

Capítulo 10

Aplicações em Plasmas

10.1 Introdução

Um plasma é um gás ionizado que possui propriedades coletivas devido às interações eletromagnéticas entre suas partículas. Plasmas totalmente ionizados contêm elétrons livres (de carga $q = -e$, onde $e = 1,6022 \times 10^{-19}C$ e íons positivos (de carga $q = +Ze$, onde Z é o número atômico: para plasmas de Hidrogênio $Z = 1$). Num gás ionizado as interações entre as partículas carregadas são eletromagnéticas, ou seja, de longo alcance, o que ocasiona o aparecimento de comportamentos coletivos, como a blindagem eletrostática e a existência de oscilações de alta frequência [108].

Devido ao longo alcance das interações entre partículas carregadas, num plasma a energia potencial de uma partícula é muito menor do que sua energia cinética [?]. Já num gás de partículas neutras as interações - essencialmente colisões entre as partículas - são locais, e tais comportamentos coletivos não existem. Assim, muitas propriedades de plasmas são radicalmente diferentes de gases neutros.

As duas quantidades macroscópicas básicas que caracterizam um plasma são sua densidade n e temperatura T . A densidade de partículas é o número delas por unidade de volume: $n_s = N_s/V$, onde $s = e$ para elétrons e $s = i$ para íons positivos. Para um plasma em equilíbrio térmico a energia cinética média das partículas é $(3/2)k_B T_s$, onde $k_B = 1,3807 \times 10^{-23}J/K$ é a constante de Boltzmann, e T_s é a temperatura da respectiva espécie de partículas.

A proporcionalidade entre energia cinética e temperatura permite que esta última seja expressa em unidades de energia, como o elétron-volt ($1 eV = 1,6022 \times 10^{-19}J$). A temperatura correspondente à energia de $1 eV$ será, portanto, de $11604K$. Na física de plasma é costume indicar, nas fórmulas práticas, a temperatura (na verdade $k_B T_s$) diretamente em eV .

Neste capítulo iremos abordar aplicações aos chamados plasmas de fusão, para os quais os valores típicos da densidade e da temperatura são $n_s \sim 10^{20} m^{-3}$ e $T_s \sim 10^3 eV$, respectivamente, de modo que as velocidades térmicas dos íons são da ordem de 10^5 m/s, enquanto que, para elétrons, elas são da ordem de 10^7 m/s. Apesar de muito altas, tais velocidades ainda podem ser tratadas no regime não-relativístico.

Plasmas de fusão e astrofísicos estão tipicamente sujeitos a campos magnéticos externos. O movimento de uma partícula carregada de massa m_s e carga q_s , movendo-se com velocidade \mathbf{v} num campo magnético uniforme \mathbf{B} foi estudado nos Capítulos 2 (seção 2.9.1) e 3 (seção 3.2.3) usando a descrição Hamiltoniana. Supondo, como de hábito, que $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_z$ o movimento da partícula é a combinação de dois movimentos. O primeiro é um movimento circular uniforme

com frequência (chamada *giro-frequência*)

$$\Omega_s = \frac{|q_s|B}{m_s}, \quad (10.1)$$

para partículas da espécie s , com carga q_s e massa m_s . Este movimento circular ocorre no plano perpendicular ao campo magnético, e tem raio $r_s = v_{\perp}/\Omega_s$, onde v_{\perp} é a componente da velocidade perpendicular ao campo magnético. Temos, também, um movimento retilíneo uniforme (do centro de guia) com velocidade v_{\parallel} ao longo da direção do campo magnético. A combinação entre o movimento circular uniforme perpendicular e o movimento retilíneo uniforme paralelo é denominada *giro-giração*, com trajetórias helicoidais ao longo das linhas do campo magnético.

Em plasmas de fusão os campos magnéticos são da ordem de $1 T$, de modo a girofrequência eletrônica é da ordem de $\Omega_e \sim 2 \times 10^{11} s^{-1}$. Usando, para efeitos de cálculo, o valor da velocidade térmica correspondente em v_{\perp} , o raio da giração dos elétrons é da ordem de $r_e \sim 2 \times 10^{-4} m$.

Quando os campos magnéticos deixam de ser uniformes (no espaço) e constantes (no tempo), ocorrem variações do movimento básico de giração descrito anteriormente. Por exemplo, incluindo um campo elétrico uniforme \mathbf{E} haverá uma deriva na direção do vetor $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, que provoca o deslocamento do centro de guia das partículas em giração. A velocidade de deriva do centro de guia é dada por (1.213)

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (10.2)$$

e não depende nem da carga nem da massa das partículas, sendo portanto a mesma tanto para íons positivos como elétrons.

Plasmas, sendo essencialmente gases, têm uma tendência natural à expansão. Para confinar um plasma, são empregados diversos meios. Numa estrela como o Sol, formado por um plasma de alta temperatura, e que gera energia por meio de reações de fusão nuclear, o plasma é confinado pelo intenso campo gravitacional produzido pela sua gigantesca massa.

Em plasmas astrofísicos e de laboratório, são usados campos magnéticos. Há dois tipos de configuração de confinamento magnético: abertas e fechadas. Os esquemas de confinamento aberto empregam o princípio do espelho magnético, visto na seção 4.12 como exemplo de invariante adiabático. Numa garrafa magnética, onde o efeito espelho ocorre nas suas extremidades, um plasma pode ser confinado por um tempo finito. Já nos sistemas fechados de confinamento - desconsiderando efeitos de deriva - se as linhas de campo magnético são fechadas as partículas do plasma tendem a segui-las por um tempo suficientemente grande para as aplicações desejadas.

Há diversos sistemas fechados de confinamento magnético propostos, cada qual com suas vantagens e desvantagens. Os Tokamaks têm se mostrado os candidatos mais viáveis para que, num futuro não muito distante, possa ser construído um reator a fusão nuclear para produção de energia. Este é um ponto de máxima importância estratégica, dada a escassez prevista de combustíveis próximos nas próximas décadas.

10.2 Tokamaks

Um Tokamak consiste essencialmente num vaso toroidal onde uma corrente de plasma é produzida por efeito indutivo (aquecimento ôhmico) pela descarga de um banco de capacitores. A corrente de plasma toroidal é confinada pela ação combinada de dois campos magnéticos:

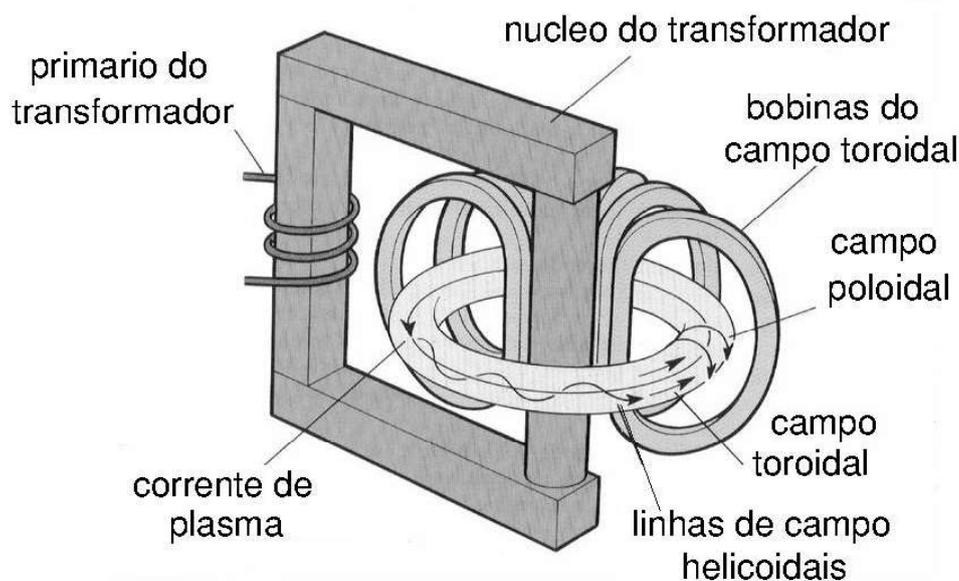


Figura 10.1: Esquema básico de um Tokamak

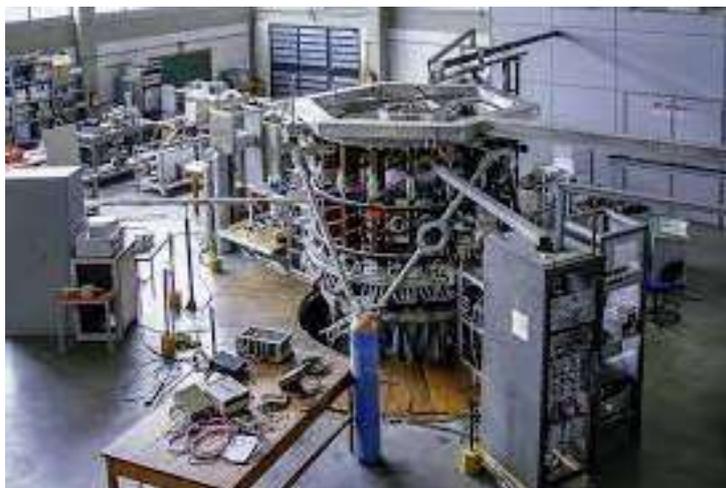


Figura 10.2: Tokamak TCABR, do Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

(i) um campo toroidal \mathbf{B}_T , produzido por espiras posicionadas externamente ao vaso toroidal, como num solenóide; (ii) um campo poloidal \mathbf{B}_P produzido pela própria corrente de plasma [Fig. 10.1].

As linhas de campo magnético produzido pela superposição destes dois campos, $\mathbf{B}_T + \mathbf{B}_P$, são hélices sobre superfícies toroidais. Portanto, na ausência de fatores como derivas, instabilidades, etc. há condições para o confinamento magnético de plasmas de fusão nos Tokamaks. Este princípio básico tem sido verificado em diversos Tokamaks construídos no mundo, inclusive no Brasil.

10.2.1 Geometria de um Tokamak

Os Tokamaks são caracterizados pelos raio maior (R_0) e menor (a) da câmara toroidal, bem como pelo módulo do campo toroidal B_T e pela sua corrente de plasma. Por exemplo, no Tokamak TCABR, em operação no Instituto de Física da Universidade de São Paulo, $R_0 =$

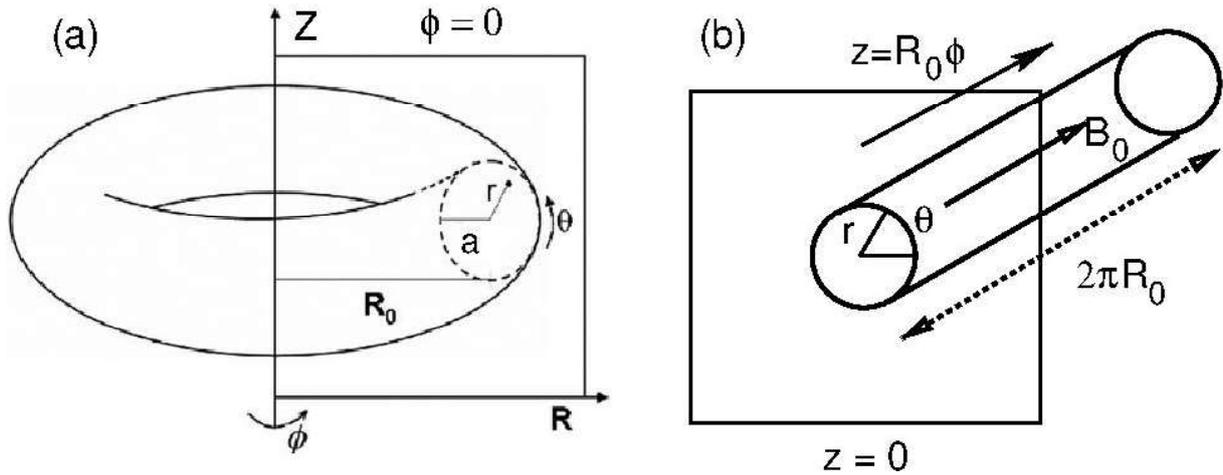


Figura 10.3: Geometria de um Tokamak no caso (a) toroidal, (b) cilíndrico

0,61 m, $a = 0,18$ m, $B_T = 1,1$ T, e $I_p = 0,1$ MA [Fig. 10.2]. Para o plasma produzido no TCABR, medidas recentes da densidade e temperatura eletrônicas fornecem, respectivamente, valores nos seguintes intervalos: $n_e = (1.0 - 4.0) \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ e $T_e = (0.2 - 1.5) \text{ eV}$.

Para uma descrição das linhas de campo magnético num Tokamak, definimos dois ângulos, ϕ e θ , ao longo das direções toroidal (maior volta) e poloidal (menor volta), respectivamente [Fig. 10.3(a)]. Além disso, definimos uma coordenada radial r medida a partir do eixo magnético, tal que $0 \leq r \leq a$, e também uma coordenada radial R medida a partir do eixo maior do Tokamak. O raio maior R_0 é o valor de R para o eixo magnético (eixo central da câmara toroidal), de forma que $R_0 - a \leq R \leq R_0 + a$. Finalmente, podemos definir uma coordenada Z ao longo do eixo maior. O sistema (r, θ, ϕ) define as chamadas coordenadas locais do Tokamak, enquanto (R, ϕ, Z) são coordenadas cilíndricas. Da Figura 10.3(a) resultam as seguintes relações entre os dois sistemas de coordenadas

$$R = R_0 + r \cos \theta, \quad Z = r \sin \theta. \quad (10.3)$$

10.2.2 Superfícies magnéticas

Sob determinadas condições [vide [108], Capítulo 1] um plasma de fusão pode ser descrito como um fluido ideal com velocidade \mathbf{v} , pressão p , e densidade ρ , cuja equação de movimento é dada por (9.10):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}. \quad (10.4)$$

onde $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ é a força magnética por unidade de volume (devido à quase-neutralidade do plasma a força elétrica é praticamente nula no seu interior), sendo \mathbf{j} a densidade de corrente elétrica.

Supondo que o plasma confinado esteja em equilíbrio (magnetohidrodinâmico), o lado esquerdo da expressão acima é nulo, e temos a seguinte condição

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (10.5)$$

Fazendo o produto escalar desta expressão com o campo magnético resulta que

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (10.6)$$

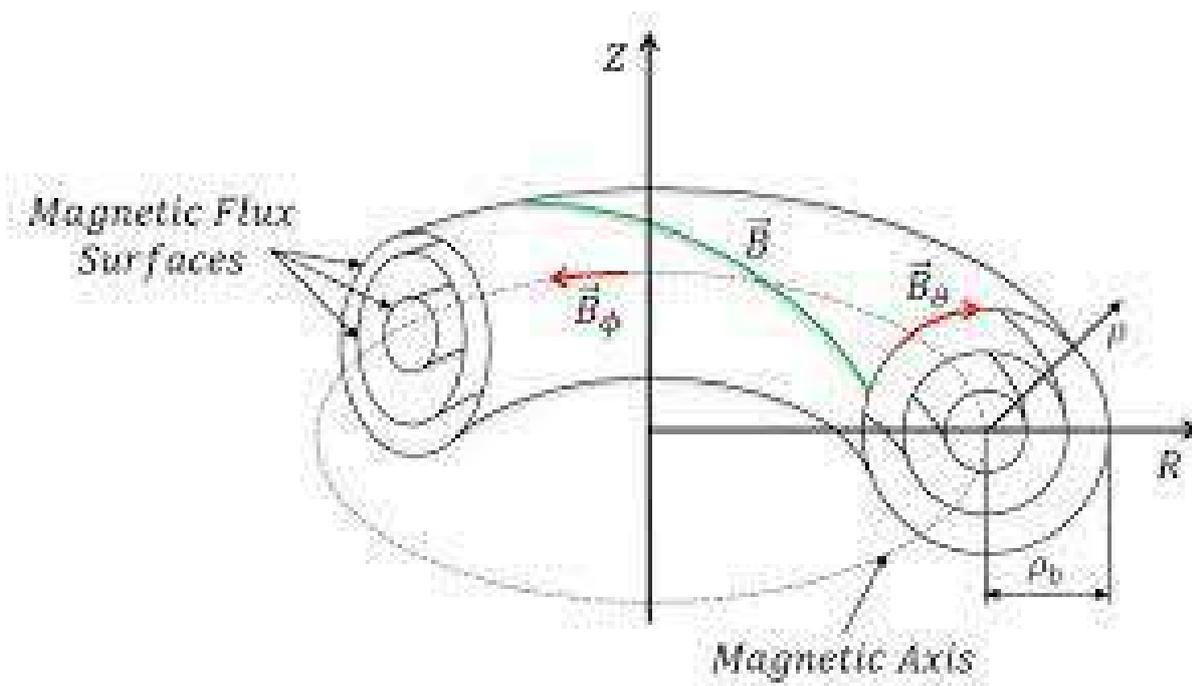


Figura 10.4: Superfícies magnéticas em um Tokamak.

As linhas de campo magnético têm a propriedade que a direção de \mathbf{B} é tangente a cada ponto das mesmas. Logo, por consequência de (10.6), as linhas de campo magnético num plasma magnetizado em equilíbrio jazem sobre superfícies de pressão constante, chamadas *superfícies magnéticas*. Para o confinamento de um plasma de fusão num volume limitado, é necessário que as superfícies magnéticas sejam fechadas. A forma das superfícies magnéticas depende do esquema escolhido para o confinamento magnético. Em Tokamak estas superfícies são toros coaxiais [Fig. 10.4].

10.2.3 Fator de segurança

Introduzindo vetores unitários ao longo das direções toroidal e poloidal, as respectivas componentes do campo magnético são escritas como

$$\mathbf{B}_T = B_\phi \hat{e}_\phi, \quad \mathbf{B}_P = B_\theta \hat{e}_\theta.$$

O campo toroidal é produzido por bobinas posicionadas externamente ao vaso toroidal, conduzindo uma corrente i . Usando a Lei de Ampère, temos que

$$B_\phi = \frac{\mu_0 N_T I_T}{2\pi R} = \frac{\mu_0 N_T I_T}{2\pi(R_0 + r \cos \theta)} = \frac{B_0}{1 + (r/R_0) \cos \theta}, \quad (10.7)$$

onde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} T.m/A$ é a permeabilidade do vácuo e $B_0 = \mu_0 N_T I_T / 2\pi R_0$ é o campo toroidal na posição do eixo magnético (I_T representa a corrente que circula pelas N_T bobinas do campo toroidal).

O campo poloidal, produzido pela corrente de plasma, pode ser expresso na seguinte forma

$$B_\theta = \frac{B_0 r}{q(r) R_0}, \quad (10.8)$$

onde a quantidade adimensional $q(r)$ é chamado fator de segurança. As superfícies magnéticas do plasma em equilíbrio são toróides de raio menor r e raio maior R . O eixo magnético é uma superfície magnética com $r = 0$ e $R = R_0$. Tipicamente o fator de segurança varia desde $q = 1$ para o eixo magnético até $q \sim 3$ para a borda do plasma ($r = a$).

As linhas do campo magnético no Tokamak jazem sobre toróides coaxiais com o eixo magnético. Se uma dada linha de campo está inicialmente numa dada superfície magnética $r = \text{const.}$, após uma volta completa toroidal ela percorreu um ângulo na direção toroidal dado por

$$\iota(r) = \frac{2\pi}{q(r)}, \quad (10.9)$$

chamado *transformada rotacional*. Se o fator de segurança for um número racional da forma m/n , onde m e n são inteiros primos entre si, a transformada rotacional será $\iota = 2\pi n/m$. Logo, a linha de campo fechar-se-á sobre si mesma após m voltas na direção toroidal e n voltas na direção poloidal. Caso o fator de segurança seja um número irracional, as linhas de campo nunca fecham-se sobre si próprias, preenchendo densamente a superfície magnética.

Tomando, como superfície de seção do toróide, um plano $\phi = \text{const.}$, as coordenadas polares de uma linha de campo são (r, θ) [Fig. 10.3(b)]. Uma superfície racional com $q = m/n$ terá (na superfície de seção) n pontos distribuídos ao longo de um círculo de raio r . Uma superfície irracional, por outro lado, terá um círculo completo na superfície de seção.

A razão de aspecto do Tokamak é definida como $A = R_0/a$. Para Tokamaks com grande razão de aspecto ($R_0 \gg a$) o perfil do fator de segurança pode ser calculado, em primeira aproximação, supondo-se que o vaso toroidal é um cilindro periódico de comprimento $2\pi R_0$, no qual o campo toroidal B_θ é uniforme [Fig. 10.3(b)]. Neste caso, definimos um segundo sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , onde $z = R_0\phi$ é a coordenada toroidal retificada. Nessa aproximação o campo magnético no equilíbrio tem as seguintes componentes

$$B_r = 0, \quad B_\theta = \frac{B_0 r}{R_0 q(r)}, \quad B_z = B_0 = \text{const.} \quad (10.10)$$

de maneira que o campo toroidal seja uniforme, e o campo poloidal seja função apenas da coordenada radial.

10.3 Deriva de partículas carregadas em plasmas magnetizados

O movimento de partículas carregadas dos plasmas em campos magnéticos e elétricos combinados é um sistema Hamiltoniano complexo devido ao número de graus de liberdade. Uma simplificação considerável consiste em “filtrar” a giração e concentrar a nossa atenção na deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ dos centros de guia correspondentes. Nesse caso o movimento do centro de guia se dá em duas dimensões espaciais, o que permite uma descrição Hamiltoniana que reduz o problema à advecção passiva dos centros de guia devido à deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

10.3.1 Hamiltoniana de deriva

Vamos supor que a giração das partículas carregadas ocorra na direção de um campo magnético uniforme: $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$, enquanto o centro de guia tem coordenadas $(x(t), y(t))$ num plano perpendicular ao campo, com uma velocidade de deriva dada por (10.2). Presumimos, ainda, que o

campo elétrico seja derivado de um potencial elétrico Φ , tal que $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. A velocidade de deriva do centro de guia, dada por (10.2), é

$$\mathbf{v}_E = -\frac{\nabla\Phi \times \hat{\mathbf{z}}}{B_0}, \quad (10.11)$$

de modo que as equações de movimento para a deriva do centro de guia são

$$\frac{dx}{dt} = v_{Ex} = -\frac{1}{B_0} \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad (10.12)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_{Ey} = \frac{1}{B_0} \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad (10.13)$$

que têm a forma das equações de Hamilton, se definirmos a coordenada y e seu momentum canonicamente conjugado x :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad (10.14)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (10.15)$$

onde a Hamiltoniana de deriva é $H = \Phi/B_0$. Se o potencial elétrico for independente do tempo, como no caso de campos elétricos estáticos, então o sistema terá um grau de liberdade e, portanto, será integrável.

Uma situação de interesse é o estudo do movimento de deriva de partículas carregadas de um plasma na presença de campos elétricos externos, tanto estáticos como dependentes do tempo. Estes últimos são devidos a ondas eletrostáticas (chamadas ondas de deriva), que são muito comuns na Física de Plasmas, associadas a movimentos coletivos de elétrons e íons [108].

Vamos considerar o plasma confinado num Tokamak, onde há um campo magnético aproximadamente uniforme com módulos da ordem de 1 Tesla ou mais na direção toroidal ϕ . Usaremos, aqui, a aproximação de cilindro periódico de comprimento $2\pi R_0$, no qual há um campo magnético B_0 uniforme na direção $z = R_0\phi$ [Fig. 10.3(b)].

As partículas do plasma (elétrons e íons positivos) executam um movimento básico de giração ao longo do campo magnético uniforme B_0 . Um plano perpendicular ao campo magnético é uma seção reta deste cilindro, representada pelo plano $z = 0$.

Como o cilindro é periódico, as partículas em giração passam um grande número de vezes pelo plano $z = 0$, assim como o próprio centro de guia das mesmas. Na presença de campos elétricos, a deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ provoca o movimento do centro de guia neste plano, que é o sistema Hamiltoniano que vamos investigar aqui. Sobre o plano $z = 0$ podemos empregar coordenadas polares (r, θ) , devido à geometria envolvida. No entanto, a visualização dos resultados será mais conveniente se empregarmos coordenadas cartesianas, considerando x como a coordenada radial, e y como a coordenada angular. Assim, a posição do centro de guia no plano $z = 0$ será especificada pelas coordenadas (x, y) .

Consideramos o potencial elétrico produzido por um perfil radial de campo elétrico $\Phi_0(x)$, mais o efeito de N ondas eletrostáticas, de amplitudes Φ_j , vetores de onda $\mathbf{k}_j = (k_{jx}, k_{jy})$ e frequências ω_j , dado por

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0(x) + \sum_{j=1}^N \Phi_j \sin(k_{jx}x) \cos(k_{jy}y - \omega_j t), \quad (10.16)$$

onde supomos que a onda seja estacionária na direção radial (x) e seja progressiva na direção poloidal (y), para um plano perpendicular ao campo magnético na direção z . Os coeficientes

Φ_j indicam as amplitudes dos modos envolvidos na perturbação causada pelas ondas e são, em geral, funções da posição. Vamos, porém, considerá-los como aproximadamente constantes por simplicidade.

O potencial estático devido a um campo elétrico radial de módulo E_0 constante é

$$\Phi_0(x) = -E_0x + \text{const.} \quad (10.17)$$

Em Tokamaks é possível investigar o efeito de perfis radiais não-lineares, tanto monotônicos como não-monotônicos na variável x . Aqui limitaremos a nossa discussão ao caso mais simples, dado por (10.17). Assim, a Hamiltoniana de deriva para N ondas é

$$H(x, y, t) = -\frac{E_0}{B_0}x + \sum_{j=1}^N \frac{\Phi_j}{B_0} \sin(k_{jx}x) \cos(k_{jy}y - \omega_j t), \quad (10.18)$$

a menos de uma constante aditiva que, sabemos, é irrelevante.

Observando que $v_E = -E_0/B_0$ é a velocidade de deriva devido ao campo elétrico uniforme, e considerando o caso de $N = 2$ ondas, a Hamiltoniana correspondente é

$$H(x, y, t) = -v_E x + \frac{\Phi_1}{B_0} \sin(k_{1x}x) \cos(k_{1y}y - \omega_1 t) + \frac{\Phi_2}{B_0} \sin(k_{2x}x) \cos(k_{2y}y - \omega_2 t), \quad (10.19)$$

caracterizando, assim, um sistema com um grau de liberdade não-autônomo, que equivale a um sistema autônomo com dois graus de liberdade, portanto não-integrável em geral.

10.3.2 Hamiltoniana de duas ondas

Fazemos uma transformação canônica $(x, y, t) \rightarrow (x', y', t)$ cuja função geratriz de segunda espécie é

$$F_2(y, x', t) = x' \left(y - \frac{\omega_1}{k_{1y}} t \right), \quad (10.20)$$

cujas equações são

$$x = \frac{\partial F_2}{\partial y} = x', \quad (10.21)$$

$$y' = \frac{\partial F_2}{\partial x'} = y - \frac{\omega_1}{k_{1y}} t, \quad (10.22)$$

$$H'(x', y', t) = H(x, y, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H - \frac{\omega_1}{k_{1y}} x', \quad (10.23)$$

e com as quais transformamos a Hamiltoniana de duas ondas, (10.19), em

$$H'(x', y', t) = (v_E - u_1)x' + \frac{A_1}{B_0} \sin(k_{1x}x') \cos(k_{1y}y') + \frac{A_2}{B_0} \sin(k_{2x}x') \cos[k_{2y}(y' - ut)], \quad (10.24)$$

onde $u_1 = \omega_1/k_{1y}$ e $u_2 = \omega_2/k_{2y}$ são as velocidades de fase da primeira e segunda ondas, respectivamente, e definimos a diferença de velocidades de fase como

$$u = u_2 - u_1 = \frac{\omega_2}{k_{2y}} - \frac{\omega_1}{k_{1y}}. \quad (10.25)$$

Observamos que, na Hamiltoniana transformada (10.24), a dependência com o tempo só aparece explicitamente na segunda onda. Isso significa que a transformação canônica que fizemos representa uma passagem para o referencial da primeira onda. De fato, quando há apenas

uma onda ($A_2 = 0$) o sistema tem um grau de liberdade e, sendo independente do tempo, é integrável (no sentido de Liouville). A não-integrabilidade aparece quando consideramos a segunda onda (e, de forma geral, quaisquer ondas adicionais). Será conveniente trabalhar com as variáveis adimensionais

$$X = k_{1x}x', \quad Y = k_{1y}y', \quad \tau = \omega_0 t, \quad (10.26)$$

onde definimos

$$\omega_0 = \frac{k_{1x}k_{1y}\Phi_1}{B_0}. \quad (10.27)$$

A Hamiltoniana normalizada será $\mathcal{H} = B_0 H' / \Phi_1$ que, após a aplicação de todas estas transformações (não-canônicas) a (10.24), leva-nos à expressão final

$$\mathcal{H}(X, Y, \tau) = UX + \sin X \cos Y + \varepsilon \sin(kX) \cos[q(Y - \Omega\tau)], \quad (10.28)$$

onde foram definidas as seguintes quantidades:

$$k = \frac{k_{2x}}{k_{1x}}, \quad q = \frac{k_{2y}}{k_{1y}}, \quad \varepsilon = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}, \quad (10.29)$$

$$U = \frac{(v_e - u_1)B_0}{k_{1x}\Phi_1}, \quad \Omega = \frac{uB_0}{k_{1x}\Phi_1}, \quad (10.30)$$

que possuem o seguinte significado físico: tanto k como q são razões entre números de onda, que podem ser tanto racionais como irracionais. Considerando a segunda onda como uma perturbação não-integrável da primeira, a constante ε é uma medida da intensidade desta perturbação. Já $q\Omega$ é a frequência normalizada da segunda onda, de forma que a perturbação por ela causada tem um período $\tau = 2\pi/q\Omega$. Finalmente, o chamado *parâmetro de aprisionamento* U é proporcional à diferença entre a velocidade de deriva e a velocidade de fase da primeira onda.

As equações canônicas derivadas de (10.28) serão

$$\frac{dX}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y} = \sin X \sin Y + \varepsilon q \sin(kX) \sin[q(Y - \Omega\tau)], \quad (10.31)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} = U + \cos X \cos Y + \varepsilon k \cos(kX) \cos[q(Y - \Omega\tau)]. \quad (10.32)$$

Vamos inicialmente analisar o caso de uma única onda: fazendo $\varepsilon = 0$ em (10.28) resulta a Hamiltoniana não-perturbada

$$\mathcal{H}_0(X, Y) = UX + \sin X \cos Y, \quad (10.33)$$

que é um sistema integrável. As equações de Hamilton correspondentes

$$\frac{dX}{d\tau} = \sin X \sin Y, \quad (10.34)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = U + \cos X \cos Y, \quad (10.35)$$

podem ser resolvidas analiticamente em termos de integrais e funções elípticas [?]. Para uma análise qualitativa, determinaremos os pontos de equilíbrio, que satisfazem o sistema de equações trigonométricas

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y} \right)_{(X^*, Y^*)} = -\sin X^* \sin Y^* = 0, \quad (10.36)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} \right)_{(X^*, Y^*)} = U + \cos X^* \cos Y^* = 0. \quad (10.37)$$

Como $-\pi < X \leq \pi$ e $-\pi < Y \leq \pi$, e definindo

$$\alpha = \arccos U, \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right), \quad (10.38)$$

verificamos a existência de duas famílias de pontos de equilíbrio, a saber:

$$C_1 : (0, \pi + \alpha), \quad C_2 : (0, \pi - \alpha), \quad C_3 : (\pi, \alpha), \quad C_4 : (\pi, -\alpha), \quad (10.39)$$

$$A_1 : (\pi - \alpha, 0), \quad A_2 : (\pi + \alpha, 0), \quad A_3 : (\alpha, \pi), \quad A_4 : (-\alpha, \pi), \quad (10.40)$$

desde que $0 \leq U \leq 1$. Caso $U > 1$ não haverá pontos de equilíbrio.

Para estudar a estabilidade destes pontos de equilíbrio, na aproximação linear, calculamos inicialmente a matriz Jacobiana das equações de Hamilton (10.34)-(10.35),

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial Y \partial X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos X \sin Y & \sin X \cos Y \\ -\sin X \cos Y & \cos X \sin Y \end{pmatrix}. \quad (10.41)$$

Definindo

$$\sin \alpha = \sin(\arccos U) = \sqrt{1 - U^2} \equiv \beta, \quad (10.42)$$

as matrizes Jacobianas, cujos elementos são calculados nos pontos de equilíbrio (10.39)-(10.40) são, respectivamente, dados por

$$\mathbf{J}(C_{1,2}) = \begin{pmatrix} \mp \beta & 0 \\ 0 & \pm \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}(C_{3,4}) = \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad (10.43)$$

$$\mathbf{J}(A_{1,3}) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}(A_{2,4}) = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.44)$$

As matrizes Jacobianas para $C_{1,2,3,4}$ têm como autovalores os seus elementos diagonais. Como $0 \leq \beta \leq 1$ para $U \leq 1$, para todos os pontos desta família, se um dos autovalores for positivo o outro será negativo, e *vice-versa*. Portanto, estes pontos de equilíbrio serão instáveis, ou pontos de sela. Já os autovalores das matrizes Jacobianas para $A_{1,2,3,4}$ são imaginários puros, da forma $\pm i\beta$, de maneira que os pontos de equilíbrio desta segunda família são estáveis (centros lineares).

10.3.3 Trajetórias de deriva no plano de fase

Para obter a dinâmica não-linear da Hamiltoniana de uma onda iremos resolver numericamente as equações de Hamilton (10.34)-(10.35), inicialmente para $U = 0$, de forma que $\alpha = \pi/2$. Na Figura 10.5 mostramos algumas trajetórias no plano de fase xy , representando o movimento de deriva dos centros de guia das partículas do plasma que estão sofrendo giração ao longo da direção z . Como já havíamos alertado, como há uma periodicidade nesta direção, os centros de guia deslocam-se no plano de fase à medida em que as partículas passam repetidas vezes por ele.

A característica mais evidente no plano de fase é a existência de células onde os centros de guia giram em torno dos pontos elípticos (10.40):

$$A_1 : \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad A_2 : \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad A_3 : \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad A_4 : \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad (10.45)$$

Devido à periodicidade nas direções X e Y observa-se quatro destas células, que são separadas por trajetórias heteroclínicas que ligam os pontos hiperbólicos (10.39), viz.

$$C_1 : \left(0, -\frac{\pi}{2}\right), \quad C_2 : \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad C_3 : \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), \quad C_4 : \left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right). \quad (10.46)$$

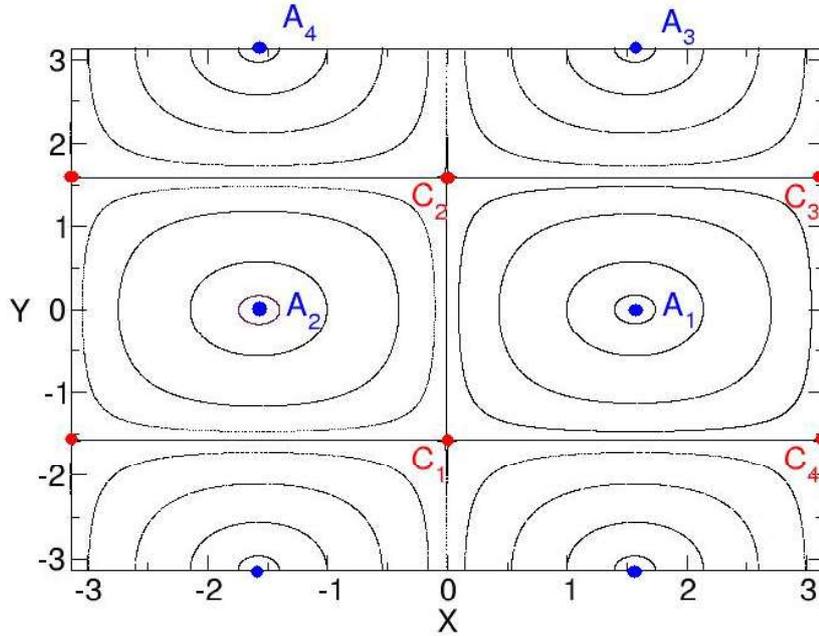


Figura 10.5: Trajetórias no plano de fase para a Hamiltoniana de uma onda (10.69), com $U = 0$.

As trajetórias heteroclínicas, por serem segmentos retilíneos neste exemplo, são determinadas pelos autovetores das respectivas matrizes Jacobianas.

Podemos linearizar a Hamiltoniana (10.69) em torno de qualquer um destes pontos elípticos (X^*, Y^*) , para obter a forma destas trajetórias fechadas nos centros das células:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(X, Y) &= \mathcal{H}(X^*, Y^*) + (X - X^*) \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} \right)_{(X^*, Y^*)}}_{=0} + (Y - Y^*) \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y} \right)_{(X^*, Y^*)}}_{=0} + \\
 &\quad \frac{1}{2} (X - X^*)^2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial X^2} \right)_{(X^*, Y^*)} + \frac{1}{2} (Y - Y^*)^2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial Y^2} \right)_{(X^*, Y^*)} + \dots \\
 &= \frac{\beta}{2} \left\{ (X - X^*)^2 + (Y - Y^*)^2 \right\}, \tag{10.47}
 \end{aligned}$$

onde usamos (10.36)-(10.37) e (10.44), e ignoramos a constante aditiva. Portanto, nas vizinhanças dos pontos elípticos as trajetórias são elipses, analogamente ao oscilador harmônico, com frequência característica $\omega_0 = \beta$. Na medida em que nos aproximamos das trajetórias heteroclínicas as trajetórias fechadas sofrem uma deformação apreciável, e as frequências correspondentes tendem a zero. Nas próprias trajetórias heteroclínicas o período é infinito, pois elas conectam pontos instáveis diferentes.

Com exceção das trajetórias heteroclínicas, todas as trajetórias no plano de fase são fechadas, no interior das respectivas células. Isto se dá pois, se $U = 0$, a velocidade de fase da onda é igual à velocidade de deriva relativa ao campo elétrico estático, configurando um tipo de ressonância. Neste sentido, o termo coeficiente de aprisionamento empregado para a quantidade U é adequado, pois as excursões do centro de guia são limitadas às células centradas nos pontos elípticos.

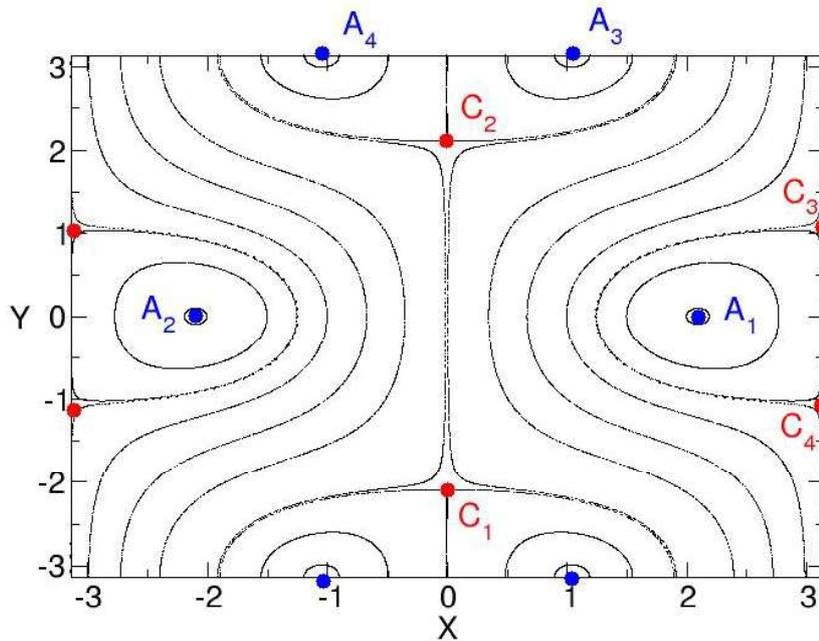


Figura 10.6: Trajetórias no plano de fase para a Hamiltoniana de uma onda (10.69), com $U = 0,5$.

Para investigar o efeito de um parâmetro de aprisionamento diferente de zero, na Fig. 10.6 mostramos as trajetórias no plano de fase para o caso $U = 0,5$, para o qual $\alpha = 1,0472$. Continuamos a ter as células onde as trajetórias são fechadas em seu interior, orbitando em torno dos pontos elípticos A_i . Mas a geometria das células é diferente do caso $U = 0$, devido ao formato diferente das trajetórias heteroclínicas que conectam os pontos hiperbólicos C_j . Duas dessas curvas são compartilhadas por duas células adjacentes.

Entre as células de movimento limitado, observamos também a presença de trajetórias ilimitadas ao longo da direção poloidal Y , indicando que há partículas (ou melhor, centros de guia) que derivam na direção da propagação das ondas. Como a área ocupada pelas células diminui com o aumento do parâmetro de aprisionamento, esperamos que a quantidade (relativa) de trajetórias ilimitadas aumente à medida em que nos aproximamos de $U = 1$. De fato, para $U > 1$ só há trajetórias abertas, e não existem mais células [Fig. 10.7].

Quando levamos em conta a ação da segunda onda de deriva ($\varepsilon \neq 0$) a quebra de integridade leva, como vimos no Capítulo 6, a várias mudanças na dinâmica, de forma análoga à que descrevemos anteriormente para o exemplo da advecção caótica. Como a segunda onda apresenta uma dependência explícita no tempo, fazemos um mapa estroboscópico registrando os valores de X e Y em tempos que são múltiplos do período do termo perturbador $\tau_0 = 2\pi/q\Omega$. Em outras palavras, definimos variáveis discretas como

$$X_n = X(\tau = n\tau_0), \quad Y_n = Y(\tau = n\tau_0). \quad (10.48)$$

Na Fig. 10.8 mostramos algumas trajetórias de deriva no plano de fase usando o mapa estroboscópico para $U = 0$, $\varepsilon = 0,1$, e $k = q = \Omega = 1$, de forma que $\tau = 2\pi$. Como as variedades invariantes que emanam dos pontos hiperbólicos (do caso de uma onda) deixam de formar trajetórias heteroclínicas, interceptando-se num número infinito de pontos homoclínicos, no lugar

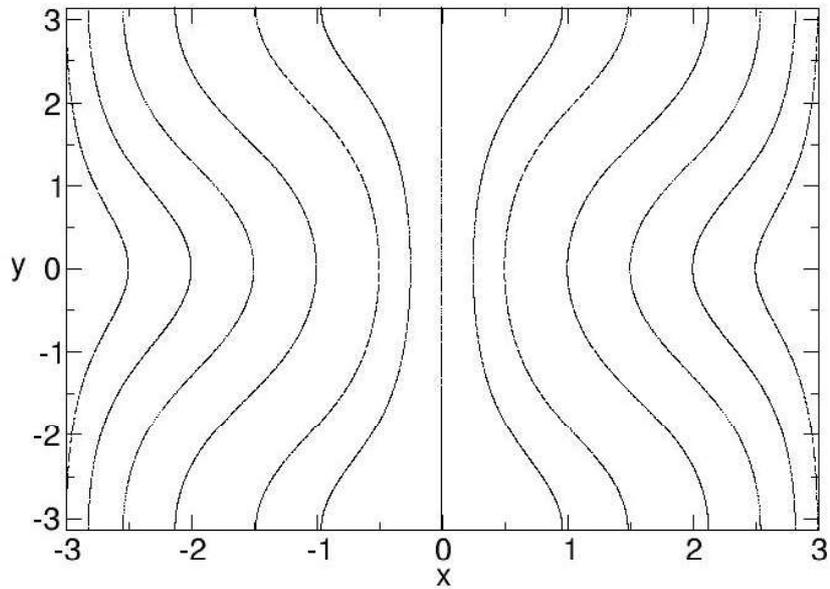


Figura 10.7: Trajetórias no plano de fase para a Hamiltoniana de uma onda (10.69), com $U = 1,5$.

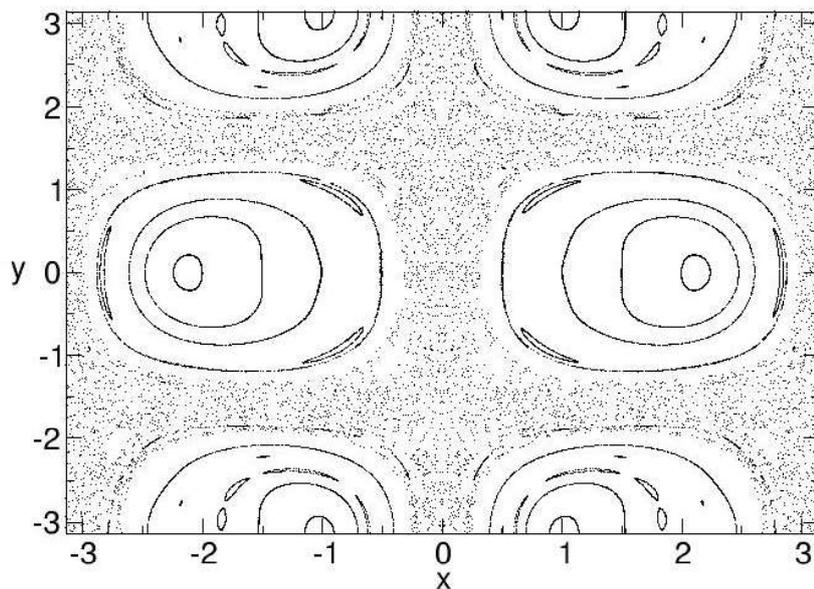


Figura 10.8: Retrato de fase para o mapa de Poincaré referente à Hamiltoniana de duas ondas (10.28), com $U = 0$ e $\varepsilon = 0,1$. Os demais parâmetros são $k = q = \Omega = 1$.

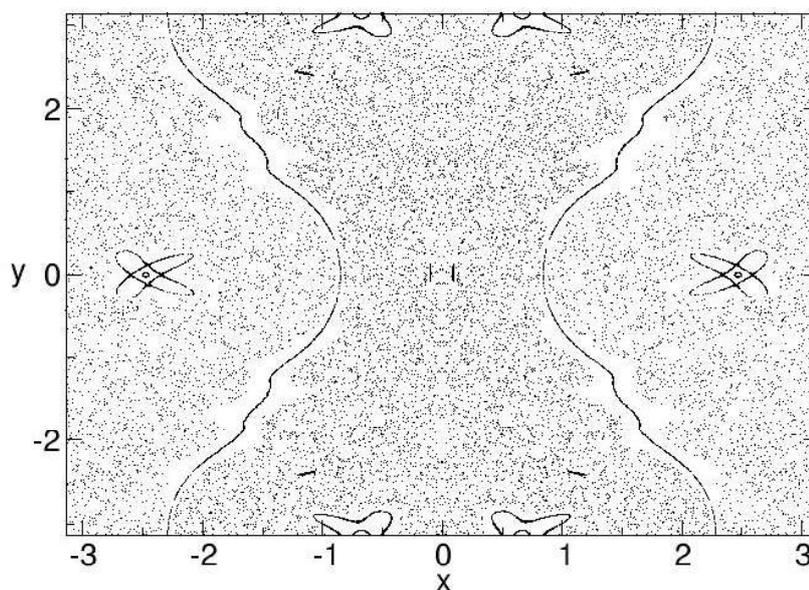


Figura 10.9: Retrato de fase para o mapa de Poincaré referente à Hamiltoniana de duas ondas (10.28), com $U = 0,5$ e $\varepsilon = 0,1$. Os demais parâmetros são $k = q = \Omega = 1$.

das separatrizes que observamos no caso de uma onda [Fig. 10.5], há uma camada de órbitas caóticas que preenchem uma área finita. Há remanescentes das células de aprisionamento das partículas em torno dos pontos elípticos do caso de uma onda. Estas células formam ilhas, imersas num *mar caótico*. Há, também, pequenas ilhas no interior das células, correspondendo a ressonâncias secundárias entre a frequência do termo perturbador e a frequência de oscilação no interior das células. Tais ilhas secundárias também têm a sua estrutura de caos de separatriz, de modo que a figura resultante é auto-similar.

O caso de duas ondas com $U = 0,5$ apresenta diferentes comportamentos: as células são progressivamente erodidas pelo aumento na região caótica, que vai também absorvendo trajetórias abertas, das quais apenas um pequeno número é ainda visível na Fig. 10.9. As células remanescentes praticamente limitam-se à vizinhança dos pontos elípticos, com uma cadeia próxima de quatro ilhas secundárias.

10.4 Linhas de campo magnético em Tokamaks

Em todos os exemplos anteriores, neste capítulo, os sistemas Hamiltonianos estão associados a algum sistema material, como partículas, escalares passivos, vórtices ou centros de guia. Finalizamos este capítulo com um exemplo de sistema Hamiltoniano não-mecânico, que descreve a estrutura das linhas de campo magnético em Tokamaks.

10.4.1 Descrição hamiltoniana

Em todos os exemplos de aplicação do formalismo Hamiltoniano vistos neste livro, a variável independente tem sido o tempo. No entanto, a configuração das linhas de campo magnético no

equilíbrio magnetohidrodinâmico é estritamente estática. Assim, alguma variável do sistema deverá desempenhar o papel de tempo nas equações canônicas. Isto é possível em configurações axisimétricas, como os Tokamaks [109].

Em geral, para razão de aspecto A arbitrária, as superfícies magnéticas de equilíbrio são toróides, onde o ângulo ϕ é uma coordenada ignorável, em relação ao eixo maior do toróide. Para esta situação, as quantidades físicas de interesse não dependem explicitamente de ϕ . Um exemplo é a componente toroidal do campo magnético, dada por (10.7). Se usamos a aproximação de grande razão de aspecto, as superfícies magnéticas de equilíbrio são cilindros periódicos, de modo que $z = R_0\phi$ é a coordenada ignorável, havendo pois uma simetria em relação a ela.

Nas configurações axisimétricas de equilíbrio magnetohidrodinâmico a coordenada ignorável pode desempenhar o papel do tempo. Com tal escolha, mostraremos que as equações das linhas de campo magnético podem ser escritas na forma de equações de Hamilton, após definir um par canônico coordenada-momentum. Como o tempo físico não aparece nas equações, a dinâmica nesta situação refere-se à estrutura espacial das linhas de campo, onde o tempo passa a ser representado por uma coordenada que nos permite parametrizar uma linha de campo magnético num instante de tempo fixo.

Existe uma descrição Hamiltoniana para sistemas de coordenadas curvilíneas genéricas [110], mas neste Capítulo veremos explicitamente o caso de Tokamaks de grande razão de aspecto, para os quais empregaremos as coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , onde o campo magnético de equilíbrio é dado por (10.10). As equações das linhas de campo magnético, dadas vetorialmente pela condição

$$\mathbf{B} \times \mathbf{ds} = \mathbf{0}, \quad (10.49)$$

onde \mathbf{ds} é um elemento vetorial de linha, assumem a seguinte forma nas coordenadas locais

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{R_0d\phi}{B_\phi}, \quad (10.50)$$

onde B_ϕ é o campo toroidal de equilíbrio. De (10.8), o fator de segurança é dado, em função dos campos magnéticos, por

$$q(r) = \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{rB_\phi}{R_0B_\theta(r)}. \quad (10.51)$$

Reescrevemos, agora, as equações (10.50) na forma

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{R_0B_r}{B_\phi}, \quad (10.52)$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{B_\theta R_0}{rB_\phi} = \frac{1}{q(r)} = \mathcal{L}(r), \quad (10.53)$$

onde $\mathcal{L} = 1/2\pi$ é a transformada rotacional normalizada. Definimos um momentum $J = r^2/2$ canonicamente conjugado à coordenada θ , tal que as equações das linhas de campo acima podem ser expressas na forma de equações de Hamilton

$$\frac{dJ}{d\phi} = \frac{R_0B_r\sqrt{2J}}{B_\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (10.54)$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{B_\theta R_0}{\sqrt{2J}B_\phi} = \mathcal{L}(J) = \frac{\partial H}{\partial J}, \quad (10.55)$$

sendo que ϕ desempenha o papel do tempo, e onde H é a Hamiltoniana de linhas de campo.

Na configuração de equilíbrio em um Tokamak de grande razão de aspecto, adotamos a aproximação dada por (10.10). Como $B_r = 0$, de (10.54) resulta que a Hamiltoniana de equilíbrio H_0 não depende de θ . Devido a (10.55) teremos que [111]

$$H_0(J) = \int \mathcal{E}(J)dJ, \quad (10.56)$$

a menos de uma constante aditiva irrelevante.

Como (J, θ) formam um par canônico, a configuração de equilíbrio representa um sistema com um grau de liberdade. Uma vez que a Hamiltoniana acima não depende explicitamente do “tempo” ϕ , ela é uma constante do movimento, de sorte que o sistema é integrável. Além disso, na configuração de equilíbrio (J, θ) são, na verdade, variáveis de ação e ângulo, respectivamente.

Uma peculiaridade muito interessante deste sistema é que o espaço de fase coincide com o espaço de configuração. Encarando as linhas de campo como trajetórias de fase do sistema, elas jazem sobre toros no espaço de fase, que coincidem com as superfícies magnéticas toroidais do equilíbrio magnetohidrodinâmico! De fato, as equações de Hamilton para (10.56) são

$$\frac{dJ}{d\phi} = 0, \quad \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\iota(J)}{2\pi}, \quad (10.57)$$

As trajetórias de fase estão em toros com raio J constante, e $\iota(J)$ é a transformada rotacional associada ao toro, que pode ser racional ou irracional dependendo do seu valor.

A configuração de equilíbrio do plasma confinado no Tokamak é necessária para o confinamento do plasma, mas é uma idealização de um comportamento que pode se desviar desta situação devido a vários fatores, como campos magnéticos externos não-simétricos e instabilidades do plasma. Estas perturbações, em geral, dependem do “tempo” ϕ , e também podem ser expressas na forma Hamiltoniana. Como o sistema exibe periodicidade nos ângulos θ e ϕ , a Hamiltoniana correspondente à perturbação pode ser expressa numa série dupla de Fourier nestes ângulos

$$\varepsilon H_1(J, \theta, \phi) = \sum_{m', n'} a_{m', n'}(J) \cos(m'\theta - n'\phi), \quad (10.58)$$

onde os coeficientes de Fourier $a_{m', n'}$ dependem, em geral, da variável de ação J . Nós incluímos um parâmetro pequeno ε para efeitos de teoria de perturbação. Nas aplicações práticas, este parâmetro está incluído na própria forma do termo H_1 .

No caso de uma perturbação dependente do “tempo” ϕ , é conveniente trabalhar com uma superfície de seção de Poincaré, como o plano $\phi = 0$. Todas as vezes que uma dada linha de campo magnético, ao dar uma volta completa em torno da direção toroidal, intercepta este plano temos um ponto de coordenadas (J, θ) . Devido à unicidade das soluções das equações das linhas de campo magnético, as coordenadas de cada ponto nesta superfície de seção serão funções unívocas das coordenadas do ponto precedente, o que nos leva a um mapa de Poincaré. Como ϕ é uma variável análoga ao tempo, podemos encará-lo também como um mapa estroboscópico, ou seja, registramos os valores de (J_n, θ_n) após um ângulo $\phi = 2\pi n$, com $n = 0, 1, 2, \dots$

Este mapa é conservativo (preserva áreas na superfície de seção de Poincaré), pois os campos magnéticos envolvidos satisfazem à Lei de Gauss magnética $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, que implica na conservação do fluxo magnético envolvido pelas linhas de campo. Em problemas mais gerais estes mapas de Poincaré devem ser gerados numericamente, de forma análoga à empregada nos exemplos de advecção caótica e da deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. No entanto, estudos teóricos e computacionais frequentemente empregam mapas de linhas de campo com formas analíticas mais ou menos

complicadas, com o objetivo de analisar aplicações específicas em máquinas de confinamento magnético de plasmas de fusão.

Se $\varepsilon \ll 1$ o sistema é quase-integrável, cuja Hamiltoniana pode ser expressa na forma usual

$$H(J, \theta, \phi) = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta, \phi), \quad (10.59)$$

tal que possamos empregar diversos conceitos do Capítulo 6 referentes ao tipo de comportamento previsto para as linhas de campo magnético num Tokamak sujeito a perturbações não-simétricas. Os resultados básicos que podemos aplicar na presente situação dependem do fator de segurança associado ao toro do sistema não-perturbado

1. a perturbação destrói os toros racionais para os quais $q(J) = m/n$, onde m e n são inteiros primos entre si, deixando em seu lugar um número par de pontos de equilíbrio elípticos e hiperbólicos (Teorema de Poincaré-Birkhoff);
2. a perturbação, desde que suficientemente fraca, mantém uma certa fração de toros irracionais (valores irracionais de $q(J)$), ainda que com deformações (Teorema KAM). Alguns toros irracionais também serão destruídos, dependendo do seu fator de segurança;
3. a existência de pontos homoclínicos (interseções de variedades estáveis e instáveis de pontos hiperbólicos) permite órbitas caóticas, no sentido Lagrangiano do termo: duas linhas de campo magnético, originalmente muito próximas, afastam-se exponencialmente na medida em que as linhas de campo executam revoluções ao longo do Tokamak.

Falando em termos da superfície de seção de Poincaré $\phi = 0$, os toros irracionais que permanecem são curvas invariantes, enquanto os toros racionais destruídos deixam em seu lugar uma sequência de órbitas periódicas. Nas vizinhanças destas órbitas temos ilhas periódicas com a mesma estrutura da Hamiltoniana do pêndulo. Entretanto, ao contrário do pêndulo propriamente dito, que é um sistema integrável, uma ilha periódica apenas se assemelha ao pêndulo, pois as separatrizes deixam de se conectar devido à existência dos pontos homoclínicos característicos de um sistema não-integrável. Os emaranhados homoclínicos resultantes criam uma região caótica relativamente estreita nas bordas das ilhas periódicas. Neste caso, a maior excursão das órbitas caóticas limita-se à largura da ilha periódica correspondente (caos local, na terminologia introduzida no Capítulo 7).

Se a intensidade da perturbação é suficientemente fraca, a existência das curvas invariantes (KAM) entre diferentes ressonâncias impede que as regiões caóticas locais às separatrizes se misturem. Caso haja essa mistura, as órbitas caóticas podem exibir grandes excursões em J , configurando o que chamamos anteriormente de caos global. Uma região caótica com tais propriedades tipicamente domina a região disponível da superfície de seção de Poincaré, podendo inclusive dominá-la completamente, com pouca influência das ilhas periódicas que eventualmente ainda permaneçam.

10.4.2 Efeito de um limitador magnético num Tokamak

Após desenvolver o arcabouço teórico básico para a descrição Hamiltoniana de perturbações não-integráveis no plasma confinado em Tokamaks, vamos considerar um problema concreto, que é a influência de um limitador magnético em um Tokamak de grande razão de aspecto. Este é um problema importante para diversas aplicações propostas no sentido de controlar as interações do plasma com a parede interna do Tokamak. Um ingrediente fundamental nesta proposta é a formação de linhas de campo magnético caóticas. Vamos mostrar separadamente a dedução das Hamiltonianas de equilíbrio e da perturbação, para posteriormente analisar a formação de ilhas

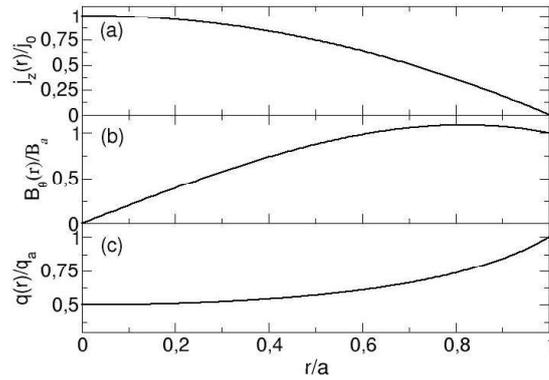


Figura 10.10: Perfis radiais de: (a) densidade de corrente, (b) campo magnético poloidal, (c) fator de segurança.

Hamiltoniana de equilíbrio

Na aproximação de grande razão de aspecto, a corrente de plasma é um cilindro de raio a , para o qual a densidade de corrente é não-uniforme, mas tem simetria radial, na forma $\mathbf{j} = j_z(r)\hat{\mathbf{z}}$. O perfil radial da corrente de plasma é escolhido com base em medidas da temperatura local do plasma: a densidade de corrente é máxima no eixo e anula-se na fronteira do plasma. Um perfil que satisfaz estes requisitos é [Fig. 10.10(a)] [112]

$$j_z(r) = j_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad (10.60)$$

onde j_0 é uma constante, de forma que a corrente de plasma que flui através de um círculo de raio r é dada pela integral de superfície

$$I(r) = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{z}} dA = \int_0^r j_z(r') (2\pi r') dr'. \quad (10.61)$$

Substituindo (10.60) em (10.61) uma integração elementar fornece

$$I(r) = \frac{\pi J_0 r^2}{2} \left(2 - \frac{r^2}{a^2}\right). \quad (10.62)$$

A corrente total de plasma é obtida fazendo $r = a$ em (10.61),

$$I_p = \frac{\pi J_0 a^2}{2}. \quad (10.63)$$

O campo poloidal, por sua vez, é calculado usando a Lei Circuital de Ampère: seja C um círculo de raio r na seção reta da coluna de plasma, e com centro sobre o eixo magnético. Então

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C B_\theta(r) (r d\theta) = \mu_0 I(r). \quad (10.64)$$

Como r é constante sobre a curva fechada C , e usando (10.62),

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 J_0 r}{4} \left(2 - \frac{r^2}{a^2}\right) = B_{\theta a} \frac{r}{a} \left(2 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad (10.65)$$

onde

$$B_{\theta a} = \frac{\mu_0 J_0 a}{4} = \frac{\mu_0 I_P}{2\pi a} \quad (10.66)$$

é o campo poloidal na borda do plasma [Fig. 10.10(b)].

No âmbito da aproximação de grande razão de aspecto, o campo magnético de equilíbrio só tem componentes poloidal e toroidal, dados por (10.10). O fator de segurança das superfícies magnéticas é, de (10.51),

$$q(r) = \frac{rB_0}{R_0 B_{\theta}(r)} = q_a \left(2 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1}, \quad (10.67)$$

onde seu valor na borda do plasma é

$$q_a = q(r = a) = \frac{a}{R_0} \frac{B_0}{B_{\theta a}} = \frac{2\pi a^2 B_0}{\mu_0 R_0 I_P}, \quad (10.68)$$

e, na posição do eixo magnético, é $q_0 = q(0) = q_a/2$ [Fig. 10.10(c)].

O Tokamak TCABR, por exemplo, tem razão de aspecto $A = (0,61m)/(0,18m) = 3,4$, que não é muito grande, de modo que a aproximação cilíndrica que estamos mostrando só se aplica parcialmente à descrição das descargas de plasma nele produzidas. Usando o valor máximo de $I_P = 0,1MA$ para a corrente de plasma, temos que $j_0 \sim 2MA/m^2$. O campo poloidal na borda do plasma correspondente vale $B_{\theta a} = 0,11T$, que representa 10% do valor do campo toroidal no eixo magnético $B_0 = 1,1T$. O fator de segurança na borda do plasma é $q_a = 2,95 \approx 3$, enquanto no eixo magnético é $q_0 = 1,5$. Como este último valor é maior que 1, é possível mostrar que (critério de Kruskal-Shafranov) que esta descarga é estável em relação a instabilidades de dobra, uma das mais perigosas em termos da operação de Tokamaks ¹.

Finalmente, a Hamiltoniana de equilíbrio (10.56) correspondente ao fator de segurança dado por (10.68) é

$$H_0(J) = \frac{2}{q_a} \int dJ \left(1 - \frac{J}{a^2}\right) = \frac{2J}{q_a} \left(1 - \frac{J}{2a^2}\right), \quad (10.69)$$

cujas derivadas, para uso futuro, são dadas por

$$\frac{dH_0}{dJ} = \mathcal{E}(J) = \frac{2}{q_a} \left(1 - \frac{J}{a^2}\right), \quad (10.70)$$

$$\frac{d^2 H_0}{dJ^2} = \frac{d\mathcal{E}}{dJ} = -\frac{2}{q_a a^2}. \quad (10.71)$$

Hamiltoniana perturbadora

O limitador magnético consiste num anel de correntes filamentosas de comprimento ℓ , e enroladas em torno do vaso cilíndrico (aproximação de grande razão de aspecto) com uma distância radial $r = b$ em relação ao eixo magnético. O raio do limitador deve ser maior que o raio de plasma $r = a$, pois a sua ação também se estende à camada de vácuo situada entre o plasma e a parede interna do Tokamak, mas para todos os efeitos consideraremos $b = a$ por simplicidade [113]. Conforme a figura 10.11, o limitador magnético tem dois tipos de segmentos conectados entre si: segmentos retilíneos paralelos ao longo da direção $z = R_0\phi$, e segmentos curvos na

¹Esta é, aliás, a razão do nome *fator de segurança* para $q(r)$!

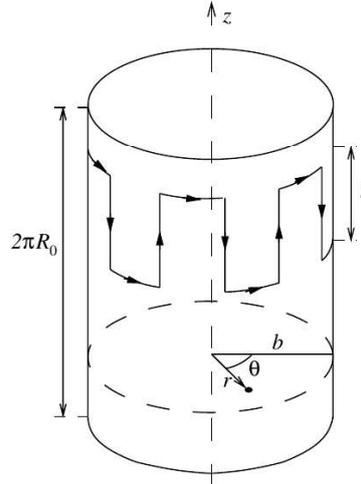


Figura 10.11: Esquema de um limitador magnético num Tokamak de grande razão de aspecto.

direção θ . Existem m pares de segmentos retilíneos tais que dois segmentos adjacentes conduzem a mesma corrente em sentidos opostos.

O cálculo do campo magnético $\mathbf{B}^{(1)}$ produzido por um limitador magnético pode ser encontrado nas referências [?]. Por simplicidade, desprezando efeitos de borda devido à extensão finita do limitador, podemos aproximar $\mathbf{B}^{(1)}$ pelo campo produzido por m pares de fios retilíneos paralelos, onde fios adjacentes conduzem uma corrente I_L em sentidos opostos, e que se anula em todos os pontos fora do limitador. Temos, assim, uma dependência explícita no “tempo” $\phi = z/R_0$, de modo que o campo magnético produzido por esta configuração é $\mathbf{B}^{(1)} = (B_r^{(1)}, B_\theta^{(1)}, B_\phi^{(1)})$, onde $B_\phi^{(1)}$ é criado pelos segmentos curvos. Como o campo toroidal de equilíbrio B_0 é usualmente muito maior do que aquele criado pelo limitador, então desprezaremos $B_\phi^{(1)}$ frente a B_0 nas equações a seguir. As outras componentes são dadas por [115]

$$B_r^{(1)}(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 m I_L}{\pi a^m} r^{m-1} \sin(m\theta) f(\phi), \quad (10.72)$$

$$B_\theta^{(1)}(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 m I_L}{\pi a^m} r^{m-1} \cos(m\theta) f(\phi), \quad (10.73)$$

onde o fator dependente do “tempo” ϕ é

$$f(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \phi < \ell/R_0, \\ 0, & \text{se } \ell/R_0 \leq \phi < 2\pi. \end{cases} \quad (10.74)$$

Este modelo, em que pese sua simplicidade, apresenta resultados em concordância com cálculos mais precisos, bem como medidas experimentais do campo magnético produzido por um limitador magnético [114].

A Hamiltoniana $H_1(J, \theta, \phi)$ relativa à perturbação causada pelo campo magnético do limitador, é determinada, usando (10.54)-(10.55), a partir das relações

$$\frac{\partial H_1}{\partial \theta} \approx \frac{R_0 B_r^{(1)}(J, \theta, \phi) \sqrt{2J}}{B_0} \quad (10.75)$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial J} \approx \frac{B_\theta^{(1)}(J, \theta, \phi) R_0}{\sqrt{2J} B_0}. \quad (10.76)$$

Expressando as componentes do campo magnético perturbador (10.72)-(10.73) função da variável de ação $J = r^2/2$, verificamos que

$$H_1(J, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 R_0 I_L}{B_0 \pi a^m} (2J)^{m/2} \cos(m\theta) f(\phi). \quad (10.77)$$

Lembrando que, na aproximação de grande razão de aspecto, tratamos o Tokamak como um cilindro periódico de comprimento $2\pi R_0$, a função (10.74) é periódica no “tempo” ϕ e, portanto, pode ser expressa por uma série de Fourier, na forma

$$f(\phi) = \frac{\ell}{2\pi R_0} \left\{ 1 + 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \cos(n\phi) \right\}. \quad (10.78)$$

Assim, a Hamiltoniana perturbadora pode ser reescrita na forma

$$H_1(J, \theta, \phi) = -\sigma A_m(J) \left\{ \cos(m\theta) + 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \cos(m\theta) \cos(n\phi) \right\}, \quad (10.79)$$

onde definimos

$$\sigma = \frac{\mu_0 I_L \ell}{2\pi^2 B_0}, \quad (10.80)$$

$$A_m(J) = \frac{(2J)^{m/2}}{a^m}. \quad (10.81)$$

Usando uma identidade trigonométrica (transformação de produto em soma)

$$\cos(m\theta) \cos(\ell\phi) = \frac{1}{2} \{ \cos(m\theta - \ell\phi) + \cos(m\theta + \ell\phi) \},$$

temos a seguinte Hamiltoniana total (equilíbrio mais perturbação)

$$H(J, \theta, \phi) = H_0(J) - \sigma A_m(J) \left\{ \cos(m\theta) + 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} [\cos(m\theta - \ell\phi) + \cos(m\theta + \ell\phi)] \right\}. \quad (10.82)$$

Remoção das ressonâncias

Vamos, agora, encarar a Hamiltoniana que acabamos de obter do ponto de vista de um sistema quase-integrável. Isto, como sabemos, só é possível se a perturbação tem intensidade muito pequena, em relação à Hamiltoniana de equilíbrio. No caso da perturbação causada pelo limitador magnético que descrevemos na subseção precedente, há dois parâmetros “pequenos” que podem desempenhar esta função: (i) a razão entre a corrente elétrica no limitador I_L e a corrente total de plasma I_P , (ii) a razão entre o comprimento do limitador ℓ e o comprimento total do cilindro periódico $2\pi R_0$.

Definimos, então, os parâmetros normalizados

$$\varepsilon = \frac{I_L}{I_P}, \quad \xi = \frac{\ell}{R_0}, \quad (10.83)$$

com os quais a intensidade σ da perturbação, dada por (10.80), é expressa como

$$\sigma = \varepsilon \xi \left(\frac{a^2}{q_a \pi} \right), \quad (10.84)$$

onde usamos (10.68) para escrever o fator de segurança na borda do plasma q_a em função da corrente de plasma I_P . Portanto, a Hamiltoniana será pequena, em relação ao termo de equilíbrio, se $\varepsilon\xi \ll 1$, ou seja, se tipicamente $I_L \ll I_P$ e $\ell \ll R_0$.

No Tokamak TCABR foi implantado um limitador magnético de comprimento $\ell = 0,1 m$ com $m = 3$ pares de fios, cada fio conduzindo uma corrente $I_L = 2500 A$ [114]. Como, para o TCABR, $R_0 = 0,615 m$ e $I_P = 100 kA$, estes coeficientes são $\varepsilon = 0,025$ e $\xi = 0,163$, de modo que σ é, com efeito, um número pequeno para valores típicos de a e q_a . Estas estimativas nos habilitam, portanto, a empregar a Teoria Canônica de Perturbações vista no Capítulo 5. No entanto, como lá discutimos, a presença de ressonâncias compromete as séries perturbativas de modo dramático, fazendo com que os respectivos termos sejam infinitamente grandes (problema dos pequenos denominadores). Nestes casos, devemos remover a ressonância de interesse e tratá-la separadamente.

Uma ressonância ocorre quando a fase $m\theta - n\phi$ é constante, de modo que sua derivada “temporal” é nula:

$$m \frac{d\theta}{d\phi} - n = 0 \rightarrow \frac{d\theta}{d\phi} = q(r^*) = \frac{m}{n}, \quad (10.85)$$

ou seja, numa ressonância o fator de segurança (10.51) é um número racional. O toro correspondente (no espaço de fase, mas lembre que ele também é uma superfície magnética toroidal) tem raio r^* dado por (10.85). Este toro racional (assim como todos os demais) será destruído pela perturbação H_1 . Usando (10.70), o valor correspondente da variável de ação J^* é dado por

$$J^* = a^2 \left(1 - \frac{m}{2q_a n} \right), \quad (10.86)$$

no contexto do exemplo dado para a Hamiltoniana de equilíbrio (não-perturbada).

O termo $\cos(m\theta - n\phi)$, nesta ressonância, é constante, e portanto oscila lentamente nas suas proximidades. Já os demais termos, incluindo $\cos(m\theta + n\phi)$ oscilam rapidamente com o “tempo” e anulam-se se fizermos uma média em ϕ . Separamos, assim, o termo ressonante em (10.82):

$$H_{res}(J, \theta, \phi) = H_0(J) - \sigma A_m(J) \cos(m\theta - \ell\phi). \quad (10.87)$$

Nas vizinhanças da ressonância exata, é conveniente definir a diferença $\Delta J = J - J^*$. Se $|\Delta J|$ for suficientemente pequeno, podemos expandir a Hamiltoniana ressonante em série de Taylor em ΔJ :

$$\begin{aligned} H_{res}(J, \theta, \phi) &= H_0(J^* + \Delta J) - \sigma A_m(J^* + \Delta J) \cos(m\theta - \ell\phi), \\ &= H_0(J^*) + \Delta J \left(\frac{\partial H_0}{\partial J} \right)_{J^*} + \frac{1}{2} (\Delta J)^2 \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} \right)_{J^*} - \sigma A_m(J^*) \cos(m\theta - \ell\phi) + \dots \end{aligned} \quad (10.88)$$

Definimos a Hamiltoniana nas vizinhanças da ressonância exata como

$$\begin{aligned} \Delta H(\Delta J, \theta, \phi) &= H_{res}(J, \theta, \phi) - H_0(J^*), \\ &= \Delta J \left(\frac{\partial H_0}{\partial J} \right)_{J^*} + \frac{1}{2} (\Delta J)^2 \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} \right)_{J^*} - \sigma A_m(J^*) \cos(m\theta - \ell\phi). \end{aligned} \quad (10.89)$$

Usando (10.70)-(10.71) temos que, na posição da ressonância exata (10.86), as derivadas parci-

ais de H_0 são

$$\left(\frac{dH_0}{dJ}\right)_{J^*} = \mathcal{E}(J^*) = \frac{n}{m}, \quad (10.90)$$

$$\left(\frac{d^2H_0}{dJ^2}\right)_{J^*} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial J}\right)_{J^*} = -\frac{2}{q_a a^2}. \quad (10.91)$$

Neste ponto é conveniente fazermos a seguinte transformação canônica

$$(\Delta J, \theta, \phi) \rightarrow (I, \psi),$$

implementada pela função geratriz de segunda espécie

$$F_2(I, \theta, \phi) = (m\theta - n\phi)I, \quad (10.92)$$

com as seguintes equações de transformação

$$\psi = \frac{\partial F_2}{\partial I} = m\theta - n\phi, \quad (10.93)$$

$$\Delta J = \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = mI, \quad (10.94)$$

$$\mathcal{H}(I, \psi) = \Delta H(\Delta J, \theta, \phi) + \frac{\partial F_2}{\partial \phi} = \Delta H - nI, \quad (10.95)$$

equivalentes a passarmos a um referencial “girante”, o que elimina o “tempo” ϕ . Aplicando estas equações em (10.89) temos a Hamiltoniana nas vizinhanças da ressonância exata

$$\mathcal{H}(I, \psi) = \frac{1}{2}m^2 I^2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial J}\right)_{J^*} I^2 - \sigma A_m(J^*) \cos \psi, \quad (10.96)$$

que pode ser identificada com a Hamiltoniana do pêndulo

$$\mathcal{H}(I, \psi) = \frac{1}{2}GI^2 - F \cos \psi, \quad (10.97)$$

onde definimos

$$F = \sigma A_m(J^*) = \frac{\sigma}{a^m} (2J^*)^{m/2} = \sigma \left\{ 2 \left(1 - \frac{m}{2q_a n} \right) \right\}^{m/2} \quad (10.98)$$

$$G = m^2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial J}\right)_{J^*} = -\frac{2m^2}{q_a a^2}, \quad (10.99)$$

com o auxílio das fórmulas (10.86) e (10.91).

As trajetórias de fase da Hamiltoniana do pêndulo (10.97) referem-se às curvas existentes em torno do ponto elíptico ($I^* = 0, \theta^* = \pi$), localizado na posição da ressonância exata J^* . Os pontos hiperbólicos ($I^* = 0, \theta^* = 0, \pi$) são conectados suavemente por trajetórias heteroclínicas, determinados pela separatriz da Hamiltoniana do pêndulo. O conjunto formado pelas curvas fechadas e pela separatriz é denominado ilha periódica (ou ilha magnética, na literatura de plasmas). Para determinarmos a semi-largura I_{max} da ilha impomos a condição de constância de \mathcal{H} sobre a sua separatriz

$$\mathcal{H}(I = 0, \psi = 0) = \mathcal{H}(I = I_{max}, \psi = \pi),$$

que, em vista de (10.97), fornece

$$I_{max} = 2 \left| \frac{F}{G} \right|^{1/2}, \quad (10.100)$$

enquanto a frequência das oscilações em torno do ponto elíptico é dada por

$$\omega_0 = |FG|^{1/2} \quad (10.101)$$

No exemplo específico do limitador magnético, usando (10.98) e (10.99), a semi-largura da ilha é

$$I_{max} = \frac{2a^2}{m} \sqrt{\frac{\varepsilon\xi}{2\pi}} \left\{ 2 \left(1 - \frac{m}{2q_a n} \right) \right\}^{m/4} \quad (10.102)$$

e que, portanto, é proporcional à raiz quadrada da intensidade da perturbação $\varepsilon\xi$.

Na verdade, a estrutura de pêndulo para o movimento na vizinhança da ressonância é uma idealização. A presença de pontos homoclínicos associados à quebra de integrabilidade do sistema Hamiltoniano perturbado (pois dependente do tempo) faz com que as separatrizes da ilha não estejam conectadas de forma suave. Pelo contrário, as variedades estáveis e instáveis cruzam-se um número infinito de vezes, formando o emaranhado homoclínico, e que é o esqueleto de uma órbita caótica local, restrita à periferia da ilha. Na verdade, se a intensidade da perturbação aumenta, a própria ilha vai sendo progressivamente destruída, e uma região caótica (preenchedora de áreas no plano de fase) vai crescendo até dominar todo o plano de fase.

Mapas de Poincaré para as linhas de campo magnético

Vamos considerar, agora, a Hamiltoniana original do Tokamak (na aproximação de grande razão de aspecto) com limitador magnético. Associando (10.69) e (10.77) temos

$$\begin{aligned} H(J, \theta, \phi) &= H_0(J) + H_1(J, \theta, \phi) \\ &= \frac{2J}{q_a} \left(1 - \frac{J}{2a^2} \right) - \frac{\mu_0 R_0 I_L}{B_0 \pi a^m} (2J)^{m/2} \cos(m\theta) f(\phi). \end{aligned} \quad (10.103)$$

Usando (10.83) e (10.84) podemos expressar a Hamiltoniana acima como

$$H(I, \theta, \phi) = \frac{a^2}{q_a} I(1 - I) + \frac{2a^2}{q_a} \varepsilon I^{m/2} \cos(m\theta) f(\phi). \quad (10.104)$$

onde definimos uma variável de ação normalizada

$$I = \frac{J}{a^2/2}. \quad (10.105)$$

Uma vez que $J = r^2/2$, como dentro do cilindro temos $0 \leq r \leq a$, resulta que o domínio de interesse da ação normalizada é $0 \leq I \leq 1$, enquanto $0 \leq \theta < 2\pi$. Podemos, ainda, normalizar a própria Hamiltoniana fazendo

$$\mathcal{H} = \frac{H}{a^2/q_a}, \quad (10.106)$$

tal que

$$\mathcal{H}(I, \theta, \phi) = I(1 - I) + 2\varepsilon I^{m/2} \cos(m\theta) f(\phi), \quad (10.107)$$

tenha como único parâmetro variável a razão ε entre a corrente elétrica no limitador magnético (I_L) e a corrente total de plasma (I_P), para um valor fixo de m que, recordemos, é o número de

pares de fios toroidalmente orientados no limitador. Nos experimentos realizados no TCABR, o valor de ε é da ordem de 0,025. Já a dependência com o “tempo” ϕ , dada por (10.74), é

$$f(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \phi < \xi, \\ 0, & \text{se } \xi \leq \phi < 2\pi. \end{cases} \quad (10.108)$$

onde $\xi = \ell/R_0$ é o comprimento (normalizado) do limitador. Vamos utilizar $m = 3$ e $\xi = 0,163$ nas simulações numéricas a seguir.

As equações de Hamilton correspondentes a (10.107) serão

$$\frac{dI}{d\phi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 2\varepsilon m I^{m/2} \sin(m\theta) f(\phi), \quad (10.109)$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = 1 - 2I + \varepsilon m I^{(m/2)-1} \cos(m\theta) f(\phi), \quad (10.110)$$

e podem ser resolvidas numericamente. As trajetórias obtidas a partir de cada condição inicial $(I(\phi = 0), \theta(\phi = 0))$, são as próprias linhas de campo magnético que passam por ela. Como estamos interessados no mapa de Poincaré, nós registramos apenas os valores de (I, θ) para os quais $\phi = 0$ modulo 2π , ou seja, a cada volta completa da linha de campo na direção toroidal (ϕ), gerando as variáveis discretas

$$I_n = I(\phi = 2\pi n), \quad \theta_n = \theta(\phi = 2\pi n). \quad (10.111)$$

O conjunto de pontos do mapa de Poincaré (I_n, θ_n) , obtidos para condições iniciais escolhidas adequadamente, é o retrato de fase do mapa das linhas de campo. Para facilitar a visualização, optaremos por representar (I, θ) usando coordenadas cartesianas ao invés de polares.

Na Fig. 10.12 mostramos o retrato de fase para o caso não-perturbado, ou seja, tomando $\varepsilon = 0$. O resultado é típico de um mapa twist associado a um sistema integrável: há toros racionais e irracionais, sobre os quais as linhas de campo têm formato helicoidal. Para toros racionais correspondentes a um fator de segurança $q(I) = m/n$, uma linha de campo fecha-se sobre si mesma após m voltas na direção poloidal (θ) e n voltas na direção toroidal. No retrato de fase, portanto, os toros racionais são representados por pontos isolados, como aquele para $I = 0,5$. Já nos toros irracionais as linhas de campo nunca se fecham sobre si mesmas, preenchendo densamente (ergodicamente) a superfície magnética correspondente, e gerando curvas (na verdade, segmentos de reta) contínuas.

O caso não-integrável, associado a um pequeno valor da perturbação ($\varepsilon = 0,025$), é ilustrado na Fig. 10.13. No retrato de fase observamos a existência de curvas contínuas e ilhas periódicas, que resultam dos toros irracionais e racionais, respectivamente, do sistema não-perturbado. Os toros irracionais não destruídos pela perturbação sofrem algum grau de distorção (Teorema KAM), enquanto os toros racionais são todos destruídos, deixando pontos fixos elípticos e hiperbólicos do mapa (Teorema de Poincaré-Birkhoff), em torno dos quais emergem estruturas similares ao pêndulo, as ilhas periódicas. Mas, devido à não-integrabilidade, existem emaranhados homoclínicos que tornam difusas as separatrizes destas ilhas, formando o que chamamos no Cap. 6 de camadas estocásticas. A espessura das camadas estocásticas é proporcional à intensidade da perturbação ε , de modo que se esta é suficientemente pequena, as camadas estocásticas são tão finas que podemos confundir-las com separatrizes normais.

Observamos, na Fig. 10.13, que as maiores ilhas estão localizadas na região próxima a $I = 1$, que corresponde à parede do tokamak em $r = a$, onde também está posicionado o limitador.

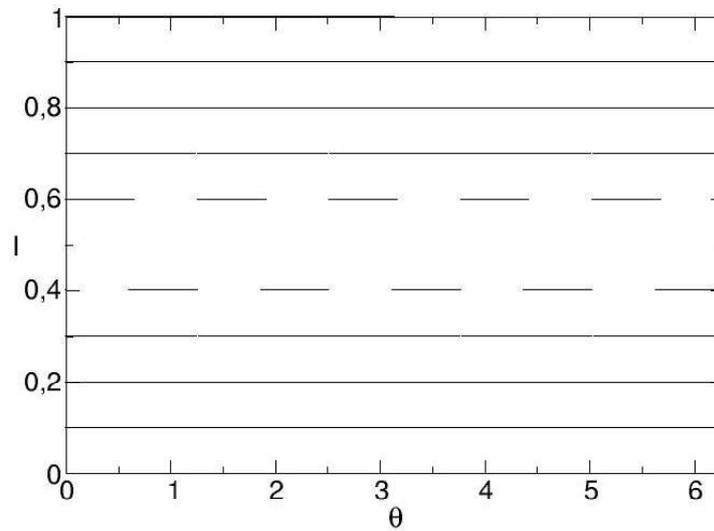


Figura 10.12: Retrato de fase do mapa de Poincaré para as linhas de campo magnético num Tokamak de grande razão de aspecto com um limitador magnético onde $m = 3$, $\xi = 0,163$ e $\varepsilon = 0$.

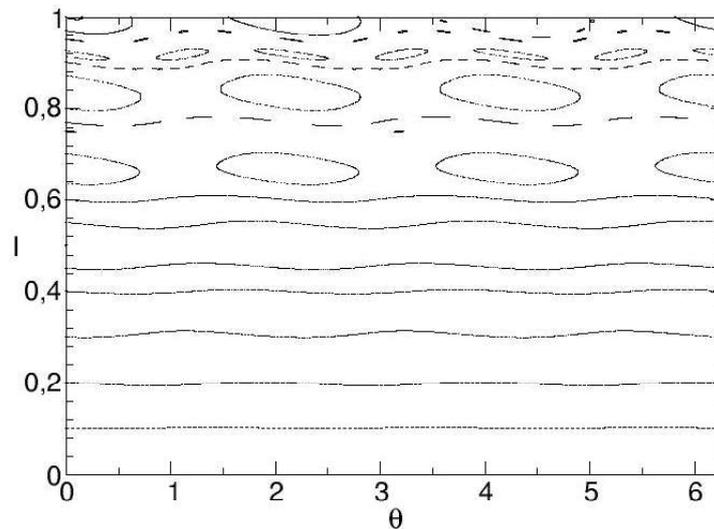


Figura 10.13: Retrato de fase do mapa de Poincaré para as linhas de campo magnético num Tokamak de grande razão de aspecto com um limitador magnético onde $m = 3$, $\xi = 0,163$ e $\varepsilon = 0,025$.

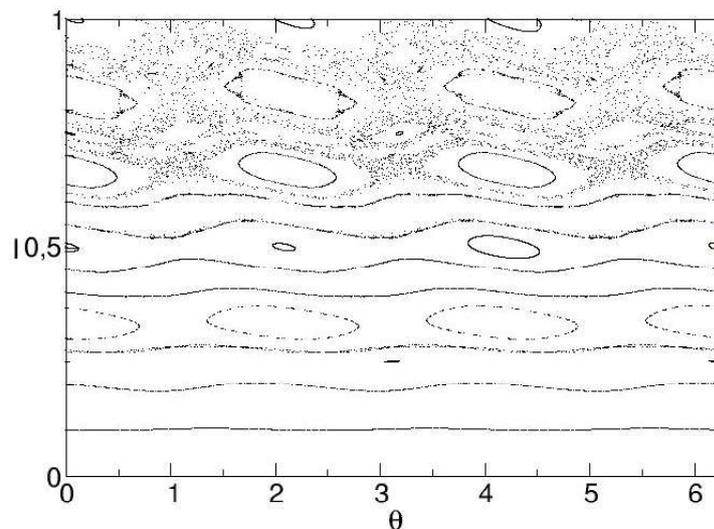


Figura 10.14: Retrato de fase do mapa de Poincaré para as linhas de campo magnético num Tokamak de grande razão de aspecto com um limitador magnético onde $m = 3$, $\xi = 0,163$ e $\varepsilon = 0,050$.

A largura de uma dada ilha foi determinada na seção anterior, a partir de uma remoção da ressonância correspondente. De (10.100) e (10.98) a largura da ilha centrada em no valor da ação I^* é

$$\Delta I \sim \varepsilon^{1/2} (I^*)^{m/4}. \quad (10.112)$$

Como $0 \leq I^* \leq 1$, quanto menor for o valor de I^* mais interna será a ilha, de tal forma que, para um dado valor da perturbação ε , a largura será menor conforme penetramos no interior do cilindro. Embora haja camadas estocásticas ladeando todas as cadeias de ilhas, suas espessuras não são grandes o suficiente para criar uma região caótica (preenchedora de áreas) nas proximidades da parede.

Para um valor ainda maior da perturbação [Fig. 10.14] as ilhas propriamente ditas também são maiores. Com efeito, de (10.112) vemos que a largura de uma ilha (centrada num dado valor de I^*) cresce com a raiz quadrada da intensidade da perturbação. Além disso, as camadas estocásticas das ilhas próximas à parede do Tokamak já são grandes o suficiente para haver a quebra de curvas invariantes entre elas, e a consequente formação de uma região de caos global. Por outro lado, como as larguras das ilhas diminuem no interior do cilindro, é possível preservar uma boa parte da coluna de plasma desta estocastização periférica.

É justamente a formação desta camada caótica próxima à parede do Tokamak que motivou a criação do limitador magnético. A parede do Tokamak recebe uma grande quantidade de energia localizada, o que pode gerar a liberação de impurezas a partir de processos de interação entre o plasma e a superfície metálica. Estas impurezas contaminam o plasma, diminuindo a qualidade do seu confinamento. Acredita-se que a criação de uma camada periférica de linhas de campo magnético caóticas pode fazer com que haja uma distribuição mais ou menos uniforme dos fluxos energéticos que provocam tais contaminações.

Nos experimentos do TCABR foi detectada a formação desta região caótica periférica já com perturbações da ordem de $\varepsilon = 0,025$. No entanto, nosso modelo não pode ser aplicado

com exatidão em Tokamaks cuja razão de aspecto não seja grande o suficiente. Porém, incluída uma correção toroidal nos resultados do equilíbrio, é possível mostrar que a região caótica periférica existe para intensidades da perturbação menores do que as estimadas com o modelo cilíndrico, em conformidade com os resultados experimentais do TCABR.

10.5 Mapas de Poincaré para linhas de campo magnético

Os mapas de Poincaré para linhas de campo magnético em Tokamaks com um limitador, mostrados nas Figuras 10.12-??, foram obtidos integrando numericamente as equações das linhas de campo. Elas são, como vimos na seção anterior, as equações de Hamilton para as linhas de campo magnético, parametrizadas por uma coordenada ignorável, no caso o ângulo toroidal ϕ .

Há duas dificuldades principais associadas a este procedimento: (i) para resultados numéricos precisos, é necessário empregar integradores simpléticos; (ii) para valores baixos do passo de integração, o tempo computacional pode tornar-se proibitivamente alto em simulações numéricas.

Ambos os problemas que mencionamos podem ser contornados pela obtenção de formas analíticas para os mapas de Poincaré. Há outras vantagens se este objetivo é alcançado para um sistema de interesse físico. Por exemplo, pode-se determinar de modo mais direto os pontos fixos e órbitas periódicas, bem como investigar sua estabilidade local, usando os métodos apresentados no Capítulo 6. Além disso, é possível investigar larguras de ressonâncias assim como a sua superposição, para obter estimativas da transição do caos local para global, como fizemos no Capítulo 7 com a Hamiltoniana paradigma.

No problema específico do Tokamak com limitador ergódico, o fato do limitador ter uma largura muito menor do que a extensão do Tokamak nos permite integrar de forma aproximada as equações das linhas de campo. Fazendo isso, Martin e Taylor obtiveram um mapa bidimensional exatamente conservativo, que permite uma série de estudos numéricos e analíticos sobre a formação das órbitas caóticas. A dedução do mapa de Martin-Taylor e um estudo das propriedades dinâmicas básicas é o objetivo desta seção.

10.5.1 Obtenção do mapa

No Capítulo 7, mostramos que o mapa padrão pode ser deduzido a partir do problema mecânico de um rotor sujeito a impulsos periódicos simulados por uma sequência de funções delta de Dirac. No mesmo espírito, iremos supor que a ação do limitador sobre as linhas de campo magnético também seja modelada por este tipo de sequência de deltas periódicas (agora no espaço, ao invés do tempo).

Além desta simplificação, nós adaptaremos a geometria do problema para colocar em evidência a região próxima à parede do Tokamak, ou seja, a região externa da coluna de plasma. Nesta região é possível empregar coordenadas cartesianas: $x = a\theta$, onde a é o raio menor e θ é o ângulo poloidal, $y = a - r$, e $z = R_0\phi$, onde R_0 é o raio maior e ϕ é o ângulo toroidal. Assim y mede a distância radial a partir da parede do Tokamak, x mede o comprimento do arco poloidal sobre a parede em $y = 0$, e z o arco toroidal, com periodicidade $2\pi R_0$.

O mapa de Poincaré considera os valores das coordenadas (x, y) quando z é um múltiplo inteiro de $2\pi R_0$

$$x_n = x(z = n(2\pi R_0)), \quad y_n = y(z = n(2\pi R_0)), \quad (10.113)$$

de forma que desejamos obter relações da forma

$$x_{n+1} = f_x(x_n, y_n), \quad (10.114)$$

$$y_{n+1} = f_y(x_n, y_n), \quad (10.115)$$

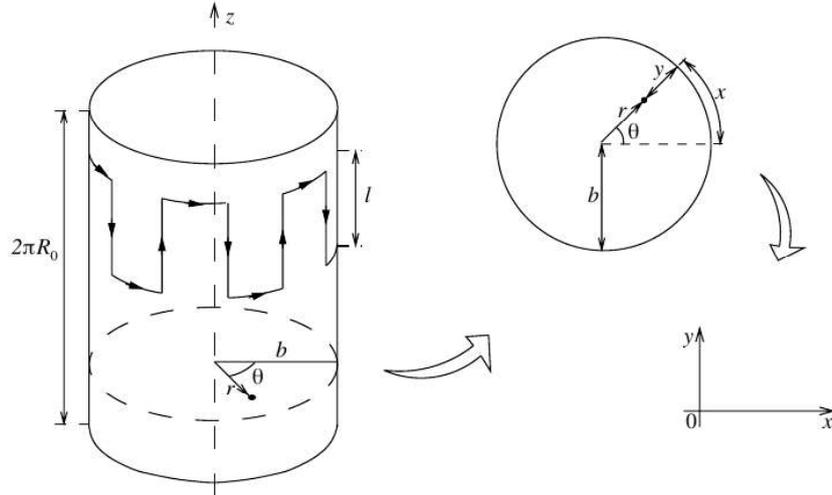


Figura 10.15: Geometria empregada na dedução do mapa de Martin-Taylor.

onde nosso objetivo é determinar expressões analíticas para f_x e f_y .

Partimos das equações das linhas de campo em coordenadas locais (r, θ, ϕ) , que empregamos na seção anterior. De (10.52) e (10.53) elas são

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{R_0 B_r}{B_z}, \quad (10.116)$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{B_\theta R_0}{r B_z} = \frac{1}{q(r)} \quad (10.117)$$

onde $q(r)$ é o fator de segurança das superfícies magnéticas.

Campos de equilíbrio e do limitador

O mapa de Poincaré (10.141)-(10.144) é a composição de dois mapas: um deles (T_1) é referente ao comportamento das linhas de campo magnético no equilíbrio, enquanto o outro (T_2) refere-se à ação do limitador. No primeiro caso, a componente radial do campo magnético é nula ($B_r = 0$). Reescrevendo (10.116) e (10.117) em termos das coordenadas cartesianas $x = a\theta$, $y = a - r$ e $z = R_0\phi$ obtemos

$$\frac{dy}{dz} = 0, \quad (10.118)$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{b}{R_0} \frac{1}{q(r)}. \quad (10.119)$$

Como estamos interessados na região próxima à parede do Tokamak, expandimos a função $q(r)^{-1}$ nas vizinhanças de $r = a$:

$$\frac{1}{q(r)} = \frac{1}{q_a} + \frac{y}{q_a^2} \frac{dq}{dr} \Big|_{r=a} + \dots \quad (10.120)$$

Definindo as quantidades

$$\alpha = \frac{2\pi a}{q_a}, \quad (10.121)$$

$$s = \frac{2\pi a}{q_a^2} \frac{dq}{dr} \Big|_{r=a} \quad (10.122)$$

temos

$$q(y) = 2\pi a (\alpha + sy + \dots). \quad (10.123)$$

de modo que (10.118)-(10.119) podem ser escritas, de forma aproximada, como

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2\pi R_0} (\alpha + sy)^{-1}, \quad (10.124)$$

$$\frac{dy}{dz} = 0. \quad (10.125)$$

O parâmetro s representa a variação radial do fator de segurança na parede, e portanto pode ser interpretado como a intensidade do cisalhamento magnético (“shear”).

O campo magnético produzido por um anel do limitador com m pares de fios conduzindo uma corrente elétrica I_L é dado por (10.72)-(10.73). Reescrevendo estas expressões nas coordenadas cartesianas temos:

$$B_x^{(1)}(x, y, z) = -\frac{\mu_0 m I_L}{a\pi} \exp\left(-\frac{my}{a}\right) \cos\left(\frac{mx}{a}\right) f(z), \quad (10.126)$$

$$B_y^{(1)}(x, y, z) = \frac{\mu_0 m I_L}{a\pi} \exp\left(-\frac{my}{a}\right) \sin\left(\frac{mx}{a}\right) f(z), \quad (10.127)$$

$$B_z^{(1)}(x, y, z) = 0, \quad (10.128)$$

onde o fator dependente do “tempo” z é uma sequência periódica de funções delta de Dirac,

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(z - 2\pi R_0 j) \quad (10.129)$$

supondo que o limitador esteja localizado em $z = 0$ e tenha uma largura $\ell \ll 2\pi R_0$. Essa aproximação é válida desde que nós negligenciemos quaisquer efeitos de borda.

Na região ocupada pelo limitador ($0 \leq z \leq 2\pi R_0$) superpomos o campo de equilíbrio com o campo do limitador. As componentes cartesianas do campo magnético resultante serão

$$B_x = B_x^{(0)} + B_x^{(1)} \approx B_x^{(1)}(x, y), \quad (10.130)$$

$$B_y = B_y^{(1)}(x, y), \quad (10.131)$$

$$B_z = B_0, \quad (10.132)$$

onde supomos que $B_x^{(0)} \ll B_x^{(1)}$ na região do limitador.

As equações das linhas de campo magnético na região ocupada pelo limitador podem ser expressas diretamente em coordenadas cartesianas como

$$\frac{dx}{dz} = \frac{B_x}{B_z} = \frac{B_x^{(1)}}{B_0}, \quad (10.133)$$

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{B_y}{B_z} = -\frac{B_y^{(1)}}{B_0}. \quad (10.134)$$

Substituindo nestas equações as componentes do campo do limitador (10.126)-(10.127), com $f(z) = 1$, obtemos

$$\frac{dx}{dz} = -CF_x(x, y), \quad (10.135)$$

$$\frac{dy}{dz} = CF_y(x, y), \quad (10.136)$$

onde

$$C = \frac{\mu_0 m I_L}{a \pi B_0}, \quad (10.137)$$

$$F_x(x, y) = \exp\left(-\frac{my}{a}\right) \cos\left(\frac{mx}{a}\right) \quad (10.138)$$

$$F_y(x, y) = \exp\left(-\frac{my}{a}\right) \sin\left(\frac{mx}{a}\right). \quad (10.139)$$

Considerando as condições iniciais do mapa de Poincaré [vide (10.113)]

$$x_0 = x(z = 0), \quad y_0 = y(z = 0),$$

desejamos inicialmente integrar as equações (10.135)-(10.136) na região do limitador, para encontrar os pontos

$$x_0^* = x(z = \ell), \quad y_0^* = y(z = \ell).$$

Como (10.135)-(10.136) não têm solução analítica, podemos empregar uma aproximação, que é o método de Euler explícito, conforme vimos na seção 3.9. Como $\ell \ll 2\pi R_0$ podemos encarar ℓ como o passo de integração e expandir em série de Taylor, como em (3.176)

$$\begin{aligned} x_0^* &= x(z = 0 + \ell) = x(z = 0) + \ell \left. \frac{dx}{dz} \right|_{z=0} + \dots \\ &= x_0 - \ell C F_x(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (10.140)$$

Usando (10.137) e (10.138) escrevemos, de maneira geral, para a n -ésima iterada

$$x_n^* = x_n - \frac{ap}{m} \exp\left(-\frac{my_n}{a}\right) \cos\left(\frac{mx_n}{a}\right) \quad (10.141)$$

onde $x_n^* = x(z = n\ell)$, e definimos o parâmetro

$$p = \frac{\mu_0 \ell m^2 I_L}{B_0 a^2 \pi}, \quad (10.142)$$

que representa a intensidade da perturbação causada pela ação do limitador.

Dividindo membro a membro (10.136) por (10.135) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dz}{dx/dz} = -\frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)} \\ &= -\frac{\sin(mx/a)}{\cos(mx/a)} = -\tan\left(\frac{mx}{a}\right). \end{aligned} \quad (10.143)$$

Integrando no intervalo do limitador temos, para a n -ésima iterada,

$$\int_{y_n}^{y_n^*} dy = - \int_{x_n}^{x_n^*} dx \tan\left(\frac{mx}{a}\right) = -\frac{a}{m} \ln \left[\cos\left(\frac{mx}{a}\right) \right] \Big|_{x_n}^{x_n^*}$$

de forma que

$$y_n^* = y_n + \frac{a}{m} \ln \left\{ \cos \left[\frac{mx_n}{a} - pe^{-my_n/a} \cos \left(\frac{mx_n}{a} \right) \right] \right\} - \frac{a}{m} \ln \cos \left(\frac{mx_n}{a} \right). \quad (10.144)$$

Na região fora do limitador ($\ell < z < 2\pi R_0$), apenas a parte do equilíbrio deve ser integrada, composta pelas equações (10.124)-(10.125). Neste caso, os limites de integração são

$$(x_n^*, y_n^*) = (x(z = n\ell), y(n\ell)), \quad (x_{n+1}^*, y_{n+1}^*) = (x(z = n2\pi R_0), y(z = n2\pi R_0)),$$

de modo que a segunda parte do mapa será

$$x_{n+1} = x_n^* + \alpha + sy_n^*, \quad (10.145)$$

$$y_{n+1} = y_n^* \quad (10.146)$$

onde supomos novamente que $\ell \ll 2\pi R_0$.

Mapa composto

Neste ponto é conveniente definir variáveis adimensionais

$$x' = \frac{mx}{a}, \quad (10.147)$$

$$y' = \frac{m}{a} \left(y + \frac{\alpha}{s} \right), \quad (10.148)$$

tal que a nova origem ($y' = 0$) corresponde ao ponto de ordenada $\bar{y} = -\alpha/s$, para o qual (10.145) implica em $x_n^* = x_{n+1}$. Como $0 \leq x' < 2\pi$, x é definido módulo $2\pi a/m$. O fator de segurança no ponto \bar{y} é o racional m/k , onde k é um número inteiro. Além disso redefinimos a intensidade do limitador como

$$p' = p \exp \left(\frac{m\alpha}{as} \right). \quad (10.149)$$

Com o auxílio das definições acima, o mapa composto por (10.141)-(10.144) e (10.145)-(10.146) é escrito como

$$x_n'^* = x_n' - p'e^{-y_n'} \cos x_n', \quad (10.150)$$

$$y_n'^* = y_n' + \ln \left\{ \cos \left[x_n' - p'e^{-y_n'} \cos x_n' \right] \right\} - \ln \cos x_n' \quad (10.151)$$

$$x_{n+1}' = x_n'^* + sy_n'^*, \quad (10.152)$$

$$y_{n+1}' = y_n'^*. \quad (10.153)$$

Retirando os apóstrofes, por economia de notação, e eliminando as variáveis com asterisco, o mapa composto pode ser expresso na seguinte forma

$$x_{n+1} = x_n + sy_n + g(x_n, y_n), \quad (10.154)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n, y_n), \quad (10.155)$$

onde

$$h(x, y) = \ln \left[\frac{\cos(x - pe^{-y} \cos x)}{\cos x} \right], \quad (10.156)$$

$$g(x, y) = -pe^{-y} \cos x + sh(x, y) \quad (10.157)$$

10.5.2 Propriedades do mapa

A matriz Jacobiana do mapa (10.154)-(10.155) é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \partial x_{n+1}/\partial x_n & \partial x_{n+1}/\partial y_n \\ \partial y_{n+1}/\partial x_n & \partial y_{n+1}/\partial y_n \end{pmatrix} \quad (10.158)$$

cujos elementos são

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} = 1 + \frac{\partial g}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} = s + \frac{\partial g}{\partial y_n}, \quad (10.159)$$

$$\frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} = \frac{\partial h}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} = 1 + \frac{\partial h}{\partial y_n}, \quad (10.160)$$

com as seguintes derivadas parciais

$$\frac{\partial g}{\partial x_n} = pe^{-y_n} \sin x_n + s \frac{\partial h}{\partial x_n}, \quad (10.161)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_n} = pe^{-y_n} \cos x_n + s \frac{\partial h}{\partial y_n}, \quad (10.162)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_n} = -\tan(x_n - pe^{-y_n} \cos x_n)(1 + pe^{-y_n} \sin x_n) + \tan x_n \quad (10.163)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y_n} = -\tan(x_n - pe^{-y_n} \cos x_n)pe^{-y_n} \cos x_n. \quad (10.164)$$

O determinante Jacobiano do mapa é

$$j = \det \mathbf{J} = \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} - \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} = 1 \quad (10.165)$$

de modo que a condição de preservação de áreas (6.16) é satisfeita exatamente, como esperado do mapa de Poincaré construído a partir de um sistema Hamiltoniano.

De fato, identificando y com uma variável de ação e x como a variável de ângulo canonicamente conjugada, o mapa de Martin-Taylor (10.154)-(10.155) tem a forma geral (6.87)-(6.88) de um mapa twist perturbado. No Capítulo 6 vimos que este mapa é característico de sistemas Hamiltonianos quase-integráveis, numa superfície de seção de Poincaré adequada. Comparando ambos, o número de rotação associado ao mapa de Martin-Taylor é

$$\mathcal{A}(y_n) = \frac{1}{2\pi} s y_n. \quad (10.166)$$

Uma propriedade muito útil do mapa de Martin-Taylor é que ele é invariante sob as seguintes transformações

$$y \rightarrow \tilde{y} = y + \frac{2\pi k}{s}, \quad (10.167)$$

$$p \rightarrow \tilde{p} = p \exp\left(\frac{2\pi k}{s}\right), \quad (10.168)$$

onde k é um inteiro positivo. Para verificar esta propriedade, substituiremos (10.167) e (10.168) em (10.156) e (10.157)

$$\begin{aligned} h(x, \tilde{y}) &= \ln \left[\frac{\cos(x - \tilde{p}e^{-\tilde{y}} \cos x)}{\cos x} \right], \\ &= \ln \left[\frac{\cos(x - pe^{2\pi k/s} e^{-y} e^{-2\pi k/s} \cos x)}{\cos x} \right] = h(x, y), \end{aligned} \quad (10.169)$$

$$g(x, \tilde{y}) = -\tilde{p}e^{-\tilde{y}} \cos x + sh(x, \tilde{y}) = g(x, y), \quad (10.170)$$

tal que o mapa de Martin-Taylor sob tais transformações fica

$$x_{n+1} = x_n + s\tilde{y}_n + g(x_n, \tilde{y}_n) = x_n + sy_n + 2\pi k + g(x_n, y_n), \quad (10.171)$$

$$\tilde{y}_{n+1} = y_{n+1} \frac{2\pi k}{s} = \tilde{y}_n + h(x_n, \tilde{y}_n) = y_n + \frac{2\pi k}{s} + h(x_n, y_n). \quad (10.172)$$

Como x é definido módulo 2π , x e $x + 2\pi k$ representam o mesmo valor, de modo que recuperamos as relações (10.154)-(10.155), demonstrando assim a invariância por (10.167)-(10.168).

10.5.3 Pontos fixos e sua estabilidade

Os pontos fixos do mapa de Martin-Taylor (x^*, y^*) , definidos por (6.103), são dados pela solução das seguintes equações

$$x^* = x^* + sy^* + g(x^*, y^*), \quad (10.173)$$

$$y^* = y^* + h(x^*, y^*). \quad (10.174)$$

Como $0 \leq x^* < 2\pi$ por construção a equação (10.173) implica na condição

$$sy^* + g(x^*, y^*) = 2n\pi, \quad (10.175)$$

onde n é um inteiro não-negativo. Já y^* não tem esta periodicidade, de modo que (10.174) implica em

$$h(x^*, y^*) = 0. \quad (10.176)$$

Em vista de (10.156) chegamos à equação trigonométrica

$$\cos(x^* - pe^{-y^*} \cos x^*) = \cos x^*, \quad (10.177)$$

que, em vista da periodicidade da variável x , leva-nos à condição

$$x^* = \pi k + \frac{p}{2} e^{-y^*} \cos x^*, \quad (10.178)$$

onde k é um inteiro não-negativo, e que determina implicitamente x^* . Retornando, agora, à equação (10.175) e usando (10.176) obtemos o valor de y correspondente aos pontos fixos

$$y^* = \frac{2n\pi}{s} + \frac{p}{s} e^{-y^*} \cos x^*. \quad (10.179)$$

Ao invés de recorrer a um procedimento numérico para resolver as equações transcendentais (10.178)-(10.179), supomos que p seja pequeno o suficiente para obtermos uma relação aproximada, retendo termos de ordem p e negligenciando termos de ordem p^2 ou superior. Substituindo os segundos membros (10.178) e (10.179) em nos fatores $\cos x^*$ e e^{-y^*} das mesmas

equações, obtemos uma família de pontos fixos parametrizados pelos inteiros k e n :

$$\begin{aligned} x_{k,n}^* &= \pi k + \frac{P}{2} \exp\left(-\frac{2n\pi}{s} + o(p)\right) \cos(\pi k + o(p)) \\ &= \pi k + (-1)^k \frac{P}{2} \exp\left(-\frac{2n\pi}{s}\right) + o(p^2) \end{aligned} \quad (10.180)$$

$$\begin{aligned} y_{k,n}^* &= \frac{2n\pi}{s} + \frac{P}{s} \exp\left(-\frac{2k\pi}{s} + o(p)\right) \cos(\pi k + o(p)) \\ &= \frac{2n\pi}{s} + (-1)^k \frac{P}{s} \exp\left(-\frac{2n\pi}{s}\right) + o(p^2). \end{aligned} \quad (10.181)$$

Como $0 \leq x < 2\pi$, só é necessário especificar os valores de x para os pontos fixos com $k = 0$ e $k = 1$. Restarão, assim, duas famílias parametrizadas pelo inteiro n :

$$x_{0,n}^* = 0 + \frac{P}{2} e^{-2\pi/s} + o(p^2), \quad (10.182)$$

$$y_{0,n}^* = \frac{2n\pi}{s} + \frac{P}{s} e^{-2n\pi/s} + o(p^2), \quad (10.183)$$

$$x_{1,n}^* = \pi - \frac{P}{2} e^{-2n\pi/s} + o(p^2), \quad (10.184)$$

$$y_{1,n}^* = \frac{2n\pi}{s} - \frac{P}{s} e^{-2n\pi/s} + o(p^2), \quad (10.185)$$

A análise da estabilidade de pontos fixos de mapas bidimensionais conservativos segue os procedimentos delineados no Capítulo 6. O ponto de partida é a linearização do mapa de Martin-Taylor nas vizinhanças dos pontos fixos, e a análise da respectiva matriz Jacobi-ana (10.158). A estabilidade é determinada pelo traço da matriz, quando seus elementos são calculados na posição de cada ponto fixo. Um cálculo simples, mas trabalhoso, fornece para o traço de (10.158):

$$\begin{aligned} \tau &= \text{Tr } \mathbf{J} = \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} + \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} = 2 + \frac{\partial g}{\partial x_n} + \frac{\partial h}{\partial y_n} \\ &= 2 + pe^{-y_n} \sin x_n + s \tan x_n - \tan(x_n - pe^{-y_n} \cos x_n) [pe^{-y_n} \cos x_n + s(1 + pe^{-y_n} \sin x_n)]. \end{aligned} \quad (10.186)$$

Calculando o quadrado do traço para cada uma das famílias de pontos fixos teremos as seguintes expressões aproximadas

$$\tau^2(x_{0,n}^*, y_{0,n}^*) = 4 \left(1 + pse^{-2\pi n/s} + o(p^2)\right) > 4, \quad (10.187)$$

$$\tau^2(x_{1,n}^*, y_{1,n}^*) = 4 \left(1 - pse^{-2\pi n/s} + o(p^2)\right) < 4, \quad (10.188)$$

de forma que, pelo critério (10.187), os pontos fixos da família $(x_{0,n}^*, y_{0,n}^*)$ são instáveis (pontos de sela), ao passo que os pontos fixos $(x_{1,n}^*, y_{1,n}^*)$ são estáveis (centros).

10.5.4 Dinâmica do mapa de Martin-Taylor

Os conceitos dos capítulos 6 e 7 podem nos dar uma ideia qualitativa bastante satisfatória dos aspectos dinâmicos do mapa de Martin-Taylor. Como este é não-linear, devemos recorrer a simulações numéricas para obter resultados quantitativos. Vários aspectos a serem mostrados têm similaridade com o mapa padrão, cujo estudo foi objeto do Capítulo 7.

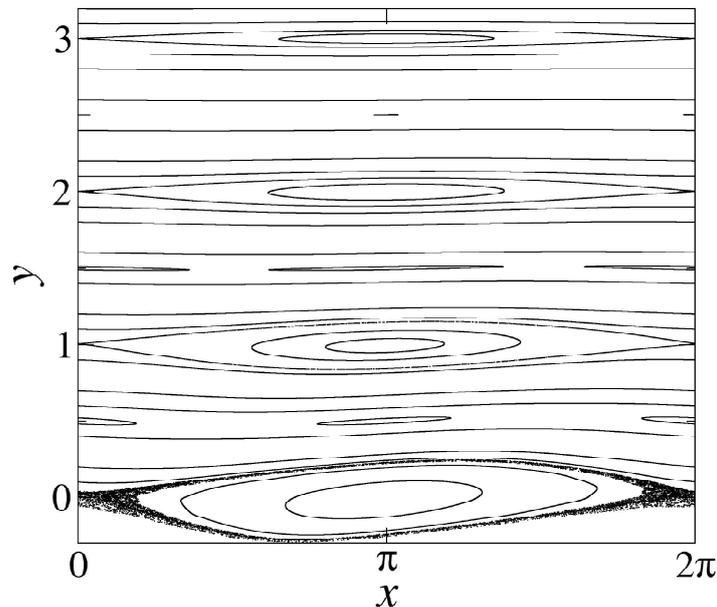


Figura 10.16: Retrato de fase do mapa de Martin-Taylor para $p = 0, 1$ e $s = 2\pi$.

Na ausência de perturbação causada pelo campo magnético do limitador, de (10.142) o limite $p \rightarrow 0$ do Mapa de Martin-Taylor resulta num mapa do twist (10.145)-(10.146). O número de rotação é dado por (10.166) por $\mathcal{A} = sy_n/2\pi$. Adotando o valor $s = 2\pi$ para o parâmetro de cisalhamento magnético, o número de rotação é o próprio valor da coordenada y_n . Como $y_{n+1} = y_n$, a cada condição inicial (x_0, y_0) temos um toro, que pode ser racional ou irracional conforme o valor de y_0 . Na superfície de seção de Poincaré estes toros são representados por linhas horizontais, no caso de toros irracionais, ou conjuntos discretos de pontos, para toros racionais.

Tomando, agora, um valor não-nulo da intensidade da perturbação, como $p = 0, 1$ [Fig. 10.16], há dois pontos importantes a serem levados em conta:

1. os toros racionais serão todos destruídos, restando apenas um número par de pontos fixos: metade dos quais estáveis (centros) e a outra metade instáveis (pontos de sela). Este resultado é uma decorrência do Teorema de Poincaré-Birkhoff;
2. os toros irracionais serão em parte preservados, de acordo com o respectivo número de rotação (Teorema KAM). Devido à perturbação e ao cisalhamento, os toros que restam são representados por curvas deformadas em relação às retas horizontais do caso não-perturbado.

No caso dos toros racionais que desaparecem devido à perturbação, em seu lugar aparecerão ilhas periódicas, ou seja, estruturas similares à Hamiltoniana do pêndulo.

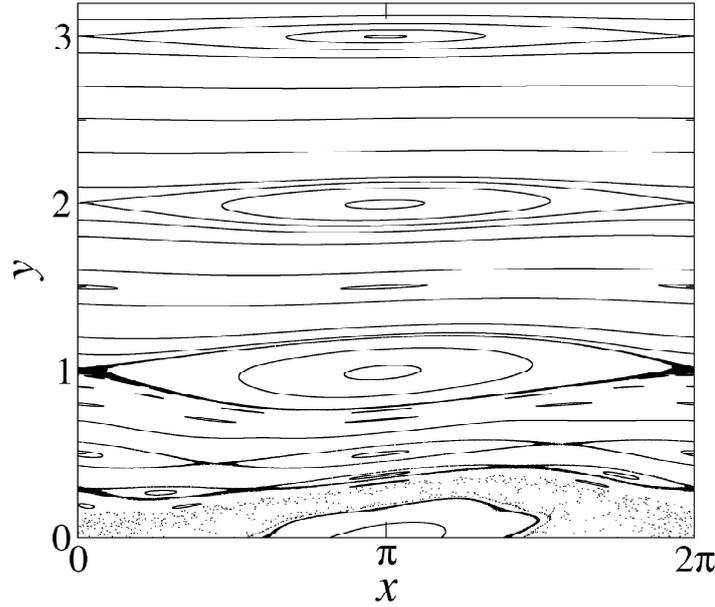


Figura 10.17: Retrato de fase do mapa de Martin-Taylor para $p = 0, 2$ e $s = 2\pi$.

Pontos fixos e ilhas periódicas

Analisando a Fig. 10.16 vemos que estes aspectos teóricos estão contemplados pelos resultados numéricos, pois as ilhas pendulares estão ancoradas nos pontos de sela $(x_{0,n}^*, y_{0,n}^*)$, e cujos centros são os pontos fixos estáveis $(x_{1,n}^*, y_{1,n}^*)$. Para $n = 0$ a ilha está centrada em $(x^* \approx \pi, y^* \approx 0)$ com pontos de sela em $(x^* \approx 0, y^* \approx 0)$. Como $p \neq 0$, haverá uma fina camada estocástica que praticamente se confunde com uma separatriz (que já não mais existe) conectando os pontos de sela em 0 e 2π .

Como $n = 0, 1, 2, \dots$ haverá um número de ilhas tão grande na direção y como o comportado pela condição física $r < a$, onde a é o raio menor do Tokamak. A ilha com $n = 1$ está centrada também, aproximadamente, em $x^* = \pi$, e está distante da primeira ilha de $\delta y \approx 1$. As demais ilhas estão igualmente espaçadas, mas as larguras decrescem com o valor de y , de modo que são praticamente imperceptíveis para y alto. Além disso, as camadas estocásticas também são muito finas e parecem separatrizes das outras ilhas.

De maneira mais formal, de (10.183) a distância entre duas ilhas adjacentes é

$$\delta y_n = y_{0,n+1}^* - y_{0,n}^* \approx \frac{2\pi}{s} + \frac{p}{s} e^{-2\pi/s}, \quad (10.189)$$

que não depende de n , donde é aproximadamente a mesma para todos os pares de ilhas.

De fato, Martin e Taylor empregaram uma versão da teoria de perturbação (que não estudamos no Capítulo 5) chamada “remoção global das ressonâncias” para determinar a largura das ilhas primárias centradas nos pontos fixos $x_{0,n}^* \approx 0, y_{0,n}^* \approx 2\pi n/s$ é dada por

$$\Delta y_n = 2\sqrt{\frac{p}{s}} \exp\left(-\frac{\pi n}{s}\right) + o(p), \quad (10.190)$$

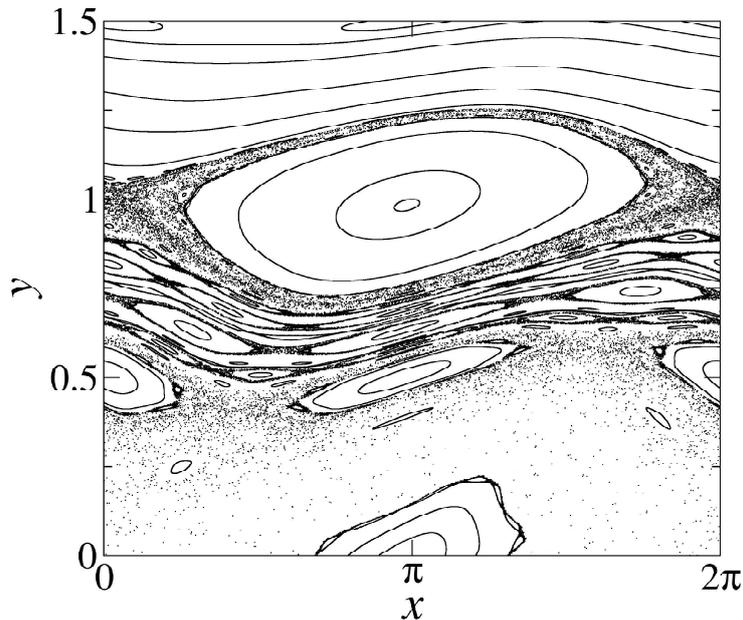


Figura 10.18: Retrato de fase do mapa de Martin-Taylor para $p = 0,29$ e $s = 2\pi$.

e que portanto decai exponencialmente com n , para valores dados de p e s , como podemos constatar nas Figuras 10.16-??.

Um aspecto da Fig. ?? é a presença de pequenas ilhas situadas entre as ilhas primárias correspondente aos pontos fixos do mapa de Martin-Taylor. Estas ilhas secundárias, terciárias, etc. estão associadas a órbitas periódicas do mapa de período maior ou igual a 2. Por exemplo, a pequena cadeia de duas ilhas secundárias entre as duas ilhas primárias é estruturada em torno dos pontos de uma órbita de período 2 ($x_0^* \approx 0, x_1^* \approx \pi$). Essa órbita é estável no mesmo sentido dos pontos fixos, e também existe uma órbita instável de período 2 contendo pontos de sela em ($x_0^* \approx \pi/2, x_1^* \approx 3\pi/2$). As curvas estáveis destes pontos de sela também geram emaranhados homoclínicos e portanto as ilhas secundárias, terciárias, etc. *também* têm suas camadas estocásticas, ainda que muito finas para baixos valores da perturbação.

Na medida em que a intensidade da perturbação p tem seu valor aumentado, todas as ilhas primárias (centradas nos pontos fixos do mapa) vão aumentando seu tamanho, uma vez que a largura das mesmas é $\Delta y_n \sim \sqrt{p}$, de (10.190). Além disso, como vimos na análise do mapa padrão, as larguras das camadas estocásticas também crescem. Ambos efeitos podem ser claramente visualizados na Fig. 10.18, obtida para $p = 0,29$ e $s = 2\pi$. A ilha primária centrada em $y^* \approx 1$ tanto cresce na largura como sua região estocástica torna-se visível. Já a ilha centrada em $y^* \approx 0$ cresceu tanto, assim como a camada estocástica respectiva, que a própria ilha já praticamente não mais existe. Poderão continuar existindo algumas curvas em torno do centro, mas ocupando uma região quase imperceptível.

Outro aspecto interessante da Fig. 10.18 é o aumento das larguras de várias ilhas secundárias, terciárias, etc. Por exemplo, a cadeia de ilhas secundárias centradas em $y \approx 0,5$ que era pouco discernível na Fig. 10.17 torna-se, agora, tão grande que sua camada estocástica chega a fundir-se com a da primeira ilha primária. No entanto, pelo menos para este valor de

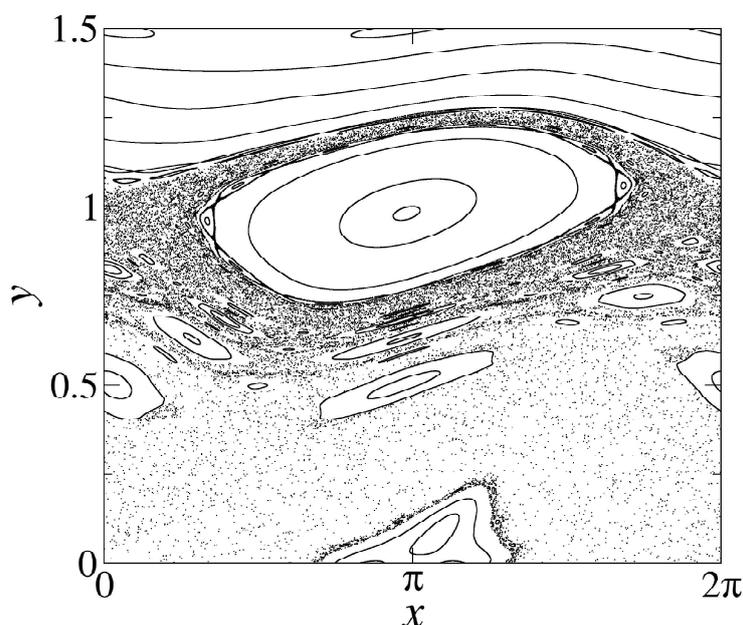


Figura 10.19: Retrato de fase do mapa de Martin-Taylor para $s = 2\pi$ e $p = 0,32$.

$p = 0,29$, ainda podem ser vistas curvas invariantes associadas a toros irracionais sobreviventes, como previsto pelo Teorema KAM. Estes toros irracionais agem como diques, impedindo que a região caótica local que vemos nas camadas estocásticas seja estendida para toda a superfície de seção.

Transição para o caos global

Como estudamos no Capítulo 7, a transição de caos local para caos global é obtida quando o último toro irracional é destruído entre as ressonâncias. Após isto ter ocorrido, como ilustrado na Fig. 10.19, as camadas estocásticas se tocam e se amalgamam, produzindo caos global. É importante, porém, ter em mente as diferenças existentes entre o mapa padrão e o mapa de Martin-Taylor: enquanto o primeiro tem infinitas ilhas primárias de mesma largura, o que estende o caos global a toda a superfície de seção, no segundo as ilhas têm larguras que diminuem exponencialmente. Portanto, mesmo após a transição para o caos global, a Fig. 10.19 mostra que esta região não migra para a parte superior da ilha, ou seja, não se estende para y arbitrariamente alto. Da comparação entre as Figs. 10.18 e 10.19 deduz-se que o valor crítico da intensidade da perturbação é $p_c \approx 0,29$.

A determinação teórica do valor crítico da perturbação para a transição de caos local para global é um problema intrincado, mesmo para sistemas Hamiltonianos simples, como o mapa padrão ou a Hamiltoniana paradigma, vistos nos Capítulos 6 e 7, respectivamente. Neles aplicamos o critério de Chirikov, que envolve o cálculo do parâmetro de estocasticidade que quantifica a superposição de duas ilhas primárias adjacentes n e $n + 1$

$$S_{n,n+1} = \frac{\Delta y_{n+1} + \Delta y_n}{\delta y_n}, \quad (10.191)$$

onde o numerador é a soma das larguras das ilhas e o denominador é a distância entre elas.

Como a região caótica produzida pelo limitador é mais pronunciada para baixos valores de y (fisicamente, próximo à parede do Tokamak) é suficiente calcular o parâmetro de estocasticidade entre as ilhas com $n = 0$ e $n = 1$. Usando (10.189) e (10.190) obtemos

$$S_{0,1} = \frac{\Delta y_1 + \Delta y_0}{\delta y_n} \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{ps} \left(1 + e^{-\pi/s}\right) + o(p^{3/2}). \quad (10.192)$$

Seguindo a discussão feita na Seção 7.6, a transição para o caos global ocorre quando o parâmetro de estocasticidade atinge o valor crítico S_c . Esta condição é satisfeita para o valor crítico do parâmetro $p = p_c$ tal que $S_{0,1}(p_c) = S_c$, donde

$$p_c = \frac{\pi^2}{s^2} S_c^2 \left(1 + e^{-\pi/s}\right)^{-2}. \quad (10.193)$$

Na versão original do critério de Chirikov, que impõe a superposição simples das ilhas primárias, este valor crítico é $S_c = 1$. No entanto, como sabemos, a transição ocorre bem antes disto. Uma adaptação do critério de Chirikov, que é válida mesmo no presente caso - onde as ilhas têm larguras distintas - é a “regra dos dois-terços”, pela qual $S_c = 2/3$. Aplicando este critério prático a (10.193) obtemos, para $s = 2\pi$, que $p_c = 0,27$. Comparando com o valor estimado numericamente pela análise das Figs. ??(a) e (b), que é $p_c = 0,029$, vemos que a previsão do critério de Chirikov concorda com os resultados numéricos a menos de um erro da ordem de 7%.

Tamanho da região caótica

Imediatamente após a transição de caos local para o caos global no mapa de Martin-Taylor [Fig. ??(b)], verificamos a formação de uma região predominantemente caótica que abarca as ilhas primárias $n = 0$ e $n = 1$ bem como o espaço entre elas, ainda que haja um grande número de ilhas secundárias, terciárias, etc. imersas neste “mar caótico”. É fisicamente interessante conhecermos a dependência do tamanho da região caótica com os parâmetros do mapa.

Via de regra, poderíamos definir a fronteira da região caótica y_F como a posição do primeiro toro irracional (toro KAM) ainda não destruído pelo aumento da intensidade p da perturbação. No entanto, esta definição não é satisfatória, pois o mapa distorce as curvas correspondentes aos toros KAM, como podemos ver claramente na Fig. 10.18 entre as duas ilhas primárias. Uma definição mais adequada seria adotar como valor de y_F o valor médio da coordenada y do primeiro toro KAM sobrevivente, média esta tomada em relação à coordenada x entre 0 e 2π .

Portela *et al.* empregaram esta definição para construir um algoritmo computacional que determina numericamente o valor de y_F , dados os valores dos parâmetros p e s . Um exemplo está na Fig. 10.20, onde mostramos um retrato de fase do mapa de Martin-Taylor para $p = 0,1$ e $s = 10$. A linha tracejada corresponde à posição média da fronteira $y_F \approx 0,24$ obtida por meio deste algoritmo.

Nas Figuras 10.21(a) e (b) mostramos a posição da fronteira da região caótica como função de p (para s fixo) e de s (para p fixo), respectivamente. De forma geral, o valor de y_F cresce com ambos os parâmetros. No entanto, este crescimento é uma função complicada, pois a alteração dos valores de p e s pode mudar de forma complicada os retratos de fase, a fim de acomodar as distorções dos toros KAM com o crescimento das ilhas periódicas.

Martin e Taylor derivaram uma estimativa teórica para o valor de y_F usando a propriedade de invariância do mapa pelas transformações (10.167)-(10.168). Pela última destas relações, teremos que

$$\ln p \rightarrow \ln \tilde{p} = \ln p + \frac{2\pi k}{s}, \quad (10.194)$$

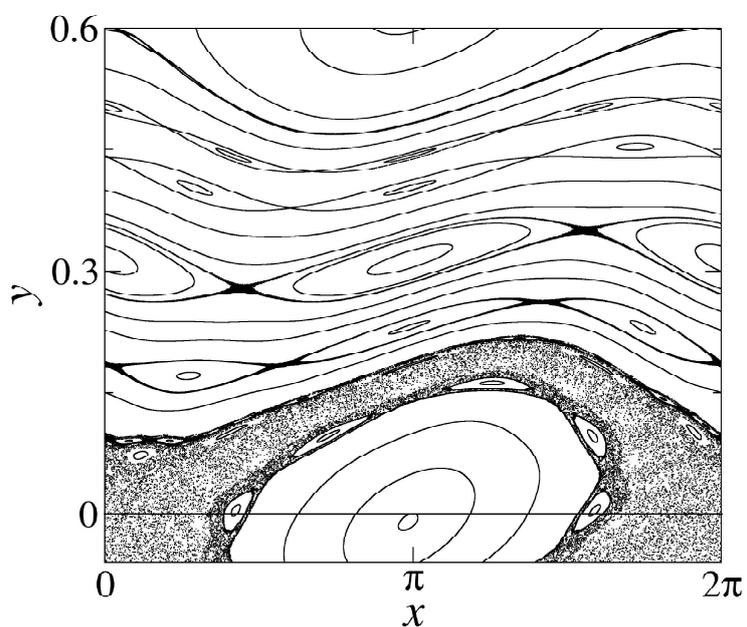


Figura 10.20: Retrato de fase do mapa de Martin-Taylor para $p = 0, 1$ e $s = 10$. A linha tracejada indica o tamanho médio estimado da região caótica.

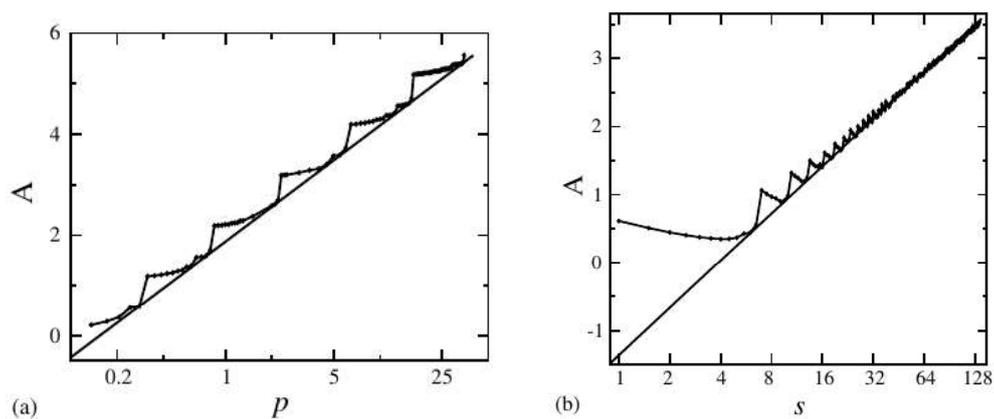


Figura 10.21: Posição média da fronteira da região caótica do mapa de Martin-Taylor como uma função de (a) p , para $s = 2\pi$ e (b) s , para $p = 0, 1$. As linhas cheias correspondem à previsão teórica da Eq. (10.198).

Portanto, tomando $n = 1$, se $\ln p$ é aumentado de uma parcela igual a $2\pi/s$, de (10.167) a fronteira da região caótica é deslocada da mesma quantidade. Assim

$$\frac{\Delta y_F}{\Delta \ln p} = \frac{2\pi/s}{2\pi/s} = 1$$

que, no limite de incrementos infinitesimais, nos leva à equação diferencial

$$\frac{dy_F}{d(\ln p)} = 1, \quad (10.195)$$

que pode ser imediatamente integrada, fornecendo

$$y_F(p, s) = \ln p + c(s), \quad (10.196)$$

onde $c(s)$ é uma função qualquer do seu argumento. Martin e Taylor, com base nos resultados numéricos, estimaram que

$$c(s) = \ln s + 0,03, \quad (10.197)$$

de modo que o valor estimado é

$$y_F(p, s) = \ln(ps) + 0,03. \quad (10.198)$$

Os valores desta previsão estão indicados por linhas cheias nas Figuras 10.21(a) e (b). Inicialmente observamos que o resultado (10.198) aparenta ser um limite inferior para os valores de y_F . Para determinados valores de p e s , os resultados numéricos praticamente coincidem com os previstos por (10.198). As diferenças, porém, podem ser grandes, como exemplificado pelo retrato de fase da Fig. (??): enquanto o valor numérico é $y_F = 0,24$, o valor previsto é de apenas 0,03.

Finalizamos esta dedução com um aviso quanto à sua validade: temos trabalhado quase sempre no limite quando $p \rightarrow 0$, ou seja, quando a perturbação do limitador magnético é suficientemente fraca. No entanto, se tomarmos este limite em (10.198), obteremos que $y_F \rightarrow -\infty$. Na verdade, para realizarmos uma expansão correta, temos de tomar $p = o(\epsilon)$, onde ϵ é um “parâmetro pequeno”, e $s = o(1/\epsilon)$, de modo que $ps = o(1)$ e o valor de y_F resulte sempre finito. Neste espírito, por exemplo, podemos expandir o mapa de Martin-Taylor nas vizinhanças de um ponto qualquer \bar{y} , fazendo $y = \bar{y} + \delta y$, com $\delta y = o(\epsilon)$ e $s\delta y = o(1)$. Feita desta forma cuidadosa, pode-se mostrar que, nas vizinhanças de \bar{y} , o mapa de Martin-Taylor se reduz ao mapa padrão.