

Capítulo 7

Órbitas caóticas

O objetivo deste Capítulo é discutir a noção de comportamento caótico no contexto de sistemas Hamiltonianos, concentrando nossa atenção em mapas bidimensionais conservativos, usando principalmente o mapa padrão como exemplo representativo. Na sequência exibiremos outros sistemas onde o comportamento caótico existe de forma local e global, enfatizando as consequências físicas deste fato.

7.1 Caos determinístico

Para definir o comportamento caótico de um sistema dinâmico é conveniente empregar um mapa unidimensional, que tem um tratamento matemático mais simples, em comparação aos mapas bidimensionais que introduzimos no Capítulo anterior. Em particular, centralizaremos nossa atenção num mapa linear por partes, para o qual o comportamento caótico pode ser ilustrado de forma simples e direta.

7.1.1 O mapa do deslocamento

Seja $x_n \in [0, 1)$ uma variável a tempo discreto $n = 0, 1, 2, \dots$. O mapa do deslocamento é um mapa linear por partes, na forma

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \text{se } 0 \leq x_n < 1/2 \\ 2x_n - 1 & \text{se } 1/2 \leq x_n < 1. \end{cases} \quad (7.1)$$

que pode, também, ser expresso como $f(x) = 2x, (\text{ mod } 1)$. Por exemplo, $1, 2(\text{ mod } 1)$ é igual a $0, 2$, de modo que, com este procedimento, garantimos que todos os valores de x_n pertencem ao intervalo $[0, 1)$.

Dada uma condição inicial $x_0 \in [0, 1]$, os valores subseqüentes de x_n são obtidos iterando o mapa (??) produzindo os valores

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^{[2]}(x_0), \dots \quad (7.2)$$

onde usamos a mesma notação da seção 6.8, de modo que, para um tempo arbitrário n , temos a n -ésima iterada do mapa

$$x_n = f^{[n]}(x_0). \quad (7.3)$$

Há, porém, uma diferença essencial com os mapas de Poincaré estudados no Capítulo anterior, pois o mapa de Bernoulli *não é inversível*, de modo que não há uma única iterada inversa a partir de um dado ponto x_0 .

Um ponto fixo x^* do mapa logístico satisfaz a condição (6.103)

$$x^* = f(x^*) \quad (7.4)$$

que tem como única raiz $x^* = 0$. Fazendo uma análise de estabilidade similar à mostrada no Capítulo 6, mostramos que $x^* = 0$ é um ponto fixo instável pois $|f'(x^*)| = 2 > 1$.

Analogamente, podemos definir órbitas de período m para o mapa (7.1), consistindo dos pontos $\{x_0^*, x_1^*, \dots, x_{m-1}^*\}$. Conforme (6.108), os pontos dessa órbita periódica são pontos fixos da m -ésima iterada do mapa. Também são instáveis todas as órbitas periódicas de períodos m arbitrariamente grandes.

As condições iniciais que levam a órbitas periódicas, no mapa do deslocamento, são *atípicas* no seguinte sentido: se formos escolher aleatoriamente um número x no intervalo $[0, 1]$, a probabilidade de que este número seja atípico é igual a zero. Por conseguinte, valores típicos de x não pertencem a órbitas periódicas para o mapa do deslocamento.

Para investigar o que ocorre com as órbitas que não são periódicas, podemos iterar o mapa (7.1) a partir de uma condição inicial que não pertença a alguma órbita periódica. Por exemplo, se $x_0 = \pi - 3$ mostramos na Figura ??(a) as 100 primeiras iterações do mapa do deslocamento.

Uma inspeção superficial do comportamento das iteradas do mapa revela a ausência de periodicidade, ou seja, um comportamento aperiódico. Se considerássemos as mil primeiras iterações, a mesma conclusão seria obtida, e assim por diante, o que sugere que a sequência de pontos obtidas é aperiódica.

Outra propriedade notável da órbita aperiódica gerada por x_0 é a chamada *dependência sensível às condições iniciais*. Se consideramos uma segunda condição inicial x'_0 , muito próxima a x_0 , e acompanhamos as iterações subsequentes do mapa, após um certo número $n = N$ delas, as órbitas tornam-se muito diferentes entre si.

7.1.2 Expoente de Lyapunov

Uma forma de quantificar a propriedade de dependência sensível às condições iniciais consiste em calcular o chamado *expoente de Lyapunov* λ para o mapa. Ele mede a taxa de divergência exponencial de duas órbitas que se originam de condições iniciais muito próximas. Em termos quantitativos, portanto, a dependência sensível às condições iniciais existe se $\lambda > 0$ para órbitas provenientes de condições iniciais típicas.

Sejam, pois, x_0 e x'_0 as duas condições iniciais a que nos referimos. Elas são inicialmente muito próximas se a sua distância for

$$d_0 = |x_0 - x'_0| \ll |x_0|. \quad (7.5)$$

Após n iterações do mapa $f(x)$ os pontos correspondentes da órbita serão x_n e x'_n , respectivamente, tal que sua distância mútua será

$$d_n = |x_n - x'_n| = \left| f^{[n]}(x_0) - f^{[n]}(x'_0) \right|. \quad (7.6)$$

Supomos que a distância após n iterações esteja relacionada à distância inicial pela relação

$$d_n \sim d_0 e^{\lambda n}, \quad (7.7)$$

onde o símbolo \sim indica que esta relação não é rigorosamente verdadeira, pois uma determinação precisa do expoente de Lyapunov λ deve levar em conta duas exigências adicionais:

1. devemos tomar o limite do tempo n infinitamente grande,

2. é necessário tomar o limite quando $d_0 \rightarrow 0$, indicando que as duas condições iniciais devem ser infinitamente próximas,

que nos conduzem à seguinte definição

$$\lambda = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{d_n}{d_0} \right). \quad (7.8)$$

Substituindo (7.6) em (7.33), e permutando os limites

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{d_0 \rightarrow 0} \ln \left| \frac{f^{[n]}(x_0) - f^{[n]}(x'_0)}{d_0} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{f^{[n]}(x_0) - f^{[n]}(x'_0)}{x_0 - x'_0} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^{[n]}(x)}{dx_0} \right|, \end{aligned} \quad (7.9)$$

onde aplicamos a definição de derivada à n -ésima iterada da função f . Usando a regra da cadeia e o princípio de indução, pode-se mostrar que

$$\left(f^{[n]}(x_0) \right)' = f'(x_0)f'(x_1)f'(x_2) \dots f'(x_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i), \quad (7.10)$$

de modo que (7.9) resulta em

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Como, para o mapa do deslocamento, $f'(x) = 2$ para “quase todo” $x \in [0, 1)$ ¹, a expressão acima mostra que o expoente de Lyapunov é $\lambda = \ln 2$, reforçando a presença de sensibilidade às condições iniciais.

É instrutivo verificar o que ocorre se o mapa tiver órbitas periódicas estáveis. Seja uma órbita de período m , representada pelos pontos $\{x_0^*, x_1^*, \dots, x_{m-1}^*\}$. Substituindo em (7.11), o expoente de Lyapunov não precisa levar em conta o limite de tempo infinito,

$$\lambda = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \ln |f'(x_i)| < 0, \quad (7.12)$$

pois $|f'(x_i)| < 1$ para todos os pontos de uma órbita periódica estável, ou seja, não há dependência sensível às condições iniciais. Caso $f'(x_i) = 0$ para algum dos pontos da órbita, então λ tende para $-\infty$, o que caracteriza uma órbita super-estável.

¹O termo “quase todo” significa que estamos excetuando um conjunto atípico de pontos pertencentes a órbitas periódicas instáveis.

7.1.3 Definição matemática de caos

A simplicidade do mapa do deslocamento (7.1) permite a demonstração rigorosa de algumas propriedades [vide [?] e [?]]:

1. as órbitas periódicas instáveis são *densas*: o conjunto A de órbitas é denso em $[0, 1]$ se todo ponto do intervalo $[0, 1]$ ou pertence a A ou então é arbitrariamente próximo a um membro de A . Em outras palavras, dentro de uma distância suficientemente pequena de alguma órbita periódica sempre existirá outra;

2. o mapa f é *transitivo*: para todos os pares de sub-intervalos abertos $A, B \subset [0, 1]$ existirá um inteiro n tal que

$$f^{[n]}(A) \cap B \neq \emptyset,$$

ou seja, todo sub-intervalo A de $[0, 1]$ interceptará, mais cedo ou mais tarde, todo sub-intervalo B , quando acompanhamos as iterações diretas do mapa f .

3. o mapa f exibe *dependência sensível às condições iniciais*: existe um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in [0, 1]$ e qualquer vizinhança U de x , existe um $y \in U$ e $n \geq 0$ tal que $|f^{[n]}(x) - f^{[n]}(y)| > \delta$

R. Devaney define um sistema caótico a partir destas três propriedades:

1. as órbitas periódicas são densas,
2. o mapa é transitivo,
3. o sistema exibe dependência sensível às condições iniciais,

donde concluímos que o mapa do deslocamento exibe uma órbita caótica para condições iniciais “típicas” (ou seja, exceto pontos pertencentes a órbitas periódicas instáveis).

Para sistemas dinâmicos em geral, porém, é impossível demonstrar rigorosamente todas estas três propriedades. Consideraremos, aqui, uma definição “prática” de caos, baseada nas seguintes propriedades:

- aperiodicidade: as iterações x_n são irregulares, não tendo um período bem definido.
- sensibilidade às condições iniciais: verificamos a positividade do expoente de Lyapunov para condições iniciais típicas.

A necessidade de ambas as propriedades acima serem verificadas simultaneamente pode ser ilustrada pelo seguintes exemplos:

1. um ponto fixo instável x^* de um mapa (como $x^* = 0$ no mapa do deslocamento) apresenta sensibilidade às condições iniciais pois, se $x_0 = x^* + \epsilon$, onde $\epsilon \ll 1$, as iterações subsequentes do mapa afastam-se de x^* . No entanto, x^* não é uma condição inicial típica, pois trata-se de uma órbita periódica (de período 1).

2. consideremos o mapa unidimensional definido no intervalo $[0, 1]$

$$x_{n+1} = x_n + k, \quad (\text{ mod } 1), \quad (7.13)$$

onde $k \in [0, 1]$ é um número real. Se k for um número racional da forma m/n (onde m e n são inteiros), a n -ésima iterada de uma condição inicial x_0 será

$$x_n = x_0 + nk = x_0 + m(\text{ mod } 1) = x_0, \quad (7.14)$$

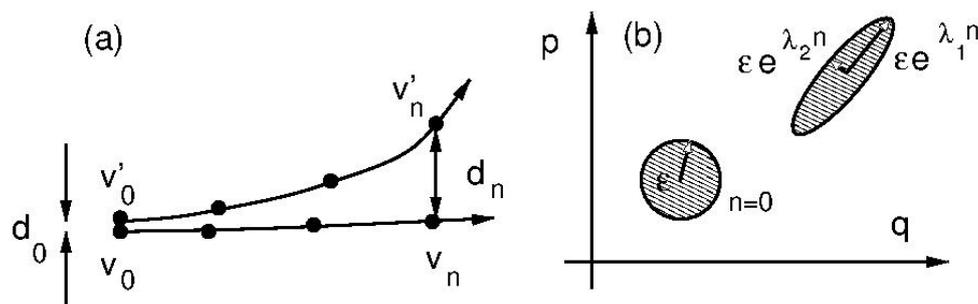


Figura 7.1: (a) Separação exponencial de trajetórias inicialmente muito próximas. (b) Expoentes de Lyapunov para um mapa bidimensional.

de modo que x_0 pertence a uma órbita de período n . Mas se k for um número irracional, as sucessivas iteradas de um ponto x_0 preencherão densamente o intervalo $[0, 1]$. A ausência de periodicidade não indica, porém, comportamento caótico, pois não há dependência sensível às condições iniciais. Tomando, por exemplo, duas delas tais que $d_0 = x_0 - x'_0$, após n iterações teremos

$$d_n = x_n - x'_n = x_0 + nk - x'_0 - nk = d_0, \quad (7.15)$$

de sorte que o expoente de Lyapunov é nulo. Órbitas com esta propriedade são chamadas *quase-periódicas*.

7.2 Caos em mapas bidimensionais conservativos

Em mapas bidimensionais conservativos, da classe dos que foram estudados no Capítulo 6 para a descrição de sistemas Hamiltonianos quase-integráveis,

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{v}_n), \quad (7.16)$$

também podemos definir órbitas caóticas. Na prática, assim como em mapas unidimensionais, serão verificadas as duas propriedades básicas: (i) aperiodicidade, (ii) dependência sensível às condições iniciais.

A aperiodicidade de uma órbita pode ser verificada, por exemplo, pela análise de Fourier. Se uma órbita for periódica, as componentes de frequência associadas aos períodos característicos irão se manifestar como picos no espectro de Fourier respectivo (bem como seus harmônicos). Órbitas quase-periódicas, por sua vez, geram uma estrutura complicada de picos que é aperiódica, sem ser caótica.

Já as órbitas caóticas têm um espectro de Fourier do tipo banda-larga. No entanto, a análise de Fourier não é capaz de distinguir órbitas caóticas de processos estocásticos (não-determinísticos), para os quais o comportamento aperiódico resulta de causas extrínsecas, ao passo que o caos deriva de causas intrínsecas, ligadas à não-linearidade das equações que governam a evolução do sistema.

A sensibilidade às condições iniciais, para de mapas bidimensionais conservativos, também pode ser quantificada pelos expoentes de Lyapunov. Haverá, neste caso, dois expoentes de Lyapunov λ_1 e λ_2 , que usualmente ordenamos pelo valor, de forma que λ_1 denota o expoente de Lyapunov máximo.

Analogamente ao caso unidimensional, consideramos duas condições iniciais \mathbf{v}_0 e \mathbf{v}'_0 muito próximas entre si, cuja distância no plano de fase é

$$d_0 = |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}'_0|, \quad (7.17)$$

Após n iterações do mapa \mathbf{F} , a distância entre os pontos das respectivas órbitas será

$$d_n = |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}'_n| \sim d_0 e^{\lambda_1 n}. \quad (7.18)$$

Para uma órbita caótica originada de uma condição inicial típica, a taxa de separação exponencial de trajetórias inicialmente muito próximas tem um valor positivo $\lambda_{max} = \lambda_1 > 0$, dado por uma expressão similar a (7.33).

Com o objetivo de determinar o segundo expoente de Lyapunov, vamos considerar um disco de condições iniciais no plano de fase, centrado na condição inicial \mathbf{v}_0 , e com raio igual ε , que representa a separação inicial entre as condições iniciais, dada por d_0 . A área do disco é $A_0 = \pi\varepsilon^2$.

A imagem, pelo mapa \mathbf{F} , do disco circular é uma elipse cujos semi-eixos são dados por [Fig. 7.1(b)]

$$a_n = \varepsilon e^{\lambda_1}, \quad b_n = \varepsilon e^{-\lambda_1}, \quad (7.19)$$

e cuja área é

$$A_n = \pi a_n b_n = \pi \varepsilon^2 e^{\lambda_1 + \lambda_2} = A_0 e^{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (7.20)$$

Como o mapa \mathbf{F} preserva áreas no plano de fase, então $A_n = A_0$, implicando na condição $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Assim, $\lambda_2 = -\lambda_1$. Se a órbita for caótica, $\lambda_1 > 0$, de maneira que $\lambda_2 < 0$.

O fato de uma órbita ser caótica influencia de maneira direta nossa habilidade de prever o estado futuro do sistema. Se $\lambda_1 > 0$, qualquer incerteza na determinação da condição inicial será amplificada com o passar do tempo a uma taxa exponencial, podendo levar a uma indeterminação tão grande que impeça, na prática, uma previsão do estado futuro para tempos arbitrariamente grandes. Este é o famoso “efeito borboleta”: uma minúscula (portanto indetectável) perturbação da condição inicial levará o sistema para um estado separado de uma distância da ordem do domínio da própria variável, tornando o estado final imprevisível.

Podemos estimar o tempo característico t_l para que essa condição ocorra. Quando a distância entre os pontos de duas órbitas inicialmente separadas por uma distância d_0 (identificada como a incerteza na determinação da condição inicial) crescer para um número da ordem de $d_n \sim 1$, a Equação (7.18) indica que este tempo é dado pela expressão

$$t_l = \frac{\ln(1/d_0)}{\lambda_1}, \quad (7.21)$$

ou seja, é da ordem do inverso do expoente de Lyapunov máximo.

Por exemplo, na iteração computacional de um mapa, usando aritmética de ponto flutuante, estimamos a incerteza na determinação de uma condição inicial como $\delta_0 \sim 10^{-8}$. Se $\lambda_1 = 0,1$ então

$$t_l = \frac{\ln(10^8)}{0,1} \sim 184,$$

indicando que, após menos de duzentas iterações do mapa, a incerteza inicial terá aumentado para um número da ordem da unidade. Mesmo diminuindo a incerteza inicial d_0 , ainda assim haverá um tempo característico finito, que limita o horizonte de predição do estado futuro do sistema físico descrito pelo mapa \mathbf{F} .

7.3 Emaranhado homoclínico e camada estocástica

Tendo definido as órbitas caóticas para mapas bidimensionais conservativos, é importante agora esclarecer os mecanismos que levam a elas em sistemas Hamiltonianos não-integráveis. Em linhas gerais, órbitas caóticas estão associadas à presença do emaranhado homoclínico, conforme o definimos no final do Capítulo anterior.

Recordemos as ideias principais envolvidas nessa conexão. Para um mapa bidimensional conservativo, um ponto de sela (ou ponto hiperbólico) é um ponto fixo instável ou pertence a uma órbita periódica instável. Dele emanam duas curvas a que chamamos variedades estável e instável. Estas variedades são invariantes pois, uma condição inicial que pertença a alguma delas, terá iteradas diretas e inversas que continuam pertencendo às variedades.

Num sistema integrável, como o pêndulo, as variedades invariantes que emanam dos pontos hiperbólicos interceptam-se suavemente, formando os dois ramos da separatriz. Para um sistema não-integrável, no entanto, as variedades instável e estável interceptam-se em um número infinito de pontos homoclínicos (se as variedades emanam do mesmo ponto) ou heteroclínicos (se são de pontos distintos). Devido à propriedade conservativa dos mapas, as variedades interceptam-se de modo bastante complicado, formando o chamado emaranhado homoclínico (ou heteroclínico).

A relação entre o emaranhado homoclínico e o comportamento caótico, inicialmente apenas vislumbrada por Poincaré, somente foi matematicamente estabelecida pelo trabalho de Stephen Smale, que idealizou no Rio de Janeiro, por volta de 1965, a chamada *ferradura* [84]. A ferradura de Smale, denotada Λ , é um conjunto invariante não-atrativo Λ denominado *ferradura* [84]. Uma exposição detalhada da construção da ferradura está fora do escopo deste livro, mas pode ser encontrada, por exemplo nas referências [19] (seção 4.1). Para nossos propósitos é suficiente enunciar algumas propriedades da ferradura de Smale Λ :

1. Λ contém um conjunto enumerável de órbitas periódicas de períodos arbitrariamente grandes,
2. Λ contém um conjunto não-enumerável de órbitas não-periódicas limitadas,
3. Λ contém uma órbita densa.

O chamado teorema de Birkhoff-Smale estabelece que, se houver um ponto homoclínico \mathbf{h} para um mapa \mathbf{F} (e, por extensão, um emaranhado homoclínico associado), então existe um inteiro n para o qual $\mathbf{F}^{[n]}$ terá uma ferradura Λ . Na prática, isto significa que uma órbita do mapa \mathbf{F} , cuja condição inicial esteja numa vizinhança do emaranhado homoclínico, será caótica.

No Capítulo anterior, vimos que um paradigma de um sistema quase-integrável é o mapa twist perturbado

$$J_{1,n+1} = J_{1,n} + \varepsilon \mathcal{F}(J_{1,n+1}, \theta_{1,n}), \quad (7.22)$$

$$\theta_{1,n+1} = \theta_{1,n} + 2\pi\alpha(J_{1,n+1}) + \varepsilon \mathcal{G}(J_{1,n+1}, \theta_{1,n}). \quad (7.23)$$

Quando $\varepsilon = 0$ o sistema torna-se integrável, e as respectivas trajetórias no espaço de fase têm a topologia de toros. Conforme o valor do número de rotação α o toro é racional ou irracional, e o comportamento de ambos é diferente sob a influência de uma perturbação relativamente fraca ($\varepsilon \ll 1$) [Fig. 7.2]:

- os toros irracionais são, em sua maioria, preservados pela perturbação, podendo sofrer alterações de forma, mas não de topologia (teorema KAM);



Figura 7.2: Figura esquemática mostrando os aspectos básicos do comportamento do mapa twist perturbado.

- os toros racionais são todos destruídos. Na posição destes toros racionais aparece um número par de pontos fixos, metade elípticos e metade hiperbólicos (teorema de Poincaré-Birkhoff);
- nas vizinhanças dos pontos elípticos há toros que formam curvas fechadas na superfície de seção
- as variedades invariantes que emanam de pontos hiperbólicos adjacentes interceptam-se em um número infinito de pontos homoclínicos (emaranhado homoclínico)

A escolha da condição inicial (J_0, θ_0) no mapa do twist perturbado (8.162)-(7.23) é que determina qual das alternativas acima é verificada pelo sistema. Pelo Teorema KAM, o conjunto de condições iniciais que leva a toros irracionais é finito, ainda que diminua com o aumento da não-linearidade (representada por ε). Como o conjunto dos números racionais é denso, entre dois toros racionais há sempre um terceiro, de modo que a perturbação, destruindo todos eles, forma uma estrutura bastante complicada de pontos fixos (elípticos e hiperbólicos) previstos pelo teorema de Poincaré-Birkhoff.

Vamos considerar, agora, o que ocorre nas vizinhanças de um ponto fixo elíptico (J_1^*, θ_1^*) do mapa twist perturbado com $\varepsilon \ll 1$. Este ponto fixo provém do toro racional cujo número de rotação, que é a razão entre as frequências características, é um número na forma m/n , onde m e n são inteiros:

$$\alpha(J_1^*) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}. \quad (7.24)$$

Isto significa que as frequências são comensuráveis, pois $n\omega_1 - m\omega_2 = 0$, o que configura uma ressonância. No Capítulo 5 identificamos tais termos ressonantes como uma causa de divergências nas séries perturbativas (o problema dos pequenos denominadores). Uma estratégia que escolhemos para tratar este tipo de dificuldades consistiu em removermos a ressonância, e expandirmos a Hamiltoniana em torno dela.

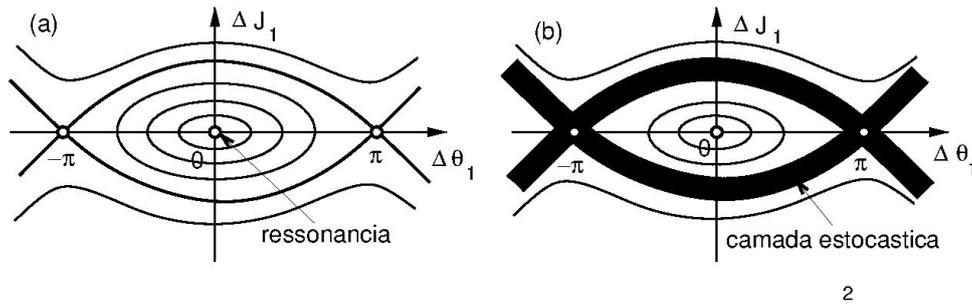


Figura 7.3: (a) Retrato de fase do pêndulo; (b) Camada estocástica.

Considerando uma ressonância centrada no ponto fixo elíptico (J_1^*, θ_1^*) , expandimos a Hamiltoniana nas suas vizinhanças:

$$J_1 = J_1^* + \Delta J_1, \quad \theta_1 = \theta_1^* + \Delta \theta_1, \quad (7.25)$$

de forma a obter a Hamiltoniana do pêndulo (5.198) nas variáveis $(\Delta J_1, \Delta \theta_1)$

$$\Delta H = \frac{1}{2}G(\Delta J_1)^2 - F \cos(\Delta \theta_1), \quad (7.26)$$

onde os coeficientes F e G são dados por (5.200) e (5.199), respectivamente. Nessa aproximação, as curvas fechadas são librações em torno do ponto elíptico, com uma separatriz que as segrega das curvas abertas (rotações). A separatriz, por sua vez, conecta suavemente as variedades estável e instável que emanam dos pontos fixos hiperbólicos que ladeiam o ponto elíptico (J_1^*, θ_1^*) [Fig. 7.3(a)].

A semi-largura de uma ilha centrada nesta ressonância é dada por (5.203) como

$$(\Delta J_1)_{max} = 2\sqrt{\frac{F}{G}}, \quad (7.27)$$

Como, de (5.200), o coeficiente F é proporcional a ε , resulta que a semi-largura da ilha aumenta com a intensidade da perturbação como $\varepsilon^{1/2}$. Na vizinhança do ponto elíptico as trajetórias fechadas correspondem a librações com uma frequência dada por (7.28)

$$\Delta \omega = \sqrt{FG}, \quad (7.28)$$

e que também cresce com a raiz quadrada de ε .

No entanto, é preciso lembrar que o procedimento de remover a ressonância associada ao toro racional torna o sistema artificialmente integrável, coisa que obviamente ele não é! Poincaré demonstrou que um dos efeitos mais importantes da não-integrabilidade é a existência do emaranhado homoclínico, resultante dos infinitos cruzamentos entre as variedades estável e instável dos pontos fixos hiperbólicos. Assim, no lugar da separatriz do pêndulo surge uma fina camada onde os pontos do mapa preenchem uma região finita, e cuja espessura aumenta com a intensidade da perturbação ε . Essa região é chamada de *camada estocástica* e contém o emaranhado homoclínico resultante das interseções entre as variáveis estável e instável do ponto fixo hiperbólico [Fig. 7.3(b)].

A estrutura de toros racionais e irracionais perturbados apresenta uma auto-similaridade, ou seja, toda a estrutura repete-se em escalas cada vez menores, *ad infinitum*. Por exemplo, os toros que envolvem os pontos elípticos no interior das ilhas também são mantidos ou destruídos conforme seu número de rotação, formando ilhas secundárias, e assim por diante. Portanto, a

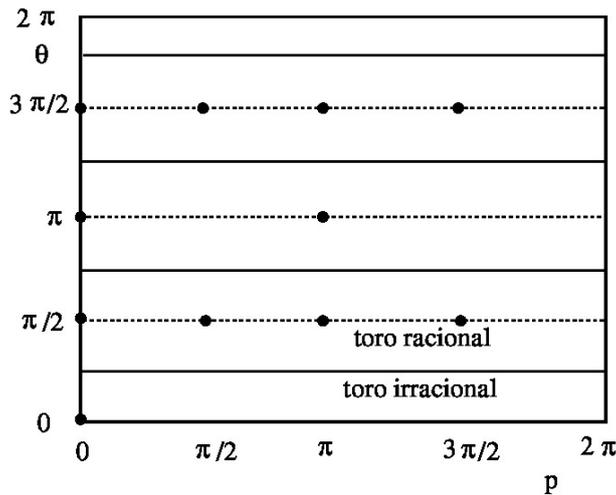


Figura 7.4: Retrato de fase (esquemático) do mapa padrão (7.29)-(7.30) para $K = 0$.

figura homoclínica que descrevemos está também presente em todas as escalas, criando uma estrutura extremamente complicada, que foi descrita por Poincaré da seguinte forma [cf. [88], seção 397]:

Se alguém busca visualizar o padrão formado por essas duas curvas e seu número infinito de interseções ... essas interseções formam uma espécie de treliça, uma trama, uma rede de elos de malha infinitamente fina; cada uma das duas curvas nunca pode se cruzar, mas deve dobrar-se sobre si mesma de uma maneira muito complicada, de modo a cruzar novamente todos os elos da cadeia um número infinito de vezes. ... Ficamos impressionados com a complexidade desta figura, que não estou nem tentando desenhar. Nada pode nos dar uma idéia melhor da complexidade do problema dos três corpos e de todos os problemas da dinâmica em geral...

Devido à auto-similaridade de toda a estrutura de toros destruídos e remanescentes em sistemas não-integráveis, resulta que movimentos periódicos e aperiódicos estão densamente entrelaçados.

7.4 Dinâmica do mapa padrão

O mapa padrão (6.151)-(6.152) foi introduzido, no Capítulo 6, como um paradigma para mapas de Poincaré de sistemas Hamiltonianos quase-integráveis:

$$I_{n+1} = I_n + K \sin \theta_n, \quad (7.29)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}, \quad (\text{mod } 2\pi), \quad (7.30)$$

onde I_n e θ_n representam as variáveis de ação e ângulo, respectivamente, da n -ésima interseção das trajetórias com a superfície de seção. A constante $K \geq 0$ indica a intensidade da perturbação não-integrável. Nesta seção vamos investigar a dinâmica do mapa padrão quando K é variado, para verificar as previsões feitas no Capítulo 6 sobre o comportamento de sistemas quase-integráveis.

7.4.1 Ilhas periódicas

A partir de uma condição inicial (I_0, θ_0) , os valores de (I_n, θ_n) são obtidos para os tempos subsequentes $n = 1, 2, \dots$ iterando-se as relações (7.29)-(7.30). O caso $K = 0$ nos conduz a um mapa *twist* da forma (6.53)-(6.54), para o qual o número de rotação é $\alpha = I_n/2\pi$. Assim, conforme o valor de $I_n = I_0$, o toro correspondente pode ser racional ou irracional. As interseções destes toros com a superfície de seção jazem sobre toros racionais, e correspondem a órbitas periódicas do mapa, e toros irracionais, relacionados a órbitas quase-periódicas. Alguns destes toros (ou curvas) são mostrados na Figura 7.4, onde optamos por representar as variáveis canônicas (I, θ) usando coordenadas retangulares ao invés de coordenadas polares, pela facilidade de visualização.

Alguns dos toros gerados por condições iniciais selecionados são os seguintes:

1. $I_0 = 0$: como existe um ponto fixo em $(I^* = 0, \theta^* = 0)$, que coincide com o ponto $(0, 2\pi)$ devido à periodicidade em θ do mapa, podemos dizer que I_0 pertence a um toro racional com número de rotação será $\alpha = 0$,
2. $I_0 = \pi$ gera uma órbita pertencente a um toro racional com número de rotação $\alpha = 1/2$. Para cada condição inicial θ_0 teremos uma órbita de período 2 formada pelos pontos

$$\theta_1 = \theta_0 + \pi, \quad \theta_2 = \theta_0 + 2\pi = \theta_0, \dots$$

representada pela sequência (A, B, A, B, \dots) na Fig. 7.4;

3. $I_0 = \pi/2$ haverá quatro pontos no toro racional correspondente, na sequência $(C, D, E, F, C, D, E, \dots)$, pertencentes a uma órbita de período 4. A mesma situação ocorre para $I_0 = 3\pi/2$, com a diferença que os pontos da órbita correspondente,

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \frac{3\pi}{2}, \quad \theta_2 = \pi, \quad \theta_3 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_4 = 2\pi = \theta_0,$$

apresentam uma sequência diferente: $(C', D', E', F', C', D', \dots)$.

4. $I_0 = 1$ corresponde a um número de rotação irracional ($\alpha = 1/2\pi$) e, portanto, as iterações subsequentes estão sobre um toro irracional. O mesmo vale para outras condições iniciais mostradas na Fig. 7.4, como $5/2$, 4 e $11/5$. Os pontos preenchem densamente o toro para um grande número de iterações, de maneira que a interseção do mesmo com a superfície de seção é indistinguível de um segmento contínuo de reta.

Para $K \neq 0$ o sistema é não-integrável, em geral. Dada uma condição inicial (I_0, θ_0) nós determinamos uma trajetória (ou órbita) (I_n, θ_n) para um número suficientemente grande de iterações do mapa. Cada condição inicial (I_0, θ_0) produz uma órbita diferente. O conjunto de órbitas, para um dado valor de K , é também chamado retrato de fase do mapa.

Na Figura 7.5(a) mostramos um retrato de fase para $K = 0,5$, construído a partir de um certo número de condições iniciais. De acordo com o Teorema de Poincaré-Birkhoff, o toro racional com $\alpha = 1/1$ (ou $s = 1$) que o sistema não-perturbado exibia em $I = 0$ será destruído pela perturbação, e restarão $2s = 2$ pontos fixos, um elíptico e outro hiperbólico. No Capítulo 6 mostramos que a estrutura em torno do ponto elíptico $(I^* = 0, \theta^* = \pi)$ é do tipo pendular, o que é confirmado pela Fig. 7.5. A estrutura pendular é também conhecida como *ilha periódica*. Devido à periodicidade existente também na variável I , a outra metade da ilha está simetricamente centrada em $I = 2\pi$.

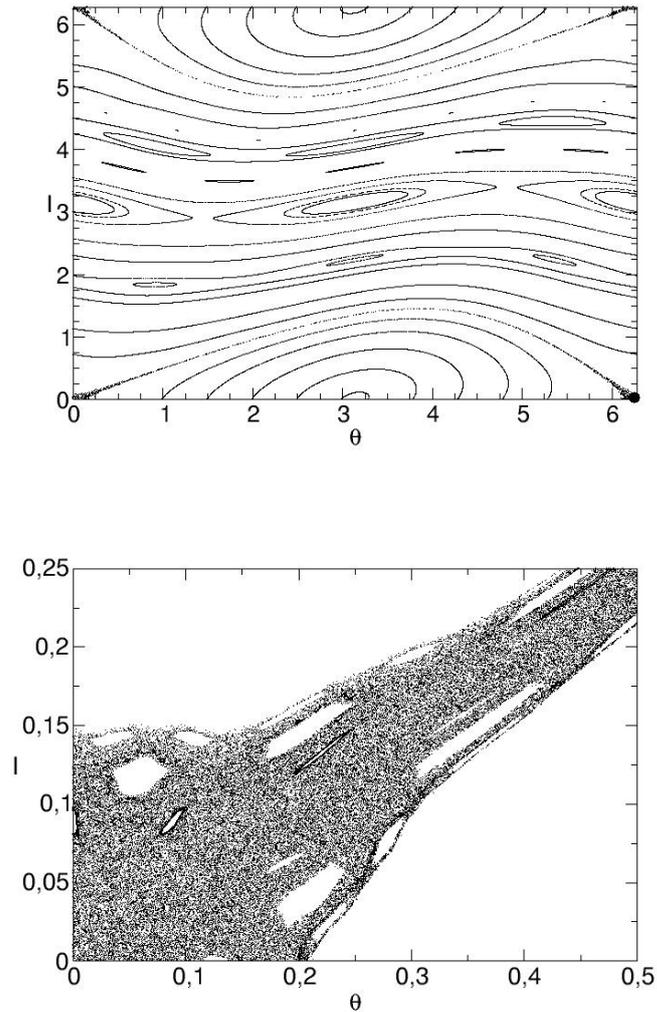


Figura 7.5: (a) Retrato de fase do mapa padrão (7.29)-(7.30) para $K = 0,5$. (b) Ampliação da região próxima a um ponto fixo hiperbólico.

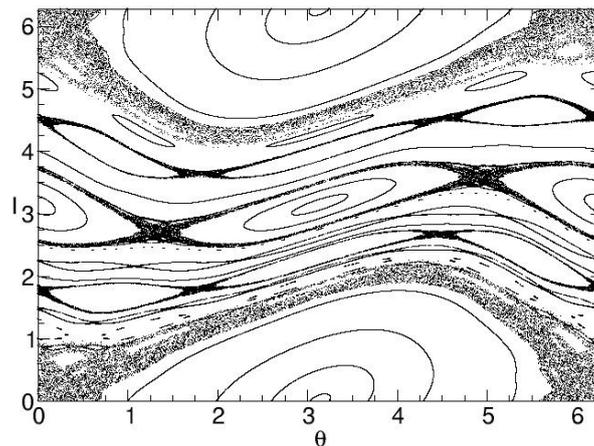


Figura 7.6: Retrato de fase do mapa padrão (7.29)-(7.30) para $K = 0,97$.

Dos pontos hiperbólicos ($I^* = 0, \theta^* = 0, \pi$) emanariam as separatrizes do pêndulo mas, como o sistema é não-integrável para $K \neq 0$, aparece no lugar da separatriz uma finíssima camada estocástica, que é mais evidente fazendo uma ampliação da região do plano de fase próxima à origem [Fig. 7.5(b)]

Outro exemplo deste fenômeno ocorre para o toro racional com $\alpha = 1/2$ (ou $s = 2$) que, para o sistema não-perturbado, ocorre em $I = \pi$. Quando perturbado, este toro desaparece restando $2s = 4$ pontos fixos, dois elípticos, situados em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ e dois hiperbólicos, em $\theta = \pi/2$ e $3\pi/2$ (na verdade, estes pontos elípticos e hiperbólicos forma duas órbitas de período 2). Em volta dos pontos elípticos temos a mesma estrutura de curvas fechadas característica de ilhas periódicas. A largura destas ilhas é bem menor do que aquelas centradas em $I = 0$, e suas camadas estocásticas são tão finas que praticamente não são distinguíveis de separatrizes.

Na Fig. 7.5 podemos observar, ainda, duas cadeias de ilhas com três ilhas cada uma, que aparecem no lugar de um toro racional com $s = 3$ que foi destruído. Essas duas cadeias têm larguras ainda menores do que a anterior, sugerindo que a largura de uma ilha periódica (para um dado valor de K) diminui com o aumento do período das órbitas correspondentes. Como o conjunto dos números racionais no intervalo $[0, 2\pi]$ é denso, há um número infinito de cadeias de ilhas periódicas, embora a grande maioria delas tenha larguras tão pequenas que são difíceis de observar, a não ser com cuidadosas ampliações dos retratos de fase.

Distribuídos de forma também densa neste intervalo, os números irracionais correspondem a toros irracionais que sobrevivem à perturbação, desde que ela não seja muito forte, e que seu número de rotação seja suficientemente irracional, no sentido preconizado pelo Teorema KAM. Na Fig. 7.5 podemos constatar que os toros irracionais que sobrevivem à perturbação sofrem deformações.

7.4.2 Caos local e global

O retrato de fase do mapa padrão para $K = 0,97$, ilustrado pela Fig. 7.6, reforça estas constatações: as cadeias de uma, duas e três ilhas periódicas anteriormente descritas têm sua largura aumentada, bem como a espessura das respectivas camadas estocásticas. Outras cadeias de ilhas com

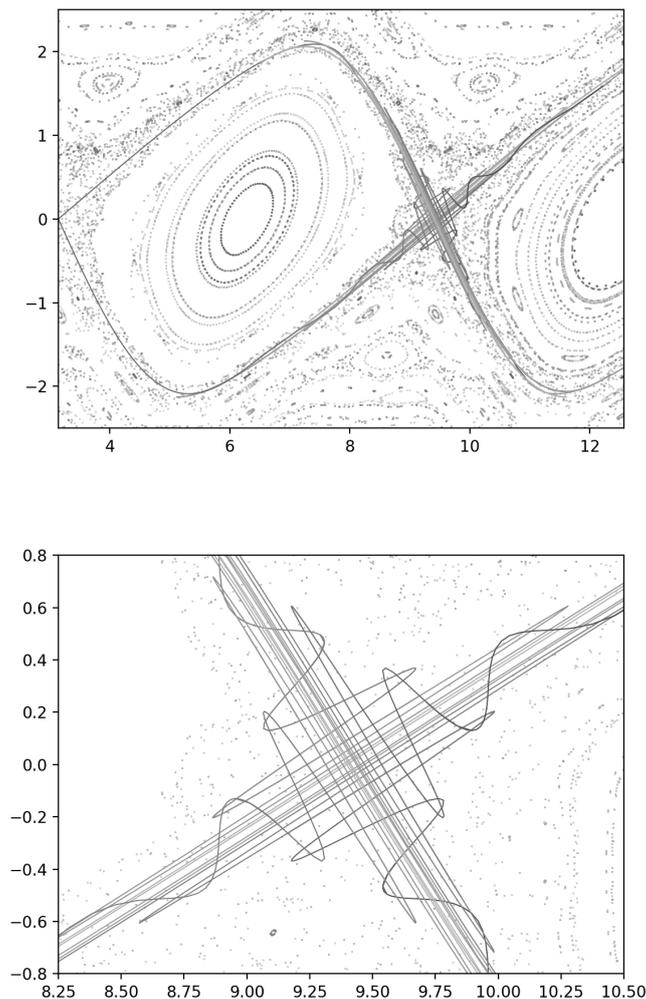


Figura 7.7: (a) Variedades invariantes no retrato de fase do mapa padrão para $K = 0,97$. A escala horizontal foi ampliada para melhor visualização; (b) Ampliação da região próxima a um ponto fixo hiperbólico.

períodos maiores também podem ser identificadas. Como existem toros irracionais deformados (gerando, nos retratos de fase, as chamadas *curvas invariantes* ou *curvas KAM*) entre estas cadeias de ilhas, a excursão máxima de uma órbita caótica, cuja condição inicial pertence ao interior da camada estocástica, limita-se à largura da ilha correspondente. Dizemos que, neste caso, o caos é *local*, pois restringe-se (nos valores da ação I) a uma dada cadeia de ilhas.

Nas camadas estocásticas das ilhas periódicas, as trajetórias são caóticas graças à existência dos emaranhados homoclínicos e heteroclínicos. Na Figura 7.8(a), onde a escala horizontal foi deslocada e ampliada para maior facilidade de visualização, mostramos as variedades invariantes estável e instável que emanam do ponto hiperbólico em $(I^* = 0, \theta^* = 3\pi/2)$. Como sugerido pela ampliação da vizinhança do ponto hiperbólico [Fig. 7.8(b)], as variedades estável e instável cruzam-se um número infinitamente grande de vezes, formando um emaranhado heteroclínico que leva ao aparecimento da camada estocástica da respectiva cadeia de ilhas periódicas.

Na medida em que aumentam os valores do parâmetro K , observa-se que as cadeias de ilhas associadas a toros racionais vão progressivamente se alargando, com o respectivo alargamento

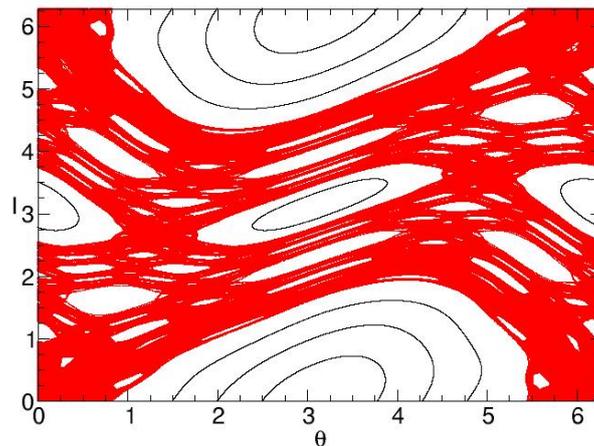


Figura 7.8: Retrato de fase do mapa padrão (7.29)-(7.30) para $K = 1,0$.

das suas camadas estocásticas. Além disso, como o intervalo de definição da ação é limitado, os toros irracionais remanescentes vão sendo “empurrados” pelo alargamento das ilhas, assim como também vão sendo gradualmente destruídos pela perturbação. Estes efeitos fazem com que as camadas estocásticas de cadeias adjacentes de ilhas periódicas comecem a se fundir, o que leva a um aumento da excursão em I das órbitas caóticas.

Para valores de K acima de um dado valor crítico K_c , desaparecerão todos os toros irracionais entre as duas metades da ilha principal (correspondente ao ponto fixo $I^* = 0, 2\pi$). As camadas estocásticas em ambas as metades fundem-se completamente para $K > K_c$, provocando um grande (e súbito) aumento na excursão em I das órbitas caóticas, o que denominamos *caos global*. Esta situação é exemplificada pelo retrato de fase mostrado na Fig. 7.8, obtida para $K = 1,0$: uma única órbita caótica, cuja condição inicial pertence a uma das camadas estocásticas, tem uma excursão em I da ordem de todo o intervalo $[0, 2\pi)$.

De acordo com o teorema KAM, os toros irracionais vão sendo destruídos pela perturbação de acordo com o valor do seu número de rotação α . Sobrevivem, para um dado $K < K_c$, apenas os valores de α suficientemente irracionais. A partir desta premissa, John Greene, em 1979, determinou que $K_c = 0,971635\dots$, considerando que o último toro irracional a ser destruído pela perturbação corresponde à média áurea $\phi = (\sqrt{5} - 1)/2$ (o chamado *toro nobre*), considerado o mais irracional de todos.

Para valores ainda maiores de K observamos o aumento da área preenchida por uma órbita caótica do mapa padrão. Quando $K = 2,6$, por exemplo, é possível ainda observar remanescentes da ilha principal e algumas ilhas satélites, resultam da existência de ressonâncias secundárias [Fig. 7.9(a)]. Dentro de uma ilha, as trajetórias fechadas em torno do ponto elíptico correspondem a oscilações limitadas com frequência $\Delta\omega$ dada por 7.28, e que é proporcional à raiz quadrada da intensidade da perturbação. As ressonâncias secundárias ocorrem entre uma das frequências principais, como ω_1 e a frequência da ilha $\Delta\omega$.

Valores muito altos de K , como 7,0 [Fig. 7.9(b)], são tais que praticamente toda a região do plano de fase é preenchida por uma única órbita caótica. Na análise linear de estabilidade dos pontos fixos do mapa padrão vimos que, para $K > 4$, o ponto fixo em $\theta = \pi$ torna-se instável (hiperbólico). Para valores maiores ainda, outras órbitas periódicas vão se tornando, também,

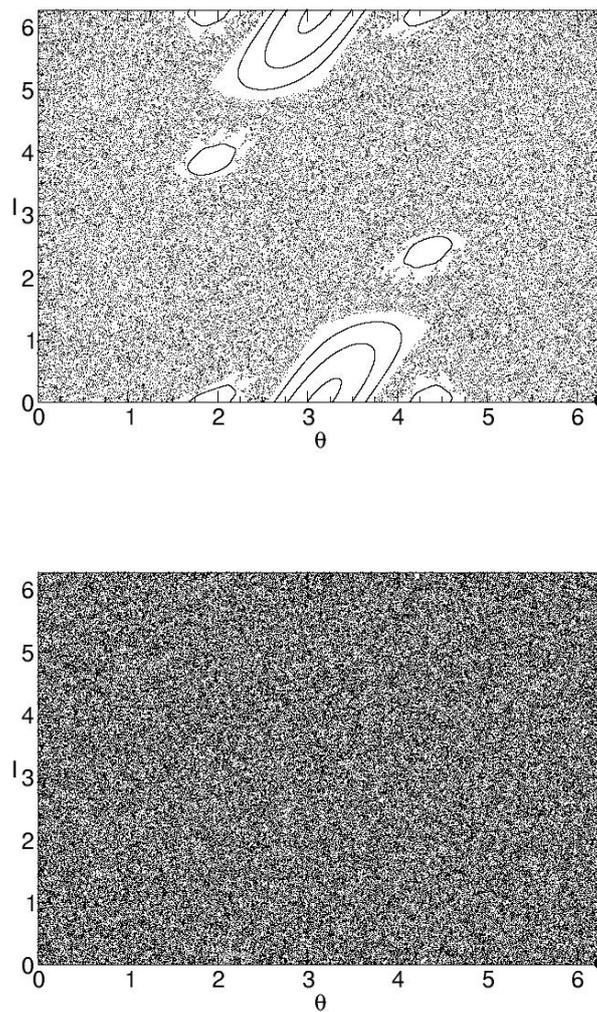


Figura 7.9: Retratos de fase do mapa padrão (7.29)-(7.30) para (a) $K = 2,6$ e (b) $K = 7,0$.

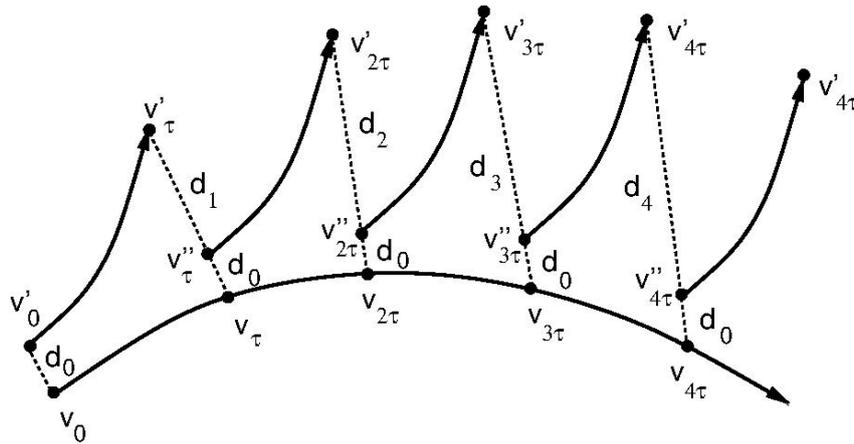


Figura 7.10: Figura esquemática mostrando o procedimento de renormalização usado no cálculo numérico do expoente de Lyapunov máximo.

instáveis. No entanto, mesmo que $K \gg 1$ haverá órbitas periódicas estáveis com uma minúscula estrutura remanescente de ilhas, só que tão pequenas que praticamente imperceptíveis.

7.5 Expoente de Lyapunov máximo para o mapa padrão

A dinâmica de um mapa bidimensional conservativo, como o mapa padrão, pode ser quantificada pelos expoentes de Lyapunov, definidos na Seção 7.2. Haverá dois expoentes, sendo que o maior deles, denotado por λ_1 pode ser estimado pela expressão (??), enquanto o outro é $\lambda_2 = -\lambda_1$ graças à conservação de áreas no plano de fase.

A aplicação da expressão (??), no entanto, requer uma série de precauções de ordem essencialmente numérica, para evitar resultados inconsistentes. Primeiramente, vamos considerar o cálculo do expoente de Lyapunov de uma órbita caótica, a partir de uma dada condição inicial $\mathbf{v}_0 = (I_0, \theta_0)$. Consideramos, também, uma segunda condição inicial $\mathbf{v}'_0 = (I'_0, \theta'_0)$, separada da primeira pela distância

$$d_0 = \sqrt{(I'_0 - I_0)^2 + (\theta'_0 - \theta_0)^2}. \quad (7.31)$$

Após n iterações do mapa padrão, teremos dois pontos no plano de fase, $\mathbf{v}_n = (I_n, \theta_n)$ e $\mathbf{v}'_n = (I'_n, \theta'_n)$, cuja distância mútua é

$$d_n = \sqrt{(I'_n - I_n)^2 + (\theta'_n - \theta_n)^2}. \quad (7.32)$$

Se ambas as órbitas contendo \mathbf{v}_n e \mathbf{v}'_n forem caóticas, haverá uma separação exponencial das distâncias mútuas com o passar do tempo, tal que o expoente de Lyapunov máximo será, segundo (??), dado pelos limites

$$\lambda_1(\mathbf{v}_0) = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{d_n}{d_0} \right). \quad (7.33)$$

A existência destes limites é assegurada, mediante condições matemáticas bem definidas, pelo chamado Teorema ergódico multiplicativo de Oseledets [?].

No entanto, como exigimos que o tempo n tenda a infinito, a distância d_n pode crescer de forma excessiva, dificultando o cálculo direto dos limites a partir de (7.33). Um procedimento

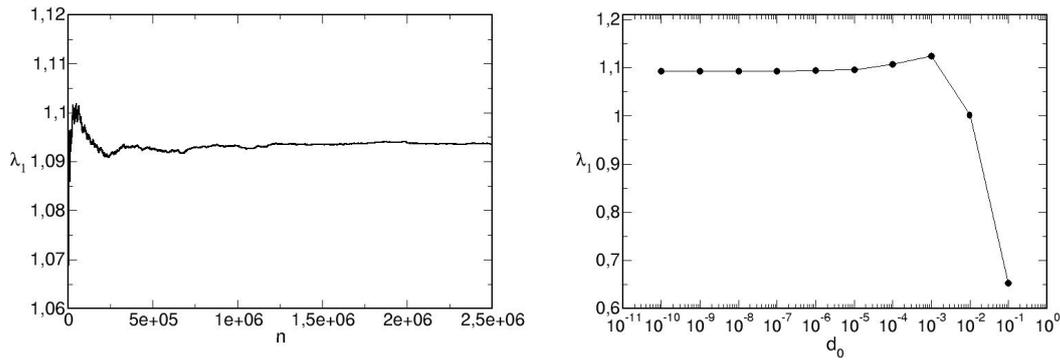


Figura 7.11: Expoente máximo de Lyapunov em função do (a) tempo, (b) da distância inicial, para o mapa padrão em $K = 6,0$.

devido a Benettin *et al.* torna o cálculo mais preciso, dividindo a órbita em segmentos de duração finita τ .

A cada τ iterações a órbita gerada por \mathbf{v}'_0 é interrompida e é calculada a distância d_i entre elas, usando (7.32). Na sequência, a condição inicial da segunda órbita é renormalizada, de tal forma que a distância entre \mathbf{v}_τ e \mathbf{v}'_τ é reduzida novamente a d_0 , evitando assim seu aumento indefinidamente grande. Realizando m vezes este procedimento, teremos a seguinte aproximação para o expoente de Lyapunov máximo

$$\lambda_1(\mathbf{v}_0, m, d_0) = \frac{1}{m\tau} \sum_{i=1}^m \ln \left(\frac{d_i}{d_0} \right). \quad (7.34)$$

Á guisa de exemplo, tomaremos o mapa padrão quando $K = 6,0$, cujo retrato de fase é mostrado na Fig. 7.8, e que mostra uma órbita caótica que preenche uma área bastante significativa do plano de fase. Vamos escolher os seguintes valores para os parâmetros: $\tau = 5$ e $d_0 = 10^{-10}$, e a seguinte condição inicial: $I_0 = 0,5$ e $\theta_0 = 1,0$.

Na Figura 7.11(a) mostramos a evolução temporal do expoente de Lyapunov máximo dado por (7.34), a partir dos valores de parâmetros e condições iniciais especificados. Observamos que, após oscilações provocadas pelo tempo finito, há uma convergência para o valor $\lambda_1 = 1,093$ quando o tempo $n = m\tau$ tende a infinito. Outro teste importante é mostrado na Fig. 7.11(b), onde o valor de λ_1 é mostrado em função da distância inicial d_0 . O uso de valores menores que 10^{-5} já parece indicar uma convergência que ilustra o limite quando d_0 tende a zero.

Os testes numéricos que mostramos nos habilitam a determinar o valor de λ_1 para o mapa padrão, em função do parâmetro K . Como o caso $K < K_c \approx 1,0$ não exibe órbitas caóticas, a Fig. 7.12 exibe valores apenas a partir de $K = 1$. Há uma clara tendência de crescimento do expoente de Lyapunov máximo com o valor de K . Mas o gráfico seguramente não é uma função monotônica, embora todos os valores observados de λ_1 sejam positivos.

Para valores suficientemente grandes do parâmetro K , o expoente máximo de Lyapunov terá o valor assintótico

$$\lambda_1 \sim \ln(K/2), \quad (K \gg 1), \quad (7.35)$$

que está indicado na Fig. 7.12 por uma linha tracejada. Observamos uma razoável concordância dos valores numéricos de λ_1 com a estimativa dada por (7.35) para valores de K a partir de $K = 5,0$. No Apêndice D nós mostramos uma dedução da relação (7.35).

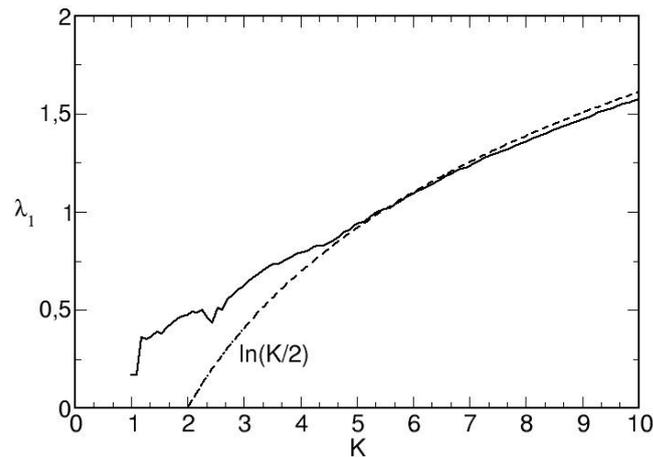


Figura 7.12: Expoente máximo de Lyapunov em função do parâmetro K para o mapa padrão. A linha tracejada representa a expressão teórica (7.35).

7.6 Transição entre caos local e global

A transição entre caos local e caos global tem sido estudada de forma bastante intensa, especialmente para o mapa padrão, onde vários resultados numéricos e analíticos são conhecidos. Para outros sistemas dinâmicos, há abordagens mais simples, usando um critério prático proposto por Boris Chirikov baseado na superposição de ressonâncias.

Para introduzir este critério, vamos considerar a chamada Hamiltoniana de duas ondas, que descreve o movimento de uma partícula carregada sujeita a duas ondas eletrostáticas (longitudinais) com velocidades de fase diferentes, que é um problema de interesse em Física de Plasmas,

$$H(p, q, t) = \frac{1}{2}p^2 - M \cos q - P \cos[k(q - t)], \quad (7.36)$$

que é um sistema com um grau de liberdade, com Hamiltoniana dependente explicitamente do tempo. As equações de Hamilton associadas a (7.36) são

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -M \sin q - kP \sin[k(q - t)], \quad (7.37)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p. \quad (7.38)$$

Começando a análise da dinâmica pelo caso $M \neq 0, P = 0$, a Hamiltoniana (7.36) reduz-se a

$$H(p, q, t) = \frac{1}{2}p^2 - M \cos q, \quad (7.39)$$

que é a expressão familiar do pêndulo, que é um sistema integrável. Os pontos de equilíbrio são $(0, 0)$ e $(0, \pm\pi)$: o primeiro é um ponto elíptico (estável) e o segundo um ponto hiperbólico (instável) [Fig. 7.13(a)]. As variedades invariantes estável e instável que emanam do ponto hiperbólico produzem os dois ramos da separatriz do pêndulo, a separar trajetórias fechadas (librações) de abertas (rotações). Os dois ramos da separatriz formam uma estrutura pendular

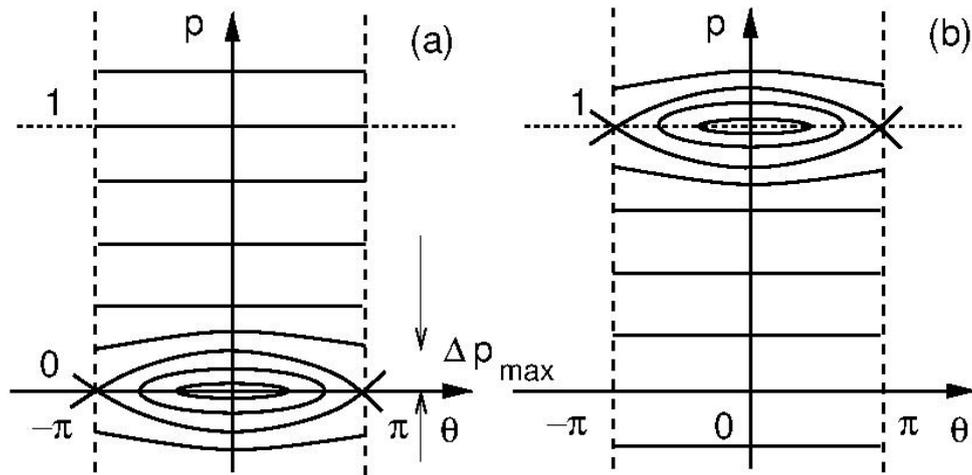


Figura 7.13: Figura esquemática mostrando o plano de fase da Hamiltoniana de duas ondas, nos casos (a) $M \neq 0, P = 0$; (b) $M = 0, P \neq 0$.

(ilha periódica) ancorada no ponto hiperbólico em $p = 0$. A semi-largura dessa ilha é obtida, de (7.36), como

$$(\Delta p)_{max} = 2\sqrt{M}. \quad (7.40)$$

Para o caso $M = 0, P \neq 0$ a Hamiltoniana (7.36) torna-se

$$H(p, q, t) = \frac{1}{2}p^2 - P \cos[k(q - t)]. \quad (7.41)$$

Podemos eliminar a dependência temporal fazendo uma transformação canônica $(p, q) \rightarrow (\tilde{p}, \tilde{q})$ a partir da função geratriz de segunda espécie

$$F_2(\tilde{p}, q, t) = \tilde{p}(q - t), \quad (7.42)$$

com as seguintes equações de transformação

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \tilde{p}, \quad \tilde{q} = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}} = q - t, \quad (7.43)$$

sendo que a Kamiltoniana é

$$K(\tilde{p}, \tilde{q}) = H(p, q, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{\tilde{p}^2}{2} - P \cos(k\tilde{q}) - \tilde{p}. \quad (7.44)$$

Completando o quadrado, a Kamiltoniana pode ser expressa como

$$K(\tilde{p}, \tilde{q}) = \frac{(\tilde{p} - 1)^2}{2} - P \cos(k\tilde{q}), \quad (7.45)$$

a menos de uma constante irrelevante. Nestas novas variáveis canônicas, a Kamiltoniana volta a ser a mesma do pêndulo, com as equações de Hamilton

$$\dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{q}} = -kP \sin(k\tilde{q}), \quad (7.46)$$

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}} = \tilde{p} - 1, \quad (7.47)$$

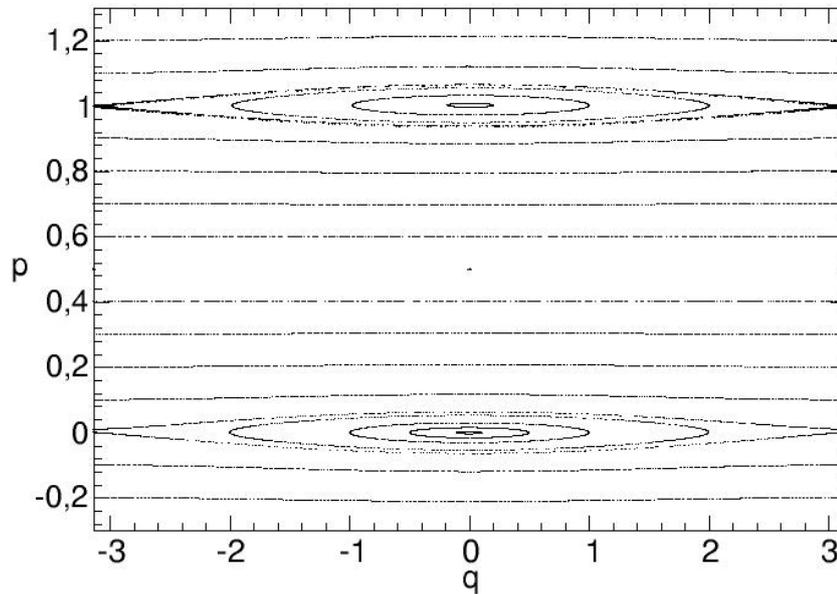


Figura 7.14: Mapa estroboscópico para a Hamiltoniana (7.50), com $M = P = 0,001$ e $k = 1$.

cujos pontos de equilíbrio são $(\tilde{p}^* = 1, \tilde{q}^* = 0)$ (elíptico) e $(\tilde{p}^* = 1, \tilde{q}^* = \pm\pi)$ (hiperbólico) [Fig. 7.13(b)]. Temos, assim, uma ilha centrada em $\tilde{p} = 1$ com semi-largura

$$(\Delta\tilde{p})_{max} = 2\sqrt{P}. \quad (7.48)$$

Passemos, agora, ao caso mais geral onde $M \neq 0, P \neq 0$. A dinâmica do sistema é equivalente (no espaço de fase estendido) a um sistema com dois graus de liberdade, com Hamiltoniana independente do tempo. Portanto, ao contrário dos casos anteriores, que descrevem sistemas integráveis, agora o sistema é não-integrável. Como não há solução analítica para este problema, procuramos soluções numéricas das equações de Hamilton (7.37)-(7.38).

Devido à dependência explícita do tempo, faremos um mapa de Poincaré do tipo estroboscópico. Como o termo dependente do tempo na Hamiltoniana (7.36) é da forma $\cos[k(q-t)]$, então k pode ser interpretado como uma frequência, associada portanto a um período $\tau = 2\pi/k$ de forçamento. As variáveis discretas serão, pois, definidas por

$$p_n = p(t = n\tau), \quad q_n = q(t = n\tau), \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.49)$$

Vamos considerar, por simplicidade, o caso $M = P$, com $k = M/P = 1$, para o qual a Hamiltoniana é

$$H(p, q, t) = \frac{1}{2}p^2 - M \cos q - M \cos(q-t). \quad (7.50)$$

Como o período característico é $\tau = 2\pi$, fazemos o mapa estroboscópico dado por (7.49), registrando os pontos (p_n, x_n) para os quais $t = 2\pi n$. Na Figura 7.14 vemos que, para valores suficientemente pequenos de M , a estrutura é aparentemente a sobreposição das duas ilhas que associamos aos casos $M \neq 0$ e $P \neq 0$. Os pontos elíptico $(0, 0)$ e hiperbólico $(\pm\pi, 0)$ da primeira ilha são pontos fixos do mapa estroboscópico correspondente, assim como os pontos

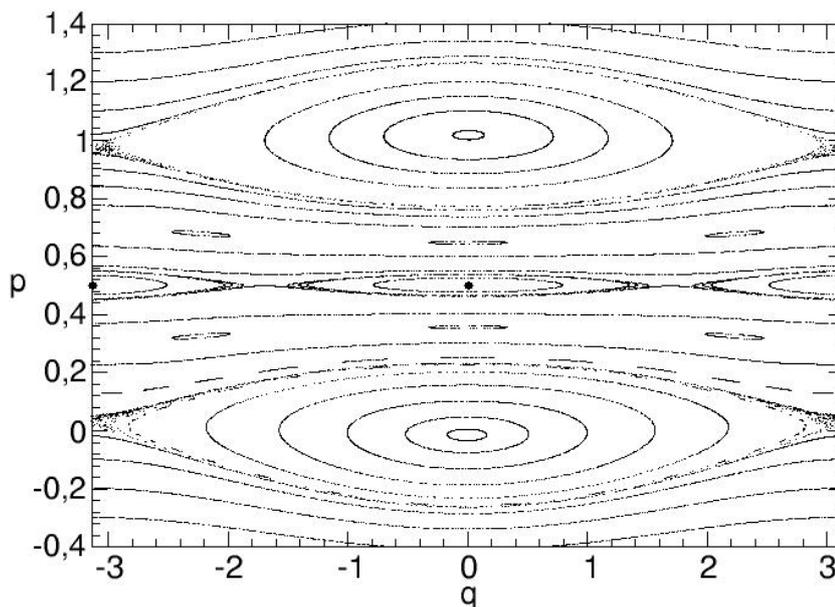


Figura 7.15: Mapa estroboscópico para a Hamiltoniana (7.50), com $M = P = 0,015625$ e $k = 1$.

$(0, 1)$ e $(\pm\pi, 1)$ da segunda ilha. As larguras das duas ilhas são dadas por (7.40)-(7.48) como $2\sqrt{M}$ cada, enquanto a distância entre as ilhas é $\delta p = 1$.

Definimos, no Capítulo 5, o parâmetro de Chirikov (5.225), como a razão entre a soma das amplitudes das duas ilhas adjacentes e a separação entre elas. De forma geral, se $M \neq P$, temos que

$$S = \frac{(\Delta p)_{max} + (\Delta \tilde{p})_{max}}{\delta p} = 2\sqrt{M} + 2\sqrt{P}. \quad (7.51)$$

Assim, a Fig. 7.14 corresponde a $S = 0,126$. No Capítulo 5 o parâmetro de Chirikov foi introduzido para medir o grau de superposição de duas ressonâncias adjacentes, no problema específico de uma partícula carregada sob a ação de uma onda eletrostática. Aqui, este parâmetro é aplicado num contexto mais geral de ilhas adjacentes com estruturas pendulares.

Aumentando um pouco mais o valor de M [Fig. 7.15] vemos que as ilhas aumentam suas larguras, mas conservam inalterada sua distância. Há, também, o aparecimento de algumas cadeias de ilhas secundárias, de menores amplitudes, e que correspondem a órbitas periódicas do mapa estroboscópico. A cadeia mais destacada consiste em duas ilhas centradas em $x = \pm\pi$ e $x = 0$, que são pontos de uma órbita de período 2 do mapa estroboscópico. Acima e abaixo dela, observamos cadeias de três ilhas centradas em pontos pertencentes a uma órbita de período 3 e assim por diante.

Existem, de fato, infinitas cadeias de ilhas secundárias, associadas a órbitas com todos os períodos inteiros. Este fato está de acordo com a previsão do Teorema de Poincaré-Birkhoff, que nos assegura serem destruídos todos os toros racionais, no lugar deles aparecendo as estruturas pendulares das ilhas. Aparentemente as larguras destas ilhas secundárias diminuem rapidamente com o aumento do período, de modo que a maioria delas é praticamente invisível. Além disso, o Teorema KAM nos garante a existência de um grande número de toros irracionais que não é destruído pela perturbação, ainda que sofram distorções de forma. Este fato

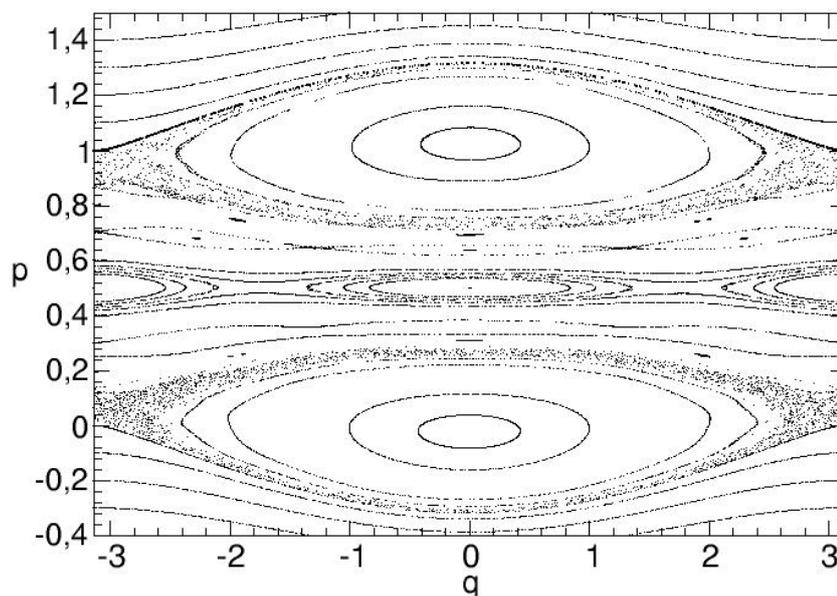


Figura 7.16: Mapa estroboscópico para a Hamiltoniana (7.50), com $M = P = 0,0225$ e $k = 1$.

pode ser constatado nas Figuras anteriores, na forma das curvas existentes entre cadeias de ilhas adjacentes.

No entanto, como o sistema (7.50) é não-integrável, essa descrição não é rigorosamente correta. As cadeias de ilhas que observamos na Fig. 7.15 não são rigorosamente estruturas pendulares, pois as curvas invariantes estável e instável não se juntam suavemente, como na Hamiltoniana do pêndulo. Sendo o sistema não-integrável, vimos que as curvas se interceptam num número infinitamente grande de pontos homoclínicos e heteroclínicos, que fazem com que a região identificada como a fronteira das ilhas seja, na verdade, uma região caótica: a isto denominamos *caos local*. Para pequenos valores de M a espessura desta região caótica é pequena, de modo que as excursões caóticas são limitadas pela largura de cada ilha. Essa limitação é causada justamente pela presença dos toros irracionais que, pelo Teorema KAM, continuam a existir.

Aumentando novamente o valor de M [Fig. 7.15], é aparente o alargamento de ambas as ilhas, mas agora torna-se visível que as respectivas separatrizes dão lugar a duas camadas de caos local, ainda restritas às vizinhanças das ilhas. As ilhas secundárias existentes entre elas aumentam também de tamanho, mas a maioria continua difícil de ser visualizada, ainda que as separatrizes de todas elas continuem tendo suas regiões de caos local. Neste caso, o parâmetro de Chirikov é $S = 0,6$.

Finalmente, para $M = 0,0625$ [Fig. 7.17], as regiões de caos local das ilhas (primárias e secundárias) fundem-se numa região de caos global, pois neste caso as excursões das órbitas caóticas passam a ser em larga escala. Apesar das regiões de caos local das ilhas terem se fundido, parte das trajetórias regulares no interior de ambas as ilhas é mantida. Além disso, toros irracionais continuam existindo acima e abaixo das ilhas primárias, também como resultado do Teorema KAM. Já uma grande parte das ilhas secundárias foram praticamente destruídas pelo aumento da perturbação, tanto pela fusão de regiões caóticas locais como pela própria perda de

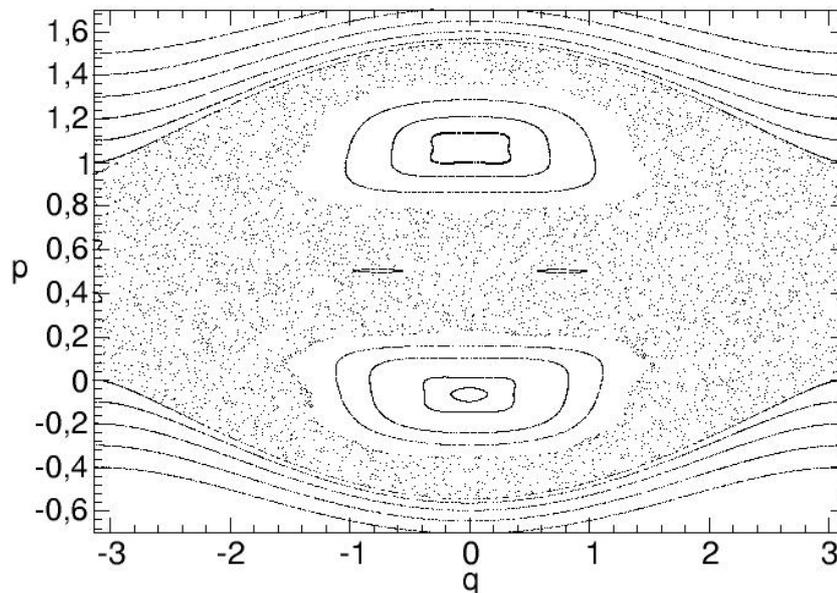


Figura 7.17: Mapa estroboscópico para a Hamiltoniana (7.50), com $M = P = 0,0625$ e $k = 1$.

estabilidade dos pontos elípticos que existem nos centros das ilhas.

Este último caso corresponde a $S = 1$, que indicaria a tangência entre as separatrizes ilhas primárias (se elas existissem, naturalmente). Chirikov pioneiramente utilizou este critério para designar a transição de caos local para caos global, com o nome de critério de superposição de ressonâncias. Mas a Fig. 7.17 já sugere que a transição descrita ocorre antes de $S = 1$. Uma análise mais cuidadosa indica que essa transição ocorre para $M \approx 0,028$. Usando (7.51), este valor corresponde a $S = 0,67$, que é próximo a $2/3$. Essa regra empírica dos dois terços tem sido empregada no estudo da transição de caos local para global em sistemas físicos.

7.7 O rotor periodicamente forçado

Em alguns casos é possível encontrar formas analíticas fechadas para o mapa de Poincaré de um sistema Hamiltoniano. Um exemplo é o de um rotor rígido, formado por uma partícula de massa m presa a uma haste rígida e leve de comprimento a , com momento de inércia ma^2 em relação a um eixo fixo que passa por uma das suas extremidades [Fig. 7.18]. A energia cinética do rotor é

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2} ma^2 \dot{\theta}^2. \quad (7.52)$$

O rotor gira num plano horizontal sem atrito, em torno de um eixo de passa pelo ponto O , de modo que não precisamos levar em conta as forças gravitacionais. Na outra extremidade da haste são aplicadas forças impulsivas de intensidade N_0/a , aplicadas periodicamente nos instantes de tempo $t = 0, \pm\tau, \pm2\tau, \dots, \pm n\tau$, ou seja, com um período τ . As forças impulsivas são aplicadas ao longo da direção de referência $\theta = 0$, de modo que o torque resultante depende

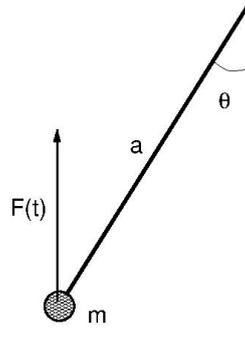


Figura 7.18: O rotor periodicamente forçado.

do tempo e pode ser representado por uma sequência de pulsos do tipo função delta de Dirac

$$N(\theta, t) = N_0 \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau), \quad (7.53)$$

associada a uma energia potencial dependente do tempo

$$U(\theta, t) = - \int N(\theta, t) d\theta = N_0 \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau), \quad (7.54)$$

a menos de uma constante aditiva sem importância. Assim, a Lagrangiana do sistema será

$$L = T - U = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 - K \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau). \quad (7.55)$$

As variáveis canonicamente conjugadas do rotor pulsado são a posição angular da haste θ e o respectivo momentum angular

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m a^2 \dot{\theta}. \quad (7.56)$$

A Hamiltoniana do sistema é obtida por meio de uma transformação de Legendre

$$H(p_\theta, \theta, t) = \frac{p_\theta^2}{2ma^2} + N_0 \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau). \quad (7.57)$$

Observe que, como a Hamiltoniana depende explicitamente do tempo, ela não é igual à energia total, que não é mais uma constante do movimento. As equações de Hamilton correspondentes são

$$\frac{dI}{dt} = K \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau), \quad (7.58)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = I. \quad (7.59)$$

onde definimos as seguintes variáveis

$$I = \frac{p_\theta}{ma^2}, \quad K = \frac{N_0}{ma^2}. \quad (7.60)$$

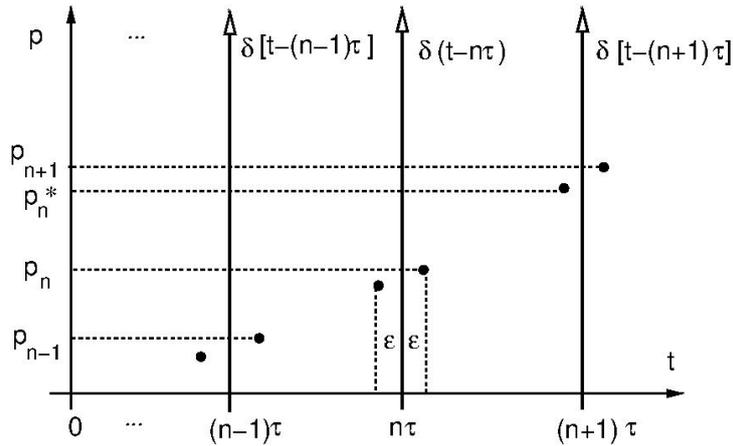


Figura 7.19: Definição de variáveis discretas para o rotor periodicamente forçado.

Para construir um mapa de Poincaré nós definiremos variáveis discretas como sendo os valores de I e θ imediatamente antes da aplicação de cada força impulsiva [vide Fig. 7.19]

$$I_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(t = n\tau - \varepsilon), \quad (7.61)$$

$$I_n^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(t = n\tau + \varepsilon), \quad (7.62)$$

$$\theta_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta(t = n\tau - \varepsilon), \quad (7.63)$$

$$\theta_n^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta(t = n\tau + \varepsilon). \quad (7.64)$$

Entre dois pulsos sucessivos ($n\tau + \varepsilon < t < (n+1)\tau - \varepsilon$) não há o termo dependente de $K = 0$, de modo que $dI/dt = 0$, ou seja, I é constante nesse intervalo. Assim $I_{n+1} = I_n^*$. Integrando a equação (7.59) nesse intervalo temos

$$\theta(t = (n+1)\tau - \varepsilon) - \theta(t = n\tau + \varepsilon) = (\tau - 2\varepsilon)I(t = (n+1)\tau - \varepsilon).$$

Tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos,

$$\theta_{n+1} = \theta_n^* + \tau I_{n+1}. \quad (7.65)$$

No entorno de um pulso ($n\tau - \varepsilon < t < n\tau + \varepsilon$) nós integramos (7.58):

$$I(t = n\tau + \varepsilon) - I(t = n\tau - \varepsilon) = K \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{\ell,n} \text{sen}(\theta(t = \ell\tau - \varepsilon)) = K \text{sen}(\theta(t = n\tau - \varepsilon)),$$

onde usamos a propriedade de filtragem da função delta

$$\int dt f(t) \delta(t - t') = f(t'), \quad (7.66)$$

e δ_{mn} é a delta de Krönecker, igual a 1 se $m = n$ e zero caso contrário.

No limite $\varepsilon \rightarrow 0$ teremos

$$I_n^* = I_n + K \text{sen} \theta_n \quad (7.67)$$

Já a equação (7.59), após integrada nesse intervalo, nos dá

$$\theta(t = n\tau + \varepsilon) - \theta(t = n\tau - \varepsilon) = 2\varepsilon I(t = n\tau - \varepsilon),$$

que, no limite $\varepsilon \rightarrow 0$, fornece $\theta_n^* = \theta_n$.

Fazendo, sem perda de generalidade, $\tau = 1$, e combinando (7.65) com (7.67) chegamos, assim, ao mapa padrão [66]

$$I_{n+1} = I_n + K \operatorname{sen} \theta_n, \quad (7.68)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}, \quad (\operatorname{mod} 2\pi), \quad (7.69)$$

onde nós incluímos a prescrição $\operatorname{mod} 2\pi$ para reforçar o fato que θ é um ângulo, portanto definido no intervalo $[0, 2\pi)$. Assim, qualquer valor fora deste intervalo deve ser a ele reduzido, adicionando ou subtraindo 2π tantas vezes quantas sejam necessárias.

7.8 Transporte em sistemas caóticos

Num sistema Hamiltoniano quase-integrável, a excursão da variável de ação depende do tipo de órbita determinado pela condição inicial. Por exemplo, se I_0 for escolhido sobre um toro irracional, a excursão da ação ΔI será limitada. Caso I_0 esteja no interior de uma ilha periódica, ΔI é da ordem da largura da ilha. Para um valor de I_0 pertencente à camada estocástica da ilha, a respectiva excursão também tem essa limitação, ao menos se o caos for local.

7.8.1 Difusão da ação no mapa padrão

Uma diferença significativa aparece quando existe uma região de caos global, na qual uma única órbita caótica pode ter uma excursão da ação que se estende por uma grande região do espaço de fase. Para ilustrar este aspecto do transporte caótico, vamos considerar o mapa padrão (7.68)-(7.69), no contexto do rotor periodicamente pulsado.

As variáveis discretas do mapa padrão (I_n, θ_n) correspondem aos valores de (I, θ) imediatamente antes da aplicação de uma força impulsiva no tempo $t = n$, e o parâmetro de estocasticidade K é proporcional à amplitude da força. Sob este ponto de vista, é importante salientar que I e $I + 2\pi m$ (m inteiro) *não são* fisicamente equivalentes, pois correspondem em geral a diferentes energias cinéticas do rotor. Nesse caso, não é conveniente identificar $I = 0$ e $I = 2\pi$, e apenas θ é uma variável periódica.

Sob este ponto de vista, os retratos de fase do sistema, para um dado valor de K , podem ser construídos concatenando um número infinito de retratos de fase como os vistos na seção anterior, que eram limitados aos intervalos $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ [Fig. 7.20]. Dessa forma, os valores de I variam de menos a mais infinito. Se o retrato de fase básico é globalmente caótico, uma dada condição inicial irá produzir uma órbita caótica que poderá visitar partes do espaço de fase com energias cinéticas $I^2/2$ arbitrariamente altas. Por outro lado, caso a condição inicial seja escolhida dentro de uma ilha imersa neste mar caótico [como na Fig. ??(a)], a órbita resultante irá permanecer no interior da ilha para sempre.

Para um dado valor K , a variação da ação, que é proporcional ao momentum angular do rotor, em cada instante de tempo (discreto) é, de (??),

$$\Delta I_n = I_{n+1} - I_n = K \operatorname{sen} \theta_n, \quad (7.70)$$

que portanto depende do valor da fase θ em cada instante de tempo. Como $|\operatorname{sen} \theta| \leq 1$, as variações são da ordem de K , de forma que, se $K \gg 1$, as excursões da ação podem ser grandes, variando bastante com o tempo.

Se nós supomos, no entanto, que as fases θ_n são efetivamente aleatórias, uniformemente distribuídas no intervalo $[0, 2\pi)$ e não-correlacionadas para tempos diferentes, a evolução da

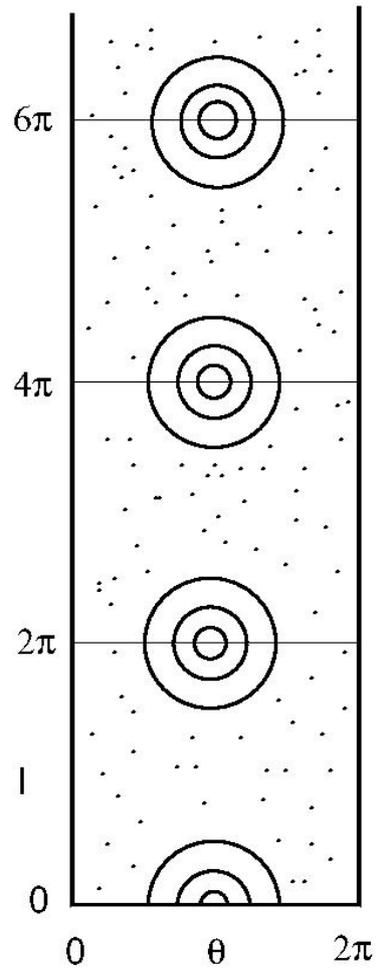


Figura 7.20: Figura esquemática mostrando uma região de caos global no plano de fase estendido do rotor periodicamente forçado.

ação torna-se um processo estocástico do tipo passeio aleatório. Neste processo, o valor médio da variação do momentum será nulo, pois

$$\langle \Delta I_n \rangle = K \langle \sin \theta_n \rangle = \frac{K}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0. \quad (7.71)$$

Por outro lado, o desvio quadrático médio correspondente é diferente de zero, pois

$$\langle (\Delta I_n)^2 \rangle = K^2 \langle \sin^2 \theta_n \rangle = \frac{K^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{K^2}{2}, \quad (7.72)$$

de modo que a variação média da energia cinética do rotor é

$$\langle \Delta T \rangle = \frac{\langle (\Delta I_n)^2 \rangle}{2} = \frac{K^2}{4}. \quad (7.73)$$

O passeio aleatório, que admitimos válido para as excursões da ação na região caótica do plano de fase da Fig. 7.20, leva a uma difusão da energia cinética. Na chamada difusão normal, ou Gaussiana, o valor médio da energia cinética do rotor cresce linearmente com o tempo, na forma

$$\langle T \rangle \approx Dn, \quad (7.74)$$

onde

$$D = D_{QL} = \frac{K^2}{4} \quad (7.75)$$

é chamado coeficiente de difusão quase-linear, um resultado que vale apenas para K muito grande, mas que evidencia uma importante propriedade do mapa padrão: a difusão da energia cinética do rotor aumenta com a intensidade K do forçamento.

Anteriormente, neste Capítulo, estudamos a dinâmica do mapa padrão quando $K > 1$, observando a existência de uma região globalmente caótica. O próprio cálculo do expoente máximo de Lyapunov mostra que, para K grande, o expoente cresce como $\ln(K/2)$. Portanto o aumento da difusividade acompanha o aumento da caoticidade. Lembrando que o expoente de Lyapunov λ_1 mede a taxa de divergência de órbitas inicialmente muito próximas, é razoável pensar que um aumento no valor de λ_1 faz com que as órbitas divirjam mais rapidamente, o que aumenta a difusividade e portanto o próprio transporte na região caótica.

Valores de K entre 5 e 50, por exemplo, os efeitos de correlação entre as fases, devido à natureza determinística do processo, são importantes e levam a oscilações amortecidas do coeficiente de difusão D em torno do valor quase-linear D_{QL} [?].

7.8.2 Aceleração de Fermi

A difusão da energia cinética média do rotor pulsado, descrito pelo mapa padrão, pode ser interpretada de uma forma estatística. Vamos supor a existência de um número muito grande de rotores pulsados idênticos, mas com valores iniciais diferentes da ação e da fase (I_0, θ_0) , distribuídos aleatoriamente numa dada região do plano de fase.

Supondo, também, que o valor de K seja suficientemente grande tal que haja um “mar caótico” como aquele esquematizado na Fig. 7.20, onde persistem ilhas periódicas ocupando uma fração f da área do plano de fase. Os rotores cujas condições iniciais pertençam à região caótica, que ocupa uma fração $1 - f$ da área total, experimentam transporte caótico, que produz um aumento ilimitado das suas energias cinéticas. Já os f rotores que ocupam os interiores das ilhas têm excursões limitadas no plano de fase e, em média, não ganham energia cinética.

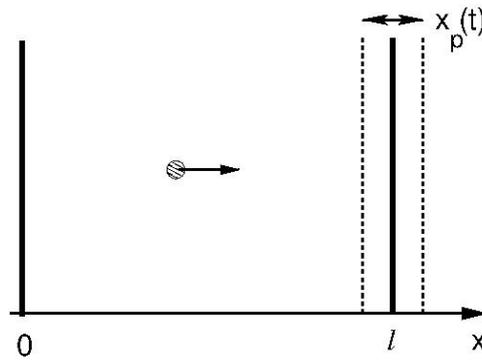


Figura 7.21: Geometria do mapa de Ulam simplificado.

Concluimos, assim, que a fração $1 - f$ dos rotores ganham energia de forma ilimitada da fonte de energia que produz os pulsos delta. Do ponto de vista da interação entre os rotores e a fonte dos pulsos, há um “aquecimento” do sistema com eficiência $1 - f$. Esta última será tanto maior quanto mais extensa seja a região globalmente caótica.

O “aquecimento” por transporte caótico é uma idéia bastante antiga, na verdade: em 1949 Enrico Fermi, num trabalho clássico sobre a origem da radiação cósmica no Universo [?], propôs que as partículas fossem aceleradas por um mecanismo de aquecimento deste tipo. Fermi propôs que as partículas cósmicas oscilassem entre duas paredes móveis, supondo que elas poderiam ganhar energia desta forma. Este mecanismo é conhecido como *aceleração de Fermi*.

No contexto astrofísico estas paredes seriam núvens magnéticas galácticas, que formariam espelhos magnéticos. Como vimos no Capítulo 4, partículas carregadas podem ser refletidas elasticamente nos espelhos magnéticos. Numa versão mais simples deste processo, proposta por Ulam, uma partícula leve oscila entre uma parede fixa e outra oscilante [?].

Seja uma parede fixa em $x = 0$ e uma parede móvel em $x = \ell$, que oscila de acordo com uma função pré-determinada $x_p(t)$. Expressaremos esta função na forma

$$x_p(t) = aF(\phi), \quad (7.76)$$

onde a é uma constante e $F(\phi)$ é uma função par e periódica da fase $\psi = \omega t$, definida modulo 2π , cujos valores máximo e mínimo são $+1$ e -1 , respectivamente.

Supomos que as colisões sejam perfeitamente elásticas. Se a partícula tem, antes da colisão com a parede móvel, uma velocidade v ; usando conservação de momentum e energia concluímos que, após a colisão, a partícula terá uma velocidade $v' = -v + 2V_p$, onde $V_p(t)$ é a velocidade da parede móvel.

Seja v_n a velocidade da partícula imediatamente antes da sua n -ésima colisão com a parede móvel. A partícula atinge a parede móvel quando esta tem uma fase ψ_n , e é refletida com velocidade $-v_n + 2V_p(\psi_n)$. Ela, então, move-se em direção à parede fixa, é por ela refletida e retorna com velocidade

$$v_{n+1} = v_n - 2V_p(\psi_n) = v_n - 2 \frac{dx_p(t_n)}{dt}. \quad (7.77)$$

Usando (7.76) e a regra da cadeia temos

$$v_{n+1} - v_n = -2a \frac{dF}{dt} = -2a \frac{dF}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} = -2a\omega F'(\psi_n). \quad (7.78)$$

Integrando a expressão $d\psi/dt = \omega$ entre duas colisões sucessivas com a parede móvel temos

$$\Psi_{n+1} - \Psi_n = \omega\tau, \quad (7.79)$$

onde τ é o intervalo de tempo entre a n -ésima e a $(n+1)$ -ésima colisões com a parede móvel. Uma simplificação útil do problema consiste em supor que a parede móvel transmite momentum à partícula em cada colisão, mas ocupa uma posição fixa. Nestas condições o tempo de trânsito da partícula entre duas colisões sucessivas é

$$\tau = \frac{2\ell}{v_{n+1}}, \quad (7.80)$$

que não depende da fase da parede “móvel”. Substituindo (7.80) em (7.79) temos

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + \frac{2\ell\omega}{v_{n+1}}, \quad (7.81)$$

Definindo as variáveis adimensionais

$$u_n = \frac{v_n}{2\omega a}, \quad M = \frac{\ell}{2\pi a}, \quad (7.82)$$

as equações (7.78) e (7.81) resultam no seguinte mapa bidimensional

$$u_{n+1} = u_n - F'(\Psi_n), \quad (7.83)$$

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + \frac{2\pi M}{u_{n+1}}. \quad (7.84)$$

7.8.3 Mapa de Ulam simplificado

Uma função que satisfaz as condições impostas pelo problema é $F(\psi) = \cos\psi$, de modo que obtemos o chamado *mapa de Ulam simplificado*.

$$u_{n+1} = |u_n + \sin(\Psi_n)|, \quad (7.85)$$

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + \frac{2\pi M}{u_{n+1}}, \quad (\text{mod } 2\pi), \quad (7.86)$$

onde adicionamos as barras verticais para reforçar que o módulo da velocidade da partícula é não-negativo.

A matriz Jacobiana do mapa de Ulam simplificado é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_n} & \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \Psi_n} \\ \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial u_n} & \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial \Psi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \Psi_n \\ -\frac{2\pi M}{u_{n+1}^2} & 1 - \frac{2\pi M}{u_{n+1}^2} \cos \Psi_n \end{pmatrix}, \quad (7.87)$$

cujo determinante é

$$J = \det \mathbf{J} = 1, \quad (7.88)$$

demonstrando que o mapa é conservativo.

Os pontos fixos (u^*, Ψ^*) do mapa satisfazem as condições

$$\sin \Psi^* = 0, \quad \Rightarrow \Psi_1^* = 0, \Psi_2^* = \pm\pi \quad (7.89)$$

$$\frac{2\pi M}{u^*} = 2\pi m, \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \Rightarrow u_m^* = \frac{M}{m}. \quad (7.90)$$

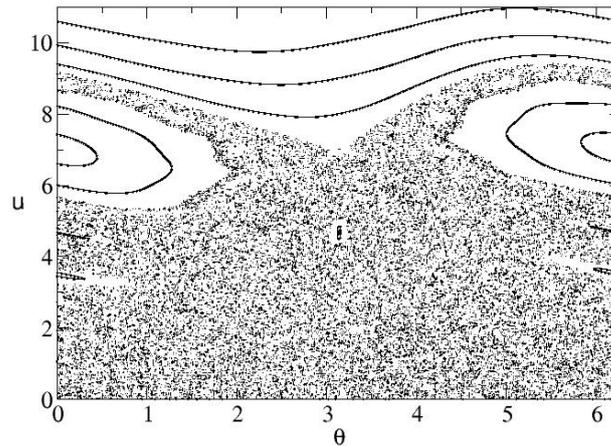


Figura 7.22: Retrato de fase do mapa de Ulam modificado para $M = 7$.

Observe que, ao contrário do mapa padrão, o mapa de Ulam simplificado não é definido modulo 2π na variável u .

Os elementos da matriz Jacobiana, calculados nos pontos fixos acima, são

$$\mathbf{J}(u_m^*, \psi^* = 0, \pm\pi) = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ -\frac{2\pi m^2}{M} & 1 \mp \frac{2\pi m^2}{M} \end{pmatrix}, \quad (7.91)$$

cujo traço é

$$\tau(u_m^*, \psi^* = 0, \pm\pi) = 2 \mp \frac{2\pi m^2}{M}. \quad (7.92)$$

Como $M > 0$, para $\psi^* = 0$ o traço é $\tau < 2$, donde os autovalores da matriz Jacobiana são imaginários puros. Nesse caso, $\psi^* = 0$ é um ponto elíptico (estável). Os pontos fixos com $\psi^* = \pi$ são tais que $\tau > 2$, donde os autovalores são reais, e o ponto fixo é hiperbólico (instável).

Para valores suficientemente altos de M existe uma órbita caótica ocupando uma região grande do plano de fase, sobretudo para baixas velocidades, o que permite supor a existência de caos global e um conseqüente transporte caótico da velocidade da partícula.

Na Figura 7.22 mostramos um retrato de fase do mapa de Ulam simplificado no caso $M = 7$. Para este valor da velocidade da parede observamos uma pronunciada região caótica para baixas velocidades da partícula, o que se deve à dependência da fase com u_{n+1}^{-1} . No entanto, é possível observar remanescentes das ilhas periódicas correspondentes aos pontos fixos elípticos em $u_1 = 7/1$ e $u_2 = 7/2 = 3,5$ [cf. Eq. (7.90)]. De fato, os infinitos pontos fixos acumulam-se tão rapidamente que as larguras de suas ilhas periódicas não são perceptíveis.

Há, também, uma série de curvas invariantes (toros irracionais) a partir de $u \approx 9,5$, que representam barreiras ao transporte caótico. Em conseqüência, para um dado valor de M , o transporte caótico é capaz de acelerar uma partícula pelo mecanismo de Fermi desde velocidades praticamente nulas até valores da ordem de $u \approx 8$. Lembramos, porém, que as órbitas caóticas apresentam oscilações irregulares e aleatórias, de modo que só se pode falar, em termos físicos, de uma aceleração em média da partícula.

Este resultado sugere que o mecanismo da aceleração de Fermi não é capaz de transferir energia de modo ilimitado à partícula, ao menos no âmbito do mapa de Ulam simplificado. No

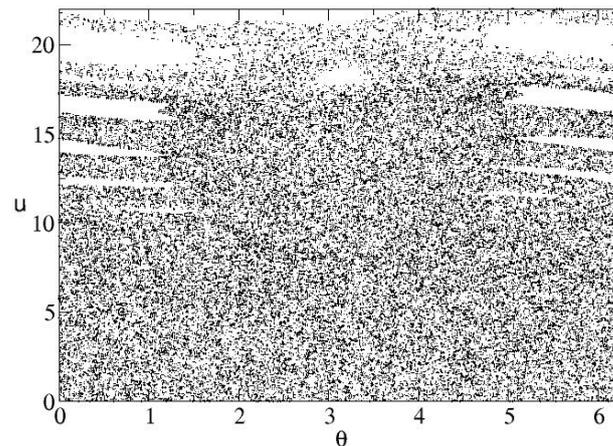


Figura 7.23: Retrato de fase do mapa de Ulam modificado para $M = 100$.

entanto, outros mapas descrevendo a aceleração de Fermi compartilham desta limitação, que pode ser atribuída ao fato de tais mapas não serem definidos módulo 2π na ação, como o era o mapa padrão. Para aumentar o alcance do transporte caótico será, pois, necessário aumentar o valor da velocidade da parede. Na Figura 7.23 ilustramos este efeito, onde M é aumentado para 100, mostrando uma região caótica bastante significativa até valores de $u \approx 22$.

7.9 Sistemas fortemente caóticos

7.9.1 Sistemas misturadores

Como o mapa padrão ilustra de forma eloquente, um sistema caótico típico tem uma variedade de órbitas possíveis: periódicas, quase-periódicas e caóticas, misturadas de forma extremamente complicada. No caso do mapa padrão, para K suficientemente alto, o plano de fase é quase totalmente ocupado por uma órbita caótica, mas ainda existem órbitas periódicas estáveis com uma estrutura de ilhas periódicas à sua volta. Já em sistemas fortemente caóticos não há pontos elípticos: todas as órbitas periódicas são hiperbólicas, portanto instáveis. Para eles, há uma órbita caótica que preenche densamente o plano de fase (no caso de mapas bidimensionais conservativos).

Um exemplo clássico é o mapa do gato \mathbf{F} , proposto por Arnold

$$J_{n+1} = 2J_n + \theta_n, \quad (\text{mod } 1), \quad (7.93)$$

$$\theta_{n+1} = J_n + \theta_n, \quad (\text{mod } 1), \quad (7.94)$$

definido num toro $[0, 1) \times [0, 1)$, que pode ser representado por um quadrado unitário periódico S . O determinante Jacobiano do mapa é igual a 1, portanto o mapa é conservativo.

O único ponto fixo do mapa é a origem que, no quadrado periódico S , corresponde aos quatro vértices. Pode-se mostrar que qualquer ponto em S para o qual x_0 e y_0 sejam números racionais é um ponto fixo da n -ésima iterada do mapa do gato, $\mathbf{F}^{[n]}$, para algum valor de n . Por exemplo, $(2/5, 1/5)$ e $(3/5, 4/5)$ são pontos fixos de $\mathbf{F}^{[2]}$. Como os autovalores da matriz

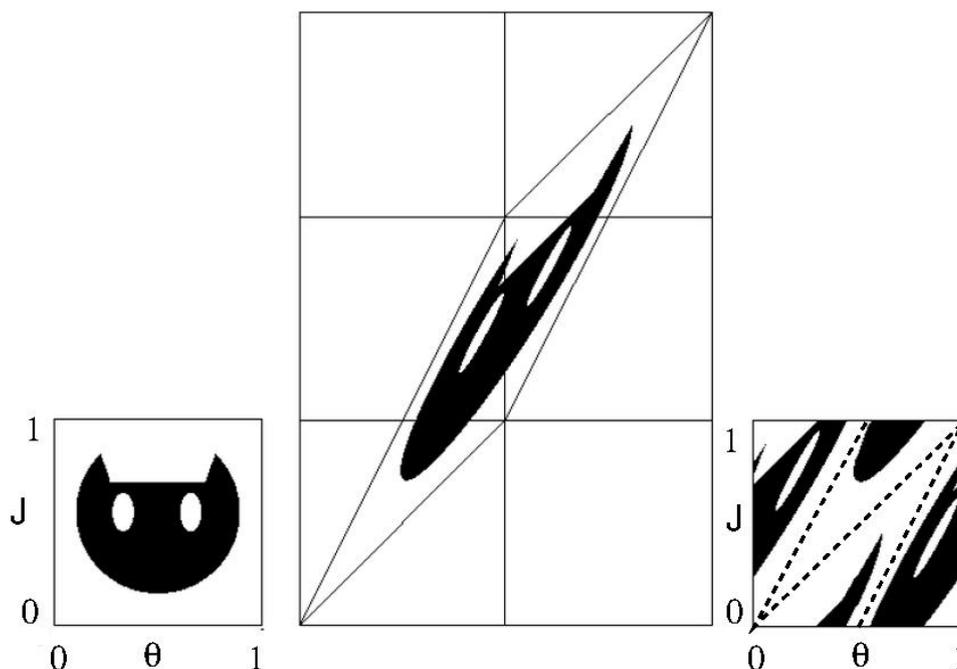


Figura 7.24: Efeito de uma iterada do mapa do gato sobre uma região limitada no quadrado unitário.

Jacobiana são constantes,

$$\xi_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1, \quad \xi_2 = \frac{1}{\xi_1} < 1, \quad (7.95)$$

todos os pontos fixos de $\mathbf{F}^{[n]}$ são hiperbólicos (pontos de sela). As direções invariantes instável e estável são dadas pelos autovetores \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 correspondentes aos autovalores ξ_1 e ξ_2 , respectivamente.

Como o mapa do gato é linear por partes, as variedades invariantes instável W^u e estável W^s coincidem com as direções invariantes. Os autovetores associados aos autovalores (7.95) são, respectivamente,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ (1 + \sqrt{5})/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ (1 - \sqrt{5})/2 \end{pmatrix}. \quad (7.96)$$

No quadrado periódico que representa o toro, os coeficientes angulares das retas ao longo das direções invariantes estável e instável são irracionais, dados por $(1 + \sqrt{5})/2$. Portanto as variedades invariantes estável e instável preenchem densamente o toro: elas se interceptam em um número infinito de pontos heteroclínicos que também estão densamente distribuídas. Este é um cenário qualitativamente similar ao do emaranhado homoclínico e, de fato, o mapa do gato é fortemente caótico. Qualquer condição inicial típica (x_0, y_0) , isto é, tal que a razão x_0/y_0 seja um número irracional, irá produzir uma trajetória que irá cobrir densamente o toro para um número infinitamente grande de iterações do mapa do gato.

O efeito do mapa do gato sobre uma região limitada no quadrado unitário é ilustrada pela Fig. 7.24. Suponha que a razão entre a área ocupada pela região (a cara do gato) e a área do quadrado unitário seja f . O mapa transforma uma região, em cada iteração, num mosaico das suas partes, produzindo uma figura bastante complicada com o passar do tempo (discreto).

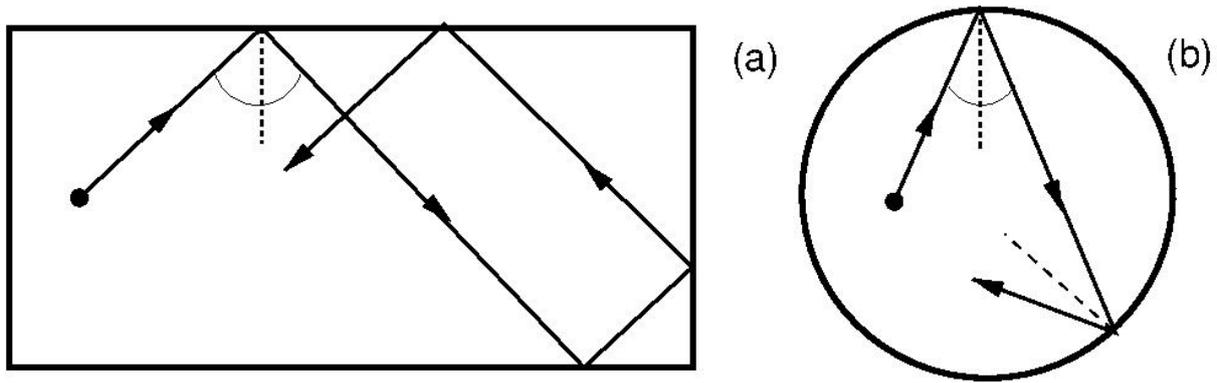


Figura 7.25: (a) Bilhar retangular. (b) Bilhar circular.

Dada uma pequena região fixa \mathcal{R} no quadrado unitário, após um grande número de iterações do mapa resulta que a fração da área de \mathcal{R} ocupada pelos pixels correspondentes à cara do gato tende a f .

Essa propriedade é denominada *misturadora*, e corresponde à seguinte analogia: considere uma bebida contendo 80% de café e 20% de leite. Nós misturamos muito bem os dois líquidos, de tal forma que qualquer gota da bebida contenha a mesma proporção original de café e leite.

Uma classe de exemplos fisicamente relevante de sistemas fortemente caóticos são os chamados *bilhares*, que são domínios bidimensionais limitados por paredes rígidas, dentro dos quais uma partícula move-se com velocidade constante em trajetórias retilíneas, refletindo-se elasticamente nas paredes. A Figura 7.25(a) ilustra um bilhar retangular, com lados a e b . A Hamiltoniana de uma partícula movendo-se no seu interior é

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m}, \quad (0 < x < a, 0 < y < b). \quad (7.97)$$

Supondo colisões elásticas, os módulos das velocidades não se alteram ao longo das duas direções, de forma que os momenta $|p_x|$ e $|p_y|$ são constantes do movimento. As variáveis de ação correspondentes são

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_x dx = \frac{|p_x|a}{\pi}, \quad (7.98)$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_y dy = \frac{|p_y|b}{\pi}, \quad (7.99)$$

de modo que a Hamiltoniana pode ser escrita em termos delas como

$$H(J_1, J_2) = \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{J_1^2}{a^2} + \frac{J_2^2}{b^2} \right). \quad (7.100)$$

Em consequência, o bilhar retangular é integrável (no sentido de Liouville), com as respectivas frequências

$$\omega_1 = \frac{\partial H}{\partial J_1} = \frac{\pi^2}{ma^2} J_1, \quad (7.101)$$

$$\omega_2 = \frac{\partial H}{\partial J_2} = \frac{\pi^2}{mb^2} J_2. \quad (7.102)$$

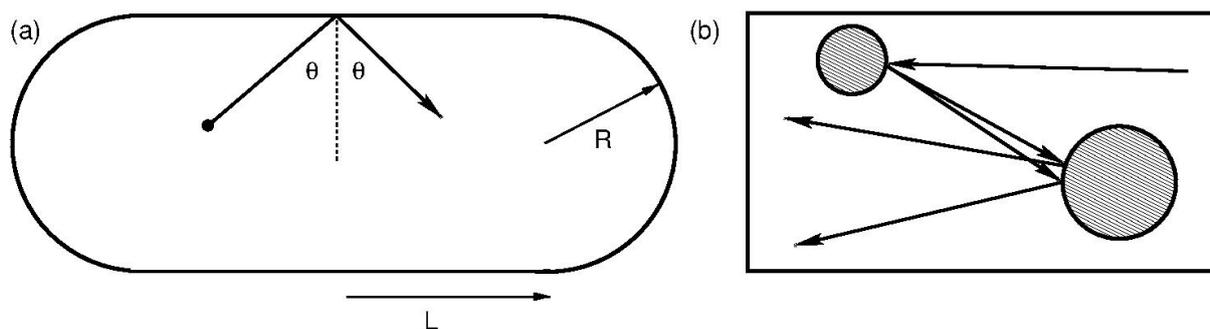


Figura 7.26: (a) Bilhar do tipo estádio. (b) Sensibilidade às condições iniciais num bilhar.

Consideremos, agora, um bilhar circular [Fig. 7.25(b)]. Assim como para o bilhar retangular, a Hamiltoniana será independente do tempo, portanto fornece uma constante do movimento. Devido à lei da reflexão (ângulo de incidência igual ao de reflexão), a força de reação da parede do bilhar sobre a partícula numa colisão é central. Sabemos, nesse tipo de situação, que o momentum angular é conservado, de modo que as duas constantes do movimento presentes nesse caso tornam o sistema integrável. Pelo mesmo raciocínio, os bilhares elípticos também são integráveis.

Outro exemplo é o bilhar do tipo estádio, que consiste numa área retangular de lados $2L$ e $2R$, ladeado por semicircunferências de raio R [Fig. 7.26(a)]. L . Bunimovich demonstrou que este bilhar, além de não-integrável, também é fortemente caótico, na mesma acepção usada no mapa do gato [86]. Outros bilhares também possuem essa propriedade [87].

Para ilustrar a sensibilidade às condições iniciais, nessa classe de sistemas fortemente caóticos, vamos considerar um bilhar retangular com dois discos internos [Fig. 7.26(b)]. Uma pequena incerteza na determinação da primeira trajetória incidente (por exemplo, no valor do ângulo que a trajetória faz com o lado horizontal do retângulo) leva, após apenas duas reflexões pelos discos, a trajetórias cujos ângulos diferem apreciavelmente. Com o passar das sucessivas reflexões - pelos discos e pelas paredes do bilhar - a incerteza é cada vez maior.

7.9.2 Recorrências

Os mapas bidimensionais conservativos preservam áreas no plano de fase, uma vez que o seu determinante Jacobiano é igual a um. Uma importante consequência deste resultado é o teorema de recorrência de Poincaré, que iremos enunciar no caso de mapas bidimensionais conservativos. Vamos supor que a região do plano de fase acessível a uma dada órbita seja limitada, como no caso do toro $[0, 1) \times [0, 1)$ para o mapa do gato, ou então um bilhar com paredes rígidas.

Tomamos uma condição inicial típica \mathbf{v}_0 e a envolvemos por um pequeno disco de raio $\varepsilon > 0$, que denotaremos R_0 . Todos pontos deste disco são iterados pelo mapa bidimensional conservativo \mathbf{F} e deixam a região correspondente ao disco. O teorema de recorrência de Poincaré estabelece que sempre haverá pontos das órbitas que retornam à vizinhança do disco inicial se esperarmos um tempo suficientemente longo (medido em número de iterações do mapa). Isto é verdade não importando quão pequeno o raio ε do disco seja.

Uma analogia ilustra o princípio envolvido na demonstração deste teorema [[120], seção 8.2.2]: se caminhamos numa praça cercada e inteiramente coberta pela neve, com o tempo toda a área da praça estará marcada por nossas pegadas. Assim, inevitavelmente iremos caminhar sobre nossas próprias pegadas um número arbitrário de vezes.

Como esquematizado na Fig. 7.27, iterando todas os pontos do disco R_0 de raio ε pelo

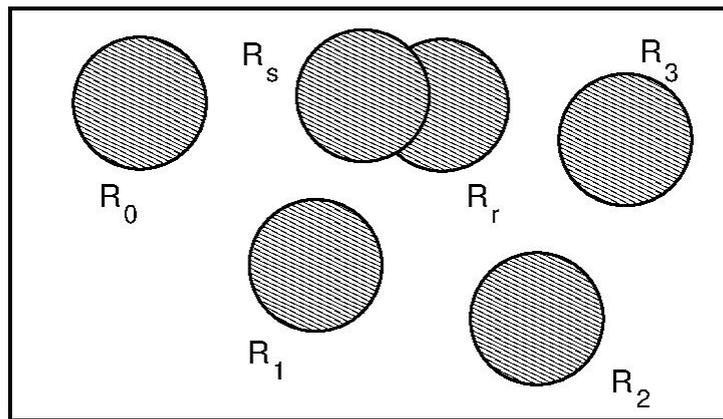


Figura 7.27: Figura esquemática referente ao teorema de recorrência de Poincaré.

mapa \mathbf{F} obteremos a imagem da região R_0 pelo mapa \mathbf{F} , que chamaremos de R_1 . Suponha que ε seja tão pequeno que os conjuntos R_0 e R_1 não tenham pontos em comum ($R_1 \cup R_2$ é vazio). Continuando a aplicar o mapa obteremos regiões R_2, R_3, \dots , que têm as mesmas áreas do disco inicial R_0 , devido à conservatividade do mapa \mathbf{F} . Como as órbitas estão limitadas, as regiões R_i estão confinadas a uma superfície finita, de modo que sempre será possível encontrar uma iteração r do mapa tal que a imagem R_r tenha interseção não vazia com alguma imagem anterior R_s , com $r > s$ [[19], seção 7.1.3].

Podemos repetir o procedimento acima para as iterações do mapa inverso $\mathbf{F}^{[-1]}$, produzindo imagens inversas das regiões R_r e R_s , que denotamos R_{r-1}, R_{s-1} , etc. Aplicando o mapa inverso s vezes resulta que R_{r-s} intersecciona o disco inicial R_0 . Portanto sempre haverá pontos em R_0 que retornam a R_0 após um número $r - s$ iterações do mapa \mathbf{F} .

Cada retorno de um ponto da órbita ao disco inicial R_0 é denominado uma recorrência do sistema. O teorema de recorrência não nos informa quantas iterações serão necessárias para isso, mas quando menor for o raio ε do disco inicial, maior será em média o tempo necessário para obter uma recorrência.

Uma importante aplicação do teorema de recorrência de Poincaré está no paradoxo de Zermelo da Teoria Cinética dos Gases. Boltzmann definiu uma grandeza \mathcal{H} a partir da função de distribuição de velocidades de um gás de esferas rígidas e demonstrou que, sob determinadas condições, o valor de \mathcal{H} é constante ou decrescerá com o tempo (teorema H) [?]. Zermelo argumentou que a grandeza $\mathcal{H}(t)$ não poderia decrescer sempre, pois devido ao teorema de recorrência de Poincaré, seu valor deveria sempre aproximar-se do valor inicial $\mathcal{H}(0)$ após um intervalo de tempo finito. A solução deste paradoxo encontra-se no fato de que, para um gás de $N \sim 10^{23}$ esferas rígidas o tempo de recorrência é tão grande que é praticamente impossível a observação de intervalos de tempo onde a função $\mathcal{H}(t)$ seja crescente.

7.9.3 Ergodicidade

Vamos novamente considerar a superfície de energia de um sistema Hamiltoniano descrito por $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E$. Se este sistema for ergódico então, dada uma condição inicial \mathbf{v}_0 a órbita subsequente dada pelas iterações sucessivas do mapa \mathbf{F} irá visitar todas as regiões da superfície de energia de uma maneira aleatória e uniforme.

Uma propriedade central dos sistemas ergódicos é a igualdade entre médias sobre condições iniciais no espaço de fase e médias temporais sobre uma trajetória produzida por uma única

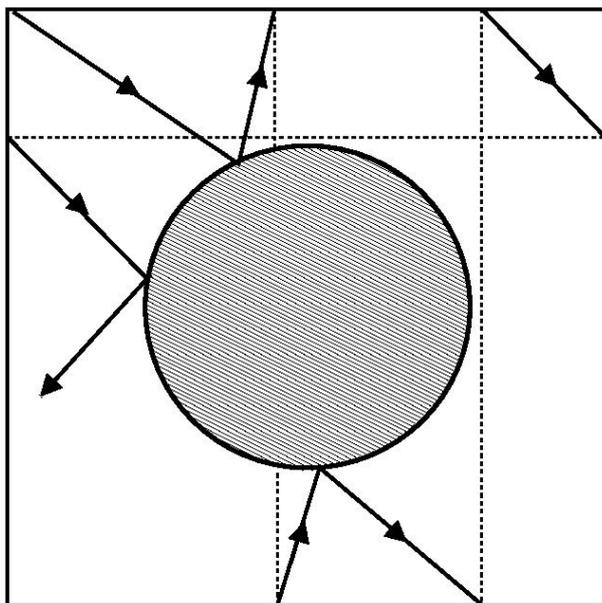


Figura 7.28: Bilhar de Sinai definido no toro, com condições de contorno periódicas.

condição inicial. No exemplo anterior do toro irracional do mapa twist, a média temporal de uma função $f(\theta)$ ao longo de uma órbita gerada por uma única condição inicial θ_0 é

$$\overline{f(\theta)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^T f(\theta_n). \quad (7.103)$$

Já a média no espaço de fase é efetuada em relação a uma medida invariante $\mu(\theta)$:

$$\langle f(\theta) \rangle = \int f(\theta) d\mu(\theta). \quad (7.104)$$

O conceito de medida invariante envolve detalhes matemáticos que não serão tratados neste livro, mas podem ser encontrados em referências como [19], [17] e outras. No caso particular que estamos tratando aqui, podemos considerar um número infinitamente grande de condições iniciais θ_0 distribuídas uniformemente no intervalo $[0, 2\pi)$. Existe, portanto, uma medida invariante $d\mu = P(\theta)d\theta$, onde $P(\theta) = 1$ é uma distribuição invariante de probabilidade. A média espacial será, portanto

$$\langle f(\theta) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta. \quad (7.105)$$

Como vale a propriedade ergódica, então as médias (7.103) e (7.105) são iguais

$$\overline{f(\theta)} = \langle f(\theta) \rangle. \quad (7.106)$$

Para o mapa padrão com $K > 0$, no entanto, o espaço (plano) de fase é dividido: há regiões caóticas, toros invariantes (KAM) e ilhas periódicas, de maneira geral. As regiões caóticas apresentam ergodicidade, e ocupam uma área finita no plano de fase. A medida invariante, nesse caso, é a chamada medida de Lebesgue, que pode ser estimada como a área total das regiões caóticas dividida pela área total do domínio $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$. Apenas nessas regiões valerá, portanto, a propriedade ergódica (7.106).

A hipótese ergódica é um dos fundamentos da Mecânica Estatística e, nos sistemas em que ela é usualmente aplicada (como gases, sólidos, cadeias de spins, etc.) presume-se que haja

ergodicidade na região de interesse do espaço de fase. No entanto, como ilustramos pelo mapa padrão, há sistemas dinâmicos onde a ergodicidade só é válida em determinadas regiões. O caso de um gás monatômico modelado por um sistema de esferas rígidas que interagem por colisões de curto alcance tem um interesse particular, pois é um dos poucos casos onde a ergodicidade foi estabelecida de maneira rigorosa.

Yakov Sinai considerou um sistema de duas esferas, uma das quais encontra-se estacionária na origem [Fig. 7.28]. A segunda esfera colide com a primeira elasticamente e se afasta dela. O bilhar é definido no torus (quadrado de lados periódicos), de modo que a segunda esfera volta a se aproximar da primeira, colidindo novamente e assim por diante. Este sistema (chamado bilhar de Sinai) de duas esferas rígidas é ergódico [85]. Usando a homogeneidade do sistema, o retorno da segunda esfera pode ser considerado como direcionado para uma terceira esfera, e assim por diante, de forma que o gás de N esferas rígidas será ergódico no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$.

7.10 Digressão quanto-mecânica

Um problema relevante é a interpretação quântica do comportamento caótico em sistemas não-integráveis. À primeira vista, a existência de caos determinístico é antagônica com a descrição de um sistema físico pela Mecânica Quântica. Uma das bases da descrição quântica de um sistema é o princípio de incerteza de Heisenberg: as incertezas Δq e Δp na determinação do valor de uma dada coordenada q e seu momentum conjugado p não podem ser arbitrariamente pequenas de forma simultânea, mas satisfazem à relação [cf. [89], seção 1.3]:

$$\langle(\Delta p)^2\rangle\langle(\Delta q)^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (7.107)$$

onde as incertezas são definidas a partir dos desvios quadráticos médios dos operadores \hat{p} e \hat{q} em relação a seus valores médios (ou valores esperados)

$$\langle(\Delta p)^2\rangle = \langle(\hat{p} - \langle p \rangle)^2\rangle, \quad (7.108)$$

$$\langle(\Delta q)^2\rangle = \langle(\hat{q} - \langle q \rangle)^2\rangle. \quad (7.109)$$

Portanto, se o momentum p tiver um valor muito bem definido, tal que sua incerteza seja nula ($\langle(\Delta p)^2\rangle = 0$), a coordenada canonicamente conjugada q será totalmente indeterminada, ou seja, com incerteza infinitamente grande ($\langle(\Delta q)^2\rangle = \infty$), e *vice-versa*. O princípio da incerteza, portanto, impede-nos de definir trajetórias no espaço de fase como exigido pela dinâmica Hamiltoniana. Assim, o comportamento caótico - que pressupõe uma sensibilidade extrema a condições iniciais originalmente muito próxima - não pode ser definido, ao menos na acepção usada na Mecânica Clássica.

Existe uma outra abordagem, porém, que consiste em estudar a quantização de um sistema não-integrável que, em sua versão clássica, exhibe comportamento caótico. Na verdade, esta conexão se dá a nível do limite semiclássico da Mecânica Quântica, no qual estudamos situações onde o comprimento de onda de De Broglie da partícula $\lambda = h/p$ é pequeno o suficiente na comparação com escalas de comprimento características do sistema. Estamos interessados em saber, portanto, que implicações o caos a nível clássico terá na descrição quântica de um sistema a nível semiclássico.

Dentre os vários problemas que podem ser levantados sob este ponto de vista, vamos comentar brevemente sobre um deles, que é o espectro de níveis de energia de sistemas classicamente caóticos. Um exemplo que já mencionamos é o bilhar do tipo estádio, que é caótico a nível

clássico. Já um bilhar com fronteira circular é um sistema integrável. McDonald e Kaufman, resolvendo a equação de Schrödinger para uma partícula livre no interior de ambos os bilhares, mostraram que há diferenças entre os seus espectros [?]. Podemos caracterizá-los por uma densidade de níveis de energia $N(\Delta E)$, que é o número de níveis discretos de energia entre E e $E + \Delta E$.

Para sistemas integráveis como o bilhar circular - que, portanto, não podem exibir caos a nível clássico - esta distribuição de níveis de energia é da forma ²[91]

$$N(\Delta E) = e^{-k\Delta E}. \quad (7.110)$$

Como esta função tem um máximo em $\Delta E = 0$, há uma grande probabilidade de termos níveis de energia degenerados (*aglomeração de níveis*).

Já para sistemas não-integráveis caóticos (como o bilhar do tipo estádio) a distribuição de níveis de energia pode ser obtida usando conjuntos de matrizes aleatórias ortogonais (GOE) e é dada por [93]

$$N(\Delta E) = \frac{\pi}{2} \Delta E e^{-4\pi(\Delta E)^2}, \quad (7.111)$$

e que tem um máximo para $\Delta E = \sqrt{1/8\pi} \neq 0$. Portanto, há uma repulsão de níveis de energia. Este mesmo fenômeno foi observado no bilhar de Sinai, que também é caótico [92]. A repulsão de níveis implica na ausência de degenerescências, o que ocorre devido à perda de simetrias em sistemas classicamente caóticos.

A *caologia quântica*, que compreende este tipo de investigação, é um assunto que tem recebido atenção cada vez maior de pesquisadores, pelo seu potencial de aplicações físicas interessantes. Não pretendemos fazer aqui uma exposição detalhada deste assunto, para o que remetemos o leitor interessado à literatura específica [?, 76]. Apresentações mais elementares do assunto podem ser encontradas nas referências [19], Cap. 10 e [120], Cap. 9.

7.11 Problemas

1. Um mapa unidimensional tem a forma geral

$$I_{n+1} = f(I_n).$$

Mostre que o expoente de Lyapunov é dado pela expressão

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(I_n)|$$

2. Considere o mapa unidimensional linear por partes

$$I_{n+1} = \beta I_n, \quad \text{mod } 1.$$

Determine o expoente de Lyapunov para o mapa, e ache a condição para o comportamento caótico.

3. Podemos fazer uma estimativa do valor de K_c para a transição entre caos local e caos global no mapa padrão, considerando a superposição de ressonâncias. Usando os resultados do problema (do Cap. 6), mostre $K_c = 2,47$, bem acima portanto do valor numérico $K \approx 0,97$.

²Com a exceção do oscilador harmônico, para o qual $N(\Delta E)$ é uma função delta aplicada em $\Delta E = \hbar\omega_0$.