Capítulo 1

Equações de Lagrange

Neste Capítulo vamos recapitular os fundamentos da formulação Lagrangiana da Dinâmica Clássica bem como algumas aplicações representativas que iremos acompanhar ao longo deste livro. Nossa exposição será breve, pois o objetivo central deste livro é a formulação Hamiltoniana. Entretanto, o leitor interessado em maiores detalhes sobre as equações de Lagrange poderá consultar alguns dos muitos livros-texto existentes, tanto a nível de graduação como de pós-graduação.

1.1 Coordenadas generalizadas

Um conjunto de n coordenadas generalizadas é uma coleção de n quantidades, $(q_1, q_2, \ldots q_n)$, por meio das quais as posições das partículas em um sistema são especificadas. O estado de um sistema de N partículas pode ser descrito pelas $3N$ coordenadas cartesianas de cada partícula $(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots x_N, y_N, z_N)$, ou também por um conjunto qualquer de $3N$ coordenadas generalizadas $(q_1, q_2, \ldots q_{3N})$, que estão relacionadas às coordenadas cartesianas e ao tempo, por expressões da forma

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots x_N, y_N, z_N; t), \\ q_2 &= q_2(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots x_N, y_N, z_N; t), \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ q_{3N} &= q_{3N}(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots x_N, y_N, z_N; t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

Se o determinante Jacobiano da transformação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas generalizadas for não-nulo,

$$\frac{\partial(q_1, q_2, \ldots q_{3N})}{\partial(x_1, y_1, \ldots z_N)} = \begin{vmatrix} \partial q_1/\partial x_1 & \partial q_2/\partial x_1 & \cdots & \partial q_{3N}/\partial x_1 \\ \partial q_1/\partial y_1 & \partial q_2/\partial y_1 & \cdots & \partial q_{3N}/\partial y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial q_1/\partial z_N & \partial q_2/\partial z_N & \cdots & \partial q_{3N}/\partial z_N \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.2}$$

podemos resolver o conjunto de equações (1.1) para obter as coordenadas cartesianas como

funções das coordenadas generalizadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \ldots q_{3N}; t), \\ y_1 &= y_1(q_1, q_2, \ldots q_{3N}; t), \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \\ z_N &= z_N(q_1, q_2, \ldots q_{3N}; t). \end{aligned} \tag{1.3}$$

As derivadas temporais das coordenadas generalizadas, $\dot{q}_i = dq_i/dt$, $i = 1, 2, \ldots n$, são as velocidades generalizadas a elas associadas . As componentes cartesianas das velocidades para um sistema de N partículas podem ser expressas em termos das coordenadas e velocidades generalizadas:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_1}{\partial t}, \\ \dot{y}_1 &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial y_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial y_1}{\partial t}, \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \\ \dot{z}_N &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_N}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial z_N}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

A energia cinética do sistema de N partículas é dada, em coordenadas cartesianas, por

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 \right). \tag{1.5}$$

Substituindo as relações (1.42) em (1.5), a energia cinética é escrita em termos das coordenadas e velocidades generalizadas na forma

$$T(q_i, \dot{q}_i; t) = \sum_{k=1}^{3N} \sum_{\ell=1}^{3N} \frac{1}{2} A_{k\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell + \sum_{k=1}^{3N} B_k \dot{q}_k + T_0, \tag{1.6}$$

onde os coeficientes $A_{k\ell}$, B_k e T_0 dependem, em geral, das coordenadas generalizadas e do tempo, e são dados por:

$$A_{k\ell} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\ell} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial q_\ell} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial q_\ell} \right), \tag{1.7}$$

$$B_k = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right), \tag{1.8}$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right]. \tag{1.9}$$

À exceção de sistemas de coordenadas em movimento, as coordenadas generalizadas não dependem explicitamente do tempo, de modo que os coeficientes B_k e T_0 são identicamente nulos. Em consequência, a energia cinética $T = T(q_j, \dot{q}_j)$ é uma expressão quadrática nas velocidades generalizadas, com coeficientes que dependem das coordenadas generalizadas.

1.1.1 Sistema de coordenadas em rotação uniforme

Para descrever o movimento de uma partícula de massa m no plano pode ser conveniente empregar, como coordenadas generalizadas as coordenadas polares: $q_1 = r$, $q_2 = \theta$. Considerando que o eixo de referência (em relação ao qual o ângulo θ é medido) gira no sentido anti-horário com velocidade angular constante ω [Fig. **??**], a relação entre coordenadas cartesianas e generalizadas é

$$x(q_1, q_2, t) = r\cos(\theta + \omega t), \tag{1.10}$$
$$y(q_1, q_2, t) = r\sin(\theta + \omega t). \tag{1.11}$$

Como, neste exemplo, $N = 1$, haverá quatro coeficientes da forma (1.7), viz.

$$\begin{aligned} A_{11} &= m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2\right] \\ &= m[\cos^2(\theta+\omega t) + \sin^2(\theta+\omega t)] = m, \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} A_{12} = A_{21} &= m\left[\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2}\right] \\ &= mr[-\cos(\theta+\omega t)\sin(\theta+\omega t) + \sin(\theta+\omega t)\cos(\theta+\omega t)] = 0, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} A_{22} &= m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2\right] \\ &= mr^2[\sin^2(\theta+\omega t) + \cos^2(\theta+\omega t)] = mr^2, \end{aligned} \tag{1.14}$$

dois da forma (1.8), que são

$$\begin{aligned} B_1 &= m\left[\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial t}\right] \\ &= mr\omega[-\cos(\theta+\omega t)\sin(\theta+\omega t) + \sin(\theta+\omega t)\cos(\theta+\omega t)] = 0, \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= m\left[\frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{\partial y}{\partial t}\right] \\ &= mr^2\omega[\sin^2(\theta+\omega t) + \cos^2(\theta+\omega t)] = mr^2\omega, \end{aligned} \tag{1.16}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right] \\ &= mr^2\omega^2[\sin^2(\theta+\omega t) + \cos^2(\theta+\omega t)] = mr^2\omega^2. \end{aligned} \tag{1.17}$$

A energia cinética da partícula, de acordo com (1.6), será

$$\begin{aligned} T(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2}\left(A_{11}\dot{q}_1^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + A_{22}\dot{q}_2^2\right) + B_1\dot{q}_1 + B_2\dot{q}_2 + T_0, \\ &= \frac{1}{2}\left(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2\right) + mr^2\omega\dot{\theta} + \frac{1}{2}mr^2\omega^2, \end{aligned} \tag{1.18}$$

resultado este que pode ser obtido, naturalmente, por cálculo direto.

1.2 Lagrangiana

Caso as interações entre as N partículas do sistema sejam representadas por forças conservativas, como é o caso das forças gravitacionais e eletrostáticas, definimos uma energia potencial que depende das coordenadas cartesianas das partículas, $U = U(x_1, y_1, \ldots z_N)$. Em virtude das relações (1.3), a energia potencial pode, assim, ser expressa em termos das coordenadas generalizadas e do tempo $U = U(q_1, q_2, \ldots q_n; t)$.

Há determinadas situações em que a energia potencial pode depender também das velocidades generalizadas, como no exemplo de uma partícula carregada num campo eletromagnético, ou ainda quando a partícula move-se num meio viscoso linear (função de Rayleigh).

Introduzimos, assim, a função de Lagrange (ou Lagrangiana) como

$$L(q_i, \dot{q}_i; t) = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i; t). \tag{1.19}$$

Em muitos sistemas mecânicos existem vínculos, que fazem com que algumas coordenadas generalizadas não sejam independentes. Vínculos ditos holonômicos são tais que as condições de vínculo são representadas por equações envolvendo as coordenadas e o tempo. Um exemplo símples é o de uma partícula restrita a mover-se na superfície de uma esfera de raio a. Usando coordenadas cartesianas (x, y, z), a condição de vínculo holonômico é $r = a$, que podemos expressar na forma

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Já se a partícula for livre para mover-se em todo o espaço, com exceção do interior da esfera, a condição de vínculo é uma inequação $(r \geq a)$ e, portanto, o vínculo é não-holonômico.

De maneira geral, para um sistema de N partículas sujeito a m vínculos holonômicos independentes, há m relações envolvendo as $3N$ coordenadas cartesianas e o tempo, na forma

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1, \ldots z_N; t) &= 0, \\ f_2(x_1, y_1, \ldots z_N; t) &= 0, \\ \vdots \quad \vdots \quad & \vdots \\ f_m(x_1, y_1, \ldots z_N; t) &= 0, \end{aligned} \tag{1.20}$$

Definimos o número de graus de liberdade n do sistema como o número mínimo de coordenadas necessárias para especificar a sua configuração, após eliminarmos as coordenadas que se mantém constantes devido aos vínculos. Para um sistema de N partículas com m equações de vínculos holonômicos, haverá $n = 3N - m$ graus de liberdade. De fato, podemos resolver as equações (1.20) para m das $3N$ coordenadas cartesianas em termos das demais $n = 3N - m$ coordenadas. Assim, apenas n coordenadas generalizadas precisam ser especificadas, e a Lagrangiana será função das n coordenadas, as respectivas velocidades generalizadas, e o tempo.

1.3 Princípio de Hamilton

As equações de movimento correspondentes a uma dada Lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ podem ser obtidas por meio do princípio variacional de Hamilton, que fornece condições matemáticas necessárias para que uma certa quantidade, a chamada integral de ação, tenha um extremo (um máximo ou um mínimo). A integral de ação é definida, em termos da Lagrangiana, como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt, \tag{1.21}$$

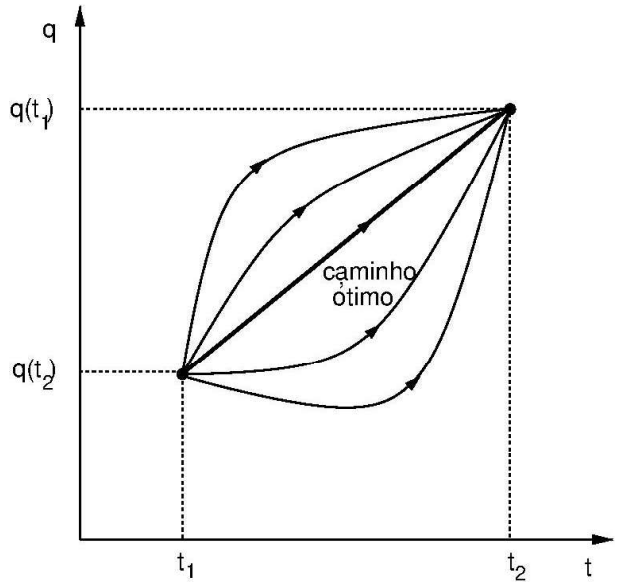

Figura 1.1: Diversos caminhos ligando dois pontos fixos no diagrama coordenada *versus* tempo.

onde t_1 e t_2 são dois instantes de tempo fixos. Segundo o princípio de Hamilton, o movimento do sistema descrito por $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ entre os instantes t_1 e t_2 é tal que a integral de ação seja estacionária.

Vamos considerar por simplicidade um sistema com um único grau de liberdade, para o qual consideramos diversos caminhos possíveis entre dois instantes de tempo fixos t_1 e t_2 [Fig. 1.1]. Apenas um deles será o que, de fato, representa o movimento do sistema (o "caminho ótimo"). Calculando a integral de ação (1.21) para cada um destes infinitos caminhos, o caminho ótimo corresponde àquele para o qual a integral (1.21) tenha um extremo (na verdade, um valor mínimo).

Descrevemos matematicamente estes infinitos caminhos, ligando os pontos fixos 1 e 2 na Fig. 1.1, como pequenas variações do caminho ótimo,

$$q(t) \to q(t) + \delta q(t), \tag{1.22}$$

onde $|\delta q(t)| \ll |q(t)|$ para $t_1 \leq t \leq t_2$, e o símbolo δq indica uma variação da coordenada generalizada correspondente. A integral de ação S é estacionária se é nula a sua variação

$$\delta S = 0, \tag{1.23}$$

de modo que

$$S \to S + o(\delta q^2), \tag{1.24}$$

onde o símbolo $o(\delta q^2)$ denota termos de ordem δq^2 ou superior. Como δq é supostamente pequeno, estes termos poderão ser desprezados.

A variação dos caminhos pode ser expressa em termos de um parâmetro variacional α, tal que

$$\delta q(t) = \alpha \zeta(t), \tag{1.25}$$

onde $\alpha = 0$ indica o caminho ótimo, ou seja, aquele que torna a ação estacionária, correspondendo efetivamente ao movimento do sistema. Definimos, também, uma função de deformação $\zeta(t)$, que deve ser diferenciável no intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ e que anula-se nos pontos fixos do movimento:

$$\zeta(t_1) = \zeta(t_2) = 0. \tag{1.26}$$

Passando, agora, para o caso de n graus de liberdade, os infinitos caminhos ligando os dois pontos fixos podem ser escritos em função do parâmetro variacional como $q_i(t,\alpha)$, onde $i = 1,2,\ldots n$. O caminho ótimo será denotado por $q_i(t,\alpha = 0)$. Substituindo (1.25) em (1.22), os demais caminhos serão relacionados ao caminho ótimo por

$$q_i(t,\alpha) = q_i(t,\alpha = 0) + \alpha\zeta_i(t), \qquad (i = 1,2,\ldots n). \tag{1.27}$$

A variação da ação correspondente às variações dos caminhos entre t_1 e t_2 será

$$\delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right) d\alpha, \tag{1.28}$$

de forma que, para termos uma ação estacionária no caminho ótimo, no sentido de (1.23), impomos a condição

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0. \tag{1.29}$$

ou seja, a integral de ação tem um extremo, em relação ao parâmetro variacional α.

1.4 Equações de Lagrange

De (1.21), a integral de ação, como função do parâmetro variacional, é

$$S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_i(t,\alpha), \dot{q}_i(t,\alpha), t). \tag{1.30}$$

Como os instantes de tempo t_1 e t_2 são fixos, então

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha}\right). \tag{1.31}$$

O segundo termo do lado direito da expressão acima pode ser integrado por partes, dando como resultado

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right), \tag{1.32}$$

Usando (1.27),

$$\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} = \zeta_i(t), \tag{1.33}$$

e que, devido a (1.26), anula-se nos pontos fixos. Assim,

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right|_{t_1}^{t_2} = 0,$$

tal que (1.31) seja reescrita como

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right\}. \tag{1.34}$$

Calculando a derivada no caminho ótimo teremos

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right\}\zeta_i(t) = 0. \tag{1.35}$$

Na ausência de vínculos, as coordenadas generalizadas são todas independentes entre si. Assim, para uma deformação $\zeta_i(t)$ arbitrária, o integrando da expressão acima deve ser identicamente nulo para todos os tempos e todos os graus de liberdade, o que nos leva às chamadas equações de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{1.36}$$

onde q_i e $\dot{q}_i$ são, agora, independentes do parâmetro variacional α.

Caso a Lagrangiana não dependa explicitamente de alguma coordenada generalizada, por exemplo q_k, então $\partial L/\partial q_k = 0$ e as equações de Lagrange (1.36) nos informam que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0, \tag{1.37}$$

ou seja, a quantidade $\partial L/\partial \dot{q}_k$ é uma constante do movimento. A coordenada q_k é dita ignorável, ou cíclica.

Um exemplo simples é uma partícula de massa m movendo-se no espaço, para a qual podemos usar como coordenadas generalizadas as suas coordenadas cartesianas $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$, com as respectivas velocidades generalizadas $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Supondo que a partícula mova-se sob a ação de forças conservativas, haverá uma energia potencial $U(x, y, z)$, de modo que a Lagrangiana correspondente é

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - U(x, y, z). \tag{1.38}$$

Haverá uma equação de Lagrange da forma (1.36) para cada coordenada,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = -\frac{\partial U}{\partial q_i} - m\ddot{q}_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.39}$$

que é a própria equação Newtoniana do movimento, uma vez que a i-ésima componente da força resultante sobre a partícula é igual a $-\partial U/\partial q_i$.

1.5 Equações de Lagrange na presença de vinculos

As equações de Lagrange (1.36) são válidas na presença de vínculos holonômicos. Para um sistema de N partículas no espaço tridimensional, onde supomos a existência de m condições de vínculo na forma dada por (1.20),

$$f_i(x_1, y_1, \ldots z_N; t) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots m). \tag{1.40}$$

Temos a possibilidade de escolher, como coordenadas generalizadas, quaisquer $3N$ funções das coordenadas cartesianas e do tempo, desde que seja possível resolver univocamente as equações correspondentes em relação a $(x_1, y_1, \ldots z_N)$. Usando esta liberdade de escolha, selecionamos como as primeiras m coordenadas justamente as m funções de vínculo holonômico dadas por (1.40), e as demais $n = 3N - m$ coordenadas de uma maneira conveniente

$$q_i(x_1, y_1, \ldots z_N; t) = f_i(x_1, y_1, \ldots z_N; t) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \tag{1.41}$$

$$q_i(x_1, y_1, \ldots z_N; t) = \varphi_i(x_1, y_1, \ldots z_N; t), \qquad (i = m+1, m+2, \ldots 3N), \tag{1.42}$$

onde φ_i são as funções escolhidas para efetuar a transformação desejada.

Se ignorarmos as condições identicamente nulas, as equações (1.41)-(1.42) descrevem uma transformação entre dois conjuntos de $3N$ variáveis, que podem ser resolvidas univocamente desde que o Jacobiano da transformação seja diferente de zero [vide (1.2)]. Desta forma, obteremos $3N$ relações da forma (1.3). Como esta transformação de coordenadas é geral, podemos expressar a condição variacional (1.35) na presença de m vínculos holonômicos, como

$$\sum_{i=m+1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \right\} \zeta_i(t) = 0, \tag{1.43}$$

onde descartamos os m primeiros termos do somatório por serem identicamente nulos, devido a (1.41). Nesta nova expressão, as $n = 3N - m$ coordenadas q_i são agora independentes por construção. Podemos, assim, igualar a zero o termo entre chaves, para deformações η_i arbitrárias, o que nos conduz a um conjunto de n equações de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \qquad (i = m+1, m+2, \ldots 3N). \tag{1.44}$$

Se um sistema possuir vínculos holonômicos, poderemos sempre encontrar um conjunto adequado de coordenadas generalizadas, em termos das quais as equações de Lagrange não façam referência explícita aos vínculos. Caso os vínculos do sistema sejam holonômicos, pode-se mostrar que as equações de Lagrange são condições necessárias e suficientes para que a integral de ação S tenha um extremo (na prática, um valor mínimo). Já para vínculos não-holonômicos, as equações de Lagrange são condições apenas necessárias.

Se, no entanto, desejamos determinar as forças de vínculo que atuam sobre um sistema com vínculos holonômicos, podemos fazê-lo introduzindo os chamados multiplicadores indeterminados de Lagrange. Escrevendo as m condições de vínculo (1.31) em termos das coordenadas generalizadas e do tempo, obtemos

$$df_k(q_1, q_2, \ldots q_n; t) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots m) \tag{1.45}$$

Pela fórmula da diferencial total,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0. \tag{1.46}$$

A variação da ação (1.28) pode ser escrita, em vista de (1.34), como

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \right\} \delta q_i = 0. \tag{1.47}$$

Na presença de vínculos, as coordenadas generalizadas q_i **não são** independentes, e portanto não é possível igualar a zero o termo entre chaves, como fizemos na Seção 1.3.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \tag{1.48}$$

Para eliminarmos as coordenadas dependentes, introduzimos m multiplicadores de Lagrange $\lambda_k(t)$, tal que

$$\lambda_k(t) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \delta q_i = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots m). \tag{1.49}$$

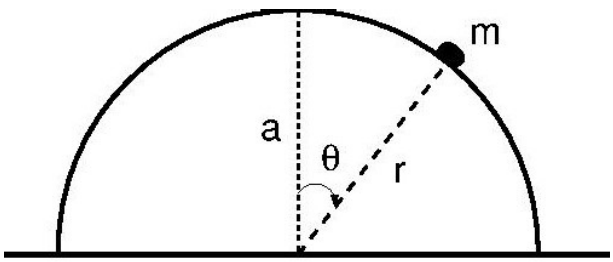

Figura 1.2: Partícula deslizando por um hemisfério.

Somando sobre o índice k e integrando no tempo entre os instantes t_1 e t_2,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \tag{1.50}$$

Adicionando (1.47) à equação anterior, membro-a-membro,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \right\} \delta q_i = 0. \tag{1.51}$$

Escolhemos os multiplicadores de Lagrange tais que o termo entre chaves seja identicamente nulo, ou seja,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial q_i} = 0. \tag{1.52}$$

Definindo os coeficientes de vínculo,

$$a_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial q_i}, \tag{1.53}$$

as equações de Lagrange (1.52) podem ser colocadas na forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(t) a_{ki}, \tag{1.54}$$

onde Q_i é chamada força de vínculo generalizada.

1.5.1 Partícula deslizando por um hemisfério

Como um exemplo símples de aplicação desta técnica, consideremos uma partícula de massa m, inicialmente no topo de um hemisfério de raio a. A partícula recebe um piparote e começa a deslizar sem atrito pelo hemisfério [Fig. 1.2]. Desejamos saber para que ângulo crítico a partícula deixa a superfície do hemisfério. Usando coordenadas polares, a condição de vínculo (holonômico), neste caso, é $f(r,\theta) = r - a = 0$, de modo que os coeficientes de vínculo são

$$a_r = \frac{\partial f}{\partial r} = 1, \qquad a_\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0. \tag{1.55}$$

Como há uma única condição de vínculo, haverá um só multiplicador de Lagrange λ.

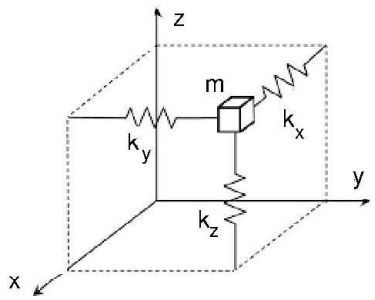

Figura 1.3: Oscilador harmônico tridimensional anisotrópico.

A Lagrangiana do sistema é escrita, neste caso, sem implementação do vínculo, ou seja, supondo a distância radial r variável:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\cos\theta. \tag{1.56}$$

As equações (1.54) são, portanto,

$$mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta - r\ddot{r} + \lambda = 0 \tag{1.57}$$

$$mgr\sin\theta - m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = 0. \tag{1.58}$$

Impondo, agora, o vínculo $r = a$, temos que $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, de modo que as equações acima tornam-se

$$ma\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \lambda = 0 \tag{1.59}$$

$$mga\sin\theta - ma^2\ddot{\theta} = 0. \tag{1.60}$$

De (1.60) temos a equação

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{a}\sin\theta, \tag{1.61}$$

onde usamos a regra da cadeia. Integrando obtemos

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{a}\cos\theta + C, \tag{1.62}$$

onde a constante de integração C é determinada pelas condições iniciais que, neste problema, são $\theta(t=0) = \dot{\theta}(t=0) = 0$, donde $C = g/a$. Substituindo o resultado em (1.62) e fazendo alguns rearranjos algébricos obtemos o multiplicador de Lagrange

$$\lambda(\theta) = mg(3\cos\theta - 2). \tag{1.63}$$

Uma análise elementar mostra que a força de vínculo correspondente $Q_r = \lambda$ é a reação normal do hemisfério. A partícula deixa a superfície do hemisfério quando esta força se anula, o que ocorre para um ângulo crítico dado por $\cos\theta_0 = 2/3$, ou seja, $\theta_0 \approx 48,19^o$.

1.6 Oscilador harmônico

Um oscilador harmônico tridimensional anisotrópico consiste em uma partícula de massa m presa por molas de constantes elásticas k_x, k_y e k_z [Fig. 1.3]. Admitindo válida a lei de Hooke

para as deformações elásticas das molas, a energia potencial correspondente é

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \frac{1}{2}\left(k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2\right) \\ &= \frac{1}{2} m \left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right), \end{aligned} \tag{1.64}$$

onde definimos as frequências naturais ao longo das três direções,

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}, \qquad \omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}, \qquad \omega_z = \sqrt{\frac{k_z}{m}}. \tag{1.65}$$

A Lagrangiana do sistema é

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2} m \left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right), \tag{1.66}$$

de maneira que a equação de Lagrange correspondente à coordenada x é

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0. \tag{1.67}$$

Determinando as derivadas parciais da Lagrangiana em relação a x e $\dot{x}$, obtemos

$$m\omega^2 x + \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0, \tag{1.68}$$

que pode ser escrita na forma

$$\ddot{x} + \omega_x^2 x = 0. \tag{1.69}$$

Analogamente, para os outros graus de liberdade, as equações de movimento correspondentes são

$$\ddot{y} + \omega_y^2 y = 0, \tag{1.70}$$

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z = 0, \tag{1.71}$$

As soluções gerais de (1.69)-(1.71) são, respectivamente, dadas por

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \vartheta_x), \tag{1.72}$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \vartheta_y), \tag{1.73}$$

$$z(t) = A_z \cos(\omega_z t + \vartheta_z), \tag{1.74}$$

onde $A_{x,y,z}$ são as amplitudes da oscilação em cada direção espacial, e $\vartheta_{x,y,z}$ as fases iniciais. Todas elas são constantes de integração, cujos valores são determinados pelas condições iniciais do sistema.

Consideramos a posição e a velocidade iniciais na direção x dadas, respectivamente, por

$$x(t=0) = x_0, \qquad \dot{x}(t=0) = v_{x0}. \tag{1.75}$$

Derivando em relação ao tempo a solução (1.72), e substituindo as condições iniciais (1.75), obtemos

$$A_x \cos\vartheta_x = x_0, \qquad -\omega_x A_x \operatorname{sen}\vartheta_x = v_{x0}, \tag{1.76}$$

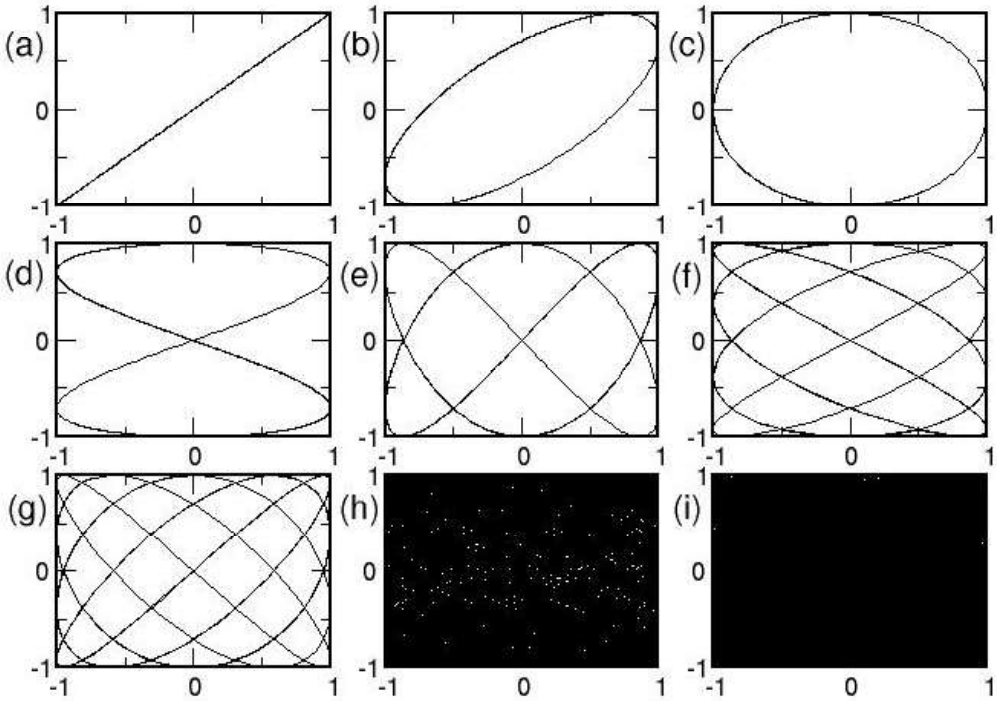

Figura 1.4: Figuras de Lissajous no plano xy para $A_x = A_y = 1$. (a) $\omega_x = \omega_y = 1$, $\vartheta_x = \vartheta_y = 0$; (b) $\omega_x = \omega_y = 1$, $\vartheta_x = \pi/4$, $\vartheta_y = 0$. Nos demais $\vartheta_x = \pi/2$, $\vartheta_y = 0$, com: (c) $\omega_x = \omega_y = 1$; (d) $\omega_x = 2$, $\omega_y = 1$; (e) $\omega_x = 2$, $\omega_y = 3$; (f) $\omega_x = 4$, $\omega_y = 3$; (g) $\omega_x = 4$, $\omega_y = 5$; (h) $\omega_x = 1$, $\omega_y = \sqrt{2}$; (i) $\omega_x = 1$, $\omega_y = \sqrt{5}$.

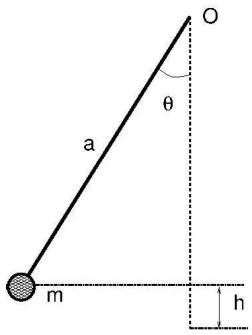

Figura 1.5: Pêndulo símples.

o que determina as constantes de integração,

$$A_x = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega_x^2}}, \tag{1.77}$$

$$\vartheta_x = \text{arctg}\left(-\frac{v_{x0}}{\omega_x x_0}\right), \tag{1.78}$$

com expressões análogas nas direções y e z.

As soluções (1.72)-(1.73) representam oscilações harmônicas independentes nas direções x, y e z com frequências ω_x, ω_y e ω_z, respectivamente. O movimento da partícula está confinado ao interior de um paralelepípedo de arestas $2A_x$, $2A_y$ e $2A_z$. Se as frequências forem comensuráveis, então existem inteiros positivos (diferentes de zero) n_x, n_y e n_z tais que

$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y} = \frac{\omega_z}{n_z}, \tag{1.79}$$

de modo que as razões entre as frequências são números racionais. Neste caso as trajetórias serão fechadas, formando as *figuras de Lissajous*, e o movimento é periódico. Alguns exemplos, no plano xy, estão representados nas Figuras 1.4(a) até (g). Se os inteiros (n_y, n_y, n_z) forem números primos entre si (não há divisor inteiro comum) o período do movimento é

$$\tau = \frac{2\pi n_x}{\omega_x} = \frac{2\pi n_y}{\omega_y} = \frac{2\pi n_z}{\omega_z}. \tag{1.80}$$

Caso as frequências sejam incomensuráveis não há uma relação da forma (1.79) e portanto as trajetórias não mais serão fechadas, preenchendo densamente o interior do paralelepípedo. Estas trajetórias são ergódicas no sentido de que a partícula irá aproximar-se de qualquer ponto no interior do paralelepípedo ao longo do tempo [Figs. 1.4(h) e (i)]. Este tipo de movimento é também chamado *quase-periódico*.

Finalmente, se as três frequências forem iguais (oscilador isotrópico), então temos um caso particular da relação (1.79) com $n_x = n_y = n_z = 1$. Em um período τ a partícula executa um ciclo completo de oscilação em cada direção, A trajetória, neste caso, pode ser um segumento de reta, uma elipse ou um círculo, dependendo dos valores das fases $(\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z)$ [Figs. 1.4(a) até (c)].

1.7 Pêndulo

O pêndulo símples é formado por uma partícula de massa m presa a um ponto de suspensão O por uma haste rígida inextensível e de massa desprezível de comprimento a (é, de fato, um

rotor num plano vertical) [Fig. 1.5]. A posição da haste é descrita pela coordenada generalizada $q = \theta$, medida em relação à posição de equilíbrio.

A energia cinética de rotação do pêndulo é dada pela expressão

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2, \tag{1.81}$$

onde $I = ma^2$ é o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo ponto O e é perpendicular ao plano. O pêndulo está sujeito a uma força gravitacional constante, de modo que sua energia potencial é

$$U = mgh = mga(1 - \cos\theta), \tag{1.82}$$

onde g é a aceleração da gravidade. A Lagrangiana do sistema será

$$L = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 - mga(1 - \cos\theta). \tag{1.83}$$

e a equação de Lagrange correspondente

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = -mga \operatorname{sen}\theta - ma^2\ddot{\theta} = 0. \tag{1.84}$$

Definindo a frequência angular

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}, \tag{1.85}$$

a equação de movimento (1.84) torna-se

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \operatorname{sen}\theta = 0. \tag{1.86}$$

1.7.1 Solução da equação do movimento

Vamos considerar as seguintes condições iniciais

$$\theta(t = 0) = \theta_0, \qquad \dot{\theta}(t = 0) = 0, \tag{1.87}$$

onde θ_0 será a amplitude das oscilações. Multiplicando (1.86) por $\dot{\theta}$ obtemos

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \omega_0^2 \operatorname{sen}\theta\dot{\theta} = 0, \tag{1.88}$$

que podemos reescrever como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \cos\theta\right) = 0, \tag{1.89}$$

de modo que o termo entre parênteses é uma constante do movimento. Tendo isso em mente, e substituindo (1.87) em (1.89), resulta em

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \cos\theta = -\omega_0^2 \cos\theta_0. \tag{1.90}$$

Colocando $\dot{\theta}$ em evidência,

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}, \tag{1.91}$$

e escolhendo o sinal negativo, sem perda de generalidade, exprimimos essa relação como uma quadratura na variável θ

$$I \equiv \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = -\sqrt{2}\,\omega_0 t. \tag{1.92}$$

Usando a fórmula do arco-metade da trigonometria reescrevemos o integrando como

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cosec}\frac{\theta_0}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta \left(1 - \operatorname{cosec}^2\frac{\theta_0}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1/2} \tag{1.93}$$

Fazemos uma substituição de variável, de θ para ϕ, definida implicitamente por

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}, \tag{1.94}$$

tal que, se $\theta = \theta_0$, então $\phi = \pi/2$. Diferenciando essa expressão obtemos

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\cos\phi\,d\phi. \tag{1.95}$$

Inserindo (1.94) e (1.95) em (1.93), após algumas simplificações algébricas a integral torna-se

$$I = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_{\pi/2}^{\phi} d\phi \left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{\theta_0}{2}\operatorname{sen}^2\phi\right)^{1/2}, \tag{1.96}$$

cuja solução envolve o uso de funções elípticas de Jacobi, cujas propriedades básicas estão elencadas no Apêndice A. Definindo o módulo elíptico

$$k = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right), \tag{1.97}$$

tal que $0 < k^2 < 1$, temos

$$I = \frac{2}{\sqrt{2}}\left\{\mathsf{F}(\phi,k) - \mathsf{K}(k)\right\}, \tag{1.98}$$

onde

$$\mathsf{F}(\phi,k) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}}. \tag{1.99}$$

é a integral elíptica incompleta de primeira espécie, enquanto

$$\mathsf{K}(k) = \mathsf{F}(\pi/2,k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}}. \tag{1.100}$$

é a respectiva integral elíptica completa.

Com estas definições, a quadratura (1.92) nos leva ao seguinte resultado

$$u \equiv \mathsf{F}\left(\phi, \operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\right) = \mathsf{K}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\right) - \omega_0 t. \tag{1.101}$$

Invertendo a integral elíptica incompleta de primeira espécie [cf. (**??**)] temos a amplitude de Jacobi

$$\phi = \operatorname{am}(u,k) = \mathsf{F}^{-1}(u,k), \tag{1.102}$$

tal que, pela definição do seno elíptico [cf. (A.12)],

$$\mathrm{sn}\,(u,k) = \mathrm{sen}\,\phi = \mathrm{sen}\,(\mathrm{am}\,(u,k)). \tag{1.103}$$

Usando (1.94), retornamos para a variável original θ, dada por

$$\theta(t) = 2\,\mathrm{arcsen}\left\{\mathrm{sen}\,\frac{\theta_0}{2}\,\mathrm{sn}\left(-\omega_0 t + \mathsf{K}\left(\mathrm{sen}\,\frac{\theta_0}{2}\right)\right)\right\}. \tag{1.104}$$

Se a amplitude das oscilações for muito pequena, então

$$k = \mathrm{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \approx \frac{\theta_0}{2} \ll 1, \tag{1.105}$$

de modo que podemos usar as seguintes aproximações: $\mathsf{K}(k) \approx \pi/2$ [cf. (A.4)] e $\mathrm{sn}\,(u,k) \approx \mathrm{sen}\,u$ [cf. (A.15)]. Assim, a solução do pêndulo (1.104) reduz-se, no caso de pequenas amplitudes, à expressão válida para o oscilador harmônico

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t), \tag{1.106}$$

em vista das condições iniciais (1.87).

Na figura 1.6(a) nós mostramos a solução exata, dada por (1.104), como função de $\omega_0 t$, no caso de uma amplitude $\theta_0 = 0,1\pi = 18^o$, e a comparamos com a solução aproximada do tipo oscilador harmônico, dada por (1.106). A concordância entre as soluções é bastante satisfatória, especialmente para tempos pequenos. Já para amplitudes maiores, como na Fig. 1.6(b), para a qual $\theta_0 = 0,5\pi = 90^o$, as soluções diferem bastante com o passar do tempo, o que é natural pois a solução aproximada não depende da amplitude. Finalmente, na Fig. 1.6(c), comparamos as soluções exatas para diferentes valores da amplitude, a saber: $\theta_0 = 144^o$, 162°, e $178,2^o$.

1.7.2 Período das oscilações

O período τ das oscilações do pêndulo é definido pela condição

$$\theta(t) = \theta(t+\tau). \tag{1.107}$$

Como o seno elíptico $sn(u,k)$ é uma função com período $4\mathsf{K}(k)$ [cf. (A.28)], usando (1.104) temos

$$\tau = \frac{4\mathsf{K}(k)}{\omega_0} = 4\mathsf{K}(k)\sqrt{\frac{a}{g}}. \tag{1.108}$$

No caso particular de pequenas amplitudes ($k \approx 0$) usamos a aproximação $\mathsf{K}(k) \approx \pi/2$, de modo que

$$\tau_0 = \frac{4(\pi/2)}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}, \tag{1.109}$$

e que é independente da amplitude. Portanto,

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{2}{\pi}\mathsf{K}\left(\mathrm{sen}\,\frac{\theta_0}{2}\right), \tag{1.110}$$

Observamos que é razoável empregar a aproximação $\tau \approx \tau_0$ até amplitudes da ordem de $0,5\,\mathrm{rad} \approx 28^o$.

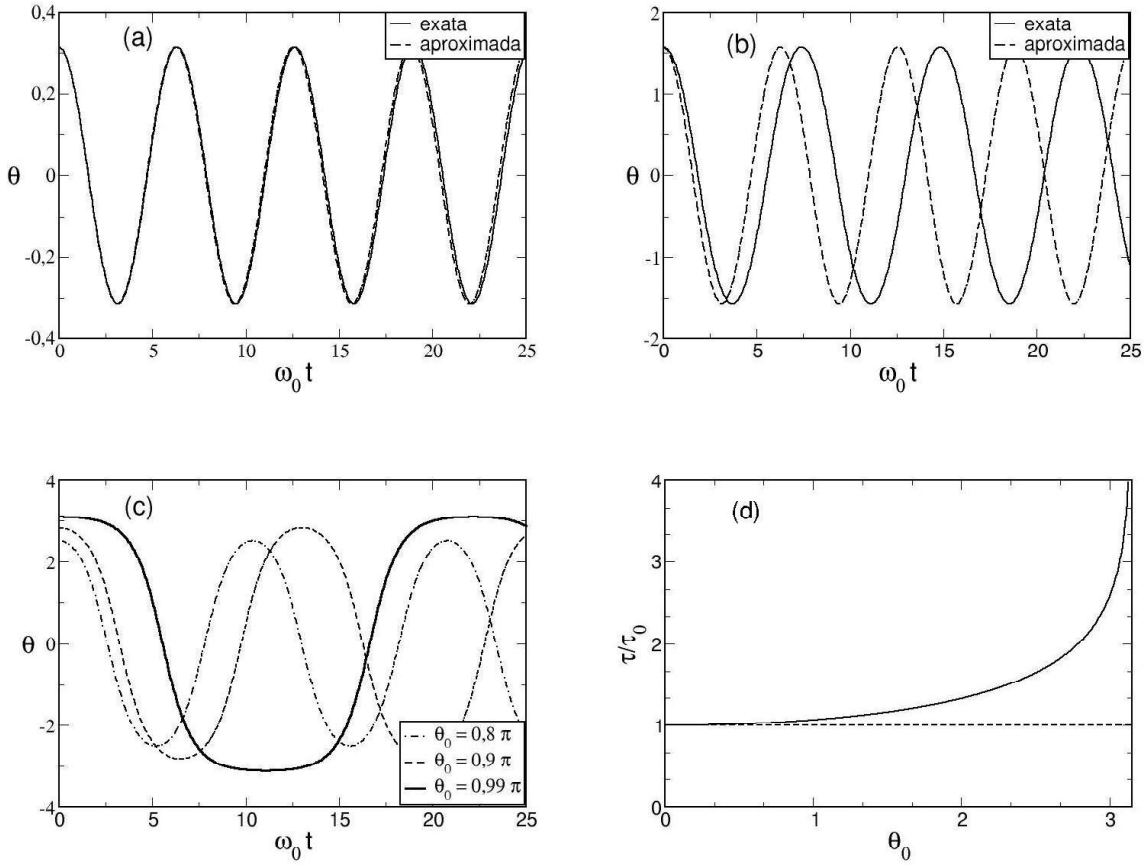

Figura 1.6: Soluções exata e aproximada para a equação de movimento do pêndulo com amplitudes (a) $\theta_0 = 0,1\pi$ e (b) $\theta_0 = 0,5\pi$. (c) Soluções exatas para o pêndulo com diferentes valores da amplitude θ_0. (d) Período normalizado do pêndulo em função da amplitude θ_0.

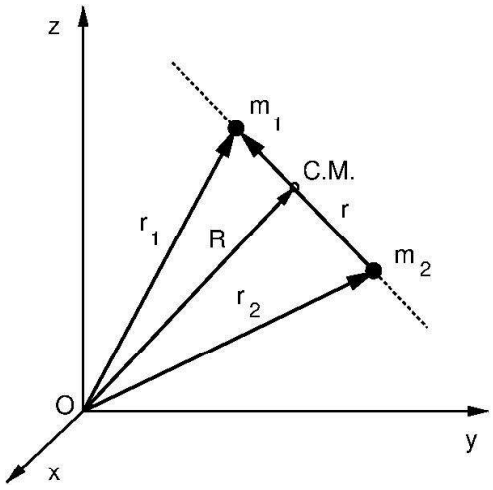

Figura 1.7: Sistema de duas partículas e seu centro de massa.

Para amplitudes não tão pequenas assim, usamos a expansão (A.9) para a integral elíptica completa de primeira espécie, tal que o período (1.108) é dado por uma série de potências do parâmetro k:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \cdots . \tag{1.111}$$

Considerando $k \approx \theta_0/2$ a expansão fica, em termos da amplitude,

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{9}{1024}\theta_0^4 + \cdots , \tag{1.112}$$

mostrando que o período das oscilações aumenta com a amplitude. De fato, a amplitude máxima $\theta_0 = \pi$, é tal que $k = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. Como $\mathsf{K}(k)$ diverge para $k \to 1$ então o período tende a infinito no ponto de amplitude máxima [cf. Fig. 1.6(d)].

1.8 Partícula num potencial central

O problema de uma partícula num potencial central é um dos mais importantes na Dinâmica, uma vez que forças importantes como a gravitacional e a eletrostática pertencem a esta categoria.

1.8.1 Lagrangiana do sistema de duas partículas

Vamos considerar um sistema de duas partículas de massas m_1 e m_2, localizadas pelos vetores de posição $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$, respectivamente. A energia cinética do sistema é

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2. \tag{1.113}$$

Um conjunto conveniente de coordenadas generalizadas é formado pelas coordenadas do centro de massa, definidas pelo vetor [Fig. 1.7],

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \tag{1.114}$$

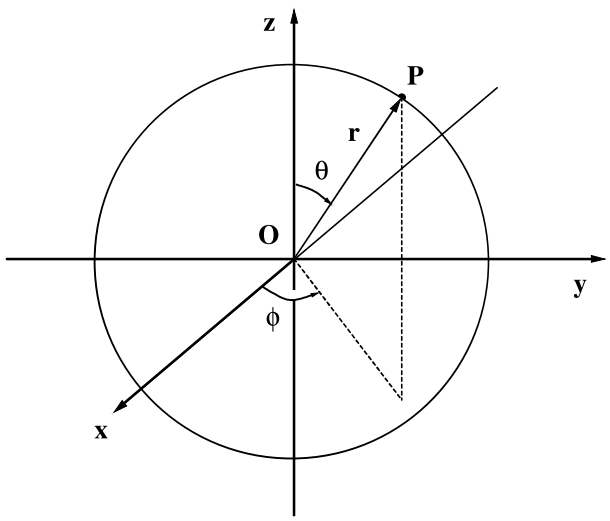

Figura 1.8: Sistema de coordenadas esféricas.

e as coordenadas do movimento relativo,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \tag{1.115}$$

Resolvemos este sistema em favor dos vetores de posição de cada partícula:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \tag{1.116}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}. \tag{1.117}$$

Derivando estas relações em relação ao tempo e substituindo em (1.113), a energia cinética do sistema assume a forma

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2, \tag{1.118}$$

onde definimos a massa reduzida do sistema

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.119}$$

O primeiro termo em (1.118) representa a energia cinética do centro de massa, enquanto o segundo termo a energia cinética do movimento relativo.

As partículas interagem por meio de uma força central que depende do módulo da distância entre eles. Por ser uma força conservativa, ela é derivável de uma energia potencial

$$U = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = U(|\mathbf{r}|). \tag{1.120}$$

Ignorando o movimento do centro de massa, podemos construir a Lagrangiana associada ao movimento relativo,

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(|\mathbf{r}|), \tag{1.121}$$

que descreve o movimento de uma partícula com a massa reduzida m num potencial central $U(r)$, onde r é a distância ao centro de força, situado na origem do sistema de coordenadas.

Em três dimensões espaciais usamos coordenadas esféricas (r,θ,ϕ), que estão relacionadas às coordenadas cartesianas pelas fórmulas [Fig. 1.8]

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi, \tag{1.122}$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \tag{1.123}$$
$$z = r\cos\theta. \tag{1.124}$$

Derivando as expressões acima em relação ao tempo temos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial \phi}\dot{\phi}\\ &= \mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\dot{r} + r\cos\theta\cos\phi\,\dot{\theta} - r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\dot{\phi} \qquad (1.125)\\ \dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\dot{\phi}\\ &= \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\dot{r} + r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\dot{\theta} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\,\dot{\phi} \qquad (1.126)\\ \dot{z} &= \frac{\partial z}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\dot{\phi}\\ &= \cos\theta\,\dot{r} - r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}. \qquad (1.127)\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado e somando estas expressões obtemos

$$\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,\dot{\phi}^2, \tag{1.128}$$

o que nos habilita a expressar a energia cinética do movimento relativo do sistema de duas partículas como

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,\dot{\phi}^2\right). \tag{1.129}$$

Lembrando que a coordenada r é o próprio módulo do vetor posição, a Lagrangiana de uma partícula sujeita a um potencial central será

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) - U(r). \tag{1.130}$$

Haverá três equações de Lagrange, uma para cada coordenada:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) &= 0,\\ m\,r\left(\dot{\theta}^2 + \mathrm{sen}^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) - \frac{dU}{dr} - m\,\ddot{r} &= 0, \qquad (1.131)\\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= 0\\ m\,r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 - \frac{d}{dt}\left(m\,r^2\,\dot{\theta}\right) &= 0, \qquad (1.132)\\ \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) &= 0\\ \frac{d}{dt}\left(m\,r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,\dot{\phi}\right) &= 0. \qquad (1.133)\end{aligned}$$

1.8.2 Movimento no plano

A terceira equação de Lagrange, (1.133), pode ser integrada diretamente, resultando

$$m r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\phi} = const., \tag{1.134}$$

e que identificamos como o momentum angular da partícula em relação a um eixo que passa pela origem (eixo polar). A relação (1.134) indica que este momentum angular é constante para qualquer escolha desse eixo. Se optarmos por um eixo polar que coincida com a direção do vetor posição **r** da partícula num certo instante, então $\theta = 0$ e a constante em (1.134) é nula.

As equações de Lagrange que restam, (1.131) e (1.132) devem ser resolvidas de maneira que o movimento subsequente da partícula, tal que tanto r como θ tenham valores diferentes de zero. Portanto, devemos ter necessariamente que $\dot{\phi} = 0$ para que (1.134) seja satisfeita para todos os tempos. Como ϕ é constante, a trajetória da partícula deve permanecer num mesmo plano ao longo do movimento. Escolhendo, sem perda de generalidade, o plano $\phi = 0$, a posição da partícula será descrita por duas coordenadas (r, θ).

A Lagrangiana para o movimento plano da partícula é obtida a partir de (1.130) como

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) - U(r), \tag{1.135}$$

que, desta vez, não depende explicitamente de θ, que torna-se uma nova coordenada ignorável. Aplicando $\dot{\phi} = 0$ na equação (1.132) chegamos à relação

$$\frac{d}{dt}\left(m r^2 \dot{\theta}\right) = 0, \tag{1.136}$$

a qual, após sua integração, fornece uma nova constante do movimento

$$mr^2\dot{\theta} = const. \equiv \ell, \tag{1.137}$$

que é o momentum angular da partícula em relação a um eixo que passa pela origem e é perpendicular ao plano da trajetória.

A constância desta quantidade é uma decorrência do princípio de conservação do momentum angular. Como a derivada temporal do momentum angular é igual ao torque resultante sobre a partícula, sendo este torque nulo para uma força central, resulta que o momentum angular é conservado. Da relação (1.137) exprimimos a velocidade angular da partícula como

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\ell}{mr^2}. \tag{1.138}$$

A equação de movimento restante, (1.131), refere-se à direção radial:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{dU}{dr} = 0, \tag{1.139}$$

Usando (1.138) ela pode ser reescrita numa forma que só contenha r e suas derivadas:

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}\right) = -\frac{dU_{ef}(r)}{dr}, \tag{1.140}$$

onde definimos a energia potencial efetiva

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}, \tag{1.141}$$

de maneira que (1.140) é a equação do movimento unidimensional (na direção radial) de uma partícula sob o potencial central efetivo (1.141). O termo $\ell^2/2mr^2$ representa uma barreira repulsiva de potencial, ou "barreira centrífuga".

Multiplicando ambos os membros de (1.140) por $\dot{r}$, usando a regra da cadeia, e rearranjando os termos obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}\right) = 0, \tag{1.142}$$

donde o termo entre parênteses é uma constante do movimento, que podemos identificar como a energia total da partícula

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}. \tag{1.143}$$

Colocando $\dot{r}$ em evidência na expressão acima e separando os termos obtemos

$$dt = dr\left\{\frac{2}{m}\left[E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right]\right\}^{-1/2}, \tag{1.144}$$

que pode ser integrada para determinar r como função do tempo, caso a energia potencial $U(r)$ seja conhecida. Em [40] (Seção 3-5) e [30] (§48) são discutidos casos em que esta integração pode ser efetuada analiticamente.

1.8.3 Problema de Kepler

O problema de Kepler consiste no movimento de um planeta de massa m_1 sob a ação do campo gravitacional produzido por uma estrela de massa m_2. Como a força gravitacional entre a estrela e o planeta é central, ignorando o movimento do centro de massa, reduzimos o problema de Kepler ao movimento ao de uma partícula de massa reduzida $m = m_1m_2/(m_1+m_2)$ sob a ação de um potencial central

$$U(r) = -\frac{k}{r}, \tag{1.145}$$

onde $k > 0$ é uma constante e r é a distância entre a partícula e o centro de força.

Substituindo (1.145) em (1.144)

$$dt = dr\left[\frac{2}{m}\left(E + \frac{k}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)\right]^{-1/2}. \tag{1.146}$$

De (1.137) resulta que $dt = (mr^2/\ell)d\theta$ e podemos integrar (1.146) na variável angular

$$\theta - \theta_0 = \frac{\ell}{m}\int \frac{dr}{r^2}\left[\frac{2}{m}\left(E + \frac{k}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)\right]^{-1/2}, \tag{1.147}$$

onde θ_0 é uma constante de integração (não necessariamente o valor inicial de θ).

Fazendo a substituição de variável

$$u = \frac{1}{r}, \qquad du = -\frac{1}{r^2}dr = -u^2dr, \tag{1.148}$$

transformamos (1.147) na seguinte quadratura,

$$\theta - \theta_0 = \int du\left[\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2mk}{\ell^2}u - u^2\right]^{-1/2}, \tag{1.149}$$

excentricidade	energia	cônica
$\varepsilon > 1$	$E > 0$	hipérbole
$\varepsilon = 1$	$E = 0$	parábola
$0 < \varepsilon < 1$	$U_m < E < 0$	elipse
$\varepsilon = 1$	$E = U_m$	círculo

Tabela 1.1: Diferentes tipos de seções cônicas, dependendo da energia da partícula

que pode ser efetuada com o auxílio da fórmula

$$\int \frac{du}{\sqrt{a+bu+cu^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos\left[-\frac{b+2cu}{\sqrt{b^2-4ac}}\right],$$

onde $a = 2mE/\ell^2$, $b = 2mk/\ell^2$ e $c = -1$, com o seguinte resultado

$$\theta - \theta_0 = -\arccos\left\{\frac{(\ell^2 u/mk) - 1}{\sqrt{1+2E\ell^2/mk^2}}\right\}. \tag{1.150}$$

Voltando à variável original $r = 1/u$, a inversão desta expressão fornece a equação da trajetória

$$\frac{1}{r} = C\left[1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)\right], \tag{1.151}$$

que descreve uma curva cônica no plano, onde definimos as constantes

$$C = \frac{mk}{\ell^2}, \tag{1.152}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{mk^2}}. \tag{1.153}$$

A quantidade $1/C$ é chamada *latus rectum*, enquanto ε é a excentricidade da órbita.

As seções cônicas são curvas planas formadas pelas interseções entre um plano e uma superfície cônica. Dependendo do valor da energia E da partícula (e, portanto, da excentricidade ε), temos diferentes seções cônicas para as órbitas, conforme a Tabela 1.1.

No problema de Kepler, onde $E = -|E| < 0$, a expressão (1.151) descreve uma elipse de excentricidade $0 < \varepsilon < 1$, desde que $E > E_0 = -mk^2/2\ell^2$, onde E_0 é o valor mínimo da energia potencial efetiva U_{ef} (se $E < E_0$ não há movimento possível). Esta é a Primeira Lei de Kepler do movimento planetário: a elipse é o lugar geométrico dos pontos tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos (os focos) é constante, e igual a $2a$, onde a é o semi-eixo maior [54]. As chamadas distâncias apsidais r_1 e r_2 são tais que

$$a = \frac{r_1+r_2}{2}, \tag{1.154}$$

e correspondem aos pontos da elipse para os quais o ângulo $\theta - \theta_0$ é igual, respectivamente, a 0 e π [Fig. 1.9], donde (1.151) implica em

$$r_{1,2} = \frac{1}{C(1\pm\varepsilon)}. \tag{1.155}$$

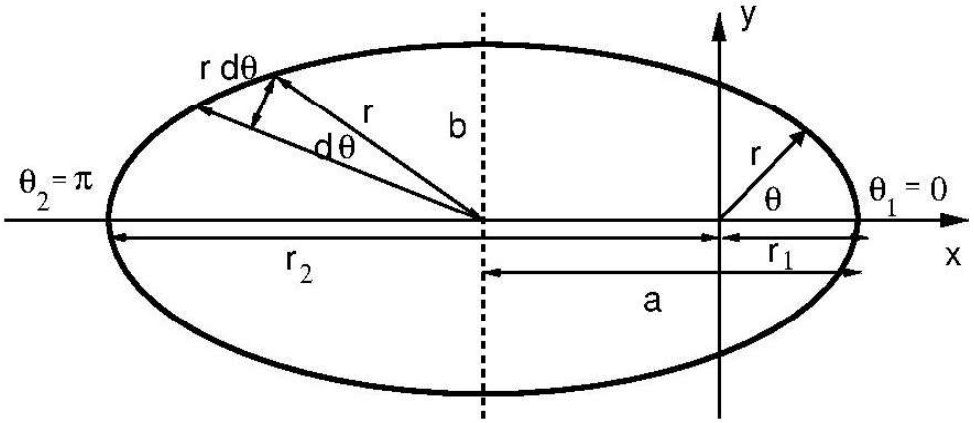

Figura 1.9: Órbita elíptica mostrando os seus principais parâmetros geométricos, no caso $\theta_0 = 0$.

Substituindo o resultado em (1.154) e usando (1.152)-(1.153) resulta que o semi-eixo maior da trajetória elíptica é

$$a = \frac{k}{2|E|}. \tag{1.156}$$

O semi-eixo menor da elipse será

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{\ell}{\sqrt{2m|E|}} \tag{1.157}$$

A área infinitesimal varrida pelo raio vetor num intervalo de tempo dt é [Fig. 1.9]

$$dA = \frac{1}{2}r(rd\theta), \tag{1.158}$$

tal que a velocidade com que as áreas são varridas é constante (Segunda Lei de Kepler do movimento planetário), pois

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{\ell}{2m} = const. \tag{1.159}$$

onde usamos (1.137). Na verdade, basta que o potencial seja central para que a segunda lei de Kepler seja válida.

Integrando essa expressão ao longo de uma órbita completa resulta que o período do movimento é

$$\tau = \frac{2mA}{\ell} = \frac{2m\pi ab}{\ell}, \tag{1.160}$$

onde empregamos a fórmula $A = \pi ab$ para a área de uma elipse de semi-eixos a e b. Usando (1.153) e (1.156) obtemos

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\pi k}{|E|^{3/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,a^{3/2}, \tag{1.161}$$

que expressa a Terceira Lei de Kepler: os quadrados dos períodos são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores das órbitas planetárias. No entanto, deve-se ter em conta que, como (1.161) é expressa em termos da massa reduzida, a constante de proporcionalidade deve ser diferente para cada planeta [cf. [33], seção 8.7].

1.9 Partícula carregada num campo eletromagnético

A descrição Lagrangiana do movimento de partículas carregadas em campos eletromagnéticos dependentes do tempo é um exemplo importante de energia potencial generalizada, que depende das coordenadas e velocidades generalizadas.

1.9.1 Energia potencial generalizada

Substituindo a Lagrangiana $L = T - U$ nas equações de Lagrange (1.36) obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} = 0. \tag{1.162}$$

Se a energia potencial U não depende das velocidades generalizadas $(\partial U/\partial \dot{q}_i = 0)$, a equação (1.162) pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \tag{1.163}$$

onde definimos as forças generalizadas

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{1.164}$$

Existem algumas situações de interesse físico onde a energia potencial pode depender das velocidades generalizadas. Uma delas é quando as forças generalizadas podem ser escritas na forma

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_i}, \tag{1.165}$$

onde V é chamada energia potencial generalizada. Substituindo (1.165) nas equações de Lagrange (1.163) elas são expressas na forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_i} = 0. \tag{1.166}$$

Se, finalmente, redefinirmos a Lagrangiana como

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - V(q_i, \dot{q}_i), \tag{1.167}$$

as equações de Lagrange reduzem-se à forma usual

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{1.168}$$

1.9.2 Potenciais eletromagnéticos

Os campos elétricos $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ e magnéticos $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ satisfazem as equações de Maxwell no vácuo que, no sistema internacional (MKSA), são dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1.169}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1.170}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1.171}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{1.172}$$

onde ρ e $\mathbf{J}$ são as densidades de carga e corrente elétricas, respectivamente. A permissividade elétrica ε_0 e a permeabilidade magnética do vácuo μ_0 satisfazem à relação

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}, \tag{1.173}$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

Os campos eletromagnéticos podem ser expressos em função dos potenciais eletromagnéticos escalar $\Phi(\mathbf{r},t)$ e vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ por meio das relações

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{1.174}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{1.175}$$

Os potenciais eletromagnéticos não determinam de forma unívoca os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$: (1.174) e (1.175) são invariantes mediante as seguintes transformações de calibre

$$\Phi \to \Phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \tag{1.176}$$

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} - \nabla\Lambda, \tag{1.177}$$

onde $\Lambda(\mathbf{r},t)$ é uma função arbitrária. Em problemas envolvendo campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ dependentes do tempo, usaremos o chamado calibre de Lorenz, que é uma condição a ser satisfeita pelos potenciais eletromagnéticos

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \tag{1.178}$$

A força de Lorentz sobre uma partícula de carga e é

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right), \tag{1.179}$$

de forma que a equação Newtoniana de movimento de uma partícula carregada de massa m é

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m}\left\{-\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})\right\}, \tag{1.180}$$

onde usamos (1.174) e (1.175) para exprimir os campos eletromagnéticos em termos dos respectivos potenciais.

1.9.3 Lagrangiana

Vamos demonstrar, agora, que este sistema pode ser descrito por uma energia potencial generalizada dada por

$$V(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = e\Phi(\mathbf{r},t) - e\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{v} \tag{1.181}$$

de sorte que a Lagrangiana de uma partícula carregada num campo eletromagnético seja dada por (1.167) e (1.181) como

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\Phi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \tag{1.182}$$

As equações de Lagrange correspondentes, dadas em componentes por (1.168), podem ser expressas vetorialmente como

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\mathbf{v}} L\right) - \nabla L = 0, \tag{1.183}$$

onde os gradientes em relação às posições e velocidades são, respectivamente, dados pelos operadores diferenciais vetoriais

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{1.184}$$

$$\nabla_{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z}\right). \tag{1.185}$$

Usando a identidade vetorial

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}), \tag{1.186}$$

e lembrando que as derivadas em relação às componentes de $\mathbf{r}$ são calculadas para $\mathbf{v}$ constante e *vice-versa*, resulta que $\nabla v^2 = 0$, donde o gradiente da Lagrangiana será

$$\nabla L = -\nabla V = -e\nabla\Phi + e(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + e\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}). \tag{1.187}$$

A mesma identidade fornece, para o gradiente em relação às componentes da velocidade, a relação

$$\nabla_{\mathbf{v}} v^2 = 2(\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{v}})\mathbf{v} = 2\mathbf{v}, \tag{1.188}$$

de sorte que, para a Lagrangiana (1.182), temos

$$\nabla_{\mathbf{v}} L = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}. \tag{1.189}$$

Substituindo (1.187) e (1.189) na equação de Lagrange (1.183) é

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) = -e\nabla\Phi + e(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + e\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \mathbf{0}. \tag{1.190}$$

A derivada total do potencial vetorial é

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \tag{1.191}$$

Inserindo-a em (1.190) chegamos ao resultado final

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\nabla\Phi - e\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + e\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}), \tag{1.192}$$

que é a equação de movimento Newtoniana (1.180).

1.9.4 Campo magnético uniforme

Uma situação com várias aplicações físicas é a de uma partícula sujeita a um campo magnético uniforme na direção z: $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{i}}$ e sem campo elétrico. Os potenciais eletromagnéticos correspondentes são

$$\mathbf{A} = -B_0 y\hat{\mathbf{i}}, \qquad \Phi = 0. \tag{1.193}$$

Substituindo estas expressões em (1.182) resulta que a Lagrangiana da partícula é

$$L = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) - eB_0 y v_x \tag{1.194}$$

As equações de Lagrange correspondentes a (1.194) são

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_x}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$
$$m\dot{v}_x - m\Omega\dot{y}=0, \tag{1.195}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_y}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0$$
$$m\dot{v}_y + m\Omega\dot{y}=0, \tag{1.196}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_z}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0$$
$$m\dot{v}_z=0, \tag{1.197}$$

onde definimos a girofrequência

$$\Omega=\frac{eB_0}{m}. \tag{1.198}$$

Como $\dot{x}=v_x$ e $\dot{y}=v_y$ as equações (1.195)-(1.196) tornam-se

$$\dot{v}_x=\Omega v_y, \tag{1.199}$$
$$\dot{v}_y=-\Omega v_x. \tag{1.200}$$

Derivando-as em relação ao tempo chegamos a duas equações diferenciais desacopladas,

$$\ddot{v}_x+\Omega^2 v_x=0, \tag{1.201}$$
$$\ddot{v}_y+\Omega^2 v_y=0, \tag{1.202}$$

que têm a forma da equação do oscilador harmônico, de sorte que compartilham a mesma solução geral [vide Eqs. (1.72)-(1.73)]

$$v_x(t)=A_x\cos(\Omega t+\vartheta_x), \tag{1.203}$$
$$v_y(t)=A_y\cos(\Omega t+\vartheta_y), \tag{1.204}$$

onde $A_{x,y}$ e $\vartheta_{x,y}$ são constantes de integração, determinadas pelas condições iniciais

$$(x(0),y(0),v_x(0),v_y(0)).$$

Vamos escolhê-las tais que

$$A_x=A_y=v_\perp, \qquad \vartheta_x=0, \qquad \vartheta_y=-\frac{\pi}{2}, \tag{1.205}$$

de modo que

$$v_x(t)=v_\perp\cos(\Omega t), \tag{1.206}$$
$$v_y(t)=v_\perp\,\mathrm{sen}\,(\Omega t) \tag{1.207}$$

Quadrando e somando membro-a-membro é

$$v_x^2(t)+v_y^2(t)=v_x^2(0)+v_y^2(0)=v_\perp^2. \tag{1.208}$$

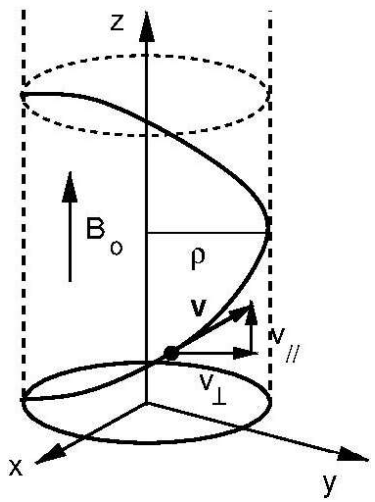

Figura 1.10: Partícula carregada num campo magnético uniforme $\mathbf{B}_0$.

Integrando, agora, as equações (1.203)-(1.204) para x e y, respectivamente, as coordenadas da partícula no plano perpendicular ao campo magnético são dadas por

$$x(t) = x(0) + \frac{A_x}{\Omega}\,\mathrm{sen}\,(\Omega t + \vartheta_x), \tag{1.209}$$

$$y(t) = y(0) + \frac{A_y}{\Omega}\,\mathrm{sen}\,(\Omega t + \vartheta_y). \tag{1.210}$$

Para as condições iniciais dadas por (1.205), temos que

$$x(t) - x(0) = \rho\,\mathrm{sen}\,(\Omega t), \tag{1.211}$$

$$y(t) - y(0) = \rho\cos(\Omega t). \tag{1.212}$$

onde definimos o chamado raio de Larmor (ou girorraio)

$$\rho = \frac{v_\perp}{\Omega} = \frac{mv_\perp}{eB_0}. \tag{1.213}$$

Elevando ambos os lados de (1.211)-(1.212) ao quadrado e somando-os,

$$[x(t) - x(0)]^2 + [y(t) - x(0)]^2 = \rho^2, \tag{1.214}$$

que é a equação de uma circunferência de raio ρ, com centro no ponto $(x(0), y(0))$, chamado *centro de guia*.

A equação (1.197) tem a solução $v_z = v_z(0) = const.$, de maneira que a coordenada na direção do campo magnético é

$$z(t) = z(0) + v_z(0)\,t. \tag{1.215}$$

Supondo a condição inicial $z(0) = 0$ e $v_z(0) = v_\parallel$, a partícula executa um movimento retilíneo uniforme na direção paralela ao campo magnético, com velocidade $v_\parallel = v\cos\alpha$, onde α é o ângulo entre a velocidade e o campo (ângulo de passo).

No plano perpendicular ao campo magnético, por sua vez, a partícula tem um movimento circular com velocidade $v_\perp = v\,\mathrm{sen}\,\alpha$ constante. A combinação do movimento retilíneo uniforme na direção paralela ao campo, com o movimento circular uniforme na direção perpendicular gera trajetórias helicoidais [Fig. 1.10]. Sendo $\tau = 2\pi/\Omega$ o período do movimento circular, o passo das hélices é

$$p_h = v_\parallel \tau = \frac{2\pi}{\Omega}\,v\cos\alpha. \tag{1.216}$$

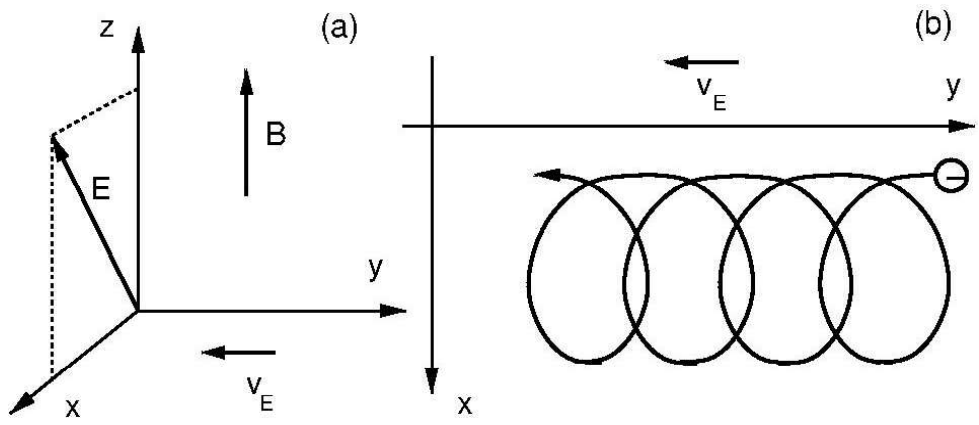

Figura 1.11: (a) Campos elétrico e magnético uniformes. (b) Movimento de deriva $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ de uma partícula carregada.

1.9.5 Campos elétrico e magnético uniformes

Vamos, agora, considerar a presença adicional de um campo elétrico uniforme $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{i}} + E_z\hat{\mathbf{k}}$, associado ao potencial eletrostático [Fig. 1.11(a)]

$$\Phi(\mathbf{r}) = -E_x x - E_z z. \tag{1.217}$$

Incluindo a energia potencial correspondente em (1.194) temos a Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + eE_x x + eE_z z - eB_0 y v_x. \tag{1.218}$$

com as respectivas equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_x}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$m\dot{v}_x - m\Omega v_y - eE_x = 0, \tag{1.219}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_y}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$m\dot{v}_y + m\Omega v_x = 0, \tag{1.220}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_z}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$m\dot{v}_z - eE_z = 0. \tag{1.221}$$

As duas primeira equações podem ser expressas como

$$\dot{v}_x = \frac{qE_x}{m} + \Omega v_y, \tag{1.222}$$

$$\dot{v}_y = -\Omega v_x. \tag{1.223}$$

Derivando-as em relação ao tempo obtemos

$$\ddot{v}_x = \Omega\dot{v}_y = -\Omega^2 v_x, \tag{1.224}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(v_y + \frac{E_x}{B_0}\right) = -\Omega^2\left(v_y + \frac{E_x}{B_0}\right), \tag{1.225}$$

onde usamos o fato de tanto E_x como B_0 serem constantes. Estas equações são similares a (1.201) e (1.202), portanto têm as mesmas soluções [vide Eqs. (1.203)-(1.204)], a saber

$$v_x(t) = A_x \cos(\Omega t + \vartheta_x), \tag{1.226}$$

$$v_y(t) = A_y \cos(\Omega t + \vartheta_y) - \frac{E_x}{B}. \tag{1.227}$$

onde $A_{x,y}$ e $\vartheta_{x,y}$ são constantes de integração. Já a equação (1.221) tem a seguinte solução

$$v_z(t) = v_z(0) + \frac{eE_z}{m}t. \tag{1.228}$$

que representa um movimento retilíneo uniformemente acelerado ao longo da direção do campo magnético.

Interpretamos estas soluções da seguinte forma: continuará havendo uma giração com frequência Ω em torno da direção do campo magnético, superposta a uma deriva do centro de guia na direção $-y$, para $E_x > 0$. A velocidade de deriva é

$$\mathbf{v}_E = -\frac{E_x}{B_0}\hat{\mathbf{j}}. \tag{1.229}$$

A projeção da trajetória da partícula sobre o plano perpendicular ao campo magnético é uma ciclóide [Fig. 1.11(b)]. A trajetória, em si, será uma hélice deformada na direção da deriva, e com passo variável, devido ao aumento da velocidade da partícula na direção paralela ao campo magnético.

Podemos generalizar a expressão (1.229), considerando uma giração em torno de um campo magnético $\mathbf{B}$ uniforme, com um campo elétrico também uniforme $\mathbf{E}$ numa direção arbitrária. A velocidade de deriva do centro de guia será dada pela expressão vetorial [108]

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \tag{1.230}$$

que reduz-se a (1.229), na geometria da Fig. 1.11(a). Observe que a velocidade de deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ não depende nem da carga nem da massa da partícula.

1.10 Problemas

1. O ponto de suspensão de um pêndulo símples de massa m e comprimento a move-se ao longo de uma circunferência de raio R e velocidade angular ω constante. Obtenha a Lagrangiana e as equações de Lagrange.

2. Uma conta de massa m desliza sem atrito por uma guia parabólica descrita pela relação $z = kr^2$. A guia apresenta um movimento de rotação em torno do seu eixo com velocidade angular ω constante. (a) Obtenha a Lagrangiana e as equações de Lagrange. (b) Ache o valor de k para que a conta permaneça num círculo de raio R e centro no eixo da guia.

3. Uma partícula de massa m, sujeita ao campo gravitacional, move-se na superfície interna de um cone de abertura 2α e com o vértice na origem. (a) Determine a equação de vínculo. (b) Obtenha a Lagrangiana e as equações de Lagrange. (c) Suponha que a partícula execute um movimento circular de raio R em torno do eixo do cone. Ache o período das pequenas oscilações radiais dessa órbita.

4. Considere um sistema mecânico com n graus de liberdade que possua $m < n$ equações de vínculo holonômicas, da forma geral $f_k(\mathbf{q},t) = 0$, onde $k = 1,2,\ldots m$. Mostre que as equações de Lagrange podem ser escritas na forma (1.163) onde

$$Q_i = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial q_i}$$

são chamadas forças de vínculo generalizadas e λ_k são multiplicadores indeterminados de Lagrange.

5. Uma partícula de massa m está inicialmente no topo de um hemisfério de raio a. A partícula sofre uma pequena perturbação e começa a deslizar, sem atrito, pelo hemisfério. Calcule o ângulo para o qual a partícula deixa a superfície do hemisfério.

6. Um disco de massa M e raio a rola sem deslizar por um plano inclinado de um ângulo α em relação à horizontal. O centro de massa do disco está a uma distância s do topo do plano inclinado. (a) Obtenha a Lagrangiana e as equações de Lagrange. (b) Determine as forças de vínculo generalizadas.

7. Mostre que a equação diferencial da órbita de uma partícula de massa m sob a ação de uma força central $F(r)$ pode ser escrita na forma (na variável $u = 1/r$)

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{\ell^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right).$$

8. Uma partícula de massa m move-se em uma órbita circular de raio a sob a influência de uma força central da forma $F(r) = K/r^{\alpha}$, onde r é a distância da partícula ao centro de força O, pelo qual passa a órbita. Determine os valores de K (em função do momentum angular ℓ) e do expoente α.

9. Considere o movimento de uma partícula de massa m e carga e, no campo elétrico produzido por um dipolo elétrico puntiforme na origem, cujo momento de dipolo é $\mathbf{p}_e = p_0\hat{\mathbf{k}}$. (a) Mostre que o potencial eletrostático é

$$\Phi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p_0 \cos\theta}{r^2},$$

(b) Obtenha a Lagrangiana e escreva as equações de Lagrange; (c) Mostre que

$$mr^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi} = \ell_z = const.$$

é uma constante do movimento; (d) Escolhendo $\ell_z = 0$ resolva as equações de Lagrange e mostre que existem soluções na forma de trajetórias de raio constante $r = r_0$; (e) Redefinindo o intervalo do ângulo θ, de $[0,\pi]$ para $[0,2\pi)$, mostre que o movimento da partícula é similar ao de um pêndulo de comprimento r_0 e amplitude $\pi/2$.