e reproduziremos seções de Poincaré para observar as características do sistema [55]. No final do capítulo, adicionaremos a perturbação para verificar o que ocorre no espaço de fases.

7.1 Divertor Magnético

Como citamos no capítulo 3, um dos grandes problemas no confinamento de plasmas é a presença de impurezas. O plasma é afastado da parede do tokamak por um limitador físico feito de material resistente ao impacto e às altas temperaturas das partículas. Esse limitador define a última superficie magnética fechada. As linhas de campo sobre as superficies abertas carregam íons e elétrons que colidem diretamente com o limitador físico e retornam para o plasma carregando impurezas. O divertor é um dispositivo que permite remover as impurezas, que consiste de condutores dispostos externamente carregando correntes elétricas com a mesma direção da corrente de plasma, no sentido toroidal do tokamak [25, 26]. Trata-se de uma configuração de equilíbrio com um eixo magnético ("ponto X"ou ponto hiperbólico), que separa as superficies magnéticas fechadas das superficies abertas. O "ponto X" é formado quando o campo magnético resultante das bobinas externas cria um ponto de campo magnético poloidal nulo devido à sobreposição dos campos magnéticos dos condutores com o campo do plasma, desviando as partículas que escapam da borda do plasma para as placas do divertor. As partículas que chegam às placas do divertor são muito menos energéticas do que as que alcançam o limitador físico, já que não há contato direto entre as placas e o plasma. O plasma fica isolado das paredes da câmara, e pode ser melhor confinado.

7.2 Resultados Numéricos

Como resultado do campo magnético poloidal nulo, vamos considerar um perfil do fator de segurança em que haja uma divergência [24]. Esse perfil é polinomial para $0 \leq y < y_{95}$ e logarítmico para $y_{95} < y \leq y^*$, com uma divergência em $y = y^*$. A coordenada y_{95} corresponde à posição na qual temos 95% do fluxo do campo magnético na borda.

A expressão para o fator de segurança que será utilizado é dada po:

$$q_0(y) = \begin{cases} q_0 + c_1 y + c_2 + y^2, & \text{se} \quad y \leq y_{95} \\ \alpha ln(y^* - y) + \beta, & \text{se} \quad y_{95} < y \end{cases}$$

onde q_0 é o fator de segurança na borda, e α, β, c_1 e c_2 são parâmetros de controle dados por:

$$c_1 = \frac{2(q_{95} - q_0) - q'_{95} y_{95}}{y_{95}} \tag{7.1}$$

$$c_2 = \frac{q_0 - q_{95} + q'_{95} y_{95}}{y_{95}^2} \tag{7.2}$$

$$\alpha = q'_{95}(y_{95} - y*) \tag{7.3}$$

$$\beta = q'_{95} + \alpha ln(y^* - y_{95}) \tag{7.4}$$

onde q_{95} é o valor do fator de segurança na posição corresponde à posição y_{95} e $q_{95}^{'}$ é a derivada do perfil do fator de segurança com respeito a y calculada em y_{95}. O *shear* magnético correspondente à superfície em y_{95} é dado por:

$$s_{95} = \frac{r_{95}}{q_{95}} \frac{dq}{dr}\bigg|_{r=r_{95}} \tag{7.5}$$

$$r_{95} = \sqrt{2y_{95}} \tag{7.6}$$

onde r_{95} é o raio menor da superficie magnética correspondente à posição y_{95}.

$$q_{95}^{'} = \frac{q_{95}s_{95}}{2y_{95}} \tag{7.7}$$

Usaremos valores dos parâmetros de controle que simulem a geometria de um tokamak [24], considerando a divergência na borda do plasma, assim temos os valores: $q_0 = 11,1$, $q_{95} = 3,3$, $y^* = 3,325$, $y_{95} = 3,5$ e $s_{95} = 110,8$.

Vamos aplicar o mapeamento bidimensional conservativo considerado descrito pelas equações já apresentadas no capítulo 4, considerando esse novo perfil do fator de segurança:

$$r_n^* = \frac{r_n}{1 - a_1 sen\theta_n} \tag{7.8}$$

$$\theta_n^* = \theta_n + \frac{2\pi}{q_0(r_n^*)} + a_1 cos\theta_n \tag{7.9}$$

Ao calcularmos numericamente o jacobiano, verificamos que o mapeamento é simplético, uma vez que o valor do jacobiano, na figura 7.1, oscila em torno do valor unitário.

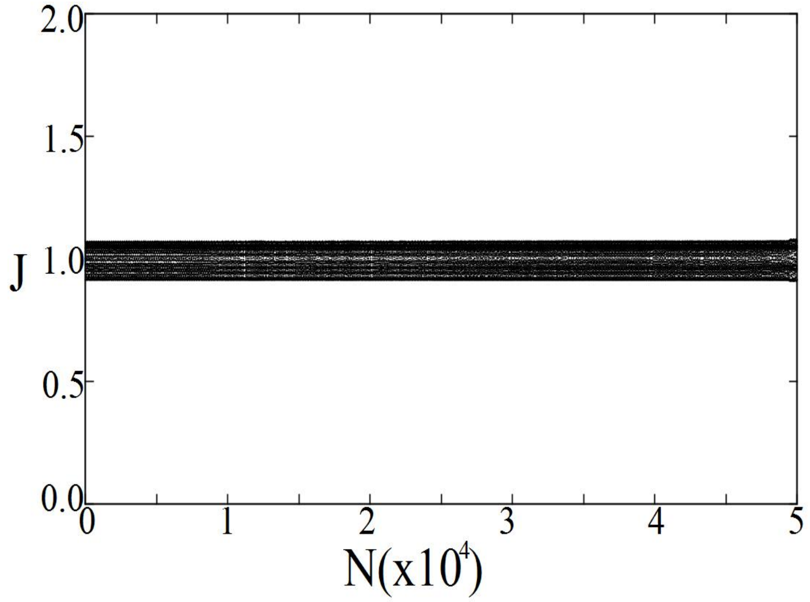


Figura 7.1: Resultado numérico do jacobiano do mapeamento considerando o novo perfil.

Reproduzimos na figura 7.2 a seção de Poincaré considerando o mapeamento no equilíbrio, onde observamos apenas linhas invariantes, sem a presença de cadeias de ilhas ou caos, em primeira análise. Na figura 7.3(a) temos o perfil analítico do fator de segurança escolhido e podemos perceber a região da divergência.

Seguindo o mesmo método utilizado no capítulo 5, para analisar com mais detalhes o comportamento do sistema, colocamos na figura 7.3(b), o cálculo numérico do fator de segurança, fixando x em 0,05. Na figura 7.2 destacamos a linha nessa posição.

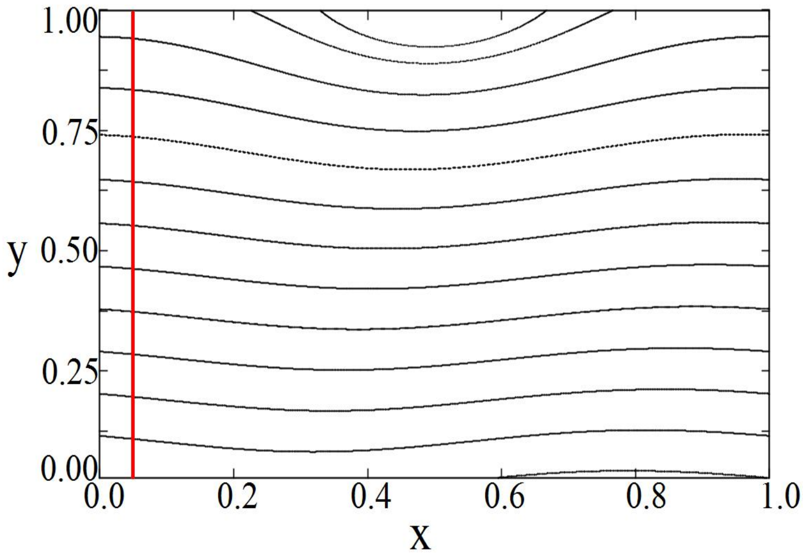
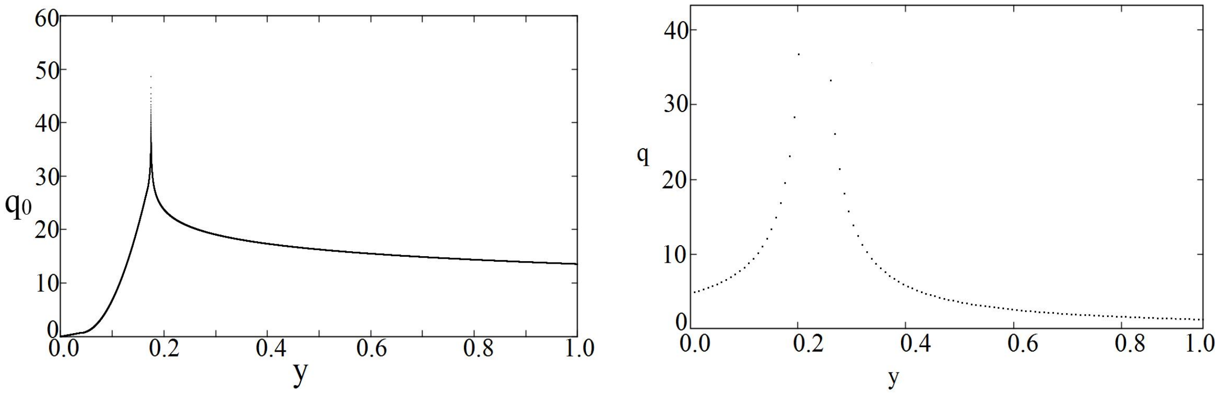


Figura 7.2: Seção de Poincaré considerando o novo perfil, destacando a linha fixada em $x = 0,05$, a qual usamos para o cálculo numérico do fator de segurança.

Vamos recuperar a discussão do capítulo 4: o cálculo é feito da mesma maneira em relação aos capítulos anteriores, verificamos a variação na posição angular de cada ponto da trajetória em relação ao ponto anterior, somamos as variações para todas as iterações, e tomamos a média. Essa é a definição do número de rotação. Para obtermos a definição do fator de segurança numérico, invertemos o resultado obtido:

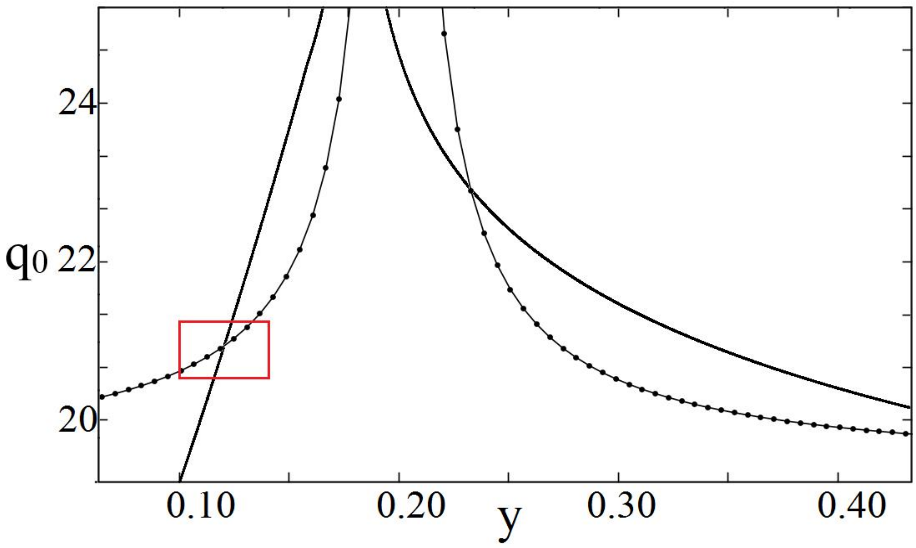
$$q \equiv \lim_{k\to\infty} \frac{2\pi k}{\sum_{j=0}^{k}(x_{j+1} - x_j)} \tag{7.10}$$

Na figura 7.4 fazemos uma ampliação para juntar os dois perfis e observamos que a região onde ocorre a região de divergência nos dois perfis é próxima, como ocorre nos outros perfis analisados na tese.



(a) (b)

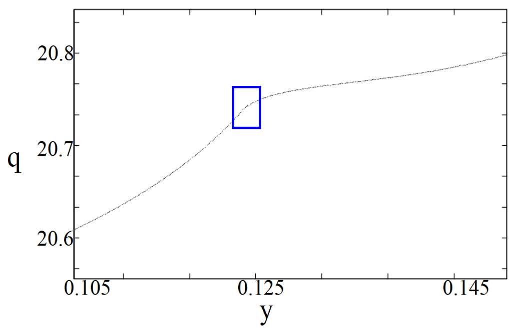
Figura 7.3: a) Perfil analítico do fator de segurança com a divergência na borda; b) Perfil numérico do fator de segurança, obtido fixando x em $0,05$.



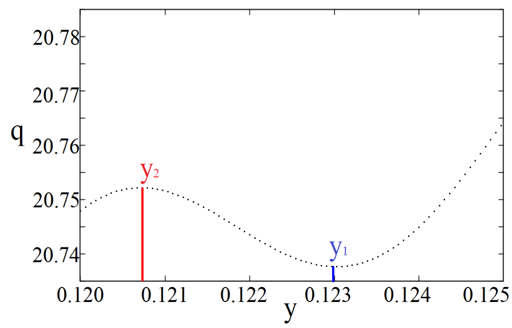
(a)

Figura 7.4: Gráfico ampliado dos perfis analítico e numérico do fator de segurança, onde podemos observar que a região da divergência é próxima para os dois perfis.

À primeira vista não observamos a presença de nenhum ponto de máximo local ou mínimo local na curva do gráfico numérico do fator de segurança. Temos interesse em localizar pontos onde o número de rotação é nulo, onde teremos curvas sem *shear*. No entanto, fizemos várias ampliações ao longo da curva para tentar detectar alguma região onde pudesse haver esse comportamento. Na figura 7.5(a) temos uma ampliação correspondente ao retângulo vermelho da figura 7.4(b), e na figura 7.5(b) temos uma ampliação correspondente ao retângulo azul da figura 7.5(a). Nessa última figura conseguimos observar um ponto de máximo e um ponto de mínimo, mas apenas foi possível fazê-lo porque a figura está bastante ampliada. Esses dois pontos sugerem novamente que tenhamos linhas sem *shear* em $y = 0,1207$ e $y = 0,123$.



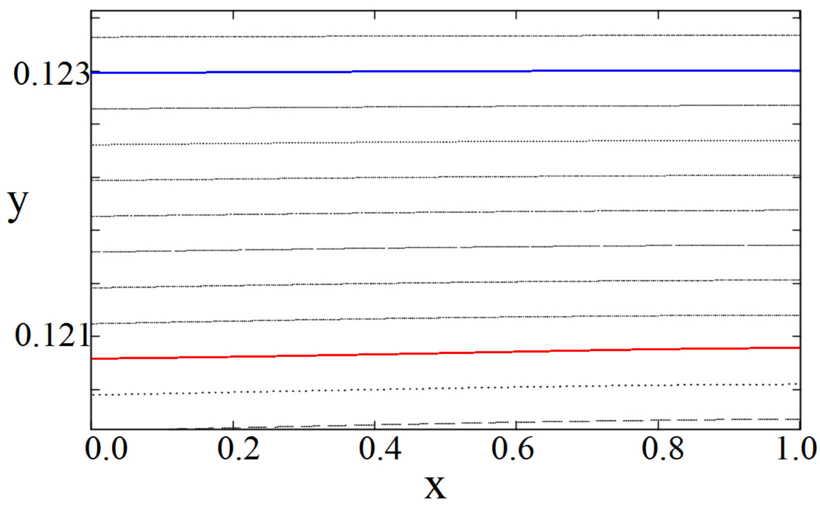
(a)



(b)

Figura 7.5: a) Ampliação do cálculo numérico do fator de segurança, correspondente ao retângulo vermelho da figura 7.4(b); b) Nova ampliação, correspondente ao retângulo azul da figura 7.5(a), onde conseguimos observar pontos de máximo e mínimo.

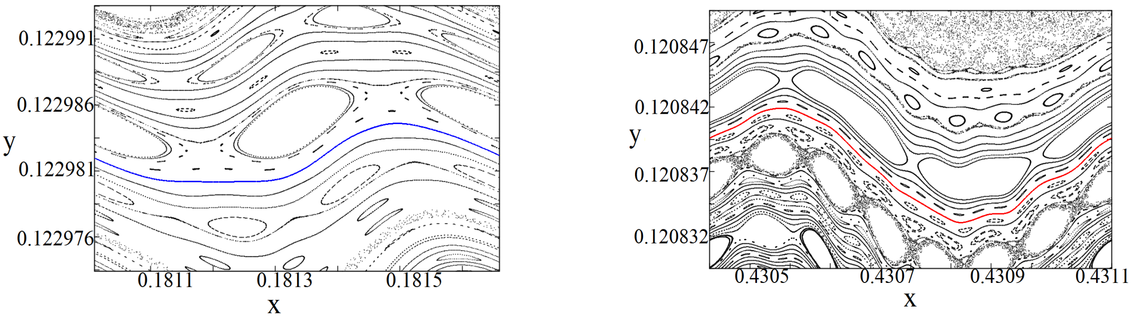
Na figura 7.6 reproduzimos a seção de Poincaré na região onde podemos observar as duas linhas sem *shear*. Vale ressaltar que a faixa de valores correspondente ao eixo y está muito estreita, ou seja, a figura também está bastante ampliada.



(a)

Figura 7.6: Seção de Poincaré onde podemos observar as duas linhas *shear*. A faixa de valores do eixo y está muito estreita, ou seja, a figura está bastante ampliada.

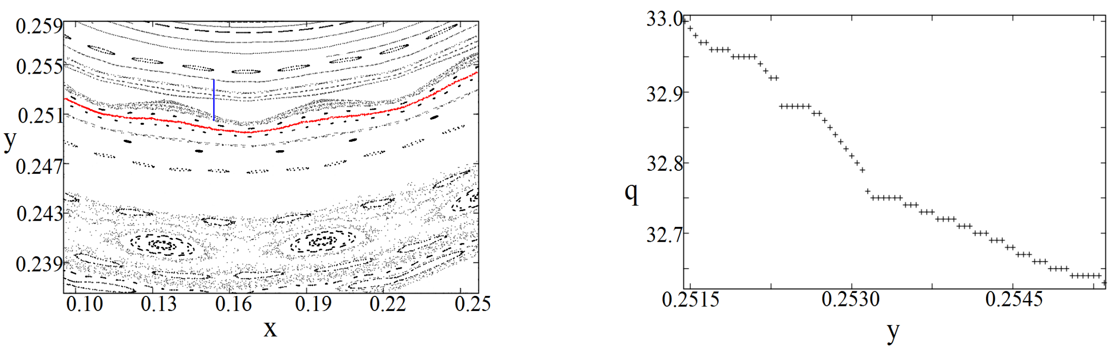
Na figura 7.7(a) fizemos novamente várias ampliações para obter a seção de Poincaré, apenas em torno da curva sem *shear* indicada em azul, e na figura 7.7(b) temos a seção de Poincaré, apenas em torno da curva sem *shear* indicada em vermelho. Podemos observar nas duas figuras que temos muitas cadeias de ilhas de tamanho muito pequeno, e regiões de caos localizado, mesmo no equilíbrio, sem qualquer perturbação além da correção toroidal. Torna-se, nesse caso, difícil localizar duas cadeias de ilhas gêmeas ao redor das curvas sen *shear*, porque elas contêm muitas ilhas e de tamanho muito pequeno, como acontecia no caso do perfil com a densidade de corrente reversa, discutido no capítulo 5. Naquele caso, apenas um par de cadeias de ilhas gêmeas foi possível reproduzir em torno da curva sem *shear*; as demais também eram pequenas e com muitas ilhas.



(a) (b)

Figura 7.7: Seções de Poincaré mostrando as linhas sem shear localizadas nas posições y=0,1207 e y=0,123 (para x fixo em 0,05).

Reproduzimos a seção de Poincaré próxima à curva de divergência na figura 7.8 e podemos verificar várias cadeias de ilhas, como também no caso do perfil da densidade de corrente reversa. Fizemos, ao longo da linha azul o cálculo numérico do fator de segurança para verificar o mesmo comportamento observado, a escada do diabo, com os patamares correspondentes às passagens pelas ilhas. Os níveis indicam uma distribuição fractal das cadeias de ilhas, conforme discutido na seção 6.2.1. Assim, ampliações sucessivas poderiam revelar uma hierarquia de cadeias [49].



(a) (b)

Figura 7.8: a) Seção de Poincaré com a curva de divergência em vermelho, mostrando as diversas ilhas ao redor; b) gráfico numérico do fator de segurança ao longo da linha azul da figura 7.8(a), para mostrar os patamares.

Como no capítulo 5, essa sequência de cadeias de ilhas é observada próxima à região de divergência do fator de segurança.

7.3 Adição da perturbação

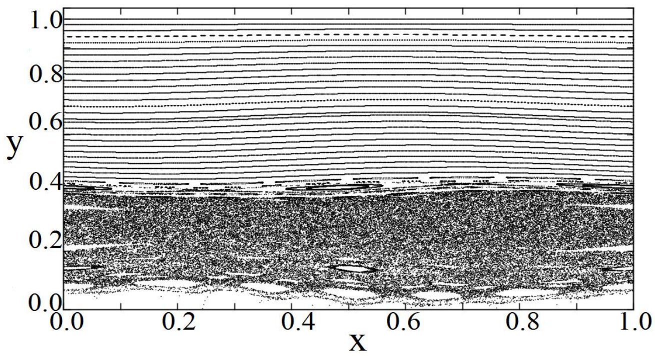
Para adicionar a perturbação introduzida pelo limitador ergódico, vamos utilizar as equações também apresentadas no capítulo 4:

$$r_n^* = r_{n+1} + \frac{mCb}{m-1}\left(\frac{r_{n+1}}{b}\right)^{m-1} sen(m\theta_n^*) \tag{7.11}$$

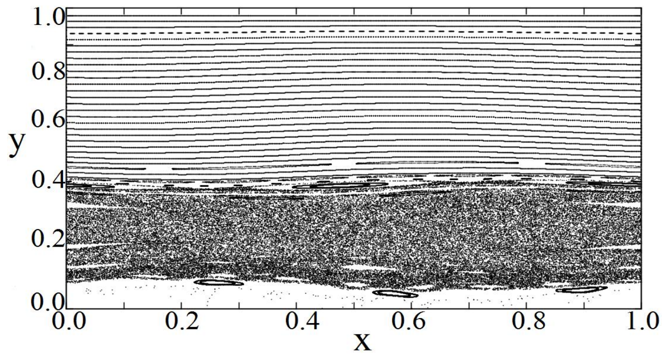
$$\theta_{n+1} = \theta_n^* - C\left(\frac{r_{n+1}}{b}\right)^{m-2} cos(m\theta_n^*) \tag{7.12}$$

onde $C = \frac{\mu_0 m \epsilon g}{B_0 \pi b^2}$, onde os parâmetros a serem variados são a razão ϵ entre a corrente do limitador ergódico e a corrente do plasma (I_p) e o número m de pares de espiras no anel. Os demais parâmetros permanecem com os mesmos valores listados na seção 4.3.

Até o momento, no equilíbrio (sem a perturbação introduzida pelo limitador ergódico magnético), observamos caos extremamente localizado e ilhas de tamanho muito pequeno. Para a nova expressão do fator de segurança, fizemos seções de Poincaré com a adição da perturbação nas figuras 7.9(a) (com os parâmetros $m = 6$ e $\epsilon = 0,03$) e 7.9(b) (com os parâmetros $m = 7$ e $\epsilon = 0,03$). Observamos que as ilhas são maiores e a faixa caótica não é mais localizada, inclusive torna-se maior em relação às seções de Poincaré feitas na seção 5.5, considerando o perfil da densidade de corrente reversa, já que ela sofre os efeitos da divergência no perfil do fator de segurança que se situa na borda e a perturbação introduzida pelo limitador ergódico, que também atua na borda. No perfil com a densidade de corrente reversa, a divergência situava-se no centro do plasma, portanto o efeito permanecia inalterado com a atuação da perturbação introduzida pelo limitador ergódico magnético e a faixa de caos era mais estreita.



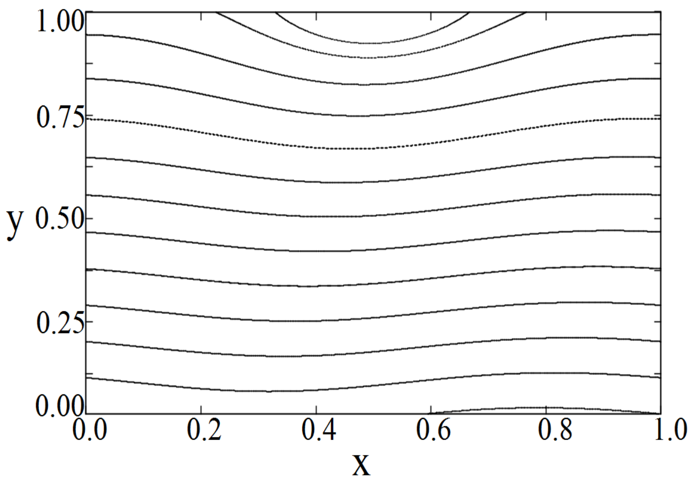
(a)



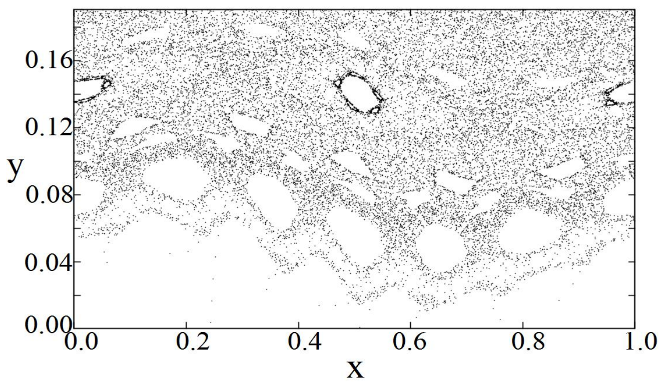
(b)

Figura 7.9: Seções de Poincaré para o mapa bidimensional conservativo com a perturbação introduzida pelo limitador ergódico magnético, considerando o novo perfil do fator de segurança para (a) $m = 6$ e $\epsilon = 0,03$ e (b) $m = 7$ e $\epsilon = 0,03$.

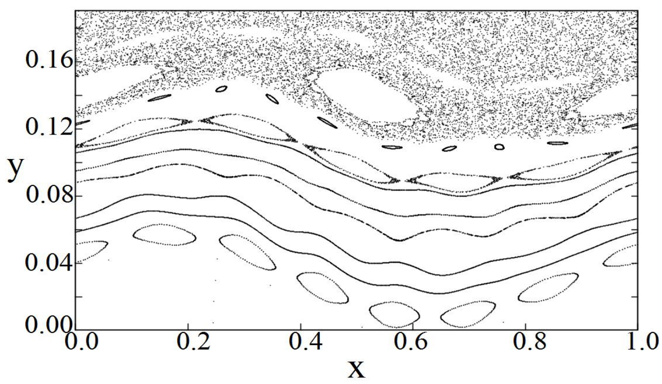
Na figura 7.10(a) colocamos a seção de Poincaré sem a perturbação, onde observamos apenas linhas invariantes, ou seja, as características de cadeias de ilhas muito pequenas e o caos extremamente localizado são imperceptíveis quando reproduzimos o mapeamento em todo o espaço de fases. Nas figuras 7.10(b) e (c), fizemos ampliações das figuras 7.9 (a) e (b) e podemos observar um comportamento já consolidado em todas as seções de Poincaré feitas em que havia a perturbação introduzida pelo limitador ergódico magnético: a ressonância definida pelo parâmetro m, o número de pares de espiras no anel do limitador. Em 7.10(b) temos a cadeia principal com 6 ilhas devido à escolha do parâmetro $m = 6$; em 7.10(c), como escolhemos $m = 7$, temos a cadeia principal com 7 ilhas.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.10: Seções de Poincaré para o mapa bidimensional conservativo considerando o novo perfil do fator de segurança para (a) o equilíbrio; (b) $m = 6$ e $\epsilon = 0,03$ (ampliação da figura 7.9(a)) e (c) $m = 7$ e $\epsilon = 0,03$ (ampliação da figura 7.9(b))

Para estudar o comportamento das curvas sem *shear* na presença da perturbação introduzida pelo limitador ergódico magnético, reproduzimos as seções de Poincaré nas regiões próximas às curvas para dois valores do parâmetro ϵ. Nas figuras 7.11 (a) e (b) consideramos $\epsilon = 0,01$, e vemos que as curvas ainda sobrevivem à perturbação. Nas figuras 7.11 (c) e (d) consideramos $\epsilon = 0,03$ e observamos que elas não resistiram ao aumento da intensidade da perturbação e foram dominadas pelo mar caótico. Na figura 7.11 (e) temos a região próxima à curva de divergência, representada pela linha vermelha, e também considerando o valor do parâmetro relacionado à perturbação como sendo o mesmo das figuras 7.11 (c) e (d), $\epsilon = 0,03$, observamos que as linhas invariantes e as cadeias de illhas sobrevivem, com o mar caótico dominando o espaço de fases.

Para obter a curva de divergência, simulamos a partir da seguinte condição inicial: a coordenada y foi obtida para a qual o valor do perfil numérico do fator de segurança é máximo, e a coordenada x já havia sido fixada para obter o perfil numérico (mesmo método utilizado no capítulo 5). Como o tamanho das ilhas é inversamente proporcional à derivada do perfil do fator de segurança, ($\delta \sim (1/\sqrt{\partial q/\partial r})$ [32] e próximo à linha de divergência a derivada é muito grande, as ilhas diminuem de tamanho, como também observamos na figura 7.8(a).

Deste capítulo concluímos que, para o perfil do fator de segurança na configuração de um divertor, a divergência ocorre na borda do plasma, e as curvas sem *shear*, cadeias de ilhas e o caos localizado aparecem nessa região. Nesse caso, as linhas sem *shear* foram encontradas após muitas ampliações, o que torna as cadeias de ilhas extremamente pequenas e o caos muito localizado. A adição da perturbação destruiu as curvas sem *shear* e aumentou a faixa caótica na região da borda, já que a perturbação introduzida pelo limitador ergódico também atua na borda, fenômeno que ocorreu de forma semelhante ao considerarmos o perfil não-monotônico para a densidade de corrente.

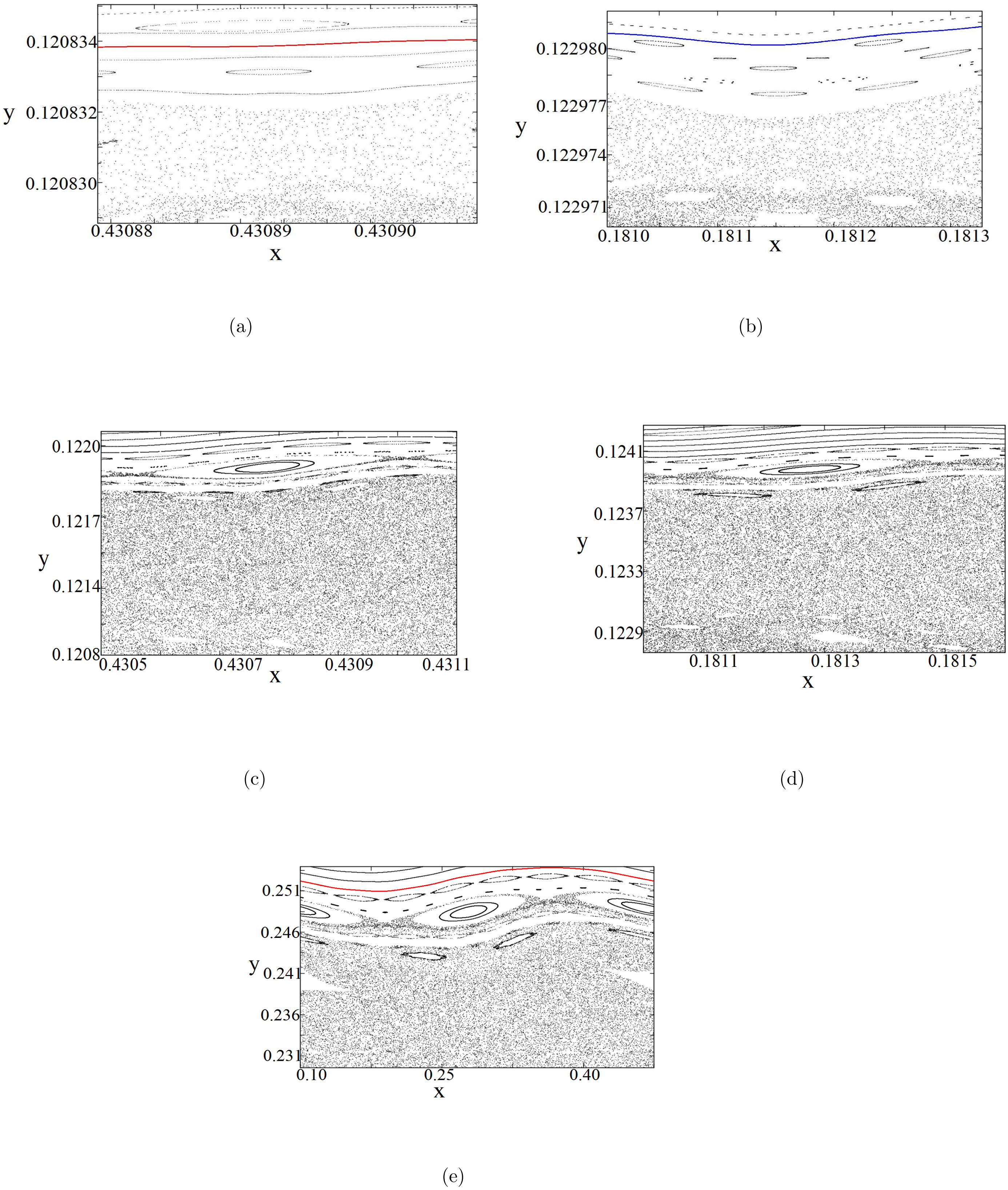


Figura 7.11: Seções de Poincaré considerando a perturbação introduzida pelo limitador ergódico magnético para as regiões próximas às curvas sem *shear* considerando $m = 7$ e o valor da perturbação como sendo: (a) e (b)$\epsilon = 0.01$, (c) e (d)$\epsilon = 0.03$; (e) seção de Poincaré na região próxima à curva de divergência, considerando $\epsilon = 0.03$.

Capítulo 8

Conclusões

Iniciamos nosso trabalho considerando um perfil para a densidade de corrente do plasma que apresentasse comportamento monotônico. Em seguida apresentamos um mapeamento bidimensional conservativo composto por dois mapeamentos sucessivos, com o primeiro descrevendo o percurso da linha de campo do equilíbrio e o segundo a perturbação desse percurso [47, 16]. O mapeamento descreve a seção de Poincaré das linhas de campo magnético de equilíbrio na aproximação cilíndrica com correção toroidal, cuja equação radial foi obtida de forma inversa, e portanto aplicamos o método de Newton para resolvê-la.

Na análise dos mapas, observamos que sem perturbação não houve a formação de caos. Colocando a perturbação, vimos a cadeia principal e uma estreita faixa de regime caótico em torno dela, devido à superposição de suas cadeias secundárias mais externas. Quando aumentamos a perturbação, vimos que a cadeia principal e sua vizinha já estavam bastante destruídas, com largas faixas caóticas se englobando.

Em seguida, calculamos numericamente o fator de segurança para algumas linhas de campo e vimos que para uma trajetória regular o cálculo de q convergiu rapidamente para um número irracional. Para uma trajetória situada sobre uma cadeia de ilhas, o fator converge para o número racional correspondente ao número de ilhas da cadeia principal. Para uma trajetória irregular, o cálculo do fator de segurança não converge.

Para analisar com mais detalhes as trajetórias, fixamos segmentos de reta nas seções de Poincaré e fizemos o gráfico dos fatores de segurança das trajetórias cujas condições iniciais foram determinadas por esses cortes. Conseguimos ver de forma bem definida os patamares nos perfis do fator de segurança nos intervalos correspondentes às cadeias de ilhas principais, e que nas regiões caóticas não ocorria uma convergência para um valor definido. Foi possível observar também uma espécie de *escada do diabo descendente*, interrompida apenas por intervalos correspondentes às regiões de regime caótico.

Passamos então a considerar um perfil de densidade de corrente não-monotônico e calculamos algumas seções de Poincaré para esse perfil, onde observamos um cenário de reconexão. O perfil não-monotônico da corrente, que leva a um perfil não-monotônico do fator de segurança, implica pares de cadeias de ilhas com o mesmo valor do fator de segurança, separadas por linhas sem *shear*, ou seja, onde $\mathrm{dq}/\mathrm{dr} = 0$. Aumentando o valor da perturbação, as ilhas se alargam e as linhas invariantes se combinam, e dependendo do quão grande for o valor da perturbação, as cadeias de ilhas gêmeas podem sumir e ficamos com uma barreira invariante que separa o espaço de fase em duas regiões. Esses resultados já foram obtidos anteriormente[16].

No capítulo 5, consideramos novamente um perfil de densidade de corrente não-motônico com densidade de corrente reversa, ou seja, o campo magnético poloidal assumirá valores positivos e negativos, e em uma dada posição, será zero. Isso leva a um perfil do fator de segurança que tem uma divergência. Preliminarmente, observamos uma diferença relevante em relação ao comportamento sem a corrente reversa: calculamos uma seção de Poincaré sem a perturbação, e verificamos que existem cadeias de ilhas. Fazendo o gráfico do número de rotação, grandeza equivalente ao fator de segurança, para um corte no espaço de parâmetros, verificamos a existência de dois pontos críticos, onde $\mathrm{dq}/\mathrm{dr} = 0$, sugerindo que possamos encontrar cadeias de ilhas gêmeas em torno de linhas sem *shear*. De fato, encontramos no valor dos pontos críticos, linhas sem *shear* entre pares de cadeias de ilhas na seção de Poincaré.

Para identificar a causa do surgimento das ilhas, variamos inicialmente o parâmetro β e observamos que a região onde ocorre a corrente reversa no perfil da densidade de corrente vai diminuindo com o aumento, em módulo, do parâmetro, até que o perfil não atinge mais valores negativos e torna-se apenas não-monotônico.

Quando reproduzimos os perfis numéricos do fator de segurança também variando β, vemos que a distância entre os pontos críticos vai diminuindo até atingirmos o valor do parâmetro para o qual o perfil da densidade de corrente torna-se apenas não-monotônico, onde os pontos não existem mais. Quando o valor de β torna-se positivo, a divergência no perfil numérico do fator de segurança desaparece. Essa característica da aproximação dos pontos críticos indica que o tamanho das ilhas vai diminuindo, como também observamos. Quando o perfil da densidade de corrente torna-se apenas não monotônico, não observamos mais ilhas, apenas linhas invariantes, como ocorre no equilíbrio para os perfis estudados no capítulo 4.

Podemos aferir então que, com a variação do parâmetro β podemos obter a região onde o perfil da densidade de corrente assume valores negativos. O surgimento de cadeias de ilhas no equilíbrio está diretamente relacionado, pois o tamanho delas via diminuindo até que somem quando o perfil torna-se apenas não-monotônico.

Também investigamos a variação do parâmetro a_1, relacionado com a correção toroidal. Conforme diminuimos o valor do parâmetro, percebemos que a distância entre os pontos críticos também vai diminuindo. Quando o valor torna-se zero, os pontos críticos desaparecem. Percebemos o mesmo comportamento de quando variamos o parâmetro β.

Em seguida, estudamos a natureza das ilhas. Calculamos a média da variação da posição angular de cada condição inicial em função da distância ao centro da ilha (frequência), e próximo da separatriz ela foi a zero, indicando a mesma natureza de ilhas em movimentos pendulares. Também fizemos a seção de Poincaré em torno de uma única ilha e pudemos observar várias ilhas em torno. Os resultados obtidos indicam que o caos se manifesta de modo localizado.

Para responder com mais segurança se pode haver caos no mapeamento, variamos o parâmetro a_1. O valor padrão utilizado foi de -0,04, mas quando aumentamos, em módulo, esse valor, percebemos a passagem de um caos localizado para um caos global.

Pudemos comprovar nossos resultados, obtido para o perfil com densidade de corrente reversa, com a aplicação de outro mapeamento, muito conhecido na literatura, o Tokamap.

Aplicamos a perturbação introduzida pelo limitador ergódico e verificamos que apenas a borda do plasma é afetada, o centro permanece apenas sob influência da corrente reversa.

No capítulo 6, fizemos duas expansões: a primeira expansão do mapeamento foi em torno de uma das linhas sem *shear* para obter um mapeamento local. Com esse mapeamento, foi possível calcular analiticamente o jacobiano e verificamos que ele é unitário, e portanto o mapa é conservativo. Também é possivel calcular analiticamente os pontos fixos. Obtivemos resultados parecidos com os do mapa exato, como o cálculo da frequência nas ilhas. Também variamos o parâmetro a_1 e percebemos também a passagem de um caos localizado para um caos global. A diferença é uma maior sensibilidade à variação do parâmetro, ou seja, para o mapa local uma menor variação do parâmetro já estabelece o caos global.

A segunda expansão foi em torno da curva de divergência e percebemos infinitas ilhas em torno da curva. Comparamos o nosso mapeamento no equilíbrio com o mapa do círculo. Fazendo o gráfico do valor numérico do fator de segurança em função da coordenada y, os diversos patamares observados mostram a escada do diabo, característica também presente no mapa do círculo.

No capítulo 7, consideramos uma configuração do campo magnético onde novamente temos uma região onde a componente poloidal vai a zero (o campo considerado é obtido num divertor). Utilizamos uma nova expressão para o perfil do fator de segurança, que também possui uma divergência, em consequência do campo magnético poloidal ser nulo. Aplicamos o nosso mapeamento ao novo perfil do fator de segurança, e verificamos numericamente que o jacobiano permanece unitário. No perfil numérico do fator de segurança, à primeira vista não observamos nenhum ponto de máximo ou mínimo, como havia ocorrido no caso do perfil considerando a densidade de corrente reversa. No entanto, ao realizarmos sucessivas variações, foi possível observar uma região contendo um ponto de mínimo e um ponto de máximo. Localizamos as curvas sem *shear* ao redor desses pontos. Ao reproduzirmos as seções de Poincaré em torno das curvas, para observar as cadeias de ilhas ao redor, foram necessárias diversas ampliações. Verificamos muitas cadeias de ilhas e de tamanho muito pequeno, e também caos fortemente localizado. Nesse caso, torna-se difícil a localização de uma cadeia de ilha e seu par gêmeo, devido ao tamanho muito pequeno e à grande quantidade de ilhas em cada cadeia. Também reproduzimos a seção de Poincaré próxima à curva de divergência e verificamos várias cadeias de ilhas, como também no caso do perfil da densidade de corrente reversa, e no cálculo numérico do fator de segurança, obtivemos a *escada do diabo*, verificando a distribuição fractal das cadeias de ilhas. Aplicamos a perturbação introduzida pelo limitador ergódico e verificamos que a faixa caótica não é mais localizada, torna-se maior, predominando no espaço de fases na região da borda, já que a divergência no perfil do fator de segurança situa-se na borda e a perturbação introduzida pelo limitador ergódico também atua na borda. As linhas sem *shear* sobrevivem para um dado valor da perturbação, mas quando aumentamos a intensidade, elas são destruídas, o que não ocorre com as ilhas próximas à curva de divergência.

Os comportamentos no geral foram semelhantes, como esperado, pois os dois perfis estudados nos capítulos 5 e 7 apresentaram divergência.

Como etapas futuras, abre-se a possibilidade de estudar com mais detalhes esses comportamentos próximos às curvas sem *shear* e a curva de divergência. Pode-se fazer mapeamentos locais em torno dessas curvas, como fizemos para o caso do perfil da densidade de corrente reversa.

Referências Bibliográficas

[1] K. Hasselman et al. The challenge of long-term climate change. *Science*, 302:1923, 2003.

[2] J. Wesson. *Tokamaks.* Oxford University Press, Oxford, 2004.

[3] J. A. Bittencourt. *Fundamentals of Plasma Physics.* Springer-Verlag, New York, 2004.

[4] J. Blum. *Numerical Simulation and Optimal Control in Plasma Physics.* Gauthier-Villars, Paris.

[5] K. Ulmann and I.L. Caldas. Transitions in the parameter space of a periodically forced dissipative system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 7:1913, 1996.

[6] M. S. Baptista and I.L. Caldas. Dynamics of the kicked logistic map. *Chaos, Solitons and Fractals*, 7:325, 1996.

[7] J. A. C. Gallas. Structure of the parameter space of the hénon map. *Physical Review Letters*, 70:2714, 1993.

[8] Tien-Yien Li and James Yorke. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82:985, 1975.

[9] K. Alligood et al. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems.* Springer, New York, 1996.

[10] H. Poincaré. *Les Méthodes Nouvelle de la Méchanique Céleste.* Gauthier-Villars, Paris, 1899.

[11] E. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20:130, 1963.

[12] G. H. Walker and J. Ford. Amplitude instability and ergodic behavior for conservative nonlinear oscillator systems. *Physical Review*, 188:417, 1969.

[13] R. Lima and M. Pettini. Supression of chaos by resonant parametric perturbations. *Physical Review A*, 41:726, 1990.

[14] A. Azevedo and S. Rezende. Controlling chaos in spin-wave instabilities. *Physical Review Letters*, 66:1342, 1991.

[15] C. Vieira Abud and I. L. Caldas. Onset of shearless magnetic surfaces in tokamaks. *Nuclear Fusion*, 53:064010, 2013.

[16] Portela et al. Diffusive transport through a nontwist barrier in tokamaks. *International Jornal of Bifurcation and Chaos*, 17:1589, 2007.

[17] F. Karger and K. Lackner. Resonant helical divertor. *Journal of Plasma Physics*, 61:385, 1977.

[18] R. L. Viana. Problemas não-lineares com perturbação impulsiva e aplicações em física de plasmas, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, Tese de Doutorado, 1991.

[19] T. J. Martin and J. B. Taylor. Ergodic behaviour in a magnetic limiter. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 26:321, 1984.

[20] D. Ciro and I. L. Caldas. Magnetic topology and current channels in plasmas with toroidal current density inversions. *Physics of Plasmas*, 20:102512, 2013.

[21] T. Fujita et al. Current clamp at zero level in jt-60u current hole plasmas. *Physical Review Letters*, 95:075001, 2005.

[22] C. Martins et al. Analytical solutions for tokamak equilibria with reversed toroidal current. *Physics of Plasmas*, 18:082508, 2011.

[23] J. Li et al. Quasi-steady-state ac plasma current operation in HT-7 tokamak. *Nuclear Fusion*, 47:1071, 2007.

[24] T. Kroetz et al. Divertor map with freedom of geometry and safety factor profile. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 54:045007, 2012.

[25] T. Kroetz. Linhas de campo magnético caóticas em tokamaks, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Dissertação de Mestrado, 2006.

[26] C. Martins. Topologia de campos magnéticos em tokamaks, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Tese de Doutorado, 2013.

[27] T. Kroetz. Transporte em sistemas caóticos desctritos por mapas com aplicação em plasmas de fusão, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Tese de Doutorado, 2010.

[28] R. A. Clemente and R. L. Viana. Detailed derivation of axisymmetric double adiabatic MHD equilibria with general plasma flow. *Brazilian Journal Physics*, 29:457, 1999.

[29] M. Y. Kucinski et al. Toroidal plasma equilibrium with arbitrary current distribution. *Journal of Plasma Physics*, 44:303, 1990.

[30] P. M. Morse and H.Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw Hill, New York, 1953.

[31] J. P. Freidberg. *Ideal Magnetohydrodynamics*. Plenum Press, New York, 1987.

[32] E. C. da Silva. Efeitos da geometria toroidal na atuação dos campos helicoidais ressonantes em tokamaks, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, Tese de Doutorado, 2000.

[33] W. M. Stacey. *Fusion Plasma Analysis*. John Wiley, New Jersey, 1981.

[34] T. Shinbrot et al. Using small perturbations to control chaos. *Nature*, 363:411, 1993.

[35] S. S. Abdullaev and S. Sadrilla. *Construction of Mappings for Hamiltonian Systems and Their Applications*. Springer-Verlag, Berlim, 2006.

[36] T. J. Martin and J. B. Taylor. Ergodic behavior in a magnetic limite. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 26:321, 1984.

[37] R. L. Viana and I. L. Caldas. Peripheral stochasticity in tokamaks – the Martin-Taylor model revisited. *European Journal of Physics*, 12:293, 1991.

[38] N. Reggiani and P. H. Sakanaka. The effect of the magnetic limiter current on the peripheral chaotic region of a tokamak. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 36:513, 1994.

[39] W. Feneberg. The use of external helical windings for the production of a screening layer in ASDEX and a tokamak with material limiter. *Proc. 8th Eur. Conf. Contr. Fus. and Plasma Phys.*, 1:3, 1977.

[40] S. McCool et al. Electron thermal confinement studies with applied resonant fields on TEXT. *Nuclear Fusion*, 29:547, 1989.

[41] A. M. O. Almeida. On the symplectically invariant variational principle and generating functions. *Proc. Royal Soc. London*, A431:403, 1990.

[42] M. Bruschi et al. Integrable symplectic maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 49:273, 1991.

[43] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer, New York, 1992.

[44] K. Ulmann. Métodos de análise de mapeamentos não-lineares com aplicações à física de plasmas, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, Tese de Doutorado, 1998.

[45] T. Ozeki et al. Effects of a hollow current profile on the ideal MHD stability of high betap plasmas in a tokamak. *Nuclear Fusion*, 33:1025, 1993.

[46] B. W. Rice et al. The formation and evolution of negative central magnetic shear current profiles on DIII-D. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 38:869, 1996.

[47] K. Ulmann and I. L. Caldas. Dynamical analysis of the chaotic trajectories in a bi-dimensional sympletic mapping. *Nonlinear Dynamics*, 1:190, 1997.

[48] I. L. Caldas et al. Magnetic field line mappings for a tokamak with ergodic limiters. *Chaos, Solitons and Fractals*, 7:991, 1996.

[49] A. L. Gama and M. S. T Freitas. Do ARNOLD tongues really constitute a fractal set? *Journal of Physics*, 246:012031, 210.

[50] E. Mazzucato et al. Turbulent fluctuations in TFTR configurations with reversed magnetic shear. *Physical Review Letters*, 77:3145, 1996.

[51] M. Roberto et al. Magnetic trapping caused by resonant perturbations in tokamaks with reversed magnetic shear. *Physics of Plasmas*, 11:2014, 2004.

[52] B. Bartoloni et al. Shearless bifurcation on symplectic maps of magnetic field lines in tokamaks with reversed current. *Physics Letters A*, 380:2416, 2016.

[53] Balescui et al. A hamiltonian twist map for magnetic field lines in a toroidal geometry. *Physical Review E*, 58:33, 1998.

[54] Robert Ecke et al. Scaling of the arnold tongues. *Nonlinearity*, 2:175, 1989.

[55] B. Bartoloni et al. Shearless bifurcation in diverted plasmas. *(a ser submetido para publicação).*