

Capítulo 5

Teoria de perturbações

O objetivo geral da teoria de perturbações é, partindo de um problema com uma solução conhecida, resolver o sistema que consiste numa perturbação de pequena intensidade do problema original. Em geral, há um parâmetro de ordem que quantifica a intensidade da perturbação. Sendo um parâmetro pequeno, séries de potências que o envolvam podem ser convergentes, e neste caso a solução do problema é obtida de forma aproximada. Na Mecânica Clássica é possível elaborar uma teoria de perturbações baseando-se na formulação de Hamilton-Jacobi que vimos no Capítulo anterior. Neste capítulo vamos abordar duas destas técnicas: a teoria de perturbação dependentes do tempo (método de variação dos parâmetros) e a teoria independente do tempo (método de Poincaré-Von Zeipel).

5.1 Integrabilidade

Vimos, no Capítulo 3, que uma constante do movimento $\alpha(p_i, q_i)$ não depende explicitamente do tempo, e seus colchetes de Poisson com a Hamiltoniana (também independente do tempo) são iguais a zero: $\{\alpha, H\} = 0$. Seja, pois, um sistema com n graus de liberdade descrito pela Hamiltoniana $H(p_i, q_i)$. Dizemos que o sistema é integrável (no sentido de Liouville) se há n constantes de movimento independentes $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Quando dizemos constantes independentes lembramos que os colchetes de Poisson de duas constantes do movimento também são constantes do movimento. Isto significa que, para que duas constantes do movimento α_i e α_j sejam independentes, os colchetes de Poisson para elas devem ser iguais a zero:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0. \quad (5.1)$$

Nesse caso dizemos ainda que as constantes do movimento estão em involução. Nenhuma delas pode ser expressa em função das demais constantes.

Se a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo ela própria é uma das constantes do movimento com $i = 1$: $\alpha_1 = H$. As demais, se existirem, devem ser encontradas a partir de considerações físicas (como leis de conservação) ou outros métodos. Em particular, um sistema com $n = 1$ grau de liberdade cuja Hamiltoniana não dependa do tempo, é sempre integrável. São exemplos o oscilador harmônico e o pêndulo.

Quando a Hamiltoniana depender explicitamente do tempo, a análise que fizemos no Cap. 3 para o espaço de fase estendido indica que a dinâmica de um sistema com n graus de liberdade e dependente do tempo equivale a um sistema com $n + 1$ graus de liberdade e independente do tempo. Portanto, mesmo no caso $n = 1$, se a Hamiltoniana depender do tempo o sistema poderá não ser mais integrável, de maneira geral.

Um exemplo de sistema integrável com $n = 3$ graus de liberdade é o problema de Kepler, no qual uma partícula é sujeita a um potencial central, e é descrita pelas coordenadas generalizadas $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, e $q_3 = \phi$. Vimos no Capítulo 4 que há três constantes de movimento independentes:

$$\alpha_1 = H = E, \quad \alpha_2 = \alpha_\theta = \ell, \quad \alpha_3 = \alpha_\phi = \ell_z, \quad (5.2)$$

associadas à conservação da energia e do momentum angular ℓ , bem como de sua componente ao longo do eixo z .

Outro exemplo de sistema integrável é a partícula carregada sob a ação de um campo magnético uniforme na direção z , cujas coordenadas generalizadas são $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$. Ele é integrável devido à existência das três constantes do movimento

$$\alpha_1 = H = E, \quad \alpha_2 = p_x = \mathcal{A}, \quad \alpha_3 = p_z = C. \quad (5.3)$$

A dinâmica da rotação de corpos rígidos, um assunto do qual não tratamos aqui, também fornece alguns exemplos notáveis de integrabilidade. É possível mostrar que a rotação de um corpo rígido, como um pião, é descrita por três coordenadas, que podem ser os chamados ângulos de Euler. Assim, a rotação de um pião, sem atritos, configura um sistema Hamiltoniano com $n = 3$ graus de liberdade. O pião assimétrico livre (na ausência de torques externos) e o pião simétrico pesado são sistemas integráveis. Já o pião assimétrico pesado não o é, a não ser em alguns casos particulares, como o pião de Kowalewskaya.

O problema de Kepler ilustra uma característica de muitos sistemas integráveis, que é o fato da equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo (4.57)

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 \right\} + U(r) = E. \quad (5.4)$$

ser separável em coordenadas esféricas, razão pela qual pudemos fazer o *ansatz* (4.58). No entanto, a mesma equação não é separável em coordenadas cartesianas, por exemplo. Sistemas separáveis em algum sistema de coordenadas são também integráveis. Um outro exemplo é a Hamiltoniana [93]

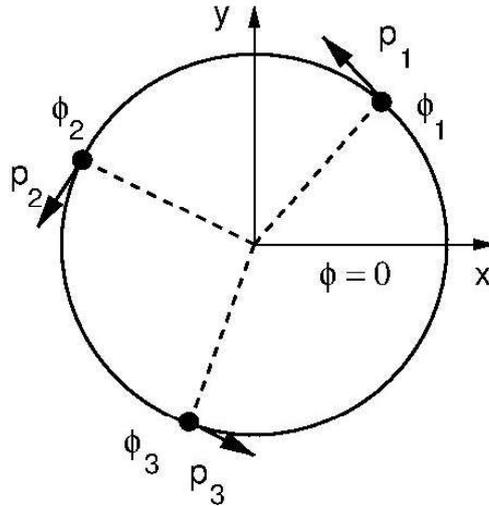
$$H(p_i, q_i) = \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + \sqrt{p_1 - p_2} \cos q_2. \quad (5.5)$$

Como H é independente do tempo, então a energia E é uma constante do movimento. Além disso, a Hamiltoniana não depende de q_1 , então o seu momentum canonicamente conjugado p_1 também é uma constante de movimento. Portanto, embora este seja um sistema integrável, ele é não-separável nas suas variáveis originais.

Em muitos casos as constantes de movimento estão diretamente relacionadas a princípios de conservação que podem ser identificados sem dificuldade. Já em outros, devido a simetrias ocultas, as constantes de movimento são mais difíceis de serem encontradas. Um exemplo clássico é a rede de Toda, que é um sistema de três partículas de massa unitária que se movem sobre um círculo, sendo descritas pelas coordenadas $q_1 = \phi_1$, $q_2 = \phi_2$, $q_3 = \phi_3$ e os respectivos momenta canonicamente conjugados (p_1, p_2, p_3) [Fig. 5.1]. As interações entre as partículas são descritas por forças repulsivas cuja intensidade decai exponencialmente com a distância (angular) entre as partículas. A Hamiltoniana correspondente é [80]

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + e^{-(\phi_1 - \phi_3)} + e^{-(\phi_2 - \phi_1)} + e^{-(\phi_3 - \phi_2)} - 3. \quad (5.6)$$

Como a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, a energia E é uma constante do movimento. Uma segunda constante do movimento provém da invariância da Hamiltoniana

Figura 5.1: Rede de Toda com $N = 3$ partículas.

(5.6) sob uma rotação rígida das três coordenadas

$$\phi_1 \rightarrow \phi_1 + \phi_0, \quad \phi_2 \rightarrow \phi_2 + \phi_0, \quad \phi_3 \rightarrow \phi_3 + \phi_0,$$

onde ϕ_0 é um ângulo constante, o que pode ser verificado por cálculo direto. A invariância por rotação leva à conservação do momentum total do sistema

$$P = p_1 + p_2 + p_3 = \text{const.}, \quad (5.7)$$

o que pode ser mostrado, também, a partir de uma transformação canônica [vide Problema].

Resultados numéricos de Ford *et al.* sugeriram que o sistema de Toda era integrável [81]. De fato, Hénon conseguiu encontrar a terceira constante de movimento que estava faltando, comprovando assim a integrabilidade do sistema [82]. Na realidade, a rede de Toda é um sistema integrável mesmo para o caso de N partículas [83]

Na medida em que o número de graus de liberdade aumenta, a integrabilidade é uma propriedade mais difícil de ser observada, pois o número de possíveis constantes de movimento derivadas de invariâncias físicas é limitado (como energia, momentum linear, momentum angular). Elas são suficientes para garantir a integrabilidade do problema de 2 corpos interagindo por uma força central. No entanto, o problema de 3 corpos que interagem por meio de forças gravitacionais tem nove graus de liberdade (no caso espacial) e apenas cinco constantes de movimento, de modo que ele é não-integrável de forma geral [69]. Vamos tratar deste problema com mais detalhes no Capítulo 8.

5.2 Teoria de perturbações dependentes do tempo

Vamos supor que $H_0(p_i, q_i, t)$ representa a Hamiltoniana de um sistema mecânico para o qual conhecemos a solução (sistema não-perturbado). Como H_0 depende explicitamente do tempo é possível achar uma função principal de Hamilton $S(q_i, \alpha_i, t)$ que gera uma transformação canônica, para a qual a Kamiltoniana é identicamente nula: $K_0 \equiv 0$.

A função S , por sua vez, é uma solução de equação de Hamilton-Jacobi dependente do tempo (4.11)

$$H_0\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (5.8)$$

As novas variáveis canônicas, $P_i = \alpha_i$ e $Q_i = \beta_i$, com $i = 1, 2, \dots, n$, são constantes do movimento para o problema não-perturbado.

Consideramos, agora, uma perturbação Hamiltoniana que depende explicitamente do tempo, na forma geral $\varepsilon H_1(p_i, q_i, t)$. O parâmetro ε é útil para distinguir termos de ordens diferentes de perturbação. No final dos cálculos podemos sempre fazer $\varepsilon = 1$, sem perda de generalidade. Assim o problema perturbado tem Hamiltoniana

$$H(p_i, q_i, t) = H_0(p_i, q_i, t) + \varepsilon H_1(p_i, q_i, t). \quad (5.9)$$

Na mesma linha de raciocínio anterior, procuramos uma transformação canônica $(p_i, q_i) \rightarrow (\alpha_i, \beta_i)$ para o problema perturbado tal que a função principal de Hamilton S continue sendo a função geratriz. A diferença é que, agora, a Hamiltoniana não será mais identicamente nula, e as novas variáveis (α_i, β_i) não mais serão constantes do movimento.

A equação da transformação canônica correspondente fornece a Hamiltoniana

$$K(\alpha_i, \beta_i, t) = H(p_i, q_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = H_0 + \varepsilon H_1 + \frac{\partial S}{\partial t} = \varepsilon H_1(p_i, q_i, t), \quad (5.10)$$

em vista de (5.8). As equações de Hamilton exatas para as novas variáveis são

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial K}{\partial \beta_i} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \beta_i}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (5.11)$$

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i}. \quad (5.12)$$

Supondo, que $\varepsilon \ll 1$, estas equações indicam que, ainda que α_i e β_i não sejam mais constantes, as respectivas taxas de variação temporal são pequenas, de modo que α_i e β_i variam lentamente com o tempo. Em primeira ordem de perturbação nós calculamos os segundos membros de (5.11)-(5.12) usando os valores não-perturbados de α_i e β_i :

$$\dot{\alpha}_{i1} = -\varepsilon \left(\frac{\partial H_1}{\partial \beta_i} \right)_{\alpha_i=\alpha_{i0}, \beta_i=\beta_{i0}} \equiv -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \beta_{i0}}, \quad (5.13)$$

$$\dot{\beta}_{i1} = \varepsilon \left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i} \right)_{\alpha_i=\alpha_{i0}, \beta_i=\beta_{i0}} \equiv \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_{i0}}, \quad (5.14)$$

onde o índice 0 denota quantidades não-perturbadas, enquanto 1 refere-se às quantidades em primeira ordem de perturbação.

5.3 Correção relativística ao oscilador harmônico

Nosso tratamento anterior do oscilador harmônico partiu da suposição que a sua energia cinética T era pequena o suficiente, em comparação com a energia de repouso mc^2 (onde c é a velocidade da luz no vácuo), para que pudéssemos usar as fórmulas não-relativísticas. Caso essa hipótese já não seja mais verdadeira, será necessário utilizar a relação relativística para a energia

$$E = \sqrt{c^4 m^2 + c^2 p^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2 m^2}}. \quad (5.15)$$

Caso o momentum da partícula seja relativamente pequeno ($p \ll mc$) podemos expandir a raiz quadrada de (5.15) em série de potências

$$E \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{c^2 m^2} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{c^4 m^4} + \frac{1}{16} \frac{p^6}{c^6 m^6} + \dots \right). \quad (5.16)$$

Como $E = T + mc^2$, a correção relativística de ordem mais baixa fornece, para a energia cinética

$$T = E - mc^2 \approx \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2}. \quad (5.17)$$

Assim, a Hamiltoniana do oscilador harmônico relativístico pode ser escrita na forma

$$H(p, q) = H_0(p, q) + \varepsilon H_1(p), \quad (5.18)$$

onde (usando $G = 1/m$ e $F = m\omega^2$):

$$H_0(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{1}{2}Gp^2 + \frac{1}{2}Fq^2, \quad (5.19)$$

é a Hamiltoniana do oscilador não-relativístico, e

$$\varepsilon H_1(p) = -\frac{1}{8m^3c^2}p^4 = -\frac{1}{8}\frac{G^3}{c^2}p^4, \quad (5.20)$$

é a perturbação causada pela correção relativística da energia.

Sendo um problema de solução conhecida, podemos usar a solução do oscilador harmônico não-relativístico em termos das variáveis de ação e ângulo dadas por (4.96)-(??)

$$q_0 = \sqrt{2J_0} \sqrt{\frac{G}{F}} \sin \theta_0, \quad (5.21)$$

$$p_0 = \sqrt{2J_0} \sqrt{\frac{F}{G}} \cos \theta_0, \quad (5.22)$$

e a Hamiltoniana não-perturbada é expressa como função apenas da variável de ação, como em (4.91)

$$H_0(J) = \sqrt{FG}J_0 = \omega_0 J_0, \quad (5.23)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{FG}$ é a frequência das oscilações. A equação de Hamilton para a variável de ângulo,

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\partial H_0}{\partial J_0} = \omega_0, \quad (5.24)$$

fornece a solução em ordem zero,

$$\theta_0(t) = \omega_0 t + \beta_0, \quad (5.25)$$

que deve ser substituída nos segundos membros de (5.21)-(5.22).

Usando (5.22) e (5.25) podemos escrever a perturbação (5.20) em termos das variáveis de ação e ângulo do sistema não-perturbado

$$\varepsilon H_1(p) = -\frac{1}{4}\frac{FG^2}{c^2}J_0^2 \cos^4(\omega_0 t + \beta_0). \quad (5.26)$$

Em primeira ordem de perturbação, fazendo $\varepsilon = 1$, e usando (5.13)-(5.14),

$$J_1 = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_0} = -\frac{1}{2c^2}FG^2J_0^2 \sin(\omega_0 t + \beta_0) \cos(\omega_0 t + \beta_0), \quad (5.27)$$

$$\dot{\beta}_1 = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_0} = -\frac{1}{2c^2}FG^2J_0 \cos^4(\omega_0 t + \beta_0). \quad (5.28)$$

Podemos eliminar o tempo nos segundos membros das equações acima fazendo uma média temporal sobre um ciclo completo de oscilação do sistema não-perturbado

$$\langle f(t) \rangle = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} f(t) dt. \quad (5.29)$$

As equações médias são

$$\overline{J_1} = -\frac{1}{2c^2} FG^2 J_0^2 \underbrace{\langle \sin(\omega_0 t + \beta_0) \cos(\omega_0 t + \beta_0) \rangle}_{=0} = 0, \quad (5.30)$$

$$\overline{\beta_1} = -\frac{1}{2c^2} FG^2 J_0 \underbrace{\langle \cos^4(\omega_0 t + \beta_0) \rangle}_{=3/8} = -\frac{3}{16c^2} FG^2 J_0. \quad (5.31)$$

Portanto $\overline{J_1}$ é constante e, como $E_0 = \omega_0 J_0$ é a energia do oscilador não-perturbado, a correção em primeira ordem na frequência é

$$\overline{\beta_1} = -\frac{3G}{16c^2} \omega_0 E_0. \quad (5.32)$$

Como este termo é negativo, a frequência do oscilador perturbado é ligeiramente menor do que ω_0 , sendo a diferença tanto maior quanto maior for a energia.

5.4 Problema de Kepler com perturbação central

No Capítulo 4, obtivemos variáveis de ação convenientes para o problema de Kepler [cf. Eqs. (4.169)-(4.171)]:

$$J_1 = \alpha_\phi = \ell_z, \quad (5.33)$$

$$J_2 = \alpha_\theta = \ell, \quad (5.34)$$

$$J_3 = J_r + J_\theta + J_\phi, \quad (5.35)$$

onde ℓ é o momentum angular e ℓ_z sua projeção na direção perpendicular à órbita do planeta. Em termos delas a Hamiltoniana do problema não-perturbado será dada por (4.172)

$$H_0 = -\frac{mk^2}{2J_3^2}. \quad (5.36)$$

Vamos considerar uma perturbação hamiltoniana associada a um potencial central da forma geral

$$\varepsilon H_1 = -\frac{h}{r^n}, \quad (5.37)$$

onde $h > 0$ é uma constante, e n é um inteiro positivo.

Para um potencial central deste tipo, vimos no Capítulo 2 que a órbita da partícula está limitada a um anel circular com raios interno e externo dados pelos pontos de retorno r_1 e r_2 , respectivamente. O caso $n = 1$, que corresponde ao problema de Kepler, fornece órbitas elípticas, e $n = -2$ também leva a órbitas fechadas. Excetuando-se estes dois casos, a órbita será aberta, em geral.

Na presença da perturbação (5.37) o momentum angular ℓ bem como sua projeção ℓ_z não mais serão constantes do movimento. Portanto a órbita do planeta pode ser considerada, em

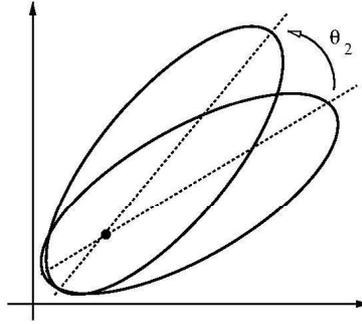


Figura 5.2: Precessão do periélio de uma órbita elíptica.

primeira aproximação, como uma elipse cujo semi-eixo maior precessiona lentamente com velocidade $\dot{\theta}_2$, onde θ_2 é a variável de ângulo conjugada a $J_2 = \ell$ [Fig. 5.2]. Essa precessão do periélio pode ser devida a diversos fatores, como por exemplo a perturbação gravitacional de outros planetas, ou (como se verá na sequência) devido à uma deformação do próprio espaço, prevista pela Teoria da Relatividade Geral.

Considerando $J_{20} = \ell = \text{const.}$ para o problema não-perturbado, temos para o ângulo correspondente, em primeira ordem de perturbação, de (5.14),

$$\dot{\theta}_{21} = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial J_{20}} = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \ell}. \quad (5.38)$$

Fazendo uma média temporal ao longo da órbita elíptica do planeta (de período orbital τ), a equação promediada é (fazendo $\varepsilon = 1$)

$$\overline{\dot{\theta}_{21}} = \left\langle \frac{\partial H_1}{\partial \ell} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\partial H_1}{\partial \ell} dt. \quad (5.39)$$

Vimos, no Capítulo 1, que o período orbital é dado por (1.161)

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\pi k}{E_0^{3/2}} = \frac{2}{k^2} J_{30}^2, \quad (5.40)$$

onde usamos (5.36). Como τ só depende de J_{30} , a derivada $\partial/\partial \ell = \partial/\partial J_{20}$ não atua sobre τ , e podemos fazer em (5.39)

$$\overline{\dot{\theta}_{21}} = \frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial \ell}. \quad (5.41)$$

Para uma perturbação da forma (5.37) a média temporal é

$$\langle H_1 \rangle = -\frac{h}{\tau} \int_0^\tau \frac{dt}{r^n}. \quad (5.42)$$

Uma vez que o momentum angular $\ell = mr^2\dot{\theta}$ é conservado para o sistema não-perturbado, isolamos o intervalo de tempo,

$$dt = \frac{mr^2}{\ell} d\theta, \quad (5.43)$$

o que nos permite expressar a integral em (5.42) unicamente em termos do ângulo θ :

$$\langle H_1 \rangle = -\frac{mh}{\ell\tau} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r^{n-2}}. \quad (5.44)$$

Usando a equação da órbita para o problema de Kepler [cf. Eq. (1.151)]

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{\ell^2} [1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)], \quad (5.45)$$

onde ε é a excentricidade, teremos finalmente que

$$\langle H_1 \rangle = -\frac{mh}{\ell\tau} \left(\frac{mk}{\ell^2} \right)^{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta [1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)]^{n-2}. \quad (5.46)$$

5.4.1 Correção da relatividade geral ao problema de Kepler

Uma das previsões da Teoria da Relatividade Geral é a de que o espaço-tempo nas vizinhanças de uma estrela sofre uma deformação devido à sua massa M . Essa deformação afeta, ainda que de maneira débil, a órbita dos planetas mais próximos a ele, sobretudo Mercúrio (com massa $m \ll M$).

A correção da relatividade geral ao problema de Kepler, dada por (C.10), implica em uma perturbação da forma (5.37) com $n = 3$ [a dedução destas relações a partir da métrica de Schwarzschild pode ser encontrada no Apêndice C]:

$$H_1 = -\frac{h}{r^3}, \quad (5.47)$$

onde, usando (C.12), a constante no numerador é

$$h = \frac{GM\ell^2}{mc^2} = \frac{k\ell^2}{m^2c^2}. \quad (5.48)$$

Substituindo (5.48) em (5.46) teremos o valor médio da perturbação

$$\langle H_1 \rangle = -\frac{m^2hk}{\ell^3\tau} \int_0^{2\pi} d\theta [1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)] = -\frac{2\pi m^2hk}{\ell^3\tau}. \quad (5.49)$$

Assim, a frequência de precessão do plano da órbita, em primeira ordem, é dada por (5.41) como

$$\overline{\dot{\theta}_{21}} = \frac{\partial}{\partial \ell} \left(-\frac{2\pi m^2hk}{\ell^3\tau} \right) = \frac{6\pi m^2hk}{\ell^4\tau}. \quad (5.50)$$

Como $k = GMm$ para o problema de Kepler, e substituindo (5.48) em (5.50) obtemos

$$\overline{\dot{\theta}_{21}} = \frac{6\pi}{\ell^2\tau} \left(\frac{GMm}{c} \right)^2. \quad (5.51)$$

Usamos, agora, (1.153) e (1.156) para exprimir a frequência de precessão em termos de parâmetros da órbita planetária

$$\overline{\dot{\theta}_{21}} = \frac{6\pi}{\tau} \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)} \left(\frac{GM}{c^2} \right). \quad (5.52)$$

Substituindo M pela massa do Sol, temos

$$\frac{GM}{c^2} = 1,4766 \text{ km.}$$

que vem a ser a metade do raio de Schwarzschild correspondente. Para a órbita de Mercúrio temos o semi-eixo maior $a = 5,79 \times 10^7$ km, excentricidade $\varepsilon = 0,2056$, e período orbital

igual a 0,2409 vezes o período da Terra. Substituindo todos estes valores numéricos em (5.52) obtemos, após diversas conversões de unidades, que $\overline{\theta}_{21}$ é igual a 42,95 segundos de arco por século.

A perturbação gravitacional causada pelos outros planetas, como Vênus e Terra, é responsável por uma frequência de precessão igual a 531,54 segundos de arco por século. Desconhecendo este efeito, os dados astronômicos referentes à órbita de Mercúrio revelam uma diferença residual de 43,1 segundos de arco por século, que concorda (dentro dos limites de erro) com a previsão relativística. De fato, a precessão da órbita de Mercúrio é considerada um dos testes experimentais clássicos da Teoria da Relatividade Geral [62].

5.5 Teoria de perturbações independentes do tempo

Nesta seção abordaremos a teoria de perturbações independentes do tempo, também conhecida como método de Poincaré-Von Zeipel. Ela tem sido aplicada na determinação de perturbações gravitacionais em órbitas de planetas e satélites. Na velha teoria quântica, ela também foi útil na quantização de determinados sistemas atômicos, pelo uso da regra de Bohr-Sommerfeld [26].

5.5.1 Caso de um grau de liberdade

Vamos considerar inicialmente um sistema com um grau de liberdade dado pela Hamiltoniana H_0 . Na teoria de Hamilton-Jacobi isto implica ser H_0 uma função unicamente da variável de ação J : $H_0 = H_0(J)$, de modo que as equações de Hamilton têm soluções conhecidas, a saber,

$$J(t) = J(0) = \text{const.} \quad (5.53)$$

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega(J)t, \quad (5.54)$$

onde $\omega = \partial H_0 / \partial J$ é a frequência. A Hamiltoniana do problema perturbado é

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta), \quad (5.55)$$

onde o parâmetro de ordem ε tem a mesma função que atribuímos na seção anterior.

Procuramos a solução para esta Hamiltoniana perturbada, ou seja, queremos encontrar uma transformação canônica $(J, \theta) \rightarrow (\bar{J}, \bar{\theta})$, de modo que a nova Hamiltoniana seja uma função apenas da nova ação: $\bar{H} = \bar{H}(\bar{J})$. A função geratriz de segunda espécie que efetua esta transformação será denotada por $S = S(\bar{J}, \theta)$, tal que

$$J = \frac{\partial S(\bar{J}, \theta)}{\partial \theta}, \quad (5.56)$$

$$\bar{\theta} = \frac{\partial S(\bar{J}, \theta)}{\partial \bar{J}}. \quad (5.57)$$

Não conhecemos esta função geratriz, mas podemos supor que ela seja escrita como uma série de potências no parâmetro ε :

$$S(\bar{J}, \theta) = \bar{J}\theta + \varepsilon S_1(\bar{J}, \theta) + \varepsilon^2 S_2(\bar{J}, \theta) + \dots, \quad (5.58)$$

onde o termo de ordem zero $S_0(\bar{J}, \theta) = \bar{J}\theta$ gera a transformação identidade ($J = \bar{J}$, $\bar{\theta} = \theta$) [cf. (3.97)]; o termo εS_1 representa uma correção de primeira ordem, e assim por diante. Analogamente, a nova Hamiltoniana também pode ser representada por uma série perturbativa em potências de ε :

$$\bar{H}(\bar{J}, \bar{\theta}) = \bar{H}_0 + \varepsilon \bar{H}_1 + \varepsilon^2 \bar{H}_2 + \dots \quad (5.59)$$

As equações da transformação canônica procurada são

$$J = \bar{J} + \varepsilon \frac{\partial S_1(\bar{J}, \theta)}{\partial \theta} + \dots = \bar{J} + \varepsilon \frac{\partial S_1(\bar{J}, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \theta} + \dots, \quad (5.60)$$

$$\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \frac{\partial S_1(\bar{J}, \theta)}{\partial \bar{J}} + \dots \quad (5.61)$$

onde apresentamos os resultados apenas até a primeira ordem em ε . Substituindo (5.61) em (5.60),

$$J = \bar{J} + \varepsilon \frac{\partial S_1(\bar{J}, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} \left\{ 1 + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \bar{J}} + \dots \right\} + \dots \quad (5.62)$$

$$\theta = \bar{\theta} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \bar{J}} S_1 \left(\bar{J}, \bar{\theta} - \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \bar{J}} \right) + \dots \quad (5.63)$$

Expandindo (5.63) em série de Taylor e retendo termos até ordem ε obtemos

$$J = \bar{J} + \varepsilon \frac{\partial S_1(\bar{J}, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} + \dots \quad (5.64)$$

$$\theta = \bar{\theta} - \varepsilon \frac{\partial S_1(\bar{J}, \bar{\theta})}{\partial \bar{J}} + \dots \quad (5.65)$$

A nova Hamiltoniana é, em face destes resultados, dada por

$$\begin{aligned} \bar{H}(\bar{J}, \bar{\theta}) &= H(J(\bar{J}, \bar{\theta}), \theta(\bar{J}, \bar{\theta})) \\ \bar{H}_0(\bar{J}) + \varepsilon \bar{H}_1(\bar{J}, \bar{\theta}) &= H_0(J(\bar{J}, \bar{\theta})) + \varepsilon H_1(J(\bar{J}, \bar{\theta}), \theta(\bar{J}, \bar{\theta})) \\ &= H_0 \left(\bar{J} + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}} \right) + \varepsilon H_1 \left(\bar{J} + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}}, \bar{\theta} - \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \bar{J}} \right) \\ &= H_0(\bar{J}) + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}} \frac{\partial H_0}{\partial \bar{J}} + \varepsilon H_1(\bar{J}, \bar{\theta}) + \dots, \end{aligned} \quad (5.66)$$

onde, novamente, só estão indicados os termos até a ordem ε . Comparando termos de mesma ordem em ε obtemos, assim,

$$\bar{H}_0 = H_0(\bar{J}), \quad (5.67)$$

$$\bar{H}_1 = \omega(\bar{J}) \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}} + H_1(\bar{J}, \bar{\theta}), \quad (5.68)$$

onde a frequência do problema não-perturbado é

$$\omega(\bar{J}) = \frac{\partial H_0(\bar{J})}{\partial \bar{J}}. \quad (5.69)$$

O valor médio de H_1 em relação ao novo ângulo $\bar{\theta}$ é denotado

$$\langle H_1(\bar{J}, \bar{\theta}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\bar{\theta} H_1(\bar{J}, \bar{\theta}), \quad (5.70)$$

tal que a sua parte oscilante será

$$\{H_1\} = H_1 - \langle H_1 \rangle. \quad (5.71)$$

Desejamos que a nova hamiltoniana \bar{H} dependa apenas da nova ação \bar{J} . Portanto devemos escolher S_1 de maneira a eliminar a dependência no novo ângulo $\bar{\theta}$. Para tal fazemos a seguinte escolha [17]

$$\omega(\bar{J}) \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}} = -\{H_1\}, \quad (5.72)$$

de modo que $\bar{H}_1 = \langle H_1 \rangle$ não depende mais de $\bar{\theta}$, por construção. Assim, a nova hamiltoniana (5.66) será

$$\bar{H}(\bar{J}) = H_0(\bar{J}) + \varepsilon \langle H_1(\bar{J}, \bar{\theta}) \rangle, \quad (5.73)$$

com a nova frequência dada por

$$\bar{\omega}(\bar{J}) = \frac{\partial \bar{H}(\bar{J})}{\partial \bar{J}}. \quad (5.74)$$

5.6 O oscilador harmônico perturbado como aproximação do pêndulo

À guisa de ilustração, e também por que é um resultado importante por si só, vamos considerar a correção perturbativa em primeira ordem à Hamiltoniana do pêndulo (2.59). Expandindo o termo em cosseno em série,

$$H = \frac{1}{2} G p^2 - F \cos \phi = \frac{1}{2} G p^2 - F \left\{ 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots \right\}. \quad (5.75)$$

Desconsiderando o termo constante $-F$, podemos escrever a hamiltoniana acima como $H_0 + \varepsilon H_1$, onde

$$H_0(p, \phi) = \frac{1}{2} G p^2 + \frac{1}{2} F \phi^2 \quad (5.76)$$

é a Hamiltoniana do oscilador harmônico, e

$$\varepsilon H_1 = -\frac{1}{24} F \phi^4, \quad (5.77)$$

representa a perturbação em ordem mais baixa.

A solução exata do oscilador harmônico em termos de variáveis de ação e ângulo foi vista no Capítulo anterior [cf. Eqs. (4.95)-(4.96)], com $q \rightarrow \phi$:

$$\phi = \sqrt{2J} \sqrt{\frac{G}{F}} \sin \theta, \quad (5.78)$$

$$p = \sqrt{2J} \sqrt{\frac{F}{G}} \cos \theta, \quad (5.79)$$

de modo que a Hamiltoniana não-perturbada seja, de (4.89),

$$H_0(J) = \sqrt{FG} J = \omega_0 J, \quad (5.80)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{FG}$ é a frequência natural do oscilador harmônico. De (5.67) resulta, então, que

$$H_0(\bar{J}) = \omega_0 \bar{J}. \quad (5.81)$$

Escrevendo a perturbação (5.77) em termos das variáveis de ação e ângulo do oscilador harmônico, e fazendo $\varepsilon = 1$, temos

$$H_1(J, \theta) = -\frac{1}{6} GJ^2 \sin^4 \theta, \quad (5.82)$$

tal que (5.70) fornece o valor médio da perturbação,

$$\bar{H}_1 = \langle H_1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\bar{\theta} H_1(\bar{J}, \bar{\theta}) = -\frac{1}{16} G\bar{J}^2. \quad (5.83)$$

Reunindo esta expressão a (5.80), a nova hamiltoniana do pêndulo em primeira ordem será

$$\bar{H}(\bar{J}) = \omega_0 \bar{J} - \frac{1}{16} G\bar{J}^2, \quad (5.84)$$

a partir da qual obtemos, de (5.74), a nova frequência

$$\bar{\omega} = \omega_0 - \frac{1}{8} G\bar{J}. \quad (5.85)$$

Na aproximação de pequenas amplitudes de oscilação, a frequência do pêndulo era considerada como aproximadamente igual a ω_0 , de sorte que o resultado em primeira ordem de perturbação é a correção de ordem mais baixa à lei do isocronismo. Vemos também que, sendo G e \bar{J} positivos, a nova frequência é menor do que ω_0 , em conformidade com os resultados obtidos na seção 1.5.2.

Observe que não determinamos ainda a transformação canônica que produz as novas variáveis de ação e ângulo. Para determinar a função geratriz em primeira ordem nós calculamos a parte oscilante da perturbação (5.71)

$$\{H_1\} = G\bar{J}^2 \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{6} \sin^4 \bar{\theta} \right), \quad (5.86)$$

e inserimos este resultado na condição (5.72) levando à equação diferencial

$$\frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}} = -\frac{\{H_1\}}{\omega(\bar{J})} = -\frac{G\bar{J}^2}{\omega_0} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{6} \sin^4 \bar{\theta} \right), \quad (5.87)$$

que, integrada em $\bar{\theta}$, resulta em

$$S_1(\bar{J}, \bar{\theta}) = \frac{G\bar{J}^2}{192\omega_0} (-8 \sin 2\bar{\theta} + \sin 4\bar{\theta}). \quad (5.88)$$

Assim, as relações entre variáveis ação-ângulo novas e antigas são dadas, em primeira ordem, por (5.64)-(5.65):

$$J = \bar{J} - \varepsilon \frac{G\bar{J}^2}{12\omega_0} \left(-\cos 2\bar{\theta} + \frac{1}{4} \cos 4\bar{\theta} \right), \quad (5.89)$$

$$\theta = \bar{\theta} + \varepsilon \frac{G\bar{J}^2}{96\omega_0} (-8 \sin 2\bar{\theta} + \sin 4\bar{\theta}). \quad (5.90)$$

5.7 Teoria de perturbação para vários graus de liberdade

Este caso é uma generalização do tratamento dado ao caso de um único grau de liberdade, tal que a Hamiltoniana perturbada é ¹ :

$$H(J, \theta) = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta), \quad (5.91)$$

onde a parte não perturbada H_0 tem uma solução conhecida *a priori*, na forma

$$J_i(t) = J_i(0), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.92)$$

$$\theta_i(t) = \omega_i t + \beta_i, \quad (5.93)$$

onde $J_i(0)$ são as variáveis de ação no tempo inicial, e $\omega_i = \dot{\theta}_i = \partial H_0 / \partial J_i$ são as frequências associadas às variáveis de ângulo.

Nós supomos que a perturbação seja periódica em todas as variáveis de ângulo, ou seja, que seja possível desenvolver H_1 uma série de Fourier múltipla, cuja forma geral é

$$H_1(J, \theta) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \dots \sum_{m_n} H_{1m}(J) e^{i(m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2 + \dots + m_n \theta_n)}, \quad (5.94)$$

onde m_1, m_2, \dots, m_n são inteiros que variam de $-\infty$ a ∞ , e H_{1m} são os coeficientes de Fourier da perturbação que dependem, em geral, das variáveis de ação.

Assim como no caso de um grau de liberdade, procuramos uma transformação canônica $(J, \theta) \rightarrow (\bar{J}, \bar{\theta})$ tal que $\bar{H} = \bar{H}(\bar{J})$ seja a nova Hamiltoniana, independente dos novos ângulos. Para tal, a função geratriz necessária será uma perturbação da transformação identidade que, até primeira ordem, é escrita como

$$S(\bar{J}, \theta) = \sum_{j=1}^n \bar{J}_j \theta_j + \varepsilon S_1(\bar{J}, \theta). \quad (5.95)$$

Procedendo de forma inteiramente análoga ao caso de um grau de liberdade, obteremos as seguintes expressões, que generalizam (5.67)-(5.68):

$$\bar{H}_0 = H_0(\bar{J}), \quad (5.96)$$

$$\bar{H}_1 = \sum_{j=1}^n \omega_j(\bar{J}) \frac{\partial S_1(\bar{J}, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}_j} + H_1(\bar{J}, \bar{\theta}). \quad (5.97)$$

Como desejamos que a nova Hamiltoniana \bar{H} dependa apenas das novas ações \bar{J} , vamos escolher S_1 de maneira a eliminar a dependência em $\bar{\theta}$, por meio de [vide (5.72)]:

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(\bar{J}) \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}_j} = -\{H_1\}, \quad (5.98)$$

onde $\{H_1\} = H_1 - \langle H_1 \rangle$ é a parte oscilante da perturbação em relação ao seu valor médio, calculado para todos os ângulos,

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\bar{\theta}_1 \dots \int_0^{2\pi} d\bar{\theta}_n H_1(\bar{J}, \bar{\theta}), \quad (5.99)$$

¹Neste capítulo denotaremos coletivamente por (J, θ) as variáveis de ação e ângulo $(J_1, J_2, \dots, J_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, respectivamente, quando estas forem argumentos de funções.

de maneira que a nova Hamiltoniana, nas novas variáveis de ação e ângulo, é

$$\bar{H} = H_0(\bar{J}) + \varepsilon \langle H_1(\bar{J}, \bar{\theta}) \rangle. \quad (5.100)$$

Uma vez que $S_1 = S_1(\bar{J}, \bar{\theta})$, sua derivada total é, de (5.61),

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= \frac{\partial S_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial S_1}{\partial \bar{J}_j} \frac{d\bar{J}_j}{dt} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}_j} \frac{d\bar{\theta}_j}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}_j} \cdot \frac{d}{dt} \left(\bar{\theta}_j + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \bar{J}_j} + \dots \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}_j} \omega_j(\bar{J}) = -\{H_1\}, \end{aligned} \quad (5.101)$$

onde usamos (8.55) e desprezamos termos de ordem ε^2 ou superiores. Integrando no tempo obtemos

$$S_1 = - \int^t dt' \{H_1(\bar{J}, \bar{\theta}(t'))\}. \quad (5.102)$$

5.8 O problema dos pequenos denominadores

Assim como fizemos com a perturbação, é razoável supor que S_1 também seja multiplamente periódica, expressa como uma série de Fourier nos novos ângulos

$$S_1(\bar{J}, \bar{\theta}) = \sum_m S_{1m}(\bar{J}) \exp \left(i \sum_{j=1}^n m_j \bar{\theta}_j \right), \quad (5.103)$$

onde o símbolo \sum_m representa, de forma abreviada, a múltipla somatória em (5.94), e S_{1m} são os respectivos coeficientes de Fourier.

Derivando em relação aos novos ângulos $\bar{\theta}_i$ e substituindo o resultado em (5.98), a parte oscilante da Hamiltoniana perturbadora é

$$\{H_1\} = -i \sum_m S_{1m}(\bar{J}) \left(\sum_{j=1}^n m_j \omega_j(\bar{\theta}) \right) \exp \left(i \sum_{j=1}^n m_j \bar{\theta}_j \right). \quad (5.104)$$

Comparando com (5.98) temos uma relação entre os coeficientes de Fourier de H_1 e S_1 ,

$$H_{1m}(\bar{J}) = -i \left(\sum_{j=1}^n m_j \omega_j(\bar{\theta}) \right) S_{1m}(\bar{J}), \quad (5.105)$$

de forma que a função geratriz (5.95) torna-se

$$S(\bar{J}, \theta) = \sum_{j=1}^n \bar{J}_j \theta_j + \varepsilon i \sum_m^* H_{1m}(\bar{J}) \left(\sum_{j=1}^n m_j \omega_j(\bar{\theta}) \right)^{-1} \exp \left(i \sum_{j=1}^n m_j \bar{\theta}_j \right), \quad (5.106)$$

onde \sum_m^* significa que a somatória múltipla exclui o termo com $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0$.

Esta expressão evidencia um dos problemas centrais da teoria de perturbação. Caso as frequências sejam comensuráveis, ou seja, se for possível encontrar números inteiros m_1, \dots, m_n tais que

$$\sum_{j=1}^n m_j \omega_j = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_n \omega_n = 0, \quad (5.107)$$

o que configura uma ressonância, então o denominador em (5.106) anula-se e a série perturbativa diverge, inviabilizando o tratamento perturbativo. Este é o problema dos “pequenos denominadores”, que já foi descrito por Henri Poincaré em seu célebre trabalho sobre o problema de N corpos, mencionado na Introdução.

De fato, o problema é ainda pior do que parece! Mesmo que as frequências sejam incomensuráveis, ou seja, que $\sum_j m_j \omega_j \neq 0$, é sempre possível encontrar inteiros m_j tais que $\sum_j m_j \omega_j$ tenha um valor tão pequeno quanto se queira [59]. Como as séries perturbativas envolvem termos com valores de m_i arbitrariamente grandes, a chance de encontrarmos pequenos denominadores é ainda maior. Isto nos leva a ponderar se a série perturbativa pode realmente convergir, mesmo fora das ressonâncias. Não é de se admirar que o problema dos pequenos denominadores tenha sido uma dificuldade notória nos cálculos em Mecânica Celeste, onde a teoria de perturbações é uma das principais técnicas de análise.

Felizmente, porém, na Mecânica Celeste os movimentos não-perturbados descritos por H_0 estão suficientemente longe da comensurabilidade de baixa ordem das frequências, de modo que $\sum_j m_j \omega_j$ só é pequeno para valores grandes de m_i . Para tais valores os coeficientes de Fourier da perturbação H_{1m} são usualmente muito pequenos, de modo que se tomarmos somas parciais da série perturbativa até estes valores altos de m_i , a teoria de perturbação pode ser usada com bons resultados por um longo tempo (ainda que não para tempo infinito!).

Um exemplo clássico de não-comensurabilidade na Mecânica Celeste é o da órbita da Terra, cuja frequência é 11,86 vezes maior que a de seu principal perturbador, que é o planeta Júpiter [59]. Há, no entanto, exemplos importantes de comensurabilidade: os períodos orbitais de Netuno e Plutão têm frequências comensuráveis na razão 2 : 3 [63], os períodos dos satélites de Saturno Titan e Hyperion têm uma comensurabilidade 3 : 4 [64].

5.9 Oscilador harmônico bidimensional

Vamos ilustrar o emprego da teoria canônica de perturbações para um caso com $N = 2$ graus de liberdade, partindo de um oscilador harmônico bidimensional, como uma partícula de massa m presa por molas de constantes elásticas k_x e k_y ao longo dos eixos coordenados. A Hamiltoniana não-perturbada correspondente é

$$H_0(p_1, p_2; q_1, q_2) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2), \quad (5.108)$$

onde as frequências são

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}, \quad \omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}. \quad (5.109)$$

Definimos variáveis de ângulo e ação (J_i, θ_i) para este sistema em analogia com o caso unidimensional [vide Eqs. (4.95)-(4.96)]

$$x = \sqrt{\frac{2J_x}{m\omega_x}} \operatorname{sen} \theta_x, \quad p_x = \sqrt{2m\omega_x J_x} \cos \theta_x, \quad (5.110)$$

$$y = \sqrt{\frac{2J_y}{m\omega_y}} \operatorname{sen} \theta_y, \quad p_y = \sqrt{2m\omega_y J_y} \cos \theta_y, \quad (5.111)$$

de forma que a Hamiltoniana (5.108) seja escrita como

$$H_0(J) = \omega_x J_x + \omega_y J_y. \quad (5.112)$$

Vamos considerar a seguinte perturbação (supondo $b \ll 1$)

$$\varepsilon H_1 = \frac{bm^2}{4} \omega_x^2 \omega_y^2 x^2 y^2, \quad (5.113)$$

e que pode ser expressa, em termos das variáveis de ação e ângulo do problema não-perturbado, como

$$H_1 = b\omega_x\omega_y J_x J_y \sin^2\theta_x \sin^2\theta_y. \quad (5.114)$$

Aplicando (5.84) teremos

$$\bar{H} = \omega_x \bar{J}_x + \omega_y \bar{J}_y + b\omega_x\omega_y \bar{J}_x \bar{J}_y \langle \sin^2\bar{\theta}_x \rangle \langle \sin^2\bar{\theta}_y \rangle. \quad (5.115)$$

Como

$$\langle \sin^2\bar{\theta}_x \rangle = \langle \sin^2\bar{\theta}_y \rangle = \frac{1}{2}, \quad (5.116)$$

em primeira ordem de perturbação, a Hamiltoniana será

$$\bar{H} = \omega_x \bar{J}_x + \omega_y \bar{J}_y + \frac{b}{4} \omega_x \omega_y \bar{J}_x \bar{J}_y. \quad (5.117)$$

A função geratriz em primeira ordem é dada por (5.98)

$$\begin{aligned} \omega_x \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}_x} + \omega_y \frac{\partial S_1}{\partial \bar{\theta}_y} &= -\{H_1\} = b\omega_x\omega_y \bar{J}_x \bar{J}_y \left(-\sin^2\bar{\theta}_x \sin^2\bar{\theta}_y + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{b}{4} \omega_x \omega_y \bar{J}_x \bar{J}_y \left\{ -\frac{1}{2} \cos(2\bar{\theta}_x + 2\bar{\theta}_y) - \frac{1}{2} \cos(2\bar{\theta}_x - 2\bar{\theta}_y) + \cos 2\bar{\theta}_x + \cos 2\bar{\theta}_y \right\}. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Integrando em ambos os novos ângulos resulta que

$$S_1(\bar{J}, \bar{\theta}) = -\frac{b}{16} \omega_x \omega_y \bar{J}_x \bar{J}_y \left\{ -\frac{\sin(2\bar{\theta}_x + 2\bar{\theta}_y)}{\omega_x + \omega_y} - \frac{\sin(2\bar{\theta}_x - 2\bar{\theta}_y)}{\omega_x - \omega_y} + \frac{2\sin 2\bar{\theta}_x}{\omega_x} + \frac{2\sin 2\bar{\theta}_y}{\omega_y} \right\}. \quad (5.119)$$

Observe que a série finita S_1 irá divergir caso haja ressonâncias ($\omega_x = \pm\omega_y$), que levam ao problema dos pequenos denominadores.

5.10 Caso de um grau e meio de liberdade

Um sistema dinâmico com um grau de liberdade (J, θ) e cuja Hamiltoniana depende explicitamente do tempo é equivalente, como sabemos, a um sistema com dois graus de liberdade e independente do tempo. Vamos, então, considerá-lo um caso particular do formalismo apresentado anteriormente para vários graus de liberdade. Partimos da Hamiltoniana

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta, t), \quad (5.120)$$

onde H_1 é periódica na variável de ângulo θ (com período 2π) e no tempo, com período $2\pi/\Omega$, de sorte que sua expansão de Fourier é

$$H_1(J, \theta, t) = \sum_{\ell, m} H_{1\ell m}(J) e^{i(\ell\theta + m\Omega t)}. \quad (5.121)$$

Como antes, procuramos uma transformação canônica de variáveis $(J, \theta, t) \rightarrow (\bar{J}, \bar{\theta}, t)$ cuja função geratriz de segunda espécie tenha a seguinte expansão até primeira ordem no parâmetro “pequeno” ε

$$S(\bar{J}, \theta, t) = \bar{J}\theta + \varepsilon S_1(\bar{J}, \theta, t), \quad (5.122)$$

tal que a nova Hamiltoniana seja

$$\bar{H}(\bar{J}, \bar{\theta}, t) = H(J, \theta, t) + \varepsilon \frac{\partial S_1(\bar{J}, \theta, t)}{\partial t}. \quad (5.123)$$

Nesse caso, as equações (5.96) e (5.97) tornam-se

$$\bar{H}_0 = H_0(\bar{J}), \quad (5.124)$$

$$\bar{H}_1 = \omega(\bar{J}) \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \frac{\partial S_1}{\partial t} + H_1(\bar{J}, \bar{\theta}, t). \quad (5.125)$$

Assim como antes, escolheremos S_1 de maneira a eliminar a dependência em $\bar{\theta}$ e t , fazendo médias sobre estas variáveis, conforme (5.99)

$$\langle H_1 \rangle = \frac{\Omega}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\bar{\theta} \int_0^{2\pi/\Omega} dt H_1(\bar{J}, \bar{\theta}, t). \quad (5.126)$$

Para tal, S_1 deve satisfazer uma equação diferencial análoga à (5.98), que é

$$\omega \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \frac{\partial S_1}{\partial t} = -\{H_1\} = \langle H_1 \rangle - H_1, \quad (5.127)$$

de sorte que (8.55) fica

$$\bar{H}(\bar{J}) = H_0(\bar{J}) + \varepsilon \langle H_1(\bar{J}, \bar{\theta}, t) \rangle. \quad (5.128)$$

Expandindo o termo de primeira ordem da função geratriz em série de Fourier,

$$S_1(\bar{J}, \bar{\theta}, t) = \sum_{\ell, m} S_{1\ell m}(\bar{J}) e^{i(\ell\bar{\theta} + m\Omega t)}, \quad (5.129)$$

que, ao ser substituída na equação diferencial (5.127), resulta nos seguintes coeficientes de Fourier

$$S_{1\ell m}(\bar{J}) = \frac{iH_{1\ell m}(\bar{J})}{\ell\omega(\bar{J}) + m\Omega}. \quad (5.130)$$

O problema dos pequenos denominadores reaparece, agora, quando temos ressonâncias

$$\ell\omega(\bar{J}) + m\Omega = 0 \quad (5.131)$$

para algum valor da nova ação, levando a termos divergentes da série perturbativa (5.129).

5.11 Interação entre partículas e ondas eletrostáticas

Em Física de Plasmas é comum trabalharmos com ondas eletrostáticas, ou seja, ondas longitudinais descritas unicamente por um potencial escalar na forma

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0 \text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (5.132)$$

onde Φ_0 é a amplitude, \mathbf{k} é o vetor de onda e ω a frequência respectiva.

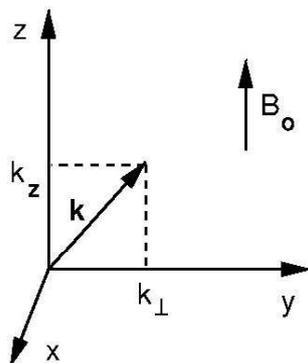


Figura 5.3: Geometria da interação entre uma onda eletrostática com vetor de onda \mathbf{k} e uma partícula carregada em giracão num campo magnético uniforme \mathbf{B}_0 .

Vamos supor que ondas eletrostáticas propaguem-se com vetor de onda $\mathbf{k} = (0, k_{\perp}, k_z)$ e interajam com partículas de carga e , sob a ação de um campo magnético uniforme $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ [Fig. 5.3]. Assim k_{\perp} e k_z são as componentes do vetor de onda nas direções perpendicular e paralela ao campo, respectivamente. O potencial escalar será, portanto,

$$\Phi(y, z, t) = \Phi_0 \sin(k_{\perp}y + k_z z - \omega t), \quad (5.133)$$

tal que o campo elétrico da onda é $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$.

O movimento de uma partícula carregada num campo magnético constante foi tratado no Capítulo 3, e a Hamiltoniana correspondente é dada por [cf. (3.61)]

$$H_0(P_z, P_{\phi}) = \frac{P_z^2}{2m} + \Omega P_{\phi}. \quad (5.134)$$

onde $\Omega = eB_0/m$ é a girofrequência do movimento de giracão da partícula em torno do seu centro de guia, que desloca-se ao longo da direção do campo magnético. P_z e P_{ϕ} são os momenta canonicamente conjugados às coordenadas (z, ϕ) , dos movimentos paralelo e perpendicular ao campo, respectivamente.

A Hamiltoniana relativa à interação entre uma onda do tipo (5.133) e uma partícula de carga e é $H_1 = e\Phi(y, z, t)$. Expressaremos a Hamiltoniana perturbadora nas variáveis de ação e ângulo do problema não-perturbado. Em nosso caso, estas serão as coordenadas do centro de guia da partícula, dadas por (3.65):

$$X = x - \rho \cos \phi, \quad (5.135)$$

$$Y = y + \rho \sin \phi, \quad (5.136)$$

onde o raio do movimento de giracão (raio de Larmor) é, conforme (3.64), dado por

$$\rho(P_{\phi}) = \sqrt{2P_{\phi}m\Omega}. \quad (5.137)$$

Assim, em termos das variáveis do centro de guia, a perturbação da onda eletrostática será

$$H_1 = e\Phi_0 \sin(k_{\perp}Y - k_{\perp}\rho \sin \phi + k_z z - \omega t). \quad (5.138)$$

Faremos inicialmente uma transformação canônica equivalente à redefinição da origem da variável z :

$$(z, \phi, Y; P_z, P_{\phi}, P_Y) \rightarrow (z', \phi, Y'; P'_z, P_{\phi}, P'_{\psi}),$$

onde $P_Y = m\Omega X$ é o momentum conjugado à variável Y . A função geratriz correspondente é

$$F_2(P'_Y, P'_z; Y, z) = YP'_Y + \left(z + \frac{k_\perp}{k_z}Y\right)P'_z, \quad (5.139)$$

com as seguintes equações de transformação

$$Y' = \frac{\partial F_2}{\partial P'_\Psi} = Y, \quad z' = \frac{\partial F_2}{\partial P'_z} = z + \frac{k_\perp}{k_z}Y, \quad (5.140)$$

$$P_Y = \frac{\partial F_2}{\partial Y} = P'_Y + \frac{k_\perp}{k_z}P'_z, \quad P_z = \frac{\partial F_2}{\partial z} = P'_z, \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H. \quad (5.141)$$

Aplicando-as às Hamiltonianas H_0 e H_1 dadas, respectivamente, por (5.134) e (5.138) é

$$H' = \frac{P'^2_z}{2m} + P_\phi\Omega + e\Phi_0 \sin[k_z z' - \omega t - k_\perp \rho(P'_\phi) \sin \phi]. \quad (5.142)$$

Vamos, agora, passar para um referencial que se move juntamente com a onda na direção k_z , por meio de uma segunda transformação canônica

$$(z', \phi; P'_z, P_\phi, t) \rightarrow (\Psi, \phi', P_\Psi, P'_\phi),$$

que elimina a dependência explícita do tempo, a partir da função geratriz

$$F_2(P_\Psi, P'_\phi, z', \phi, t) = (k_z z' - \omega t)P_\Psi + P'_\phi \phi. \quad (5.143)$$

As equações da transformação canônica são

$$P'_z = \frac{\partial F_2}{\partial z'} = k_z P_\Psi, \quad \Psi = \frac{\partial F_2}{\partial P_\Psi} = k_z z' - \omega t, \quad (5.144)$$

$$P'_\phi = \frac{\partial F_2}{\partial \phi} = P_\phi, \quad \phi' = \frac{\partial F_2}{\partial P'_\phi} = \phi, \quad (5.145)$$

$$\bar{H} = H' + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H' - \omega P_\phi. \quad (5.146)$$

Aplicando a transformação na Hamiltoniana (5.142), a mesma torna-se

$$\bar{H} = \frac{k_z^2 P_\Psi^2}{2m} - \omega P_\Psi + \Omega P'_\phi + e\Phi_0 \sin[\Psi - k_\perp \rho(P'_\phi) \sin \phi'], \quad (5.147)$$

e que, sendo independente do tempo, é uma constante do movimento. Neste caso $\rho = \rho(P'_\phi) = (2P'_\phi/m\Omega)^{1/2}$. Usando a identidade de Jacobi-Anger

$$e^{ix \sin \phi} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} J_\ell(x) e^{i\ell\phi}, \quad (5.148)$$

onde J_ℓ é a função de Bessel de primeira espécie e ordem ℓ inteira, e após alguns rearranjos, a Hamiltoniana (5.147) fica

$$\bar{H} = \frac{k_z^2 P_\Psi^2}{2m} - \omega P_\Psi + \Omega P'_\phi + e\Phi_0 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} J_\ell[k_\perp \rho(P'_\phi)] \sin(\Psi - \ell\phi). \quad (5.149)$$

A Hamiltoniana acima está na forma padrão para o uso da teoria de perturbação

$$\bar{H} = \bar{H}_0(P_\psi, P_\phi) + \varepsilon \bar{H}_1(P_\psi, P_\phi; \psi, \phi), \quad (5.150)$$

onde introduzimos o parâmetro pequeno ε apenas para dar conta da ordem de perturbação dos termos a serem calculados. No final destes faremos $\varepsilon = 1$. A parte não-perturbada da Hamiltoniana (referente à giração da partícula no campo magnético),

$$\bar{H}_0 = \frac{k_z^2 P_\psi^2}{2m} - \omega P_\psi + \Omega P_\phi, \quad (5.151)$$

só depende das variáveis de ação e é, portanto, integrável. As frequências associadas aos respectivos ângulos, canonicamente conjugados às variáveis de ação, são

$$\omega_\phi = \dot{\phi} = \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial P_\phi} = \Omega, \quad (5.152)$$

$$\omega_\psi = \dot{\psi} = \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial P_\psi} = \frac{k_z^2 P_\psi}{m} - \omega = k_z v_z - \omega. \quad (5.153)$$

Portanto, ω_ϕ é a girofrequência do movimento perpendicular, enquanto ω_ψ é a frequência da onda com o deslocamento Doppler associado ao movimento paralelo da partícula. Haverá ressonâncias sempre que estas frequências forem comensuráveis, ou seja, para números n inteiros tais que

$$\omega_\psi - n\Omega = 0. \quad (5.154)$$

Dois casos apresentam-se à análise:

1. se $k_z = 0$ (onda propagando-se perpendicularmente ao campo magnético) então $\omega_\psi = -\omega$ e a condição de ressonância torna-se

$$\omega + n\Omega = 0, \quad (5.155)$$

2. se $k_z \neq 0$ (propagação oblíqua) então haverá ressonâncias desde que

$$P_\psi = \frac{m}{k_z^2} (n\Omega + \omega). \quad (5.156)$$

Já a perturbação na Hamiltoniana (5.149) refere-se à interação entre a partícula e a onda eletrostática, e está expressa nas variáveis de ação e ângulo do problema não-perturbado:

$$\bar{H}_1 = e\Phi_0 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_\ell[k_\perp \rho(P_\phi)] \sin(\psi - \ell\phi). \quad (5.157)$$

Comparando com a forma geral de uma perturbação periódica (5.94) os respectivos coeficientes de Fourier são

$$H_{1\ell} = \mathcal{J}_\ell[k_\perp \rho(P_\phi)], \quad (5.158)$$

e decaem com ℓ . De fato, usando a expansão em série de potências para as funções de Bessel de ordem ℓ , a saber,

$$\mathcal{J}_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \ell - 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \ell}, \quad (5.159)$$

resulta que $J_\ell \sim 1/(\ell!)$ decresce rapidamente com ℓ .

Vamos abordar, aqui, apenas o caso de $k_z = 0$, correspondendo à Hamiltoniana não-perturbada

$$\bar{H}_0 = -\omega P_\psi + \Omega P_\phi. \quad (5.160)$$

Em primeira ordem de perturbação a equação diferencial para S_1 , dada por (5.98), é

$$\begin{aligned} \omega_\psi \frac{\partial S_1}{\partial \psi} + \omega_\phi \frac{\partial S_1}{\partial \phi} &= -\{H_1\}, \\ -\omega \frac{\partial S_1}{\partial \psi} + \Omega \frac{\partial S_1}{\partial \phi} &= -e\Phi_0 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} J_\ell(k_\perp \bar{\rho}) \sin(\psi - \ell\phi), \end{aligned} \quad (5.161)$$

onde $\bar{\rho} = \rho(\bar{P}_\phi) = (2\bar{P}_\phi/m\Omega)^{1/2}$, e cuja solução é

$$S_1 = -e\Phi_0 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} J_\ell(k_\perp \bar{\rho}) \frac{\cos(\psi - \ell\phi)}{\omega + \ell\Omega}, \quad (5.162)$$

como pode ser verificado por substituição direta. Os termos da série acima divergem para os valores de ℓ tais que a condição de ressonância (5.154) é satisfeita. Na sequência, portanto, supomos que a somatória em ℓ excluirá os valores para os quais $\ell = -\omega/\Omega$ (indicaremos esta restrição, incluindo um asterisco na somatória).

Lembramos que o objetivo da teoria canônica de perturbação é encontrar uma transformação canônica

$$(P_\psi, P_\phi; \psi, \phi) \rightarrow (\bar{P}_\psi, \bar{P}_\phi; \bar{\psi}, \bar{\phi})$$

para a qual os novos momenta (variáveis de ação) sejam constantes do movimento (em primeira ordem em ε). A função geratriz desta transformação canônica é

$$S(\bar{P}_\psi, \bar{P}_\phi; \psi, \phi) = \bar{P}_\psi \psi + \bar{P}_\phi \phi + \varepsilon S_1(\bar{P}_\psi, \bar{P}_\phi; \psi, \phi), \quad (5.163)$$

e as equações da transformação são

$$\begin{aligned} P_\psi &= \frac{\partial S}{\partial \psi} = \bar{P}_\psi + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \psi} \\ &= \bar{P}_\psi + \varepsilon e\Phi_0 \sum_{\ell}^* J_\ell(k_\perp \bar{\rho}) \frac{\sin(\psi - \ell\phi)}{\omega + \ell\Omega}, \end{aligned} \quad (5.164)$$

$$\begin{aligned} P_\phi &= \frac{\partial S}{\partial \phi} = \bar{P}_\phi + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \phi} \\ &= \bar{P}_\phi - \varepsilon e\Phi_0 \sum_{\ell}^* \ell J_\ell(k_\perp \bar{\rho}) \frac{\sin(\psi - \ell\phi)}{\omega + \ell\Omega}. \end{aligned} \quad (5.165)$$

Invertendo as expressões acima temos, em primeira ordem de perturbação, que as constantes do movimento são

$$\bar{P}_\psi = P_\psi - \varepsilon e\Phi_0 \sum_{\ell}^* J_\ell(k_\perp \bar{\rho}) \frac{\sin(\psi - \ell\phi)}{\omega + \ell\Omega}, \quad (5.166)$$

$$\bar{P}_\phi = P_\phi + \varepsilon e\Phi_0 \sum_{\ell}^* \ell J_\ell(k_\perp \bar{\rho}) \frac{\sin(\psi - \ell\phi)}{\omega + \ell\Omega}. \quad (5.167)$$

5.12 Remoção das ressonâncias

Embora as séries perturbativas para S_1 diverjam quando há ressonâncias, podemos tratar as mesmas em separado, removendo-as por meio de uma transformação canônica adequada. Vamos mostrar que o movimento nas vizinhanças de uma ressonância é similar ao de um pêndulo simples. Por simplicidade, nos limitaremos aqui ao caso de dois graus de liberdade, para o qual a Hamiltoniana é escrita

$$H(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(J_1, J_2) + \varepsilon H_1(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2), \quad (5.168)$$

onde a perturbação é periódica em ambos os ângulos, permitindo sua expansão numa série de Fourier dupla,

$$H_1 = \sum_{m_1, m_2} H_{m_1 m_2}(J_1, J_2) e^{i(m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2)}. \quad (5.169)$$

Ressonâncias ocorrerão sempre que as frequências não-perturbadas

$$\omega_1(J_1, J_2) = \dot{\theta}_1 = \frac{\partial H_0}{\partial J_1}, \quad (5.170)$$

$$\omega_2(J_1, J_2) = \dot{\theta}_2 = \frac{\partial H_0}{\partial J_2}, \quad (5.171)$$

forem comensuráveis, ou seja, que existam inteiros r e s tais que

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r}{s}, \quad \Rightarrow \quad r\omega_1 - s\omega_2 = 0. \quad (5.172)$$

Removemos cada ressonância individualmente fazendo uma transformação canônica que elimina uma das ações antigas (J_1 ou J_2):

$$(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) \rightarrow (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2),$$

efetuada a partir da função geratriz

$$F_2(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \theta_1, \theta_2) = (r\theta_1 - s\theta_2)\hat{J}_1 + \theta_2\hat{J}_2, \quad (5.173)$$

com as seguintes equações de transformação

$$J_1 = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_1} = r\hat{J}_1, \quad J_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_2} = -s\hat{J}_1 + \hat{J}_2, \quad (5.174)$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\partial F_2}{\partial \hat{J}_1} = r\theta_1 - s\theta_2, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \hat{J}_2} = \theta_2, \quad (5.175)$$

$$\hat{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H. \quad (5.176)$$

Combinando (5.170) e (5.172) temos que, de (5.175),

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = r\omega_1 - s\omega_2 = 0, \quad (5.177)$$

ou seja, na ressonância exata o novo ângulo $\hat{\theta}_1$ é constante. Já nas proximidades da ressonância $\hat{\theta}_1$ terá, portanto, uma variação lenta em comparação com $\hat{\theta}_2$. Por este motivo chamamos $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ de ângulos lento e rápido, respectivamente.

Aplicando as equações de transformação (5.174)-(5.176) à Hamiltoniana (5.168)-(5.169), escrevemos

$$\hat{H} = \hat{H}_0(\hat{J}_1, \hat{J}_2) + \varepsilon \hat{H}_1(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2), \quad (5.178)$$

$$\hat{H}_1 = \sum_{m_1, m_2} H_{m_1 m_2}(\hat{J}_1, \hat{J}_2) \exp \left\{ \frac{i}{r} [m_1 \hat{\theta}_1 + (m_1 s + m_2 r) \hat{\theta}_2] \right\}. \quad (5.179)$$

Nas vizinhanças da ressonância é possível fazer uma média sobre o ângulo rápido $\hat{\theta}_2$, de modo a reter apenas o ângulo lento $\hat{\theta}_1$,

$$\bar{H} = \langle \hat{H} \rangle_{\hat{\theta}_2} = \bar{H}_0(\hat{J}_1, \hat{J}_2) + \varepsilon \bar{H}_1(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{\theta}_1), \quad (5.180)$$

onde $\bar{H}_0 = \hat{H}_0(\hat{J}_1, \hat{J}_2)$ e a média é calculada usando

$$\langle \cos[(m_1 s/r + m_2) \hat{\theta}_2] \rangle_{\hat{\theta}_2} = \langle \sin[(m_1 s/r + m_2) \hat{\theta}_2] \rangle_{\hat{\theta}_2} = 0,$$

de modo que

$$\bar{H}_1 = \sum_{m_1, m_2} H_{m_1 m_2}(\hat{J}_1, \hat{J}_2) e^{i m_1 \hat{\theta}_1 / r}. \quad (5.181)$$

Escolhemos remover a ressonância específica dada por (5.172), o que nos permite expressar os índices da série de Fourier dupla como $m_1 = -pr$ e $m_2 = ps$, onde (r, s) são inteiros fixos e p é o índice de uma somatória simples:

$$\bar{H}_1 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_{-pr, ps}(\hat{J}_1, \hat{J}_2) e^{-ip \hat{\theta}_1}. \quad (5.182)$$

As equações de Hamilton correspondentes serão

$$\dot{\hat{J}}_1 = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \hat{\theta}_1} = i\varepsilon \sum_{p=-\infty}^{\infty} p H_{-pr, ps}(\hat{J}_1, \hat{J}_2) e^{-ip \hat{\theta}_1}, \quad (5.183)$$

$$\dot{\hat{J}}_2 = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \hat{\theta}_2} = 0, \quad (5.184)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \hat{J}_1} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{J}_1} + o(\varepsilon), \quad (5.185)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \hat{J}_2} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{J}_2} + o(\varepsilon), \quad (5.186)$$

onde o símbolo $o(\varepsilon)$ indica a presença de termos de ordem ε ou superior.

A Equação (5.184) nos mostra que \hat{J}_2 é uma constante do movimento nas variáveis novas. Usando (5.174) resulta que as novas variáveis de ação em termos das antigas são

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{r} J_1, \quad \hat{J}_2 = J_2 + \frac{s}{r} J_1 = \text{const.} \quad (5.187)$$

5.13 Aproximação do pêndulo

Na seção anterior, removemos a ressonância r/s dada por (5.172), por meio de uma transformação canônica para variáveis rápidas e lentas, associada com uma média sobre o ângulo rápido $\hat{\theta}_2$. A Hamiltoniana nas variáveis lentas $(\hat{J}_1, \hat{\theta}_1)$,

$$\bar{H} = \hat{H}_0(\hat{J}_1, \hat{J}_2) + \varepsilon \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_{-pr, ps}(\hat{J}_1, \hat{J}_2) e^{-ip \hat{\theta}_1}, \quad (5.188)$$

tem efetivamente um grau de liberdade, o que torna o sistema integrável, visto que é independente do tempo.

Esperamos que os coeficientes de Fourier da perturbação $H_{-pr,ps}$ tipicamente decaiam rapidamente com p , de maneira que sorte que podemos reter apenas os termos com p mais baixo, como $p = 0, \pm 1$:

$$\bar{H} = \hat{H}_0 + \varepsilon H_{0,0} + \varepsilon H_{-r,s} e^{-i\hat{\theta}_1} + \varepsilon H_{r,-s} e^{i\hat{\theta}_1} + \dots \quad (5.189)$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $H_{r,-s} = H_{-r,s}$, a Hamiltoniana truncada será

$$\bar{H} = \hat{H}_0(\hat{J}_1, \hat{J}_2) + \varepsilon H_{0,0}(\hat{J}_1, \hat{J}_2) + 2\varepsilon H_{r,-s}(\hat{J}_1, \hat{J}_2) \cos \hat{\theta}_1. \quad (5.190)$$

Os pontos de equilíbrio referentes a essa Hamiltoniana, denotados por $(\hat{J}_1^*, \hat{\theta}_1^*)$, são dados pelas condições (2.156)

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \hat{J}_1^*} \right)_{(\hat{J}_1^*, \hat{\theta}_1^*)} = 0, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \hat{\theta}_1^*} \right)_{(\hat{J}_1^*, \hat{\theta}_1^*)} = 0. \quad (5.191)$$

que levam a $\sin \hat{\theta}_1^* = 0$, ou seja, há dois pontos

$$\hat{\theta}_{1a}^* = 0, \quad \hat{\theta}_{1b}^* = \pm \pi, \quad (5.192)$$

considerando que $-\pi < \theta \leq \pi$. Usando este resultado, a condição (5.191) leva à relação

$$\left(\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_1} \right)_{\hat{J}_1^*} + \varepsilon \left(\frac{\partial H_{0,0}}{\partial \hat{J}_1} \right)_{\hat{J}_1^*} \pm 2\varepsilon \left(\frac{\partial H_{r,-s}}{\partial \hat{J}_1} \right)_{\hat{J}_1^*} = 0, \quad (5.193)$$

onde o sinal superior refere-se a $\hat{\theta}_{1a}^* = 0$, e o sinal inferior a $\hat{\theta}_{1b}^* = \pm \pi$.

Para a ressonância exata (5.187) implica em

$$\left(\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_1} \right)_{\hat{J}_1^*} = \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \hat{J}_1} + \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \hat{J}_1} = r\omega_1 - s\omega_2 = 0. \quad (5.194)$$

Assim, em primeira ordem de perturbação, o ponto de equilíbrio será a raiz da seguinte equação transcendente:

$$\left(\frac{\partial H_{0,0}}{\partial \hat{J}_1} \right)_{\hat{J}_1^*} \pm 2 \left(\frac{\partial H_{r,-s}}{\partial \hat{J}_1} \right)_{\hat{J}_1^*} = 0. \quad (5.195)$$

O caso mais geral, chamado de *degenerescência acidental*, ocorre quando a condição de ressonância $\omega_2/\omega_1 = r/s$ é satisfeita apenas para valores particulares das variáveis \hat{J}_1 e \hat{J}_2 .² Neste caso as equações de Hamilton (5.183) e (5.185) nos informam que, em ordem mais baixa,

$$\hat{J}_1 = o(\varepsilon H_{r,-s}), \quad \hat{\theta}_1 = o(1),$$

o que permite expandir a Hamiltoniana truncada (5.190) nas vizinhanças da ressonância exata \hat{J}_1^* dada por (5.195). Fazemos isso definindo um deslocamento na ação

$$\Delta \hat{J}_1 = \hat{J}_1 - \hat{J}_1^*. \quad (5.196)$$

²Este será o caso a ser abordado na presente seção. Quando a condição é satisfeita para todos os valores das novas ações (degenerescência intrínseca) o tratamento é ligeiramente diferente (vide Problema 1)

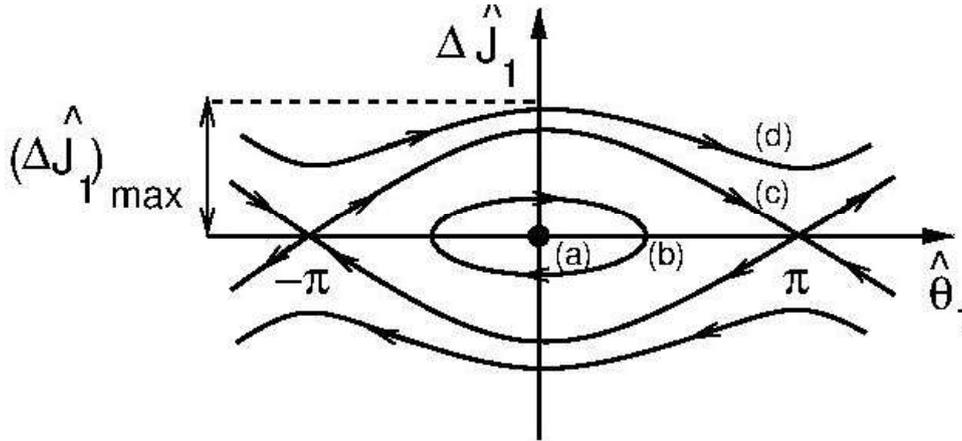


Figura 5.4: Aproximação do pêndulo: (a) ressonância exata, (b) libração, (c) separatriz, (d) rotação.

Usando (5.194) a expansão de Taylor da Hamiltoniana truncada (5.190) fornece, até primeira ordem,

$$\bar{H} = \underline{\hat{H}_0(\hat{J}_1^*)} + \frac{1}{2}(\Delta\hat{J}_1)^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_1^2} \right)_{\hat{J}_1^*} + \underline{\varepsilon H_{0,0}(\hat{J}_1^*)} + 2\varepsilon H_{r,-s}(\hat{J}_1^*) \cos \hat{\theta}_1. \quad (5.197)$$

Os termos sublinhados são constantes e, como tal, podem ser ignorados, levando-nos à Hamiltoniana do pêndulo,

$$\Delta\bar{H} = \frac{1}{2}G(\Delta\hat{J}_1)^2 - F \cos \hat{\theta}_1, \quad (5.198)$$

onde definimos os coeficientes

$$G \equiv \left(\frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial \hat{J}_1^2} \right)_{\hat{J}_1^*}, \quad (5.199)$$

$$F \equiv -2\varepsilon H_{r,-s}(\hat{J}_1^*). \quad (5.200)$$

Da discussão sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio do pêndulo [cf. seção 2.9.3] resulta que

1. centro ou ponto elíptico: $\Delta\hat{J}_1^* = 0$ e $\hat{\theta}_1^* = 0$;
2. ponto de sela ou hiperbólico: $\Delta\hat{J}_1^* = 0$ e $\hat{\theta}_1^* = \pm\pi$.

O ponto elíptico representa a posição da ressonância exata [Fig. 5.4]. Na vizinhança do ponto elíptico as trajetórias são elipses (librações), cuja frequência é

$$\hat{\omega}_1 = \sqrt{FG} = o[(\varepsilon H_{r,-s})^{1/2}], \quad (5.201)$$

portanto pequena para $\varepsilon \ll 1$.

Já os pontos hiperbólicos são conectados pela separatriz do pêndulo [Fig. 5.4], que segrega trajetórias abertas (rotações) de fechadas (librações). Como o período do movimento tende a infinito à medida em que nos aproximamos da separatriz, a frequência $\hat{\omega}_1$ tenderá a zero. Em qualquer caso, portanto

$$\hat{\omega}_1 = \hat{\theta}_1 \ll \hat{\omega}_2 = \hat{\theta}_2.$$

A excursão máxima do deslocamento da ação, em relação ao seu valor nos pontos de equilíbrio, é dada impondo a constância da Hamiltoniana (5.198) ao longo da separatriz, ou seja,

$$\Delta\bar{H}((\Delta\hat{J}_1)_{max}, \hat{\theta}_1^* = 0) = \Delta\bar{H}(\Delta\hat{J}_1 = 0, \hat{\theta}_1^* = \pm\pi) \quad (5.202)$$

resultando em

$$(\Delta\hat{J}_1)_{max} = 2\sqrt{\frac{F}{G}} = o[(\varepsilon H_{r,-s})^{1/2}]. \quad (5.203)$$

5.14 Ressonâncias na interação entre partículas e ondas eletrostáticas

A interação entre uma partícula de massa m e carga e e uma onda longitudinal de número de onda $\mathbf{k} = (0, k_\perp, k_z)$ e frequência ω é descrita pela Hamiltoniana (5.149)

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \varepsilon\bar{H}_1 = \frac{k_z^2 P_\psi^2}{2m} - \omega P_\psi + \Omega P_\phi + e\Phi_0 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_\ell(k_\perp \rho(P_\phi)) \sin(\psi - \ell\phi). \quad (5.204)$$

onde Φ_0 é a amplitude da onda, e o raio de Larmor é

$$\rho(P_\phi) = \sqrt{2P_\phi m \Omega}. \quad (5.205)$$

Para propagação oblíqua $k_z \neq 0$ haverá ressonâncias quando, de (5.156), houver inteiros n tais que

$$P_\psi = \frac{m}{k_z^2} (n\Omega + \omega). \quad (5.206)$$

Haverá infinitas ressonâncias, na verdade, associadas a valores determinados de P_ψ , donde trata-se de uma degenerescência acidental, caso abordado na seção precedente. Vamos considerar uma ressonância específica para $n = N$, e faremos uma transformação canônica para variáveis novas, usando a função geratriz

$$F_2(\hat{P}_\psi, \hat{P}_\phi; \psi, \phi) = (\psi - N\phi)\hat{P}_\psi + \phi\hat{P}_\phi, \quad (5.207)$$

com as respectivas equações de transformação

$$P_\psi = \frac{\partial F_2}{\partial \psi} = \hat{P}_\psi, \quad P_\phi = \frac{\partial F_2}{\partial \phi} = -N\hat{P}_\psi + \hat{P}_\phi, \quad (5.208)$$

$$\hat{\psi} = \frac{\partial F_2}{\partial \hat{P}_\psi} = \psi - N\phi, \quad \hat{\phi} = \frac{\partial F_2}{\partial \hat{P}_\phi} = \phi, \quad (5.209)$$

$$\hat{H} = \bar{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \bar{H}. \quad (5.210)$$

Aplicando estas equações em (5.204) a nova Hamiltoniana será

$$\hat{H} = \frac{k_z^2 \hat{P}_\psi^2}{2m} - \Omega(\hat{P}_\phi - N\hat{P}_\psi) - \omega\hat{P}_\psi + e\Phi_0 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_\ell(k_\perp \rho) \sin[\hat{\psi} - (\ell - N)\hat{\phi}]. \quad (5.211)$$

Como $d\hat{\psi}/dt = 0$ na ressonância exata, $\hat{\psi}$ é o ângulo lento, ao passo que $\hat{\phi}$ é o ângulo rápido. Fazendo uma média sobre este último resulta que sobrevive apenas o termo ressonante, para o qual $\ell = N$, enquanto os demais termos (não-ressonantes) anulam-se em média,

$$\langle \hat{H} \rangle_{\hat{\phi}} = \frac{k_z^2 \hat{P}_\psi^2}{2m} - \Omega(\hat{P}_\phi - N\hat{P}_\psi) - \omega\hat{P}_\psi + e\Phi_0 \mathcal{J}_N(k_\perp \rho) \sin \hat{\psi}. \quad (5.212)$$

Fazendo um deslocamento na origem do novo ângulo $\hat{\psi}' = \hat{\psi} + \pi/2$ resulta

$$\hat{H} = \frac{k_z^2 \hat{P}_\psi^2}{2m} - \Omega (\hat{P}_\phi - N\hat{P}_\psi) - \omega \hat{P}_\psi + e\Phi_0 \mathcal{J}_N(k_\perp \rho) \cos \hat{\psi}', \quad (5.213)$$

que tem a mesma forma da Hamiltoniana truncada (5.190), sem o termo $H_{0,0}$, e onde

$$2\varepsilon H_{r,-s} \rightarrow e\Phi_0 \mathcal{J}_N(k_\perp \rho(P_\phi)). \quad (5.214)$$

Como a Hamiltoniana (5.213) não depende explicitamente de $\hat{\phi}$ o momentum canonicamente conjugado é uma constante do movimento dada, por (5.208), como

$$\hat{P}_\phi = N\hat{P}_\psi + \hat{P}_\phi = \text{const.} \quad (5.215)$$

Por simplicidade de notação, denotaremos ψ' por ψ daqui por diante. Os pontos de equilíbrio $(\hat{P}_\psi^*, \hat{\psi}^*)$ são determinados por (5.191)³

$$\left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{\psi}} \right)_{(\hat{P}_\psi^*, \hat{\psi}^*)}, \quad \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{P}_\psi} \right)_{(\hat{P}_\psi^*, \hat{\psi}^*)} = 0. \quad (5.216)$$

A primeira delas nos leva a $\hat{\psi} = 0, \pm\pi$, enquanto a segunda relação ,

$$\frac{k_z^2}{m} (\hat{P}_\psi^*)^2 - N\Omega - \omega = \mp e\Phi_0 \left(\frac{\partial \mathcal{J}_N(k_\perp \rho)}{\partial \hat{P}_\psi} \right)_{\hat{P}_\psi^*}, \quad (5.217)$$

determina implicitamente \hat{P}_ψ^* , lembrando que o raio de Larmor é escrito como

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{m\Omega}} (\hat{P}_\phi - N\hat{P}_\psi)^{1/2}. \quad (5.218)$$

Definindo $\Delta\hat{P}_\psi = \hat{P}_\psi - \hat{P}_\psi^*$ e expandindo a Hamiltoniana (5.213) em série de Taylor em torno da ressonância exata, obtemos assim a Hamiltoniana do pêndulo (5.198)

$$\Delta\hat{H} = \frac{1}{2} G (\Delta\hat{P}_\psi)^2 - F \cos \hat{\psi}, \quad (5.219)$$

onde, de (5.199), (5.200) e (5.214),

$$G = \left(\frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial \hat{P}_\psi^2} \right)_{\hat{P}_\psi^*} = \frac{k_z^2}{m}, \quad (5.220)$$

$$F = -e\Phi_0 \mathcal{J}_N(k_\perp \rho(\hat{P}_\psi^*)). \quad (5.221)$$

Usando (7.28), a frequência do movimento na vizinhança do ponto elíptico em $\hat{\psi}^* = 0$ é

$$\hat{\omega}_\psi = \left| \frac{e\Phi_0}{m} \mathcal{J}_N(k_\perp \rho_0) k_z^2 \right|^{1/2}, \quad (5.222)$$

onde $\rho_0 = \rho(\hat{P}_\psi^*)$. A excursão máxima do deslocamento do momentum ao longo da separatriz é, de (5.203):

$$(\Delta\hat{P})_{\max} = \frac{2\hat{\omega}_\psi}{G}. \quad (5.223)$$

A ressonância para $n = N$ tem um ponto hiperbólico em $\hat{P}_\Psi = (\hat{P}_\Psi^*)_N$, $\hat{\Psi} = \pm\pi$. Portanto, a separação entre duas ressonâncias adjacentes é

$$\delta\hat{P}_\Psi^* = (\hat{P}_\Psi^*)_{N+1} - (\hat{P}_\Psi^*)_N = \frac{m\Omega}{k_z^2}. \quad (5.224)$$

A razão entre a soma das amplitudes de duas ressonâncias adjacentes e a separação entre elas é

$$S = \frac{2(\Delta\hat{P})_{max}}{\delta\hat{P}_\Psi^*} = \frac{4\hat{\omega}_\Psi}{\Omega}. \quad (5.225)$$

Como veremos nos capítulos seguintes, este parâmetro é de grande importância no estudo da superposição de ressonâncias em sistemas não-integráveis.

5.15 Problemas

1. Considere a Hamiltoniana de Toda (5.6). Faça uma transformação canônica

$$(\mathbf{p}, \phi) \rightarrow (\mathbf{P}, \Phi)$$

usando a função geratriz de segunda espécie

$$F_2 = P_1\phi_1 + P_2\phi_2 + (P_3 - P_1 - P_2)\phi_3$$

e mostre que a quantidade $P_3 = p_1 + p_2 + p_3$ é uma constante do movimento.

2. Considere a Hamiltoniana do oscilador harmônico

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 = \frac{1}{2m}p^2 + \varepsilon \frac{m\omega_0^2}{2}q^2,$$

como uma perturbação da partícula livre. (a) Resolva a equação de Hamilton-Jacobi e obtenha a função principal de Hamilton para a partícula livre; (b) Use a Teoria de Perturbações dependentes do tempo para obter $q(t)$ e $p(t)$ até primeira ordem em ε .

3. A Hamiltoniana de um oscilador anarmônico unidimensional é

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 = \frac{G}{2}p^2 + \frac{F}{2}q^2 + \lambda q^3 + \sigma q^4,$$

onde λ e σ são suficientemente pequenos. Considerando H_0 a parte relativa ao oscilador harmônico, use a Teoria de Perturbações dependentes do tempo para obter a frequência média do sistema perturbado em primeira ordem em ε .

4. A Hamiltoniana de um pêndulo simples é, expandindo o cosseno em série de potências,

$$H = \frac{1}{2}Gp^2 - F \cos \phi = \frac{1}{2}Gp^2 - F \left\{ 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots \right\}.$$

Considerando H_0 como a Hamiltoniana para o oscilador harmônico, use a Teoria de Perturbações dependentes do tempo para obter a frequência média do sistema perturbado em primeira ordem em ε .

5. Repita o problema anterior, empregando agora a Teoria Canônica de Perturbações para obter as correções à frequência do pêndulo até segunda ordem.
6. Considere o problema de Kepler com uma perturbação central do tipo

$$\varepsilon H_1 = -\frac{h}{r^2}.$$

Obtenha, em primeira ordem de perturbação, a frequência de precessão do plano da órbita.

7. Resolva, em primeira ordem de perturbação, o oscilador harmônico tridimensional anisotrópico com a perturbação

$$H_1 = \omega_x^2 \omega_y^2 \omega_z^2 x^2 y^2 z^2.$$