Caos

Iberê L. Caldas

Apresentado na disciplina Mecânica Cássica

(PGF 5005)

IFUSP

Caos na Mecânica Clássica

- Criação da Mecânica.
- Determinismo.
- Sensibilidade às condições iniciais.
- Indeterminismo clássico.
- Exemplos - Pêndulos.
- Decorrências.

Criação da Mecânica

- Galileo - Fenômenos reprodutíveis / métodos experimentais / análise teórica associada à experiência.
- Copérnico – Órbitas dos planetas.
- Newton - Equação diferencial relaciona força com a aceleração. Trajetórias podem ser previstas.

Determinismo

- Conhecidas força, posição e velocidade iniciais, órbita pode ser determinada.
- Lagrange – Poder de previsão da ciência.

- Dyson – Fenômenos físicos são previsíveis. Bastaria termos informações suficientes.

Determinismo

- Novas gerações de físicos e matemáticos começaram a trabalhar no formalismo das Leis de Newton.
- **Lagrange** (1736-1813)
- **Laplace** (1749-1827)
- **Hamilton** (1805-1865)
- Mecânica newtoniana desenvolveu-se muito além da formulação original de Newton.

Problemas

- Maxwell – Em gases, deslocamento do conjunto de partículas é irreversível. Mas órbita de cada partícula é reversível.

- Poincaré – A órbita da Terra é estável? Qual a órbita exata da Terra - sob as forças do Sol e de Jupiter - ?.

Sensibilidade às condições iniciais

- Além das órbitas regulares (periódicas ou quase periódicas), existem as irregulares (caóticas).
- As irregulares (caóticas) são sensíveis às condições iniciais.

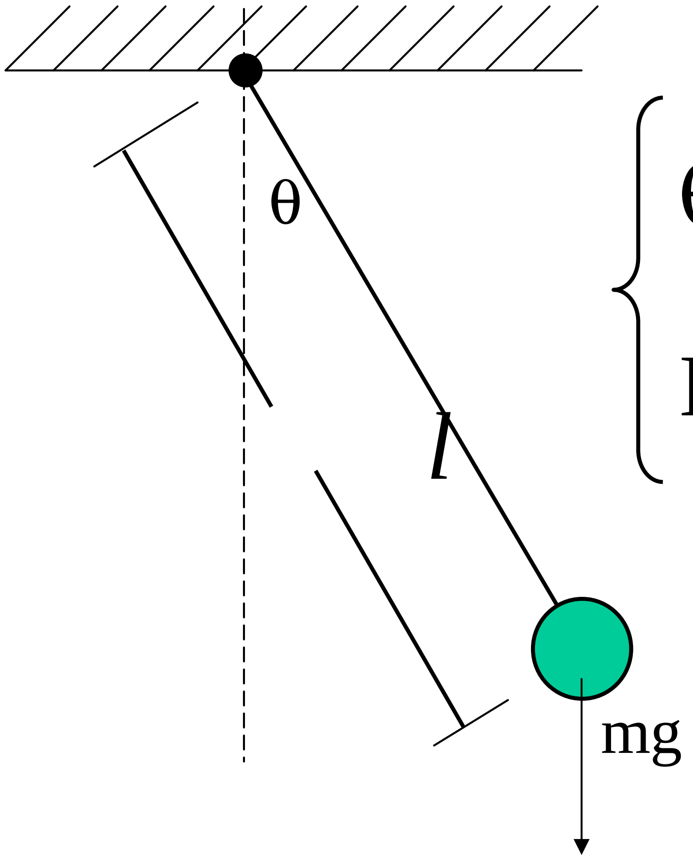
Efeito Não Linear

- Essa sensibilidade é devida ao efeito não linear.

- Órbitas integráveis (regulares) - Pêndulo simples. Resultado exato para o período.

- Órbitas não integráveis (regulares e irregulares) - Terra, Sol e Jupiter. Pêndulo elástico.

Pêndulo Simples



$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{L}{ml^2} \\ \dot{L} = -mgl\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Previsão do ângulo
no instante t

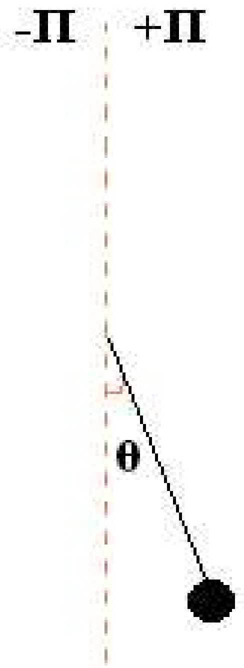
$\theta = \omega\, t + \theta_0$

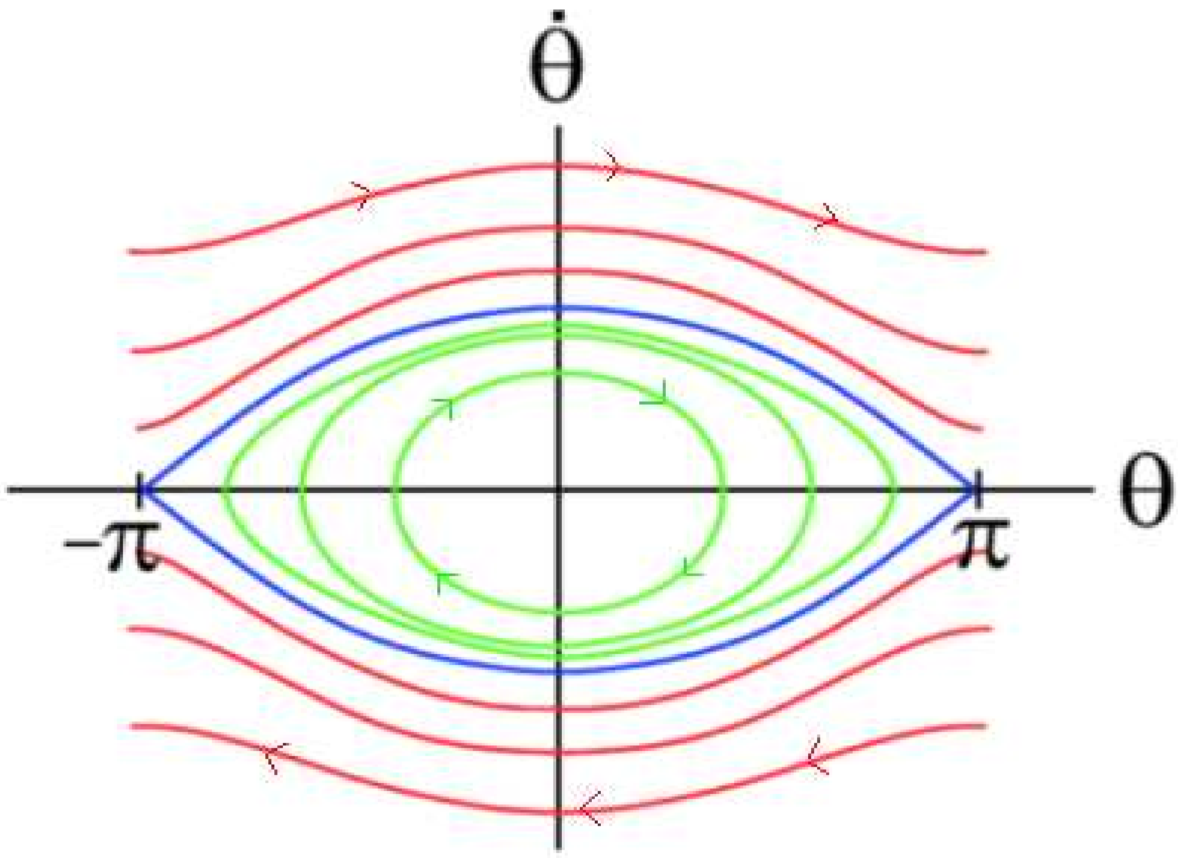
Sistema integrável e não linear

Retrato de fase do pêndulo simples

Sistema com um grau de liberdade (um par de variáveis para descrever a evolução do sistema)

Uma cte de movimento, dH/dt = 0 → integrável

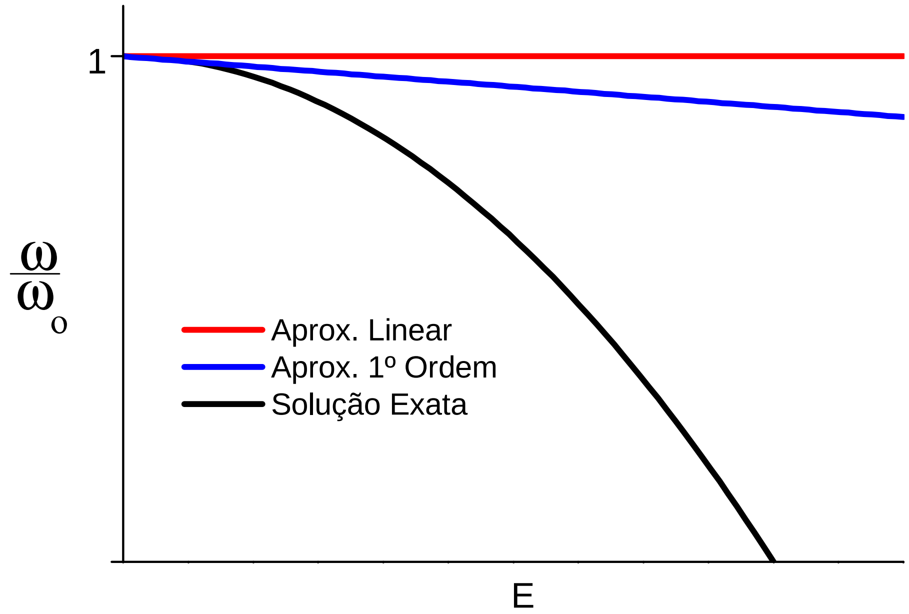




Freqüência em função da energia

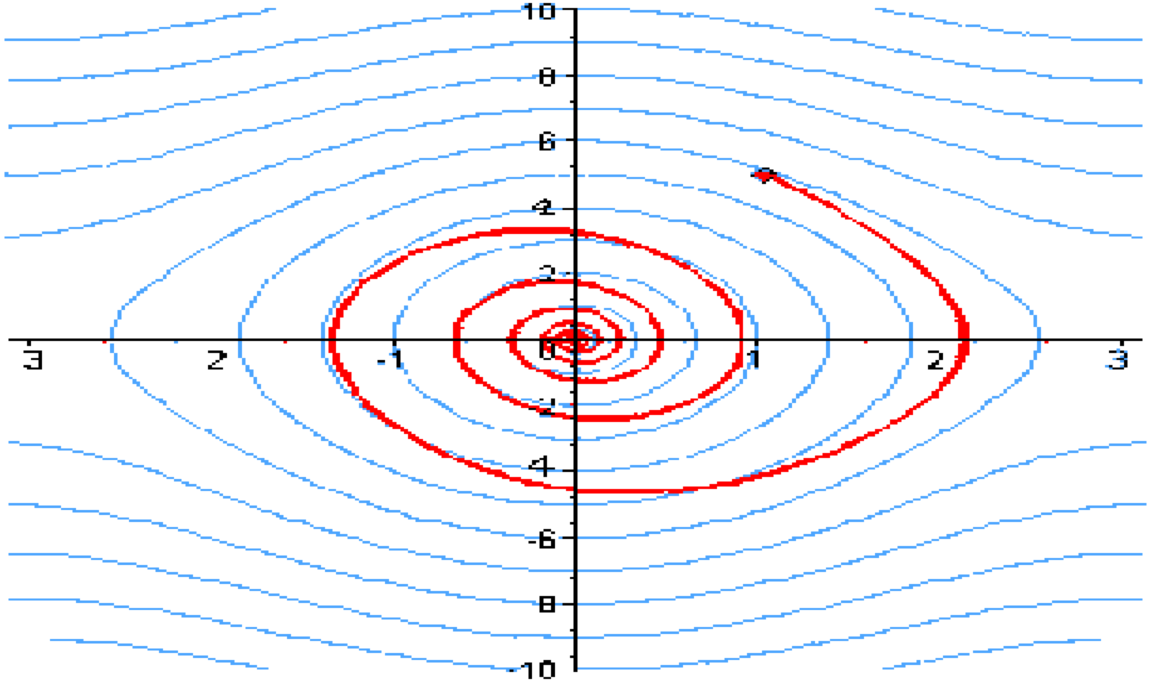
Aprox. Linear: $(\operatorname{sen}\theta \approx \theta) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = cte.$

Aprox. não linear: $(\operatorname{sen}\theta \approx \theta - \frac{1}{3!}\theta^3) \Rightarrow \omega = \omega_0(1 - \frac{E}{8\omega_0^2})$



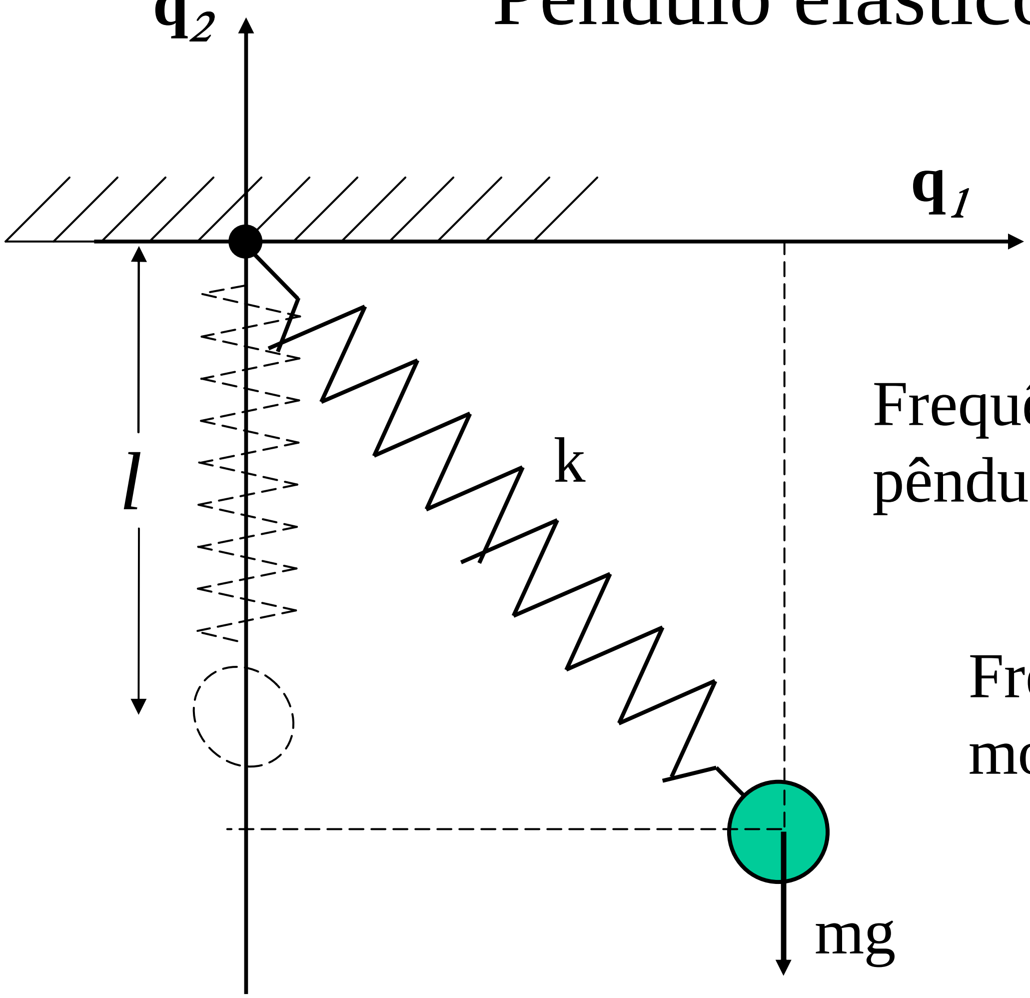
Pêndulo Amortecido

Retrato de Fase



O termo de amortecimento: qualquer órbita tende para o ponto (0,0), onde o pêndulo fica parado.

Pêndulo elástico



Frequência do pêndulo: $\omega_p = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

Frequência da mola: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Ponto de equilíbrio estável: $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = (0, -l)$

Equações de movimento

$$\dot{q}_1 = p_1$$

$$\dot{p}_1 = \frac{3}{4}\frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2}} - q_1$$

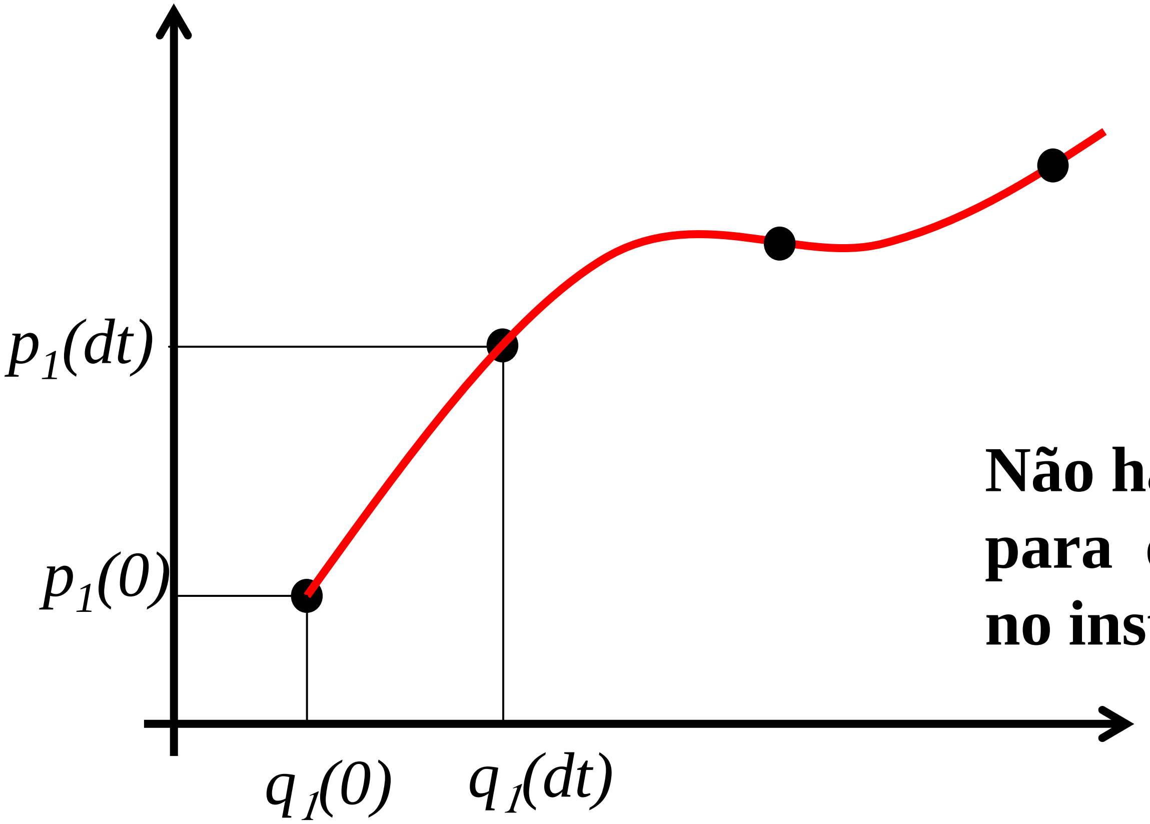
$$\dot{q}_2 = p_2$$

$$\dot{p}_2 = \frac{3}{4} - q_2 - \frac{3}{4}\frac{1 - q_2}{\sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2}}$$

Sistema não linear e não integrável

Uma cte de movimento
Dois graus de liberdade

Integração Numérica



Não há fórmula para q_1 no instante t

dt << t

Simulação Numérica

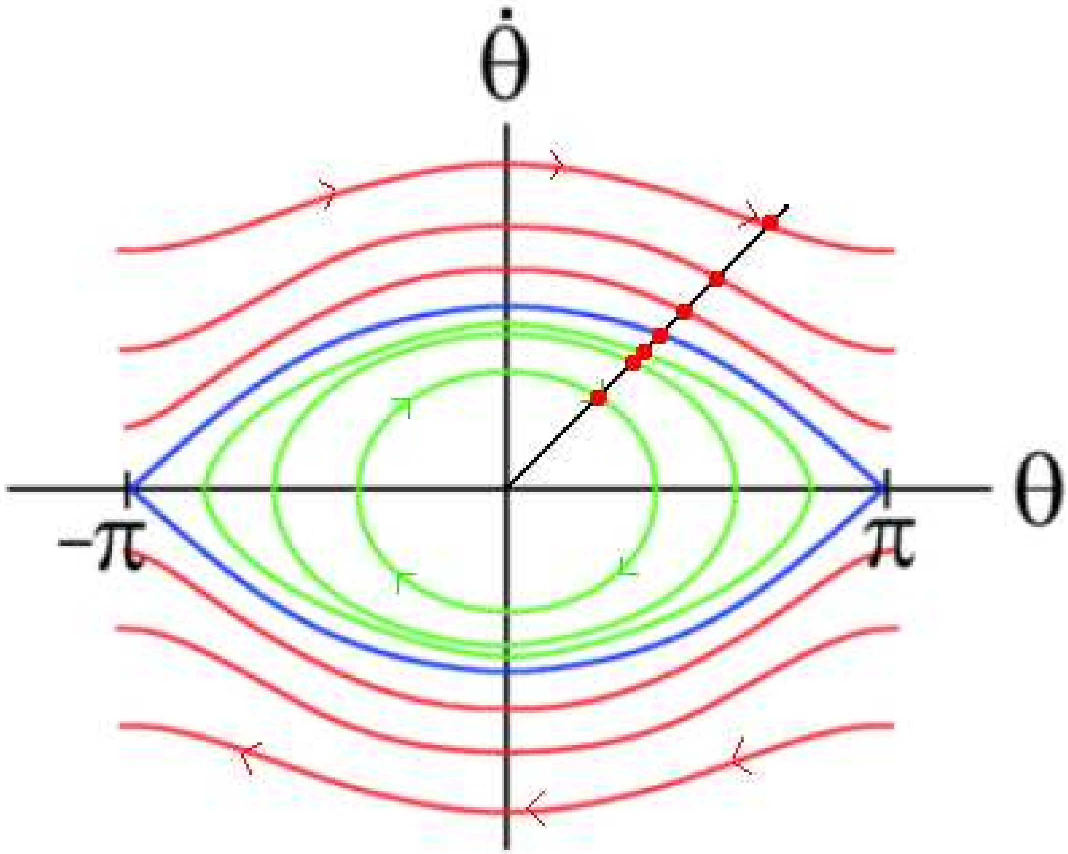
- Evolução das variáveis $q_i(t)$ e $p_i(t)$ dadas as condições iniciais $q_i(0)$ e $p_i(0)$.
- Equações de movimento integradas numericamente.
- Órbitas regulares, de amplitudes pequenas, em torno de equilíbrios estáveis.
- Órbitas irregulares com amplitudes grandes: sensibilidade às condições iniciais.

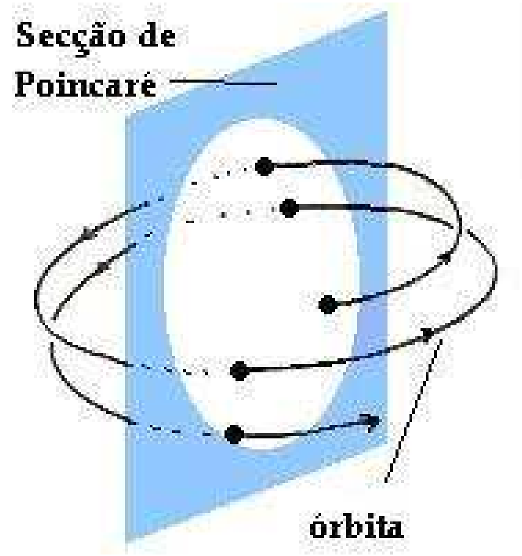
Trajetória no espaço de fases

- $h(q_1,p_1,q_2,p_2) = \varepsilon$ = constante. Somente 3 variáveis são independentes.
- Contida no espaço tridimensional.
- Seção de Poincaré:

  Intersecções da trajetória com um plano

  (p.ex., $q_2=0$, para $p_2>0$) $\rightarrow$ Mapa bidimensional

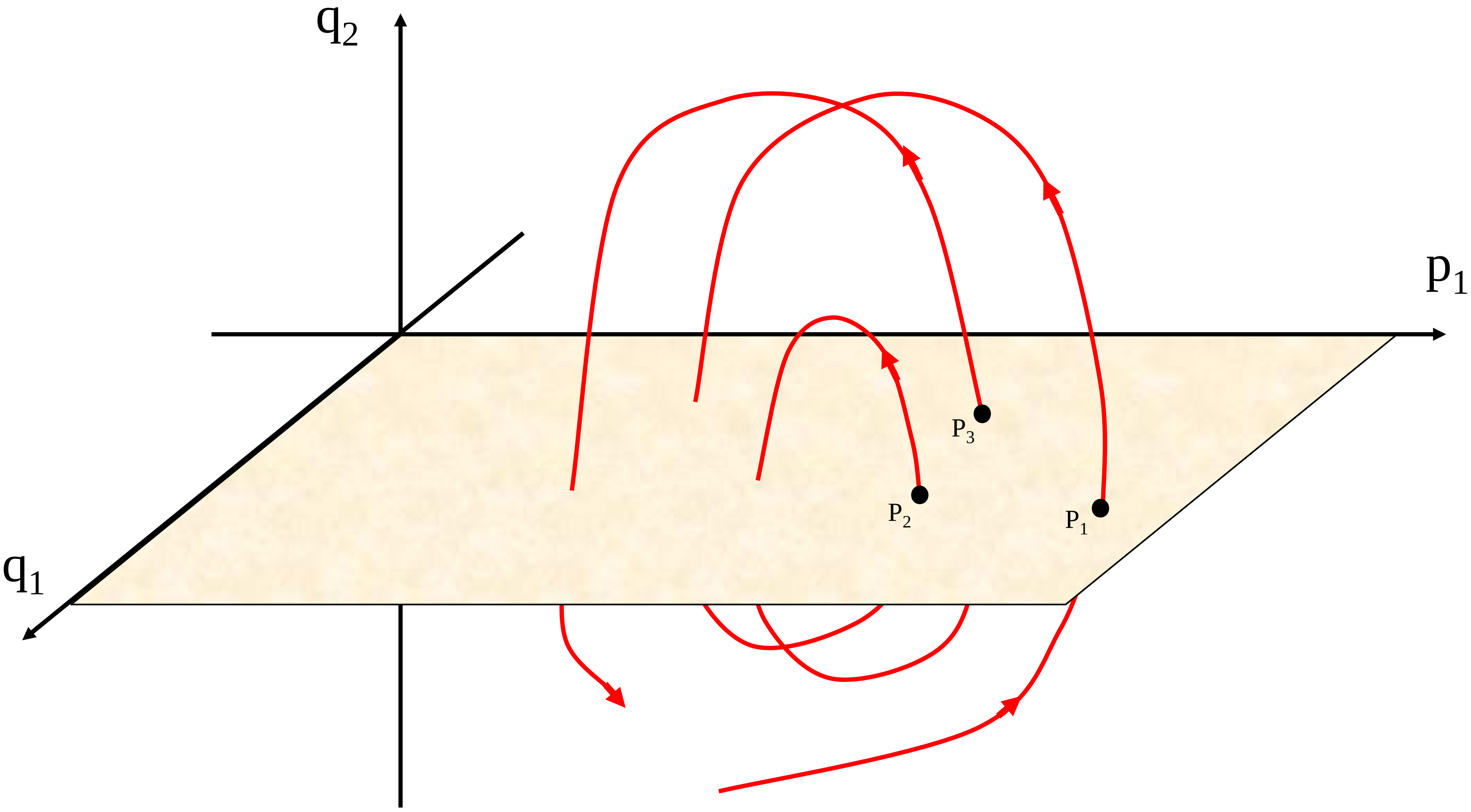




Retrato de fase do pêndulo com um grau de liberdade. A seção de Poincaré é apenas uma linha.
Pontos vermelhos: pontos que interceptam as órbitas periódicas com a seção.

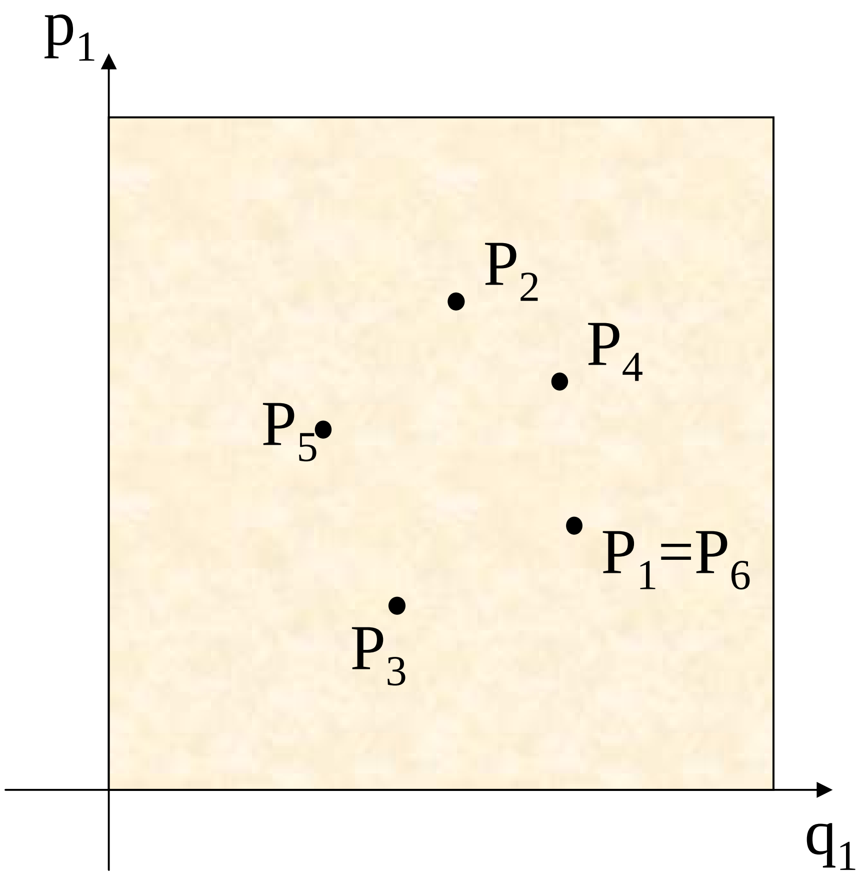
Seção de Poincarè bidimensional

Seção de Poincaré

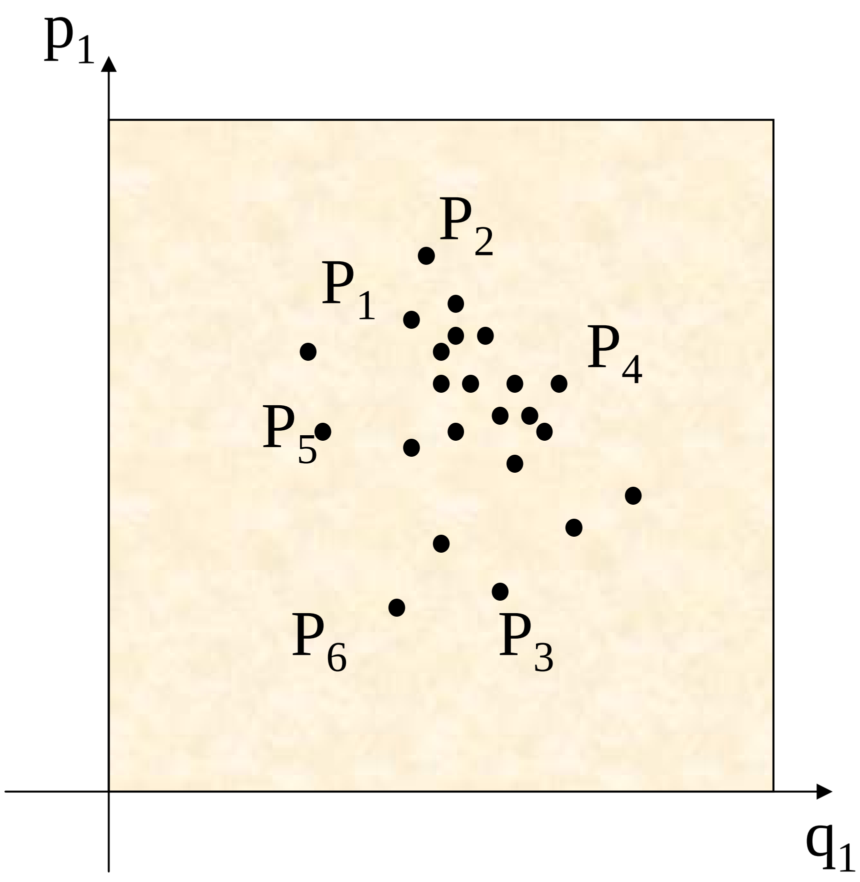


Exemplos de mapas de Poincaré
($q_2 = 0$ e $p_2 > 0$)

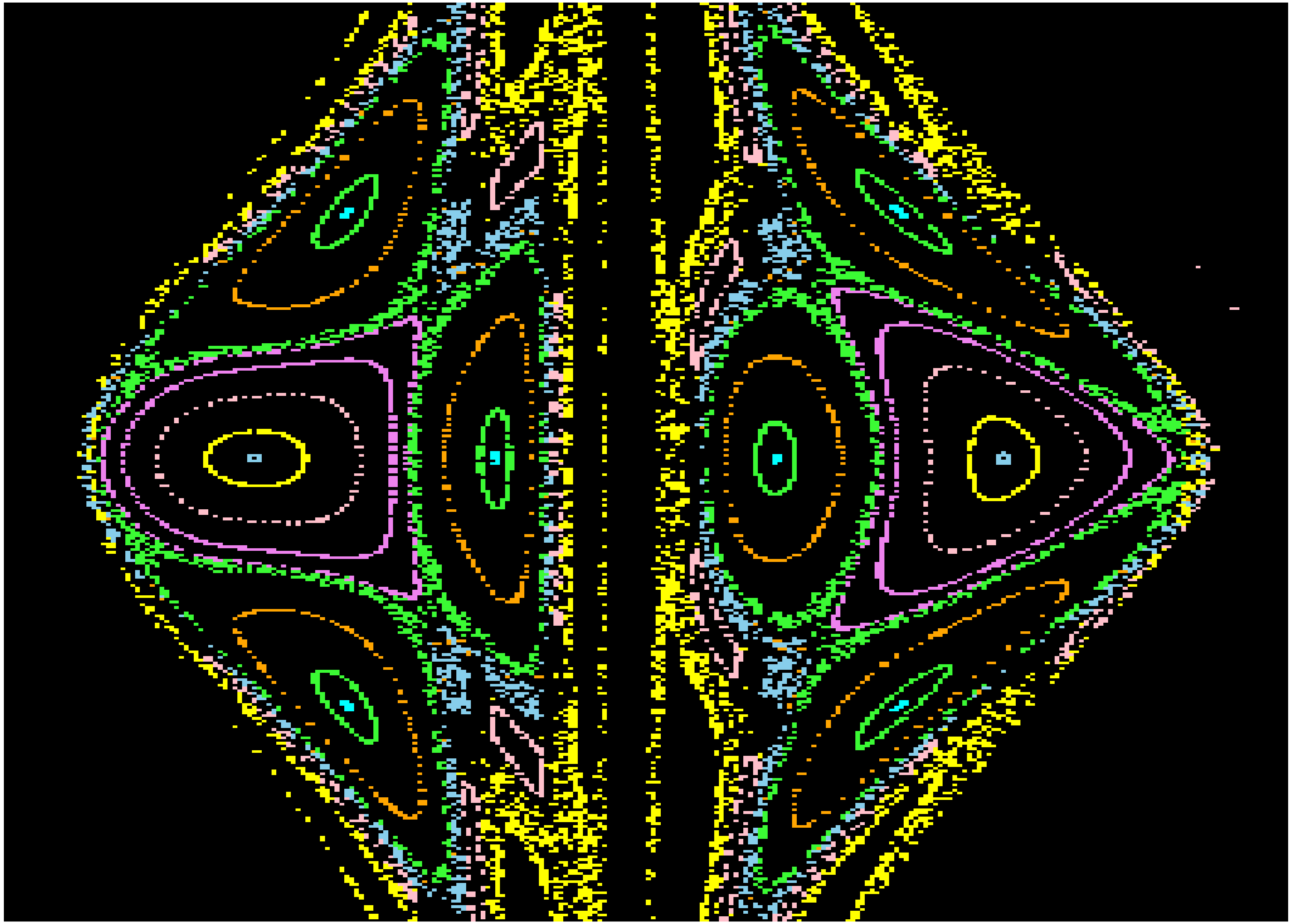
Órbita periódica



Órbita caótica



Seção de Poincarè do sistema caótico Júpiter-Sol-Terra



Sumário

- Sensibilidade às condições iniciais $\rightarrow$

  Previsibilidade em sistemas caóticos requer precisão absoluta nas condições iniciais.

  Imprecisões nas medidas são inevitáveis.

- Mudança em um parâmetro altera evolução, que pode se tornar caótica.

  Controle desse parâmetro pode evitar ou originar o caos.

Experiências Numéricas

- Método explorado por E. Fermi, a partir dos anos 40, para descobrir propriedades das trajetórias. Variação de condições iniciais e parâmetros.
- Anteriormente, haviam apenas investigações experimentais (observações em laboratório) ou teóricas (métodos matemáticos).