

# Capítulo 2

## Equações de Hamilton

O objetivo básico deste Capítulo é introduzir as equações de Hamilton, e com elas abordar os exemplos tratados no Capítulo precedente. Daremos particular atenção à análise qualitativa do movimento, que é uma abordagem particularmente interessante quando estamos mais interessados nas propriedades gerais do movimento. A análise geral da estabilidade de pontos de equilíbrio de sistemas Hamiltonianos será um importante recurso que empregaremos durante nossa apresentação.

### 2.1 Transformada de Legendre

Na formulação Lagrangiana, descrevemos o estado de um sistema mecânico com  $n$  graus de liberdade por meio de  $n$  coordenadas generalizadas  $q_i$  e  $n$  velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$ . A evolução temporal do estado mecânico é descrita por  $n$  equações de Lagrange, obtidas a partir da Lagrangiana  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ .

A formulação Hamiltoniana também emprega as coordenadas generalizadas mas, ao invés das velocidades, utiliza os momenta generalizados, definidos como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1)$$

Para descrever a evolução temporal do sistema, desejamos encontrar uma quantidade que dependa de  $q_i$  e  $p_i$  (mas não de  $\dot{q}_i$ ) e ao mesmo tempo contenha a mesma informação da Lagrangiana. Um procedimento matemático para obter esta quantidade é a chamada transformada de Legendre, bastante empregada em Termodinâmica para a obtenção de potenciais como energia livre, entalpia, etc.

A nossa discussão ficará mais simples se nos restringirmos a uma função de apenas duas variáveis, digamos  $x$  e  $y$ :  $f(x, y)$ , cuja diferencial total é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (2.2)$$

Definimos, agora, uma nova função

$$g(x, y, u) = ux - f(x, y), \quad (2.3)$$

onde  $u$  é uma nova variável. A diferencial total da função que introduzimos é

$$dg = u dx + x du - \frac{\partial f}{\partial x} dx - \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (2.4)$$

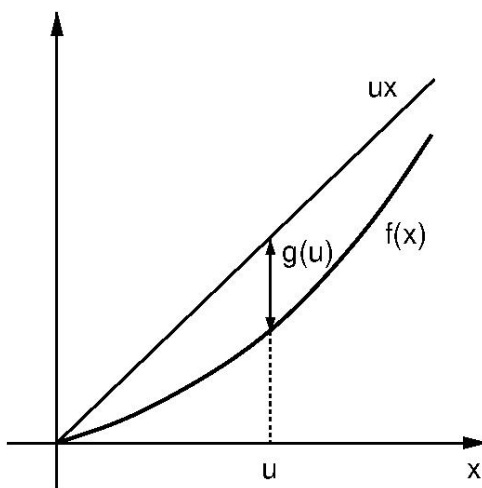


Figura 2.1: Significado geométrico da transformada de Legendre.

Escolhemos, agora, a nova variável tal que

$$u(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (2.5)$$

o que simplifica a expressão (2.4):

$$dg = xdu - \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad (2.6)$$

de modo que  $g$  é uma função apenas de  $u$  e  $y$ . Para conhecer sua forma explícita, invertemos (2.5) e obtemos  $x = x(u, y)$  que, substituída em (2.3), resulta em

$$g(u, y) = ux(u, y) - f(x(u, y), y), \quad (2.7)$$

denominada *transformada de Legendre* da função  $f(x, y)$ . Ela nos dá uma função  $g(u, y)$  da variável  $u = \partial f / \partial x$ , sem perda da informação fornecida por  $f$ .

Com efeito, podemos sempre recuperar  $f(x, y)$  a partir de  $g(u, y)$ , usando as relações

$$\left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_y = x(u, y), \quad \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_u = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (2.8)$$

de sorte que

$$f = u \frac{\partial g}{\partial u} - g \quad (2.9)$$

pode ser considerada a transformada inversa de Legendre de  $g$ .

O significado geométrico da transformada de Legendre pode ser inferido da Fig. 2.1, onde traçamos os gráficos de uma função qualquer  $f(x)$  monotonicamente crescente (convexa, na verdade) e da função linear  $ux$ . Para cada valor de  $u$ ,  $g(u) = ux - f(x)$  representa a máxima distância entre os dois gráficos, pois

$$\frac{d}{dx}(uf - f(x)) = 0 \Rightarrow u = \frac{\partial f}{\partial x},$$

que é (2.5). Esta interpretação ilustra o fato de só podermos aplicar a transformada de Legendre a funções convexas para as quais existe este valor máximo da distância.

## 2.2 Equações de Hamilton

A função de Hamilton, ou Hamiltoniana, de um sistema mecânico é a transformada de Legendre da sua Lagrangiana  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ . Nesse caso, identificamos  $y$  com as coordenadas generalizadas  $q_i$  e  $x$  com as velocidades generalizadas. Também associamos  $f$  com a Lagrangiana e  $g$  com a Hamiltoniana. Assim, a variável  $u$  é identificada com os momenta generalizados, pois

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

Aplicando a definição (2.7) da transformada de Legendre, tendo em vista estas identificações, a Hamiltoniana de um sistema com  $n$  graus de liberdade é dada por

$$H(p_i, q_i, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t). \quad (2.10)$$

Diferenciando esta expressão temos

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - dL. \quad (2.11)$$

Calculando as diferenciais totais de  $H$  e  $L$ , resulta que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \\ \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right\} - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (2.12)$$

O termo sublinhado, em vista das equações de Lagrange (1.36), é

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (2.13)$$

onde usamos (2.1).

Substituindo (2.13) em (2.12) obtemos

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.14)$$

Comparando termos semelhantes em ambos os membros da expressão acima, chegamos às equações de Hamilton (também chamadas equações canônicas)

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.15)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.17)$$

Dizemos que  $p_i$  é o momentum canonicamente conjugado à coordenada generalizada  $q_i$ , de modo que  $(p_i, q_i)$  é chamado par canônico. O número de graus de liberdade é o número de pares

canônicos do sistema. Num sistema com  $n$  graus de liberdade, as equações de Lagrange (1.36) representam um conjunto de  $n$  equações diferenciais de segunda ordem em relação ao tempo. Já as equações de Hamilton (2.15)-(2.16) formam um conjunto de  $2n$  equações de primeira ordem em relação ao tempo.

Se a Hamiltoniana não depender explicitamente de uma dada coordenada generalizada  $q_i$  então, de (2.15), temos que  $dp_i/dt = 0$ , ou seja,

$$p_i(t) = p_i(0) = \text{constante}. \quad (2.18)$$

Dizemos, nesse caso, que  $q_i$  é uma coordenada ignorável, ou cíclica. O momentum canonicamente conjugado a uma coordenada ignorável é, pois, uma constante do movimento.

Por exemplo, uma partícula de massa  $m$  em três dimensões espaciais pode ser descrita usando coordenadas generalizadas  $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$ , com a Lagrangiana (1.38)

$$L = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i^2 - U(q_i). \quad (2.19)$$

Os momenta generalizados correspondentes são, de (2.1),

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.20)$$

coincidindo com as componentes cartesianas do momentum linear  $m\mathbf{v}$ .

A Hamiltoniana é a transformação de Legendre (2.10) da Lagrangiana

$$H = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i p_i - L = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{m} - \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i^2 + U(q_i) = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m} + U(q_i), \quad (2.21)$$

é igual à energia total do sistema:

$$H = T + U = E. \quad (2.22)$$

As equações canônicas correspondentes (2.15)-(2.16) são

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.23)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m}, \quad (2.24)$$

onde  $F_i$  são as componentes cartesianas da força (conservativa) que age sobre a partícula. Derivando em relação ao tempo a segunda equação e substituindo na primeira chegamos às equações Newtonianas de movimento  $\dot{p}_i = m\ddot{q}_i = F_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ .

## 2.3 Oscilador Harmônico

A energia potencial de um oscilador harmônico unidimensional é  $U(q) = kq^2/2$ , onde  $k$  é a constante elástica, de sorte que a sua Hamiltoniana é

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = G \frac{p^2}{2} + F \frac{q^2}{2} = E, \quad (2.25)$$

onde definimos os parâmetros

$$G \equiv \frac{1}{m}, \quad F = m\omega^2, \quad \omega = \sqrt{FG}. \quad (2.26)$$

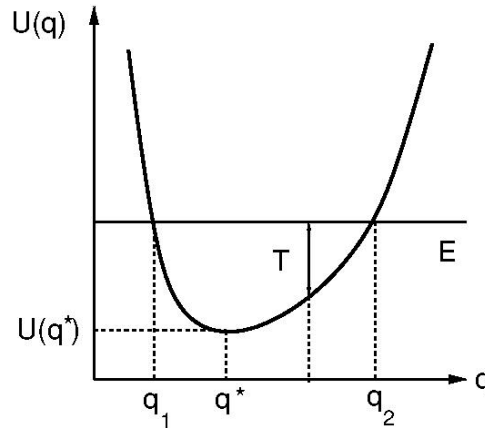


Figura 2.2: Energia potencial como função da coordenada da partícula.

As equações de Hamilton derivadas de (2.25) são

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -Fq, \quad (2.27)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = Gp, \quad (2.28)$$

que, combinadas, resultam na equação de movimento

$$\ddot{q} + FGq = \ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (2.29)$$

cuja solução foi tratada no Capítulo anterior [cf. (1.72)], e descreve oscilações de amplitude arbitrária e frequência  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

### 2.3.1 Pontos de retorno

A análise do gráfico da energia potencial de um sistema fornece várias informações importantes sobre a sua dinâmica, sem a necessidade de conhecer a solução do sistema. Vamos considerar, inicialmente, o problema mais geral de uma partícula de massa  $m$  movendo-se em uma dimensão sob a ação de uma força conservativa, derivada de uma energia potencial  $U(q)$  [Fig. 2.2]. A Hamiltoniana correspondente é

$$H(p, q) = \frac{1}{2m} p^2 + U(q) = E. \quad (2.30)$$

Como a energia cinética da partícula  $T = m\dot{q}^2/2$  é a diferença  $E - U(q)$ , a velocidade da partícula é dada por

$$\dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(q)]}, \quad (2.31)$$

que só assume valores reais se o radicando for não-negativo, ou seja, se  $E \geq U(q)$ . Se  $E = U(q)$  a velocidade da partícula é nula, tal que  $q$  identifica o chamado ponto de retorno, pois a partícula atinge este ponto e é refletida no sentido oposto.

No exemplo da Fig. 2.2 há dois pontos de retorno  $q_1$  e  $q_2$ , tais que a partícula pode se mover apenas dentro do intervalo  $q_1 \leq q \leq q_2$ , cujo movimento é governado pelas equações de

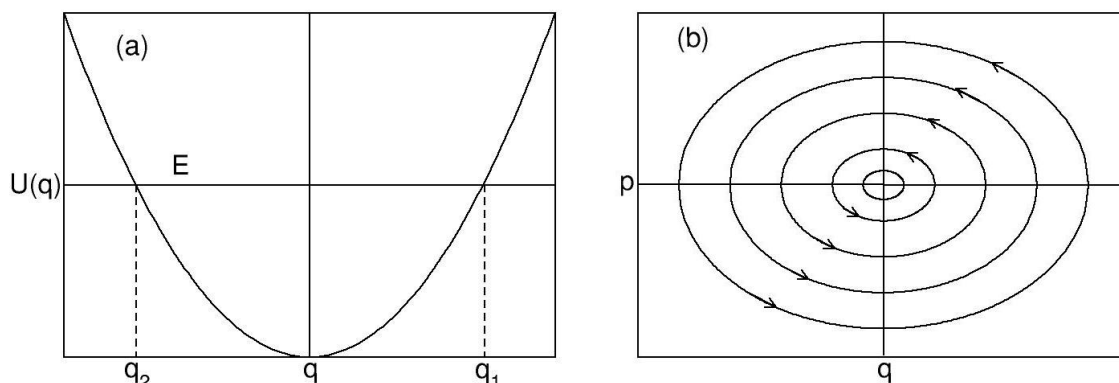


Figura 2.3: (a) Energia potencial do oscilador harmônico. (b) Trajetórias de fase de um oscilador harmônico para diferentes condições iniciais.

Hamilton correspondentes:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -U'(q) = F(q), \quad (2.32)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}. \quad (2.33)$$

De modo geral, a partícula executa oscilações no intervalo  $q_1 \leq q \leq q_2$ , e as posições da partícula para as quais  $q > q_1$  ou  $q < q_2$  são proibidos, pois corresponderiam a velocidades complexas.

No exemplo do oscilador harmônico, com energia potencial  $U(q) = Fq^2/2$ , os pontos de retorno são simétricos ( $q_2 = -q_1$ ), e dados por [Fig. 2.3(a)]

$$q_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2E}{F}}. \quad (2.34)$$

### 2.3.2 Pontos de equilíbrio

Outra informação importante que provém do gráfico da energia potencial é a localização dos pontos de equilíbrio, definidos como aqueles para os quais a força resultante é nula. Como  $F(q) = -dU/dq$ , os pontos de equilíbrios  $q^*$  são extremos da energia potencial ( $U'(q^*) = 0$ ). De (2.33) temos que  $p^* = 0$  tal que existe um referencial no qual a partícula está em repouso no ponto de equilíbrio. Para o oscilador harmônico, onde  $U'(q) = Fq$ , há um único ponto de equilíbrio, que é  $q^* = 0$ .

É igualmente relevante saber se o equilíbrio é estável ou não, em relação a pequenas perturbações. Se ele for um mínimo local da energia potencial,  $U''(q^*) > 0$ . Nesse caso, se a partícula for ligeiramente deslocada em relação ao ponto de equilíbrio, ou seja, com  $q = q^* + \delta q$ , onde  $|\delta q| \ll q^*$ , aparecerá uma força restauradora  $F(q) < 0$ . Ela tende a trazer a partícula de volta a  $q = q^*$ , provocando oscilações em torno do ponto de equilíbrio que, por isso, pode ser considerado estável (a definição precisa de estabilidade será vista mais à frente neste capítulo). Para o oscilador harmônico  $U''(q^* = 0) = F > 0$ , donde  $q^* = 0$  é um ponto de equilíbrio estável.

Não é o caso do exemplo da Fig. 2.2, mas caso o ponto de equilíbrio  $q^*$  correspondesse a um máximo local de  $U(q)$ , ou seja, se  $U''(q^*) < 0$ , qualquer deslocamento  $\delta q$  provocaria

um afastamento progressivo do ponto de equilíbrio, que seria portanto instável. Essa análise de estabilidade, no entanto, é válida apenas nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio. Para conhecer o comportamento dos deslocamentos para valores arbitrários, é necessário conhecer a solução do problema. Além disso, se  $U'(q^*) = 0$ , a aproximação linear não é suficiente para determinar a estabilidade de  $q^*$ .

Admitindo, porém, que os deslocamentos sejam pequenos o suficiente, expandimos a energia potencial  $U(q)$  nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio estável  $q = q^*$ ,

$$U(q) = U(q^*) + \delta q U'(q^*) + \frac{1}{2}(\delta q)^2 U''(q^*) + \dots \quad (2.35)$$

Fazendo  $U(q^*) = 0$  sem perda de generalidade (o que equivale a transladar o ponto de referência para a energia potencial) e como, por hipótese,  $U'(q^*) = 0$  e  $U''(q^*) > 0$ , teremos

$$U(q) = \frac{1}{2}k(q - q^*)^2, \quad (2.36)$$

que é expressão do oscilador harmônico unidimensional, correspondendo a um fictício sistema massa-mola, onde a constante elástica é  $k = U''(q^*)$ . Sob estas condições, uma partícula oscilará em torno do ponto de equilíbrio estável, com frequência  $\omega = \sqrt{U''(q^*)/m}$ .

### 2.3.3 Plano de fase

Uma visualização extremamente útil da dinâmica de um sistema como o oscilador harmônico é o chamado *plano de fase*, que é o gráfico do momentum em função da coordenada, para uma dada condição inicial  $(p_0, q_0)$ . Para uma partícula em uma dimensão, sob um potencial  $U(q)$ , a conservação da energia  $E$  nos permite conhecer a forma das soluções no plano de fase.

Exemplificando os conceitos envolvidos com o oscilador harmônico unidimensional, e considerando a seguinte condição inicial

$$p_0 = p(t = 0), \quad q_0 = q(t = 0), \quad (2.37)$$

resulta, de (2.25), que o valor da energia deve ser o mesmo para todos valores de  $p(t)$  e  $q(t)$ :

$$E = G \frac{p_0^2}{2} + F \frac{q_0^2}{2} = G \frac{p^2}{2} + F \frac{q^2}{2}. \quad (2.38)$$

Definindo

$$a = \sqrt{\frac{2E}{G}}, \quad b = \sqrt{\frac{2E}{F}}, \quad (2.39)$$

a relação (2.38) indica que as trajetórias plano de fase são elipses, descritas pela equação cartesiana

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1, \quad (2.40)$$

onde  $a$  e  $b$  representam os semi-eixos maior e menor, respectivamente. Para cada valor da energia  $E > 0$  haverá uma trajetória de fase diferente. [Fig. 2.3(b)]. Nas vizinhanças do ponto de equilíbrio estável na origem, as trajetórias fechadas correspondem a oscilações harmônicas com frequência  $\omega$ , independentemente da amplitude.

## 2.4 Hamiltoniana e Energia

Encarando a Hamiltoniana de um sistema como função das suas coordenadas e momenta generalizadas, e ainda do tempo:  $H = H(q_i, p_i, t)$ , sua derivada total em relação ao tempo é

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.41)$$

Usando as equações de Hamilton (2.15)-(2.17), temos que

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.42)$$

Portanto, se a Lagrangiana não depende explicitamente do tempo, o segundo membro é nulo e a Hamiltoniana é uma constante do movimento. Esta é uma condição tanto necessária como suficiente.

Na sequência, supomos que a energia potencial não dependa das velocidades generalizadas ( $\partial U / \partial \dot{q}_i = 0$ ). Os momenta generalizados, neste caso, são

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.43)$$

Recordamos a expressão mais geral para a energia cinética de uma partícula, dada por (1.6),

$$T(q_i, \dot{q}_i; t) = \sum_{k, \ell} \frac{1}{2} A_{k\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell + \sum_k B_k \dot{q}_k + T_0, \quad (2.44)$$

onde os coeficientes  $A_{k\ell}$ ,  $B_k$  e  $T_0$  são funções das coordenadas generalizadas e do tempo, dadas por (1.7)-(1.17). Derivando em relação a  $\dot{q}_i$  obtemos a expressão geral

$$p_i = \sum_k A_{ik} \dot{q}_k + B_i. \quad (2.45)$$

Se as equações de transformação entre coordenadas cartesianas das partículas e as coordenadas generalizadas não dependerem explicitamente do tempo, os coeficientes  $B_k$  e  $T_0$  em (2.44) serão identicamente nulos, e os momenta conjugados serão funções das coordenadas e velocidades generalizadas,

$$p_i = \sum_k A_{ik} \dot{q}_k. \quad (2.46)$$

de modo que

$$\sum_i \dot{q}_i p_i = \sum_{i,k} A_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T. \quad (2.47)$$

Este é, na verdade, é um caso particular do Teorema de Euler: se  $f$  é uma função homogênea de grau  $n$  das variáveis  $x_i$ , então

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f, \quad (2.48)$$

ou seja, a energia cinética será uma função homogênea de grau 2 das velocidades generalizadas. Nessas condições a Hamiltoniana, como uma transformação de Legendre, será

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L = 2T - (T - U) = T + U = E, \quad (2.49)$$

que é a energia total do sistema. Portanto, as condições (suficientes, mas não necessárias) para que a Hamiltoniana  $H$  seja igual à energia total do sistema  $E$ , são:



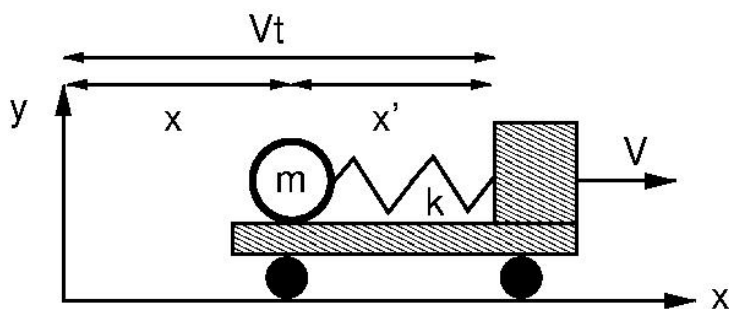


Figura 2.4: Sistema massa-mola montado num carrinho em movimento uniforme.

1. o sistema deve ser conservativo;
2. a transformação de coordenadas deve ser independente do tempo.

Para exemplificar estas diferenças, vamos considerar uma partícula de massa  $m$ , presa por uma mola de constante elástica  $k$  a um carrinho que move-se horizontalmente com velocidade constante  $V$  [Fig. 2.4]. Usando, inicialmente, um sistema de referência fixo  $(x, y)$ , as coordenadas e velocidades são  $x$  e  $\dot{x}$ , respectivamente. Em relação a este referencial, a elongação da mola é  $x - Vt$ , de modo que a Lagrangiana é

$$L(x, \dot{x}, t) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x - Vt)^2. \quad (2.50)$$

O momentum conjugado é, portanto,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad (2.51)$$

e uma transformação de Legendre conduz à Hamiltoniana

$$H(p, x, t) = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x - Vt)^2. \quad (2.52)$$

Observe que, como  $H = T + U$ , a Hamiltoniana é igual à energia total. No entanto, como  $H$  depende explicitamente do tempo, ela *não* é uma constante do movimento.

Já num sistema de referência inercial que move-se junto com o carrinho  $(x', y')$ , com velocidade constante  $V$ , tal que  $x' = x - Vt$ , a energia cinética é

$$T' = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}' + V)^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}')^2 + m\dot{x}'V + \frac{1}{2}mV^2, \quad (2.53)$$

enquanto a energia potencial é  $U' = kx'^2/2$ , tal que a Lagrangiana seja

$$L' = T' - U' = \frac{1}{2}m(\dot{x}')^2 + m\dot{x}'V + \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}kx'^2. \quad (2.54)$$

Como, agora, o momentum conjugado é

$$p' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'} = m\dot{x}' + mV, \quad (2.55)$$

uma nova transformação de Legendre conduz à Hamiltoniana

$$H'(p', x') = p'\dot{x}' - L' = \frac{(p' - mV)^2}{2m} + \frac{1}{2}kx'^2 - \frac{1}{2}mV^2, \quad (2.56)$$

que, sendo independente do tempo, é uma constante do movimento. Mas  $H'$  *não* é igual à energia total, pois seu valor é igual à energia no referencial em movimento menos o termo constante  $mV^2/2$ .

## 2.5 Pêndulo

Partimos da Lagrangiana (1.83) para o pêndulo,

$$L = \frac{m}{2} a^2 \dot{\theta}^2 - mga(1 - \cos \theta), \quad (2.57)$$

onde o momentum canonicamente conjugado à variável  $\theta$  é

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2 \dot{\theta}, \quad (2.58)$$

tal que a Hamiltoniana é, a menos de uma constante aditiva (e, portanto, irrelevante),

$$H = \frac{p^2}{2ma^2} - mga \cos \theta = \frac{1}{2} Gp^2 - F \cos \theta, \quad (2.59)$$

onde definimos

$$F \equiv mga, \quad G = \frac{1}{ma^2}. \quad (2.60)$$

As equações de Hamilton para o pêndulo são

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -F \operatorname{sen} \theta \quad (2.61)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = Gp. \quad (2.62)$$

Derivando a segunda em relação ao tempo e substituindo na primeira, obtemos

$$\ddot{\theta} + FG \operatorname{sen} \theta = 0, \quad (2.63)$$

que é equivalente à equação de movimento (1.86), onde  $\omega_0 = \sqrt{FG}$ , e cuja solução analítica foi obtida no Capítulo 1 em termos de integrais e funções elípticas.

### 2.5.1 Análise qualitativa do movimento

O problema do oscilador harmônico, visto na seção anterior, ilustra as vantagens de uma análise qualitativa do movimento, que dispensa o uso das soluções que, de resto, nem sempre existem ou são simples de usar. Nesta análise incluímos a determinação dos pontos de retorno, dos pontos de equilíbrio e sua estabilidade, e das trajetórias no plano de fase.

A partir do gráfico da energia potencial do pêndulo [Fig. 2.5]

$$U(\theta) = -F \cos \theta, \quad (-\pi < \theta \leq \pi), \quad (2.64)$$

podemos identificar três situações qualitativamente diferentes, quanto à relação entre a energia potencial máxima  $F$  e a energia total  $E$ :

1. se  $-F \leq E < F$  há dois pontos de retorno para os quais  $U(\theta) = E$ , a saber,  $\theta_2 = -\theta_1$ , onde

$$\theta_1 = \arccos\left(-\frac{E}{F}\right), \quad (2.65)$$

de modo que o pêndulo tem oscilações limitadas ao intervalo  $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$ , ou “librações” com amplitude  $\theta_1$ . Se a energia  $E$  tiver valores positivos ou negativos, o ponto de retorno será maior ou menor que  $\pi/2$ , respectivamente. O período destas oscilações aumenta com a amplitude, segundo a relação (1.108)

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{a}{g}} K\left(\operatorname{sen} \frac{\theta_1}{2}\right). \quad (2.66)$$

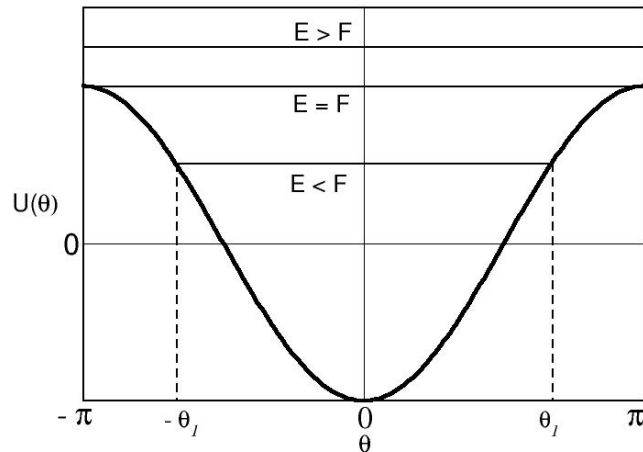


Figura 2.5: Energia potencial do pêndulo em função do ângulo  $\theta$ .

2. se  $E > F$  não há pontos de retorno, e o movimento do pêndulo consiste em rotações não-uniformes (para as quais a velocidade não é constante);
3. se  $E = F$  os pontos de retorno são  $\theta_1 = \pi$  e  $\theta_2 = -\pi$ . Usando (2.66) vemos que o período tende a infinito nesse caso, pois  $K(1) \rightarrow \infty$ .

Algumas trajetórias no plano de fase, correspondendo a diferentes valores da energia  $E$ , estão mostradas na Fig. 2.6, obtida para  $F = G = 1$ . Os três tipos de comportamento possível são:

1. se  $-F \leq E < F$  as librações do pêndulo (oscilações limitadas ao intervalo  $-\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1$ ) correspondem a trajetórias fechadas no plano de fase em torno do ponto de equilíbrio estável na origem, e no sentido anti-horário. Na vizinhança desse ponto as trajetórias de fase são elipses, uma vez que para oscilações de pequena amplitude temos aproximadamente uma solução do tipo oscilador harmônico [cf. Eq. (1.106)]. Com efeito, a origem é um ponto de equilíbrio estável: pequenas perturbações levam a oscilações limitadas que permanecem na vizinhança do ponto de equilíbrio.
2. se  $E > F$  as rotações do pêndulo correspondem a trajetórias abertas no plano de fase. Na verdade, como identificamos os pontos  $\theta = +\pi$  e  $-\pi$ , as trajetórias fecham-se numa superfície de fase cilíndrica.
3. se  $E = F$  temos curvas que interceptam-se nos pontos  $\theta = \pm\pi$ , que são dois ramos de uma separatriz, que segrega trajetórias fechadas das abertas, dadas por (??) como

$$p_s = \pm \sqrt{\frac{2F}{G}(1 + \cos \theta_s)} = \pm \frac{2\omega_0}{G} \cos\left(\frac{\theta_s}{2}\right), \quad (2.67)$$

onde os símbolos  $(p_s, \theta_s)$  representam os valores das variáveis ao longo dos ramos da separatriz

Como veremos mais à frente, os dois ramos da separatriz não são trajetórias, propriamente, no plano de fase. Para determinar  $\theta_s$  como função do tempo substituímos (2.67) em (2.62) e

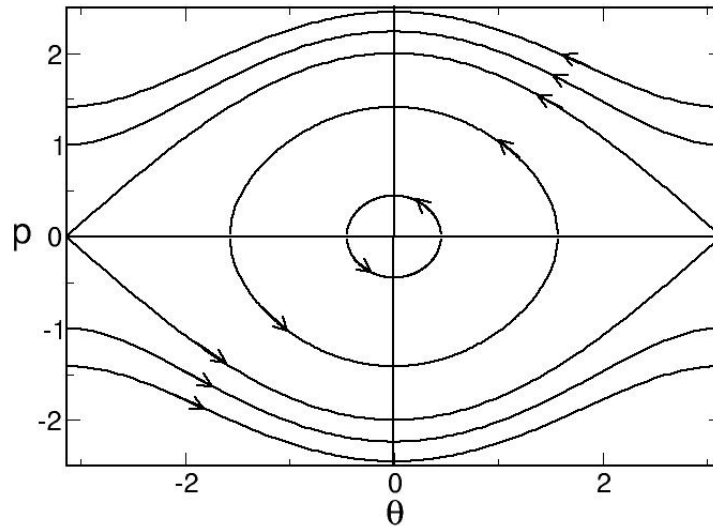


Figura 2.6: Algumas trajetórias de fase do pêndulo, no caso  $G = F = 1$ .

integramos,

$$\int \frac{d\theta_s}{\cos(\theta_s/2)} = \pm 2\omega_0 \int dt \quad (2.68)$$

Usando a fórmula

$$\int \sec x dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

obtemos que, sobre os ramos da separatriz,

$$\theta_s(t) = 4 \operatorname{arctg} (e^{\omega_0 t}) - \pi, \quad (2.69)$$

de sorte que  $\theta_s(0) = 0$ , e  $\theta_s \rightarrow \pi$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Logo, tendo uma condição inicial arbitrária sobre a separatriz, o movimento conduz assintoticamente aos pontos  $\theta = \pm\pi$ , mas leva um tempo infinitamente grande para isso.

Outra característica da separatriz é que seus dois ramos têm sentidos de percurso diferentes. Pela Fig. 2.6, o ramo superior da separatriz conecta os pontos  $\theta = \pi$  a  $\theta = -\pi$  (na verdade é o mesmo ponto). Já o ramo inferior conecta  $-\pi$  a  $\pi$ . Veremos, na sequência, que os pontos  $\pm\pi$  são pontos de equilíbrio. Se tivermos uma condição inicial posicionada no ramo que se afasta do ponto, então este é instável. Há, também, um ramo que se aproxima do ponto de equilíbrio instável.

## 2.6 Partícula num potencial central

A Lagrangiana de uma partícula num potencial central é dada por (1.130),

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - U(r). \quad (2.70)$$

Os momenta canonicamente conjugados às coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  são

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad (2.71)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad (2.72)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2\theta \dot{\phi}, \quad (2.73)$$

A transformada de Legendre da Lagrangiana fornece a Hamiltoniana correspondente ,

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - L = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2\theta} \right) + U(r), \quad (2.74)$$

e que, por ser independente do tempo, é igual à energia total do sistema  $E$ . As respectivas equações canônicas são

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad (2.75)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad (2.76)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2\theta}, \quad (2.77)$$

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{mr^3} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} \right) - \frac{dU}{dr}, \quad (2.78)$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\cos\theta p_\phi^2}{mr^2 \sin^3\theta}, \quad (2.79)$$

$$\frac{dp_\phi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0. \quad (2.80)$$

Como  $\phi$  não aparece explicitamente em (2.74), ela é uma coordenada ignorável e  $p_\phi$  é uma constante do movimento, em decorrência de (2.80). Escolhendo, sem perda de generalidade,  $p_\phi = 0$ , a Eq. (2.77) indica que  $\phi$  também é uma constante, que podemos escolher como  $\phi = 0$ . Substituindo (2.79) resulta que  $dp_\theta/dt = 0$ , de modo que  $p_\theta$  também é uma nova constante do movimento, que associamos ao momentum angular da partícula

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \ell = \text{constante}. \quad (2.81)$$

Nesse caso a Hamiltoniana (2.74) simplifica-se bastante por conter apenas a coordenada radial

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{\ell^2}{r^2} \right) + U(r) = \frac{p_r^2}{2m} + U_{ef}(r) = E, \quad (2.82)$$

onde definimos a energia potencial efetiva

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}. \quad (2.83)$$

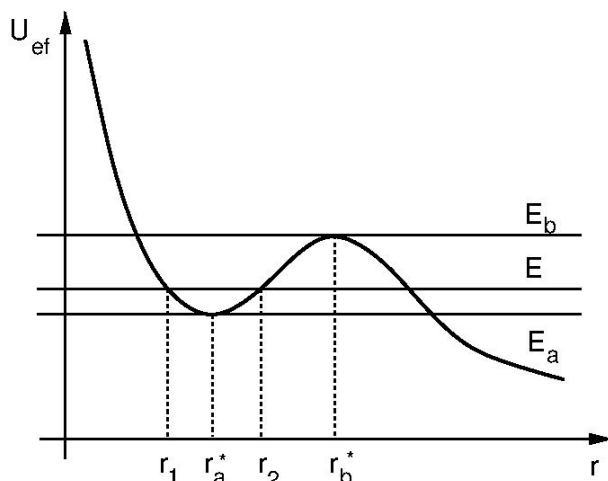


Figura 2.7: Potencial efetivo para forças centrais.

### 2.6.1 Estabilidade de órbitas circulares

A definição de um potencial efetivo para forças centrais permite a redução do movimento na direção radial ao de uma partícula em uma dimensão. A análise qualitativa do movimento que fizemos na seção 2.3 neste contexto (pontos de retorno e de equilíbrio) pode ser aplicada ao movimento radial, substituindo o potencial  $U(q)$  pelo potencial efetivo  $U_{ef}(r)$

Vamos considerar que o potencial efetivo  $U_{ef}(r)$  dependa da distância radial como a função representada esquematicamente na Figura 2.7. Podemos identificar dois pontos de equilíbrio no movimento radial, correspondentes a extremos do potencial efetivo:

- para  $E = E_a$  existe uma órbita circular em  $r = r_a^*$ , que é um mínimo local de  $U_{ef}$

$$U'_{ef}(r_a^*) = 0, \quad U''_{ef}(r_a^*) > 0, \quad (2.84)$$

portanto estável em relação a pequenas perturbações radiais.

- para  $E = E_b$  existe uma órbita circular em  $r = r_b^*$ , que é um máximo local de  $U_{ef}$ :

$$U'_{ef}(r_b^*) = 0, \quad U''_{ef}(r_b^*) < 0, \quad (2.85)$$

que é instável em relação a perturbações radiais.

Inicialmente, consideramos um potencial central do tipo lei de potencia

$$U(r) = -\frac{k}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}}, \quad (2.86)$$

onde  $k > 0$ , que leva a uma força do tipo  $F(r) = -k/r^n$ . Substituindo em (2.83) obtemos o potencial efetivo associado

$$U_{ef}(r) = -\frac{k}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}} + \frac{\ell^2}{2mr^2}. \quad (2.87)$$

cujas derivadas são

$$U'_{ef}(r) = \frac{k}{r^n} - \frac{\ell^2}{mr^3}, \quad U''_{ef}(r) = -\frac{kn}{r^{n+1}} + \frac{3\ell^2}{mr^4}. \quad (2.88)$$

Aplicando (2.84), haverá uma órbita circular estável de raio

$$r^* = \left( \frac{mk}{\ell^2} \right)^{1/(n-3)}, \quad (2.89)$$

se for satisfeita a condição  $(3-n)(\ell^2/m) > 0$ , ou seja, caso  $n < 3$ .

De (1.139), a equação de movimento radial é

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + U'(r) = 0, \quad (2.90)$$

A órbita circular é tal que  $r = r^*$ , donde  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ . Considerando que a velocidade da partícula é constante, a frequência angular  $\omega_0 = \dot{\theta}$  é dada por

$$\omega_0^2 = \frac{U'(r^*)}{mr^*} \quad (2.91)$$

É conveniente, ainda, expressar (2.90) na forma

$$\ddot{r} - \frac{\ell^2}{m^2 r^3} = -g(r) \equiv -\frac{U'(r)}{m}. \quad (2.92)$$

As oscilações radiais nas vizinhanças da órbita circular estável podem ser descritas escrevendo

$$r = r^* + x, \quad (|x| \ll r^*). \quad (2.93)$$

Como  $r^*$  é uma constante, então  $\dot{r} = \dot{x}$ . Substituindo (2.93) em (2.92) obtemos a equação para a evolução temporal dos desvios radiais:

$$\ddot{x} - \frac{\ell^2}{m^2 (r^* + x)^3} = -g(r^* + x). \quad (2.94)$$

Usando a aproximação binomial e linearizando o lado direito da expressão acima,

$$\frac{1}{(r^* + x)^3} = \frac{1}{r^{*3}} \left( 1 - \frac{3x}{r^*} \right), \quad (x \ll r^*), \quad (2.95)$$

$$g(r^* + x) = g(r^*) + xg'(r^*) + \dots, \quad (2.96)$$

obtemos

$$\ddot{x} - \frac{\ell^2}{m^2 r^{*3}} \left( 1 - \frac{3x}{r^*} \right) = -g(r^*) - xg'(r^*). \quad (2.97)$$

Por outro lado, para a órbita circular não-perturbada  $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$ , de sorte que (2.97) implica em

$$g(r^*) = \frac{\ell^2}{m^2 r^{*3}}, \quad (2.98)$$

o que faz com que (2.97) seja escrita na forma da equação de um oscilador harmônico

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (2.99)$$

onde definimos a quantidade

$$\omega^2 = \frac{3g(r^*)}{r^*} + g'(r^*). \quad (2.100)$$

Se  $\omega^2 > 0$  a solução geral de (2.99) é [vide (1.72)]

$$x(t) = A \cos(\omega t + \vartheta), \quad (2.101)$$

onde  $A$  e  $\vartheta$  são constantes de integração. Esta solução corresponde a oscilações harmônicas de frequência  $\omega$ , indicando uma órbita cujo raio é alternadamente maior ou menor que  $r^*$ . Já se  $\omega^2 < 0$  a solução não é mais oscilatória, pois irá tender a zero ou infinito com o passar do tempo. Este caso, porém, não pode ser associado a uma órbita radialmente estável. Portanto, a condição para uma órbita radialmente estável é

$$\frac{3g(r^*)}{r^*} + g'(r^*) > 0. \quad (2.102)$$

De (2.98) temos que  $g(r^*) > 0$ , donde a desigualdade acima se escreve como

$$\frac{3}{r^*} + \frac{g(r^*)}{g(r^*)} = \frac{3}{r^*} + \frac{U''(r^*)}{U'(r^*)} > 0. \quad (2.103)$$

Usando (2.88) resulta novamente que  $3 - n > 0$ , confirmando nosso resultado anterior para órbitas radialmente estáveis ( $n < 3$ ).

Até agora só mostramos a existência de oscilações radiais em torno de uma órbita circular estável. Para verificarmos se tais oscilações configuram uma órbita fechada, devemos comparar a frequência dos desvios radiais  $\omega$  com a frequência  $\omega_0$  da órbita circular propriamente dita. De (2.91) e (2.100), a razão entre estas frequências é

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \left\{ 3 + \frac{r^* U''(r^*)}{U'(r^*)} \right\}^{1/2}. \quad (2.104)$$

Caso essa razão seja um número racional, na forma  $\omega/\omega_0 = p/q$ , onde  $p$  e  $q$  são inteiros positivos, a órbita correspondente irá fechar-se sobre si mesma após um dado número de oscilações completas.

Para o potencial do tipo lei de potência, usando (2.88), essa razão reduz-se a

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{3 - n}. \quad (2.105)$$

A condição para órbitas fechadas,  $\sqrt{3 - n} = p/q$ , é satisfeita para os seguintes expoentes:

- $n = 2$ , para o qual  $\omega = \omega_0$ , correspondendo ao problema de Kepler;
- $n = -1$ , para o qual  $\omega = 2\omega_0$ , que corresponde ao oscilador harmônico isotrópico, para o qual o potencial central é  $U(r) = kr^2/2$ .

### 2.6.2 Órbitas abertas e fechadas

Serão estas as únicas soluções possíveis para órbitas fechadas? A resposta é afirmativa, e foi encontrada por Bertrand em 1873, que empregou termos de ordens mais altas na expressão da perturbação radial para demonstrar que apenas os casos  $n = 2$  e  $n = -1$  possuem órbitas fechadas [cf. [40], seção 3.6].

Para considerar este problema de um ponto de vista mais geral, voltamos ao potencial efetivo  $U_{ef}(r)$  representado pela Figura 2.7 em função da distância radial. Para um valor constante da



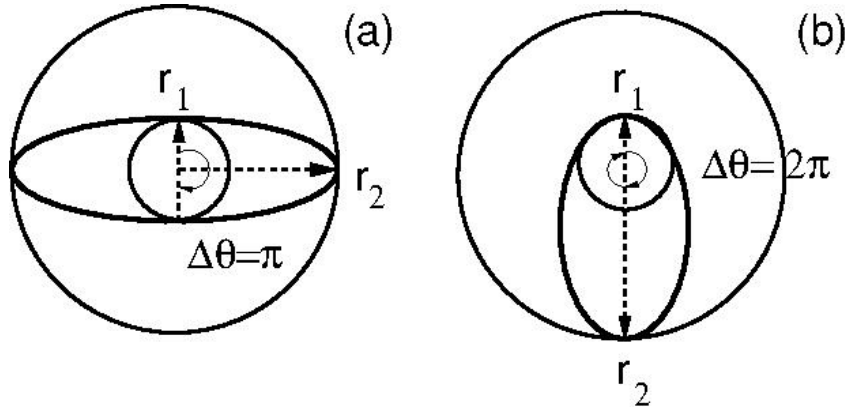


Figura 2.8: Trajetórias fechadas para um potencial central nos casos (a)  $p/q = 1/2$ , (b)  $p/q = 1$ .

energia tal que  $E_a < E < E_b$  haverá dois pontos de retorno  $r_1$  e  $r_2$ , obtidos pelas soluções reais e positivas da equação

$$U_{ef}(r_{1,2}) = E, \quad (2.106)$$

que, em vista de (2.83), equivale a

$$U(r_{1,2}) = E - \frac{\ell^2}{2mr_{1,2}^2}. \quad (2.107)$$

No intervalo  $r_1 \leq r \leq r_2$  a órbita da partícula experimentará oscilações radiais em torno do ponto de equilíbrio estável  $r^*$ . No plano  $(r, \theta)$ , isto significa que a trajetória da partícula estará limitada ao anel de raios interno e externo iguais a  $r_1$  e  $r_2$ . Os pontos onde a trajetória está a uma distância  $r_1$  ou  $r_2$  do centro de força (na origem do sistema) são chamados *pontos apsidais*.

Definiremos, também, o ângulo  $\Delta\theta$  entre as direções de um mesmo ponto apsidal, após uma oscilação radial completa (por exemplo, de  $r_1$  até  $r_2$ , e depois de volta até  $r_1$ ). Como o momentum angular  $\ell$  é conservado para um potencial central arbitrário  $U(r)$ , então, de (2.81),

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\ell}{mr^2}, \quad (2.108)$$

que, após substituição na quadratura (1.144), leva-nos à seguinte integral

$$\Delta\theta = \int d\theta = \frac{2\ell}{m} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left\{ \frac{2}{m} \left[ E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right] \right\}^{-1/2}, \quad (2.109)$$

onde usamos o fato da órbita ser simétrica em relação aos pontos apsidais  $r_1$  e  $r_2$ .

Para que a trajetória seja fechada após uma oscilação radial completa, a variação correspondente do ângulo deve ser da forma

$$\Delta\theta = 2\pi \frac{p}{q}, \quad (2.110)$$

onde  $p$  e  $q$  são inteiros: a trajetória fecha-se sobre si mesma após  $q$  oscilações radiais  $r_1 \rightarrow r_2 \rightarrow r_1$  e após  $p$  voltas em torno da origem. Por exemplo, se  $p/q = 1/2$ , temos que  $\Delta\theta = \pi$  e a órbita é uma elipse [Fig. 2.8(a)]. Caso  $p/q = 1$ , então  $\Delta\theta = 2\pi$  e a trajetória é a elipse esquematizada na Fig. 2.8(b).

Caso a variação do ângulo não seja da forma (2.110), então  $\Delta\theta/2\pi$  será um número irracional, e a trajetória passará um número infinito de vezes pelos pontos apsidais  $r_1$  e  $r_2$ , mas nunca se fechará sobre si própria, ou seja, uma trajetória aberta que preenche densamente o anel  $r_1 \leq r \leq r_2$  [Fig. 2.9].

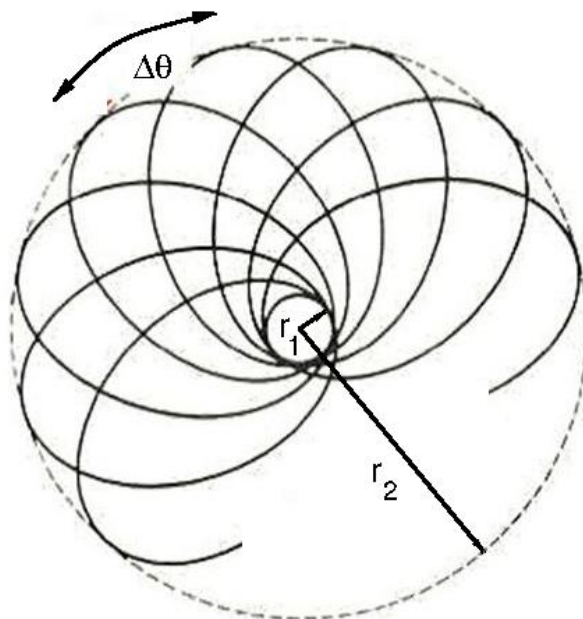


Figura 2.9: Precessão de órbitas para potenciais centrais arbitrários.

### 2.6.3 Problema de Kepler

O problema de Kepler corresponde ao caso  $n = 2$  do potencial central do tipo lei de potência (2.86),

$$U(r) = -\frac{k}{r}, \quad (2.111)$$

com energia potencial efetiva [Fig. 2.10]

$$U_{ef}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}. \quad (2.112)$$

Considerando o movimento radial, há um único ponto de equilíbrio estável no mínimo local do potencial efetivo (2.112),

$$r^* = \frac{\ell^2}{mk}, \quad (2.113)$$

associado ao seguinte valor da energia

$$E_0 = U_{ef}(r^*) = -\frac{mk^2}{2\ell^2}, \quad (2.114)$$

e que corresponde a uma órbita circular estável em relação a perturbações radiais.

Os pontos de retorno são as soluções da equação

$$\frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} - E = 0, \quad (2.115)$$

que pode ser reescrita na forma padrão de uma equação do segundo grau,

$$2mEr^2 + 2mkr - \ell^2 = 0. \quad (2.116)$$

De acordo com a Fig. 2.10 há três situações de interesse, dependendo do valor da energia

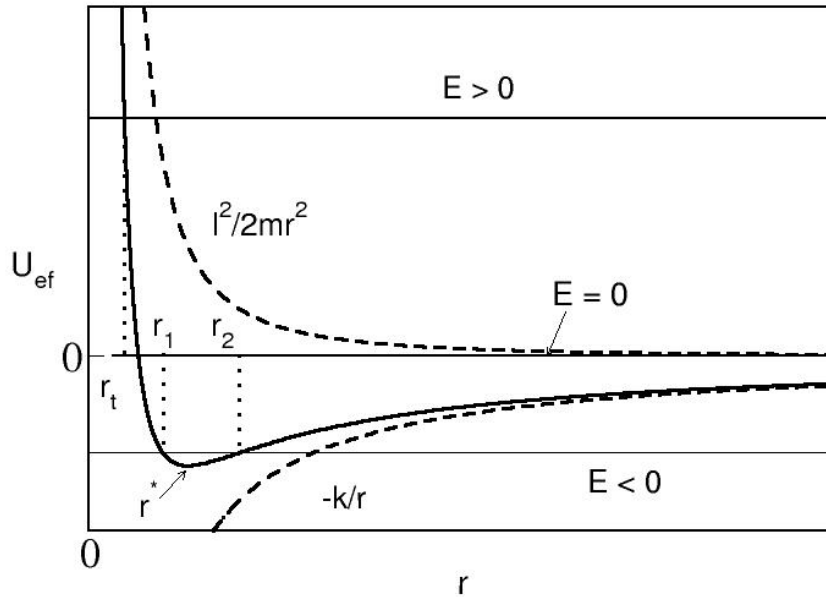


Figura 2.10: Potencial efetivo no problema de Kepler.

- se  $E_0 < E < 0$  existem duas raízes reais e positivas de (2.116),

$$r_{1,2} = \frac{k}{2|E|} \pm \left[ \left( \frac{k}{2|E|} \right)^2 - \frac{\ell^2}{2m|E|} \right]^{1/2}, \quad (2.117)$$

e as órbitas são elipses de semi-eixo maior  $a$  e excentricidade  $\epsilon$ , dadas por (1.156) e (1.153), respectivamente. Os pontos de retorno  $r_1$  e  $r_2$  são as distâncias apsidais expressas por (1.155)

$$r_1 = a(1 - \epsilon), \quad r_2 = a(1 + \epsilon), \quad (2.118)$$

e correspondem ao periélio e afélio no movimento planetário, respectivamente.

- se  $E > 0$  há um único ponto de retorno  $r_1$ , dado pela única raiz real e positiva de (2.116). A partícula tem uma trajetória ilimitada (uma hipérbole), onde  $r_1$  é a distância de máxima aproximação ao centro de força;
- se  $E = 0$  também há um único ponto de retorno finito (o outro estará no infinito), e a trajetória é uma parábola.

Uma descrição útil é o plano de fase radial do problema de Kepler, ou o gráfico de  $p_r$  versus  $r$ , dada uma condição inicial  $(r(0), p_r(0))$ . Para cada condição inicial há um valor de energia, dado pela Hamiltoniana do problema unidimensional equivalente

$$H(p_r, r) = \frac{1}{2m} p_r^2 + U_{ef}(r) = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = E. \quad (2.119)$$

Assim como no pêndulo, também aqui o tipo de trajetória no plano de fase radial depende da energia do sistema [Fig. 2.11]:

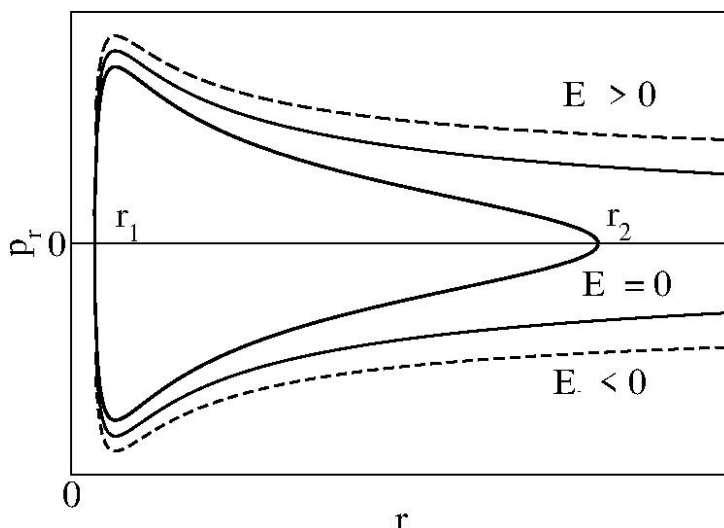


Figura 2.11: Trajetórias no plano de fase radial para o problema de Kepler.

1. se  $E_0 \leq E < 0$  as trajetórias de fase são fechadas, dadas pela união das curvas determinadas pelas relações

$$p_r = \pm \sqrt{2m} \left[ \frac{k}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2} - |E| \right]^{1/2}, \quad (2.120)$$

onde  $r_1$  e  $r_2$ , os pontos de retorno, correspondem às abscissas das interseções destas curvas com o eixo  $p_r = 0$  [Fig. 2.11]. Estas curvas fechadas no plano de fase radial correspondem, no espaço de configuração, às trajetórias elípticas das partículas, onde  $r_{1,2}$  são os pontos apsídais. As trajetórias fechadas no plano de fase orbitam em torno do ponto de equilíbrio estável localizado em  $r = r^*$ , que associamos a uma órbita circular da partícula.

2. se  $E > 0$  as trajetórias de fase são abertas, com um único ponto de retorno, associadas a órbitas hiperbólicas no espaço de configuração.
3. se  $E = 0$  temos uma separatriz entre as duas situações anteriores, que se aproxima assintoticamente do eixo horizontal, quando  $r \rightarrow \infty$ : ela corresponde a uma trajetória parabólica da partícula.

## 2.7 Partícula carregada num campo eletromagnético

### 2.7.1 Hamiltoniana

A Lagrangiana de uma partícula de massa  $m$  e carga  $e$ , sob a ação de um campo eletromagnético cujos potenciais são  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  é dada por (1.182)

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - e \Phi(\mathbf{r}, t) + e \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}. \quad (2.121)$$

Os momenta canonicamente conjugados  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$  são dados por (1.189)

$$\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{v}} L = m \mathbf{v} + e \mathbf{A}. \quad (2.122)$$

A transformação de Legendre (2.10) fornece a Hamiltoniana do sistema:

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L. \quad (2.123)$$

Substituindo  $\mathbf{v}$  em favor de  $\mathbf{p}$  obtemos

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + e\Phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.124)$$

As equações de Hamilton correspondentes são

$$\dot{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{p}} H, \quad (2.125)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla H, \quad (2.126)$$

onde  $\nabla_{\mathbf{p}}$  é o gradiente em relação às componentes do momentum (2.122). Usando a identidade vetorial (1.186) chegamos às equações de Hamilton

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}, \quad (2.127)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{m} [(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot \nabla] \mathbf{A} + \frac{e}{m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (\nabla \times \mathbf{A}) - e\nabla\Phi. \quad (2.128)$$

Usando a expressão (1.191) para a derivada total de uma função vetorial,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.129)$$

reescrevemos (2.128) como

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\nabla\Phi - e \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + e\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}), \quad (2.130)$$

que é a equação Newtoniana de movimento (1.192).

## 2.7.2 Invariância de calibre

Os campos elétrico e magnético. De fato, estes são invariantes sob as seguintes transformações de calibre:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad (2.131)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \Lambda, \quad (2.132)$$

onde  $\Lambda(\mathbf{r}, t)$  é uma função arbitrária das coordenadas e do tempo.

De acordo com (2.122), o momentum canônico  $\mathbf{p}$  difere do momentum cinético  $\mathbf{\Pi} = m\mathbf{v}$  por um fator que contém o potencial vetorial  $\mathbf{A}$ . Enquanto o momentum cinético é invariante de calibre por não conter os potenciais eletromagnéticos, o momentum canônico não o é, pois, aplicando (2.132))

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{\Pi} + e(\mathbf{A} - \nabla \Lambda) = \mathbf{p} - e\nabla \Lambda \neq \mathbf{p}. \quad (2.133)$$

Considerando que apenas quantidades invariantes de calibre podem ser fisicamente medidas, concluímos que o momentum canônico  $\mathbf{p}$  não é uma observável física, ao contrário do momentum cinético  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ .

A própria Hamiltoniana (2.124), em relação a (2.131)-(2.132), transforma-se como

$$\begin{aligned} H \rightarrow H' &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p}' - e\mathbf{A}')^2 + e\Phi' \\ &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\nabla\Lambda - e\mathbf{A} + e\nabla\Lambda)^2 + e\Phi + e\frac{\partial\Lambda}{\partial t} = H + e\frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.134)$$

de modo que  $H$  também não é invariante de calibre! No entanto, isso não afeta a física do problema, pois as equações de Hamilton não são modificadas pela transformação (2.134). De fato, considerando seu efeito em (2.126):

$$\dot{\mathbf{p}}' = -\nabla H' \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla\Lambda,$$

que nos leva novamente a (2.126).

### 2.7.3 Campos elétrico e magnético uniformes

Vamos revisitar os exemplos tratados no Capítulo 1, desta vez sob o ponto de vista Hamiltoniano. Considerando, em primeiro lugar, um campo magnético uniforme na direção  $z$ :  $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{i}}$  e sem campo elétrico, teremos os seguintes potenciais eletromagnéticos

$$\mathbf{A} = -B_0y\hat{\mathbf{i}}, \quad \Phi = 0. \quad (2.135)$$

Substituindo estas expressões em (2.124) resulta que a Hamiltoniana da partícula carregada é

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + eB_0y\hat{\mathbf{i}})^2 = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Omega y p_x + \frac{1}{2} m \Omega^2 y^2, \quad (2.136)$$

onde  $\Omega = eB_0/m$  é a girofrequência.

As equações de Hamilton correspondentes a (2.136) são

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m} p_x + \Omega y, \quad (2.137)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m} p_y, \quad (2.138)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{1}{m} p_z, \quad (2.139)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (2.140)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\Omega p_x - m\Omega^2 y, \quad (2.141)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (2.142)$$

Como a Hamiltoniana é cíclica nas coordenadas  $x$  e  $y$ , os respectivos momenta são conservados,

$$p_x = \mathcal{A}, \quad p_z = C. \quad (2.143)$$

Observe, ainda, que como a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, ela é igual à energia  $E$ , que também é conservada no movimento. Há três constantes do movimento para os três graus de liberdade do problema. No Capítulo 1 vimos que a solução (denominada *giração*)

consiste na combinação de um movimento retilíneo uniforme na direção paralela ao campo magnético e um movimento circular uniforme no plano perpendicular ao campo magnético.

Em segundo lugar, adicionamos ao problema anterior um campo elétrico uniforme  $\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_z \hat{\mathbf{k}}$ , associado ao potencial eletrostático

$$\Phi(\mathbf{r}) = -E_x x - E_z z. \quad (2.144)$$

Incluindo a energia potencial correspondente  $e\Phi$  em (2.136) temos a Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Omega y p_x + \frac{1}{2} m \Omega^2 y^2 - q E_x x - q E_z z, \quad (2.145)$$

com as respectivas equações de Hamilton,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m} p_x + \Omega y, \quad (2.146)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m} p_y, \quad (2.147)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{1}{m} p_z, \quad (2.148)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = q E_x, \quad (2.149)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\Omega p_x - m \Omega^2 y, \quad (2.150)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} = q E_z. \quad (2.151)$$

No Capítulo 1 mostramos que o movimento neste caso consiste numa giração com frequência  $\Omega$  em torno da direção do campo magnético, superposta a uma deriva do centro de guia na direção dada pelo produto vetorial  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ .

## 2.8 Plano de fase

O chamado *espaço de fase* de um sistema Hamiltoniano tem como variáveis as coordenadas generalizadas do sistema e os seus respectivos momenta generalizados. Assim, se um sistema tem  $n$  graus de liberdade, o seu espaço de fase terá dimensão  $2n$ . Por simplicidade, começaremos nosso estudo do espaço de fase para sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade, para os quais a Hamiltoniana  $H = H(p, q)$  é independente do tempo. O espaço de fase, neste caso, é bidimensional e tem como coordenadas a posição  $q$  e o momentum  $p$  da partícula.

Este é o caso, por exemplo, de uma partícula de massa  $m$  movendo-se em uma dimensão espacial sob uma força conservativa, cuja Hamiltoniana é

$$H(p, q) = \frac{1}{2m} p^2 + U(q), \quad (2.152)$$

onde  $U(q)$  é a energia potencial associada. Em cada instante de tempo, o estado do sistema é representado por um ponto  $(p, q)$  no plano de fase. A evolução temporal dos pontos no plano de fase é governada pelas equações de Hamilton

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (2.153)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (2.154)$$

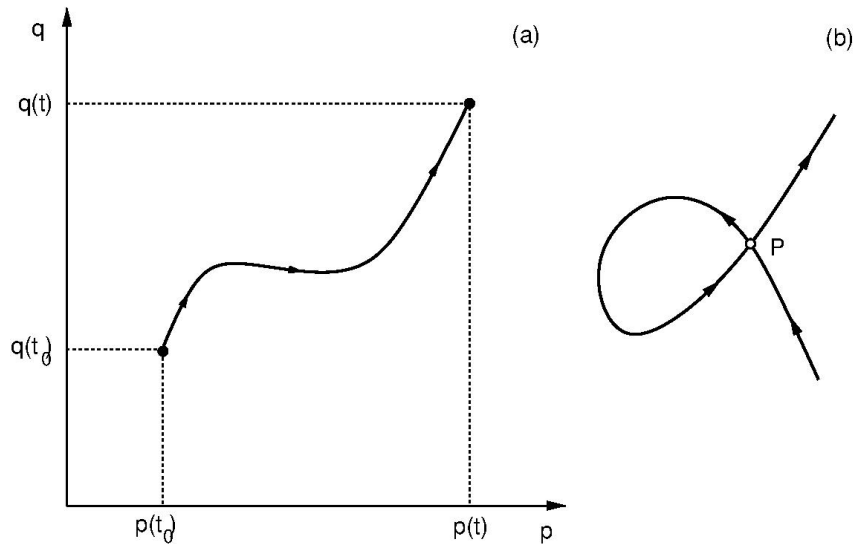


Figura 2.12: (a) Trajetória no plano de fase  $(p, q)$ . (b) Um hipotético cruzamento de duas trajetórias no plano de fase.

Dada uma condição inicial  $(p(t=0), q(t=0))$ , e resolvendo estas equações, a sequência de pontos  $(p(t), q(t))$  define uma trajetória no plano de fase. É sabido que, enquanto sistemas de equações diferenciais lineares têm soluções analíticas, com métodos conhecidos de solução, a minoria das equações não-lineares possui essa característica. Por este motivo, a integração numérica (computacional) das equações de Hamilton é uma ferramenta extremamente útil <sup>1</sup>.

O teorema de existência e unicidade para equações diferenciais, nos assegura que, caso os segundos membros de (2.153)-(2.154) bem como suas derivadas sejam funções diferenciáveis de seus argumentos, então dada uma condição inicial  $(p(t=0), q(t=0))$  existirá uma e somente uma trajetória passando por este ponto [cf. [48], Seção 6.2 para uma discussão mais aprofundada deste tópico. O teorema propriamente dito está demonstrado em [55], Chap. IV].

Considerando as condições iniciais  $(p(t=0), q(t=0)) = (p_0, q_0)$ , nas condições onde a Hamiltoniana é igual à energia total  $E$ , de (2.152) teremos

$$H(p, q) = \frac{1}{2m}p^2 + U(q) = \frac{1}{2m}p_0^2 + U(q_0) = E, \quad (2.155)$$

de sorte que, para um dado valor da energia, haverá uma única trajetória de fase [Fig. 2.12(a)]. As trajetórias podem ser abertas ou fechadas, dependendo da natureza do movimento.

Uma importante consequência deste resultado é que duas trajetórias jamais poderão se cruzar no plano de fase. Caso elas o fizessem, o suposto ponto de interseção entre elas poderia ser considerado uma condição inicial no plano de fase [Fig. 2.12(b)]. Como deste ponto emanariam duas trajetórias, haveria uma violação do teorema de existência e unicidade [48]. A inexistência de cruzamentos impõe limitações severas aos tipos de trajetória possíveis no plano de fase <sup>2</sup>.

Numa generalização da discussão feita para os sistemas Hamiltonianos abordados neste Capítulo, os pontos de equilíbrio, denotados por  $(q^*, p^*)$ , são pontos singulares do campo vetorial definido pelas equações de Hamilton (2.153)-(2.154), portanto definidos pelas seguintes relações

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{(q^*, p^*)} = 0, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{(q^*, p^*)} = 0, \quad (2.156)$$

<sup>1</sup>Este assunto será tratado no próximo Capítulo.

<sup>2</sup>Este resultado é formalizado pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, que é apresentado em detalhes nas referências [?], por exemplo.



No caso de uma partícula de massa  $m$  movendo-se em uma dimensão sob a ação de uma força conservativa, cuja Hamiltoniana é dada por (2.152), as equações de movimento (2.23)-(2.24) ficam

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{dU}{dq}, \quad (2.157)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad (2.158)$$

tais que os pontos de equilíbrio são dados por  $p^* = 0$  e  $U'(q^*) = 0$ , que correspondem a uma partícula em repouso num ponto de extremo da energia potencial, e que pode ser um máximo, mínimo ou um ponto de inflexão.

Se uma condição inicial for colocada exatamente sobre um ponto de equilíbrio, a trajetória resultante limita-se a ele. No entanto, é importante investigar a estabilidade dos pontos de equilíbrio em relação a pequenas perturbações. Se um ponto de equilíbrio for estável, pequenas perturbações fazem as trajetórias se aproximarem dele com o passar do tempo, ao passo que se for instável, elas irão dele se afastar.

## 2.9 Estabilidade dos pontos de equilíbrio

Na sequência, continuaremos a tratar apenas do caso de um grau de liberdade, onde a Hamiltoniana  $H(p, q)$  é independente do tempo e, portanto, igual à energia, que é uma constante do movimento. Vários aspectos, porém, podem ser estendidos para o caso mais geral de  $n$  graus de liberdade.

Partimos das equações de Hamilton (2.157)-(1)

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \equiv f(p, q), \quad (2.159)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \equiv g(p, q), \quad (2.160)$$

cujos pontos de equilíbrio  $(p^*, q^*)$  são determinados pelas condições (2.156)

$$f(p^*, q^*) = 0, \quad g(p^*, q^*) = 0. \quad (2.161)$$

Há duas definições distintas de estabilidade, das quais apenas uma será aplicável a sistemas Hamiltonianos:

- Um ponto de equilíbrio  $(p^*, q^*)$  é *assintoticamente estável* se, dada uma condição inicial  $(p_0, q_0)$ , a trajetória resultante no plano de fase  $(p(t), q(t))$  aproxima-se de  $(p^*, q^*)$  quando o tempo  $t$  tende ao infinito.
- um ponto de equilíbrio  $(p^*, q^*)$  é *estável* (no sentido de Lyapunov) se, dada uma condição inicial  $(p_0, q_0)$ , a trajetória  $(p(t), q(t))$  permanece próxima a  $(p^*, q^*)$  no plano de fase, quando  $t \rightarrow \infty$ .

A primeira definição está incluída na segunda, portanto é mais restritiva. No entanto, ela não se aplica a sistemas Hamiltonianos, e sim a sistemas dinâmicos dissipativos, que não são objeto de nosso estudo. Apenas a segunda definição será empregada, portanto. Em qualquer dos casos, porém, se houver trajetórias no plano de fase que se afastem indefinidamente do ponto de equilíbrio  $(p^*, q^*)$ , este será instável.

Com o objetivo de investigar a estabilidade linear dos seus pontos de equilíbrio, consideramos pequenos deslocamentos em relação a eles:

$$p(t) = p^* + \delta p(t), \quad (|\delta p(t)| \ll |p^*|), \quad (2.162)$$

$$q(t) = q^* + \delta q(t), \quad (|\delta q(t)| \ll |q^*|), \quad (2.163)$$

tal que possamos expandir os segundos membros das equações de Hamilton em séries de Taylor em torno do ponto de equilíbrio. Até termos de primeira ordem temos

$$\frac{d\delta p}{dt} = \delta p \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right)_{(q^*, p^*)} + \delta q \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)_{(q^*, p^*)} + \dots \quad (2.164)$$

$$\frac{d\delta q}{dt} = \delta p \left( \frac{\partial g}{\partial p} \right)_{(q^*, p^*)} + \delta q \left( \frac{\partial g}{\partial q} \right)_{(q^*, p^*)} + \dots, \quad (2.165)$$

onde usamos (2.161).

Podemos expressar este sistema de duas equações diferenciais acopladas na seguinte forma vetorial

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.166)$$

onde definimos o vetor dos deslocamentos e a matriz Jacobiana, respectivamente, por

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \delta p \\ \delta q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad (2.167)$$

onde os elementos da matriz Jacobiana, calculadas no ponto de equilíbrio, são dados por

$$a = \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right)_{(q^*, p^*)} = - \left( \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \right)_{(q^*, p^*)}, \quad (2.168)$$

$$b = \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)_{(q^*, p^*)} = - \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \right)_{(q^*, p^*)}, \quad (2.169)$$

$$c = \left( \frac{\partial g}{\partial p} \right)_{(q^*, p^*)} = \left( \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \right)_{(q^*, p^*)}, \quad (2.170)$$

$$d = \left( \frac{\partial g}{\partial q} \right)_{(q^*, p^*)} = \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \right)_{(q^*, p^*)} = -a. \quad (2.171)$$

A equação (2.166) é linear e com coeficientes constantes, donde podemos procurar soluções para ela na forma

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u} e^{\xi t}, \quad (2.172)$$

onde  $\mathbf{u}$  é um vetor e  $\xi$  um escalar a serem determinados. Derivando e substituindo em (2.166) obtemos,

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{u} = \xi \mathbf{u}, \quad (2.173)$$

portanto  $\mathbf{u}$  é um autovetor da matriz  $\mathbf{J}$ , correspondendo ao autovalor  $\xi$ . A equação de autovetores acima pode ser reescrita como

$$(\mathbf{J} - \xi \mathbf{I}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (2.174)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ . Este é um sistema linear homogêneo, que tem soluções não-triviais se e somente se o determinante dos seus coeficientes for nulo, o que nos leva à chamada equação secular

$$\det(\mathbf{J} - \xi \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a - \xi & b \\ c & -a - \xi \end{vmatrix} = \xi^2 + \Delta = 0 \quad (2.175)$$

onde definimos o coeficiente

$$\Delta = \det \mathbf{J} = -a^2 - bc \quad (2.176)$$

As raízes da equação quadrática (2.175) são os autovalores da matriz  $\mathbf{J}$ , a saber,

$$\xi_1 = \sqrt{-\Delta}, \quad \xi_2 = -\sqrt{-\Delta}. \quad (2.177)$$

Três casos se apresentam, de acordo com o sinal dos radicandos.

### 2.9.1 Autovalores complexos

Se  $\Delta > 0$  então  $\xi_{1,2} = \pm i\omega$ , onde  $\omega = \sqrt{-\Delta}$ , ou seja, os autovalores são imaginários puros, complexos conjugados entre si. Os autovetores, por conseguinte, também são vetores complexos, que escreveremos como

$$\mathbf{u}_1 = \boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{u}_2 = \boldsymbol{\alpha} - i\boldsymbol{\beta}, \quad (2.178)$$

onde  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\boldsymbol{\beta}$  são vetores reais e ortonormais, que satisfazem as seguintes relações

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1, \quad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0. \quad (2.179)$$

Estamos procurando soluções para (2.166) na forma (2.172), de modo que

$$\begin{aligned} e^{\xi t} \mathbf{u} &= e^{i\omega t} (\boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{\beta}) = (\cos \omega t + i \sin \omega t) (\boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{\beta}) \\ &= (\boldsymbol{\alpha} \cos \omega t - \boldsymbol{\beta} \sin \omega t) + i(\boldsymbol{\alpha} \sin \omega t + \boldsymbol{\beta} \cos \omega t). \end{aligned}$$

As partes real e imaginária da expressão acima são soluções linearmente independentes de (2.166). Logo, a solução geral será uma combinação linear delas:

$$\mathbf{v}(t) = c_1 (\boldsymbol{\alpha} \cos \omega t - \boldsymbol{\beta} \sin \omega t) + c_2 (\boldsymbol{\alpha} \sin \omega t + \boldsymbol{\beta} \cos \omega t), \quad (2.180)$$

onde  $c_{1,2}$  são constantes de integração, definidas a partir das condições iniciais  $\delta q(t=0)$  e  $\delta p(t=0)$ . Fazendo o produto escalar da equação (2.180) com ela mesma, e usando (2.179), resulta que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = c_1^2 + c_2^2$ . Em termos das componentes

$$(\delta p)^2 + (\delta q)^2 = R^2, \quad (2.181)$$

ou seja, as trajetórias no plano de fase em torno do ponto de equilíbrio  $(p^*, q^*)$  (que corresponde a  $\delta p = \delta q = 0$ ) são círculos concêntricos de raio  $R$  [Fig. 2.13(a)]. O ponto de equilíbrio é chamado *centro* ou *ponto elíptico*. Como as trajetórias não se afastam nem se aproximam do ponto de equilíbrio com o passar do tempo, mas permanecem indefinidamente em sua vizinhança, o ponto elíptico  $(q^*, p^*)$  é estável (no sentido de Lyapunov).

### 2.9.2 Autovalores reais

Se  $\Delta < 0$  então  $\xi_{1,2} = \pm \xi$ , onde  $\xi = |\Delta|^{1/2} > 0$ , ou seja, os autovalores são reais e distintos. Teremos, assim, duas soluções linearmente independentes de (2.166), tal que a solução geral será a combinação linear

$$\mathbf{v}(t) = c_1 \mathbf{u}_1 e^{\xi t} + c_2 \mathbf{u}_2 e^{-\xi t}, \quad (2.182)$$

sendo  $c_{1,2}$  constantes de integração, e  $\mathbf{u}_{1,2}$  os respectivos autovetores, que determinam duas direções no plano de fase:

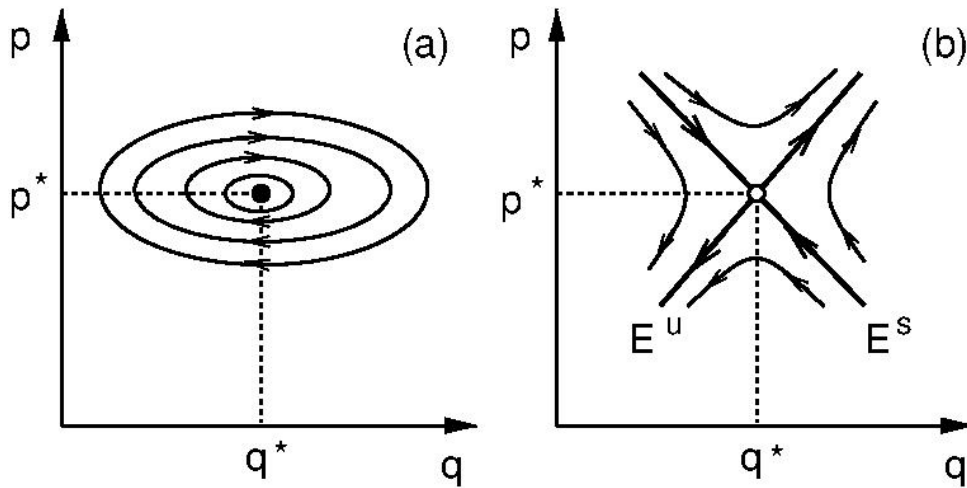


Figura 2.13: (a) Centro (ou ponto elíptico); (b) Ponto de sela (ou ponto hiperbólico).

1. escolhendo  $c_2 = 0$  os desvios afastam-se assintoticamente do ponto de equilíbrio ao longo de  $\mathbf{u}_1$  (direção instável  $E^i$ ) tal que

$$|\mathbf{v}(t)| \propto e^{\xi t} \rightarrow \infty, \quad (t \rightarrow \infty), \quad (2.183)$$

2. escolhendo  $c_1 = 0$  os desvios aproximam-se assintoticamente do ponto de equilíbrio ao longo de  $\mathbf{u}_2$  (direção estável  $E^e$ ) pois

$$|\mathbf{v}(t)| \propto e^{-\xi t} \rightarrow 0, \quad (t \rightarrow \infty), \quad (2.184)$$

de forma que, com a exceção da direção determinada por  $\mathbf{u}_2$ , todos os demais pontos afastam-se do ponto de equilíbrio na origem ( $\delta p = 0, \delta q = 0$ ). Portanto, o ponto de equilíbrio  $(q^*, p^*)$  é instável, também chamado *ponto de sela* ou *ponto hiperbólico*, devido à forma das trajetórias cujas assíntotas são as direções estável e instável [Fig. 2.13(b)].

Pode-se mostrar que as direções estável e instável são invariantes em relação à dinâmica gerada pelas equações de Hamilton: se uma dada condição inicial  $(q(0), p(0))$  é escolhida exatamente sobre elas, todos os demais pontos  $(q(t), p(t))$  pertencerão às direções  $E^i$  ou  $E^u$  [vide [?], seção 1.2]. Apesar disso, tais pontos não formam uma trajetória, já que as direções invariantes se cruzam transversalmente no ponto de sela, e trajetórias no plano de fase não podem se cruzar, como decorrência do teorema de existência e unicidade.

### 2.9.3 Pontos de equilíbrio para o pêndulo

Toda a discussão que fizemos nesta seção limita-se à aproximação linear das equações de Hamilton, nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio. Para obter mais informações sobre a estabilidade faz-se necessário olhar os termos não-lineares. Como um exemplo vamos considerar a Hamiltoniana do pêndulo (??), com parâmetros  $F = G = 1$ :

$$H(p, \theta) = \frac{1}{2} p^2 - \cos \theta, \quad (2.185)$$

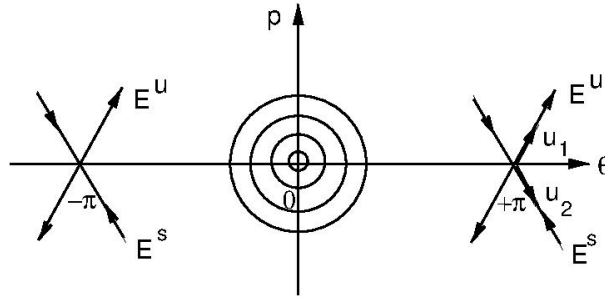


Figura 2.14: Pontos de equilíbrio para o pêndulo e trajetórias nas suas vizinhanças.

cujas derivadas parciais relevantes são

$$\frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial \theta} = 0, \quad (2.186)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = \sin \theta, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = \cos \theta, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \theta \partial p} = 0. \quad (2.187)$$

Os pontos de equilíbrio são determinados por (2.156):

$$\left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_{(p^*, \theta^*)} = p^* = 0, \quad \left( \frac{\partial H}{\partial \theta} \right)_{(p^*, \theta^*)} = \sin \theta^* = 0, \quad (2.188)$$

que tem duas soluções:

$$(p_1^*, \theta_1^*) = (0, 0), \quad (p_2^*, \theta_2^*) = (0, \pm \pi), \quad (2.189)$$

lembrando que, na verdade,  $\theta = -\pi$  e  $\pi$  representam a mesma posição angular.

Para analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio  $\mathbf{v}_1^* = (p_1^*, \theta_1^*) = (0, 0)$  na aproximação linear, determinamos os elementos de sua matriz Jacobiana (2.168)-(2.171)

$$a = 0, \quad b = -1, \quad c = 1, \quad (2.190)$$

de forma que o seu determinante (2.176) é  $\Delta = 1 > 0$ . Portanto os autovalores da matriz Jacobiana são imaginários puros  $\xi_{1,2} = \pm i$ , e  $(0, 0)$  é um ponto elíptico (ou centro), estável no sentido de Lyapunov. As trajetórias em torno da origem, e em sua vizinhança próxima, são círculos concêntricos, que correspondem a librações do pêndulo de pequena amplitude [Fig. 2.14]. De fato, nestas circunstâncias já sabemos que a Hamiltoniana do pêndulo reduz-se à de um oscilador harmônico que, neste caso, é

$$H(p, \theta) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\theta^2, \quad (2.191)$$

a menos de uma constante aditiva.

De forma análoga, procedemos à análise da estabilidade do ponto de equilíbrio  $\mathbf{v}_2^* = (p_2^*, \theta_2^*) = (0, \pm \pi)$ , para o qual os elementos da matriz Jacobiana são

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad (2.192)$$

tal que  $\Delta = -1 < 0$ . Portanto os autovalores são reais  $\xi_{1,2} = \pm 1$ , e  $(0, \pm \pi)$  é um ponto hiperbólico (ou ponto de sela), instável em relação a pequenas perturbações em sua vizinhança. Os autovetores correspondentes a  $\xi_1 = 1$  e  $\xi_2 = -1$  são, respectivamente,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.193)$$

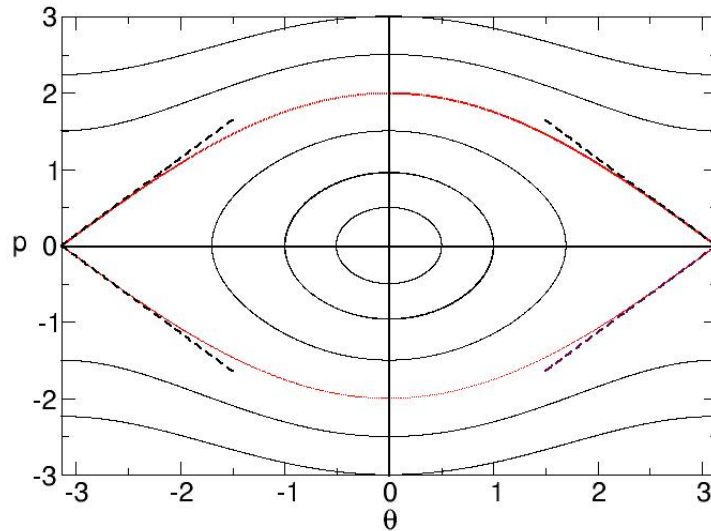


Figura 2.15: Trajetórias no plano de fase para a Hamiltoniana do pêndulo, com  $F = G = 1$ , obtidas por integração numérica das equações de Hamilton. São indicadas, por linhas tracejadas, as direções estável e instável que emanam dos pontos hiperbólicos.

O autovetor  $\mathbf{u}_1$  define, assim, a direção instável que emana do ponto de sela, denotada  $E^i(\mathbf{v}^*)$ , enquanto  $\mathbf{u}_2$  define a direção estável  $E^e(\mathbf{v}^*)$ , emanando do mesmo ponto de sela [Fig. 2.14]. Uma condição inicial que seja colocada exatamente ao longo da direção instável (respectivamente, estável) terá uma evolução inteiramente ao longo da mesma, e levará a um afastamento (respectivamente, aproximação) do ponto de sela  $\mathbf{v}_2^*$  com o passar do tempo, ou seja, se  $t \rightarrow \infty$ .

É instrutivo superpormos à Fig. 2.14 as trajetórias no plano de fase do pêndulo obtidas tanto analiticamente como por integração numérica [Fig. 2.15]. Isto nos permite ir além da aproximação linear, válida apenas nas vizinhanças do ponto de equilíbrio, levando em conta também trajetórias mais distantes do mesmo, o que requer a inclusão plena do termo não-linear das equações.

De fato, nas proximidades do ponto elíptico as trajetórias são sempre fechadas, com o formato de elipses, que aproximam-se de circunferências concêntricas no seu entorno. Portanto o ponto  $(0, 0)$  é tanto um centro linear (pela análise de estabilidade) como não-linear (o que é revelado pelas soluções analíticas ou numéricas das equações de Hamilton).

Da mesma forma, os pontos  $(0, \pm\pi)$  continuam instáveis (pontos de sela) no caso não-linear. Dos pontos hiperbólicos emanam os dois ramos da separatriz, que segrega trajetórias fechadas (librações) e abertas (rotações). Podemos ver, na Fig. 2.15, que os ramos da separatriz são tangentes às respectivas direções estável  $E^e$  e instável  $E^i$  no ponto de sela  $(0, \pm\pi)$ .

Esta última observação não é mera coincidência. Na Teoria dos Sistemas Dinâmicos pode-se mostrar, sob condições bastante gerais, a existência de curvas (variedades) invariantes estável e instável que emanam do ponto de sela. Além disso, estas curvas invariantes são tangentes às direções (sub-espacos) estável e instável, determinados pelos autovetores da matriz Jacobiana, cujos elementos são calculados na posição do ponto de sela. Para maiores detalhes matemáticos, em particular os teoremas de Hartman-Grobman e das variedades invariantes, ver [?], seção 1.3.

## 2.10 Problemas

1. Considere o problema de uma partícula de massa  $m$  deslocando-se sem atrito na superfície interior de um cone de abertura  $2\alpha$  e vértice na origem, sob a ação do campo gravitacional. Obtenha (a) a Hamiltoniana (via transformada de Legendre da Lagrangiana); (b) as equações canônicas correspondentes.
2. Uma partícula de massa  $m$  está restrita a mover-se sobre uma superfície cilíndrica cuja equação é  $x^2 + y^2 = R^2$ . A partícula está, ainda, sujeita a uma força central dada por  $-k\mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{r}$  é o vetor posição em relação à origem. Determine (a) a Lagrangiana; (b) a Hamiltoniana (via transformada de Legendre); (c) as equações canônicas correspondentes; (d) mostre que o movimento na direção  $z$  é harmônico, com frequência angular  $\sqrt{k/m}$ .
3. Um pêndulo esférico consiste de uma massa  $m$  presa a um ponto fixo na origem por uma haste de comprimento  $a$  e massa desprezível. A massa pode mover-se ao longo de uma esfera de raio  $a$ . Obtenha (a) a Lagrangiana; (b) a Hamiltoniana (através de uma transformada de Legendre); (c) as equações canônicas correspondentes.
4. Duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  estão ligadas por um fio de comprimento  $L$  e massa desprezível, que passa através de um pequeno orifício numa mesa horizontal sem atrito. Nessas condições,  $m_1$  move-se exclusivamente na superfície da mesa e  $m_2$  fica suspenso e só pode mover-se na direção vertical. Determine (a) a Lagrangiana; (b) a Hamiltoniana (por uma transformada de Legendre); (c) as equações canônicas correspondentes.
5. Dois pêndulos idênticos de massa  $m$  e comprimento  $a$  cada um, estão conectados por uma mola leve de constante elástica  $k$ . Considerando apenas pequenos deslocamentos da posição vertical, ache (a) a Lagrangiana; (b) a Hamiltoniana (via transformada de Legendre); (c) as equações canônicas correspondentes; (d) descreva os modos normais de oscilação do sistema.
6. A energia potencial associada à força entre dois átomos numa molécula diatômica é dada, no modelo de Lennard-Jones, pela expressão

$$U(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}},$$

onde  $x$  é a distância entre os átomos e  $a$  e  $b$  são constantes positivas. Se um dos átomos tem massa muito maior que o do segundo ( $M \gg m$ ) e encontra-se na origem, reduzimos o sistema ao movimento de uma partícula de massa reduzida  $\approx m$  sob a ação do potencial  $U(x)$ . (a) Faça uma análise qualitativa do movimento, identificando pontos de retorno, pontos de equilíbrio e sua estabilidade linear; (b) Obtenha o período das pequenas oscilações em torno do ponto de equilíbrio estável; (c) Resolva numericamente as equações de Hamilton para este sistema e compare com os resultados dos itens anteriores.

7. Uma partícula de massa  $m = 1$  move-se sob a influência da energia potencial

$$U(x) = -U_0 a^2 \frac{a^2 + x^2}{8a^4 + x^4},$$

onde  $U_0$  e  $a$  são constantes. Repita os itens (a), (b) e (c) do problema anterior.

8. No chamado oscilador de Duffing, uma partícula de massa  $m = 1$  encontra-se sob a ação da energia potencial

$$U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

Repita os itens (a), (b) e (c) do problema anterior.