

# Capítulo 8

## O problema de três corpos

O problema de dois corpos, no qual duas partículas interagem por meio de uma força gravitacional, foi tratado nos Capítulos 1 e 2 por meio da sua decomposição no movimento do centro de massa mais o movimento relativo. Este último, por sua vez, consiste no movimento de uma partícula (com a massa efetiva) sob a ação de uma força central (problema de Kepler). Assim, o problema de dois corpos é exatamente solúvel e fornece uma descrição precisa do movimento planetário, desde que não sejam considerados os efeitos mútuos entre os planetas do Sistema Solar.

A extensão natural seria considerar o caso de três corpos interagindo por forças gravitacionais. O próprio Newton procurou, sem sucesso, uma solução para este problema, no que foi sucedido por diversos matemáticos ilustres como Euler e Lagrange. Estes últimos descreveram soluções particulares para uma versão mais simples, o chamado problema restrito de três corpos no plano, que foi fundamental na criação e desenvolvimento de conceitos e métodos na Dinâmica Não-Linear, bem como possui grande interesse em aplicações na Mecânica Celeste. Com efeito, a própria existência de caos em sistemas Hamiltonianos já havia sido intuída por Poincaré em seu trabalho pioneiro sobre o problema de três corpos [43]. Por esse motivo, vamos apresentar algumas noções sobre o problema restrito de três corpos no plano. Um estudo mais técnico e matematicamente rigoroso pode ser encontrado em monografias especializadas como [30, 68, 69].

### 8.1 O problema de $N$ corpos

As equações de Hamilton para o problema de  $N$ -corpos podem ser combinadas para a obtenção da equação Newtoniana do movimento da  $i$ -ésima partícula, identificada pelo vetor posição  $\mathbf{r}_i$ :

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_j(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (8.1)$$

Projetando esta equação vetorial nos eixos cartesianos obteremos o seguinte sistema de equações diferenciais de ordem  $6N$  em relação ao tempo:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_j(x_j - x_i)}{[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2]^{3/2}} \quad (8.2)$$

$$\frac{d^2y_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_j(y_j - y_i)}{[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2]^{3/2}} \quad (8.3)$$

$$\frac{d^2z_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_j(z_j - z_i)}{[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2]^{3/2}}. \quad (8.4)$$

Definimos, no Capítulo 3, uma integral de movimento como uma relação entre coordenadas e velocidades de um sistema de partículas, que é válida em qualquer instante de tempo. Uma vez conhecida uma integral de movimento, a ordem do sistema de equações é reduzida de uma unidade. No problema de  $N$ -corpos, as forças gravitacionais são internas, enquanto não há forças externas sobre o sistema. Nestas condições, as integrais do problema de  $N$ -corpos podem ser procuradas a partir de teoremas básicos da dinâmica dos sistemas de partículas.

Sabemos, por exemplo, que, na ausência de forças externas, o momentum total do sistema de partículas é conservado:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = 0, \quad (8.5)$$

de modo que

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{a}, \quad (8.6)$$

onde  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  é um vetor constante. As componentes cartesianas desta equação

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i = a_x, \quad (8.7)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{y}_i = a_y, \quad (8.8)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{z}_i = a_z, \quad (8.9)$$

produzem três integrais do movimento.

Como as massas das partículas são supostamente constantes, podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right) = \mathbf{a}, \quad (8.10)$$

que pode ser integrada, fornecendo

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad (8.11)$$

onde  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$  é um vetor constante. Suas componentes,

$$\sum_{i=1}^N m_i x_i = a_x t + b_x \quad (8.12)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i y_i = a_y t + b_y \quad (8.13)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i z_i = a_z t + b_z, \quad (8.14)$$

representam mais três integrais do movimento. Fazendo  $t = 0$  nestas expressões, concluímos que  $\mathbf{b}$  é o vetor de posição inicial do centro de massa do sistema de partículas.

Não havendo torques externos sobre o sistema, seu momentum angular total também será conservado, ou seja,

$$\boldsymbol{\ell} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{c}, \quad (8.15)$$

onde  $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$  é um vetor constante. Abrindo o produto vetorial e projetando o resultado sobre os eixos cartesianos, obtemos as componentes escalares respectivas

$$\sum_{i=1}^N m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = c_x \quad (8.16)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = c_y \quad (8.17)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = c_z, \quad (8.18)$$

que perfazem mais três integrais do movimento. Finalmente, como a Hamiltoniana do sistema não depende explicitamente do tempo, ela é uma integral do movimento, numericamente igual à energia total do sistema:

$$T + U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = E, \quad (8.19)$$

Portanto, há  $3 + 3 + 3 + 1 = 10$  integrais clássicas do problema de  $N$ -corpos. Bruns (1887) e Poincaré (1890) demonstraram que não há outras integrais para este sistema. Mediante o uso destas 10 integrais do movimento, a ordem do sistema de equações diminui de  $6N$  para  $6N - 10$ . No caso do problema de dois corpos ( $N = 2$ ), a ordem diminui de 12 para  $12 - 10 = 2$ . Um sistema de segunda ordem é integrável pois a solução do problema pode ser reduzida a quadraturas, como vimos no Capítulo 1 no caso do problema de Kepler. Já o caso  $N \geq 3$  não será, em geral, integrável neste sentido. Para  $N = 3$ , por exemplo, o sistema será de oitava ordem ( $18 - 10 = 8$ ).

No Capítulo 5 abordamos o conceito de integrabilidade no sentido de Liouville: um sistema com  $n$  graus de liberdade é integrável se houver exatamente  $n$  integrais de movimento independentes, isto é, se os colchetes de Poisson entre elas forem todos nulos. No caso  $n = 3$ , como o problema de 3-corpos, a integrabilidade (no sentido de Liouville) necessitaria de 3 integrais de movimento independentes. Poderíamos pensar que as 10 integrais clássicas aqui apresentadas

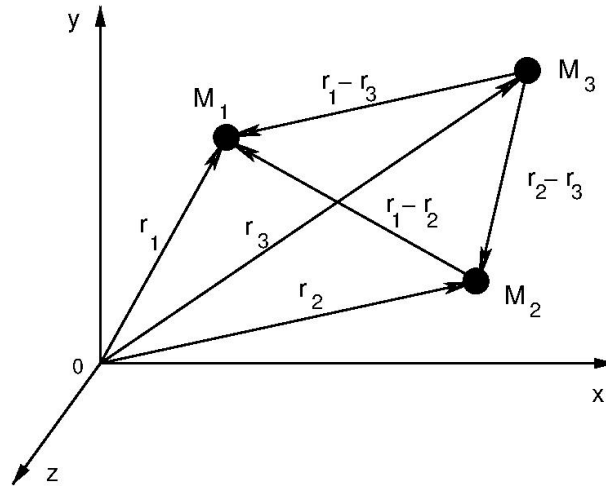


Figura 8.1: Geometria no problema dos três corpos.

(energia, momentum linear do centro de massa, momentum angular, etc.) seriam mais do que suficientes para garantir a integrabilidade. No entanto, isto não é verdade pois nem todas estas integrais clássicas estão em involução, ou seja, os respectivos colchetes de Poisson não são nulos.

## 8.2 O problema geral de três corpos no espaço

Na sua versão mais geral, o problema de três corpos consiste em três partículas de massas  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ , cujas posições são, respectivamente,  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  e  $\mathbf{r}_3$ , interagindo mutuamente por forças gravitacionais [Fig. 8.1]. Sendo os momenta correspondentes denotados por  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  e  $\mathbf{p}_3$ , a Hamiltoniana do sistema é

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2M_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2M_2} + \frac{\mathbf{p}_3^2}{2M_3} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \quad (8.20)$$

onde a energia potencial é dada por

$$U = -\frac{GM_1M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{GM_2M_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} - \frac{GM_1M_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|}, \quad (8.21)$$

sendo  $G$  é a constante gravitacional Newtoniana.

Como, em coordenadas cartesianas,  $\mathbf{p}_i = (p_{xi}, p_{yi}, p_{zi})$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), o sistema possui  $n = 9$  graus de liberdade. As equações canônicas associadas são

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \nabla_{\mathbf{p}_i} H, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8.22)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -\nabla_i H, \quad (8.23)$$

Para que o problema de três corpos seja integrável, no sentido de Liouville, teríamos de encontrar 9 constantes de movimento mutuamente independentes (em involução). Como a Hamiltoniana (8.20) não tem, a princípio, coordenadas ignoráveis, então as constantes de movimento devem ser procuradas a partir de simetrias que levem a leis de conservação de determinadas quantidades. No entanto, como mostrado por Poincaré, não é possível encontrar todas as constantes necessárias, de modo que o problema de três corpos não é integrável, em geral.

Assim, dadas condições iniciais  $(\mathbf{r}_i(0), \mathbf{p}_i(0))$ ,  $i = 1, 2, 3$ , não há uma solução geral do problema, ou seja, não é possível escrever  $(\mathbf{r}_i(t), \mathbf{p}_i(t))$  em termos das condições iniciais para tempos  $t$  arbitrários. O máximo que se pode fazer, neste caso mais geral, é invocar o teorema de existência e unicidade para obter soluções numéricas das equações de movimento (8.22)-(8.23).

### 8.3 O problema restrito de três corpos no plano

Uma versão mais simples do problema de três corpos consiste em considerar duas partículas de massas  $M_1$  e  $M_2$ , que giram em torno do seu centro de massa com velocidade angular  $\Omega$  constante, e uma terceira partícula de massa  $M_3 = m$ , ou *partícula-teste*. O valor de  $m$  é muito menor do que  $M_1$  e  $M_2$ , de tal modo que a sua presença não altera significativamente o movimento das duas partículas em movimento circular uniforme. Assim, o movimento da partícula-teste é determinado pelo campo gravitacional produzido por  $M_1$  e  $M_2$  (também chamadas de massas primária e secundárias, respectivamente). Supondo, ainda, que todos os movimentos estejam restritos a um plano fixo, temos o chamado problema restrito de três corpos no plano.

Seja  $a$  a distância entre a massa primária e a secundária, que orbitam em torno do centro de massa comum em trajetórias circulares concêntricas. Considerando o movimento relativo do sistema, a força centrípeta sobre um corpo de massa reduzida  $M_1M_2/(M_1 + M_2)$  é igual à força gravitacional entre  $M_1$  e  $M_2$ ,

$$\left( \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2} \right) \Omega^2 a = G \frac{M_1M_2}{a^2}$$

tal que a velocidade angular é dada por <sup>1</sup>

$$\Omega = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}}. \quad (8.24)$$

Colocando a origem do eixo que liga as duas partículas no centro de massa do sistema, resulta que as posições das partículas  $M_1$  e  $M_2$  em relação à origem são, respectivamente,

$$d_1 = \frac{M_2 a}{M_1 + M_2}, \quad d_2 = -\frac{M_1 a}{M_1 + M_2}, \quad (8.25)$$

de modo que  $M_1$  está à esquerda, e  $M_2$  à direita da origem [Fig. 8.2]. Podemos definir variáveis adimensionais para o sistema da seguinte forma:

$$\tilde{d}_1 = \frac{r_1}{a}, \quad \tilde{d}_2 = \frac{r_2}{a}, \quad (8.26)$$

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad 1 - \mu = \frac{M_1}{M_1 + M_2}, \quad (8.27)$$

de modo que as posições normalizadas são  $\tilde{d}_1 = \mu$  e  $\tilde{d}_2 = 1 - \mu$ . O tempo também pode ser adimensionalizado escolhendo um sistema de unidades onde  $G = 1$ . Como  $M_1 + M_2$  e  $a$  foram normalizados à unidade, a velocidade angular (8.24) é  $\Omega = 1$ , correspondendo a um período orbital  $\tau = 2\pi$ . No entanto, por maior clareza, vamos continuar escrevendo  $\Omega$  nas equações a seguir.

<sup>1</sup>Na literatura de Mecânica Celeste essa quantidade é usualmente denotada pela letra  $n$ , e chamada *movimento médio*.

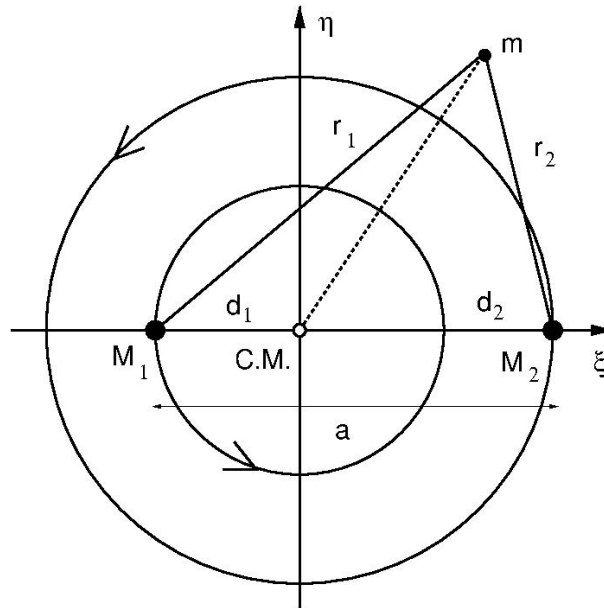


Figura 8.2: Geometria no problema restrito dos três corpos no plano.

### 8.3.1 Hamiltoniana nos referenciais siderais e sinóticos

Em problemas astronômicos é conveniente adotar um referencial inercial a partir de um sistema de coordenadas siderais  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Supomos que  $\zeta = 0$  é o plano em que ocorrem todos os movimentos. Neste sistema, as coordenadas das massas primária e secundária são, respectivamente,

$$\xi_1 = -\tilde{d}_1 \cos \Omega t = -\mu \cos \Omega t, \quad (8.28)$$

$$\eta_1 = -\tilde{d}_1 \sin \Omega t = -\mu \sin \Omega t, \quad (8.29)$$

$$\zeta_1 = 0, \quad (8.30)$$

$$\xi_2 = -\tilde{d}_2 \cos \Omega t = (1 - \mu) \cos \Omega t, \quad (8.31)$$

$$\eta_2 = -\tilde{d}_2 \sin \Omega t = (1 - \mu) \sin \Omega t, \quad (8.32)$$

$$\zeta_2 = 0. \quad (8.33)$$

A Hamiltoniana da partícula-teste no referencial inercial é

$$H(p_\xi, p_\eta, p_\zeta; \xi, \eta, \zeta; t) = \frac{1}{2m} (p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - \frac{(1 - \mu)m}{r_1} - \frac{\mu m}{r_2}, \quad (8.34)$$

onde as distâncias entre a partícula-teste e as massas primária e secundária são, respectivamente,

$$r_1 = \sqrt{(\xi + \mu \cos \Omega t)^2 + (\eta + \mu \sin \Omega t)^2 + \zeta^2}, \quad (8.35)$$

$$r_2 = \sqrt{[\xi - (1 - \mu) \cos \Omega t]^2 + [\eta - (1 - \mu) \sin \Omega t]^2 + \zeta^2}. \quad (8.36)$$

Como  $r_1$  e  $r_2$  são funções do tempo, nesse referencial a Hamiltoniana (8.34) depende explicitamente de  $t$ , de sorte que  $H$  não é igual à energia total do sistema.

Podemos eliminar a dependência do tempo passando para um referencial (não-inercial) que gira com velocidade angular  $\Omega$  em torno do eixo  $\zeta$ . Neste referencial, adotamos um sistema de

coordenadas sinóticas  $(x, y, z)$ , onde  $z = \zeta$ , no qual as massas primária e secundária estão fixas nas posições

$$x_1 = -\tilde{d}_1 = -\mu, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0, \quad (8.37)$$

$$x_2 = -\tilde{d}_2 = 1 - \mu, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0. \quad (8.38)$$

Essa mudança de coordenadas é efetuada por meio de uma transformação canônica de segunda espécie, implementada pela função geratriz

$$F_2(p_x, p_y, p_z; \xi, \eta, \zeta; t) = (\xi \cos \Omega t + \eta \sin \Omega t) p_x + (-\xi \sin \Omega t + \eta \cos \Omega t) p_y + \zeta p_z, \quad (8.39)$$

com as seguintes equações de transformação

$$p_\xi = \frac{\partial F_2}{\partial \xi} = p_x \cos \Omega t - p_y \sin \Omega t, \quad (8.40)$$

$$p_\eta = \frac{\partial F_2}{\partial \eta} = p_x \sin \Omega t + p_y \cos \Omega t, \quad (8.41)$$

$$p_\zeta = \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} = p_z, \quad (8.42)$$

$$x = \frac{\partial F_2}{\partial p_x} = \xi \cos \Omega t + \eta \sin \Omega t, \quad (8.43)$$

$$y = \frac{\partial F_2}{\partial p_y} = -\xi \sin \Omega t + \eta \cos \Omega t, \quad (8.44)$$

$$z = \frac{\partial F_2}{\partial p_z} = \zeta, \quad (8.45)$$

que correspondem a uma rotação dos eixos  $(x, y)$  de um ângulo  $\Omega t$  em torno do eixo  $z$  [Fig. 8.3]. Um cálculo direto nos indica que

$$p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2. \quad (8.46)$$

Resolvendo (8.43)-(8.44) obtemos as transformações inversas:

$$\xi = x \cos \Omega t - y \sin \Omega t, \quad (8.47)$$

$$\eta = x \sin \Omega t + y \cos \Omega t, \quad (8.48)$$

$$z = \zeta. \quad (8.49)$$

Usando (8.46) e estas expressões, a Kamiltoniana (no referencial girante) é dada por

$$\begin{aligned} K(p_x, p_y; x, y) &= H(p_\xi, p_\eta; \xi, \eta, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ &= H + \Omega(y p_x - x p_y) \\ &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Omega(y p_x - x p_y) - \frac{(1-\mu)m}{r_1} - \frac{\mu m}{r_2}, \end{aligned} \quad (8.50)$$

onde as distâncias da partícula teste às massas primária e secundária são, agora, dadas por

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad (8.51)$$

$$r_2 = \sqrt{[x - (1 - \mu)]^2 + y^2 + z^2}. \quad (8.52)$$

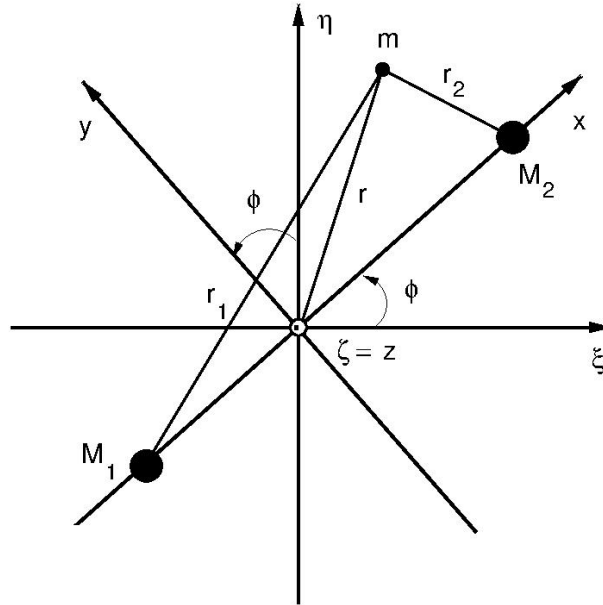


Figura 8.3: Sistemas de coordenadas siderais  $(\xi, \eta, \zeta)$  e sinóticas  $(x, y, z)$ .

Definimos a energia potencial gravitacional do sistema no referencial girante como

$$\Phi(r_1, r_2) = -\frac{(1-\mu)m}{r_1} - \frac{\mu m}{r_2}. \quad (8.53)$$

Lembrando, ainda, que a velocidade angular aponta ao longo do eixo de rotação (no caso  $\Omega = \Omega \hat{\mathbf{z}}$ ), podemos expressar

$$\Omega(y p_x - x p_y) = -\mathbf{p} \cdot (\Omega \times \mathbf{r}), \quad (8.54)$$

de forma que Kamiltoniana (8.50) é reescrita como

$$K = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \mathbf{p} \cdot (\Omega \times \mathbf{r}) + m\Phi(\mathbf{r}). \quad (8.55)$$

É conveniente eliminar a massa da partícula teste utilizando uma transformação não-canônica

$$\tilde{p}_x = \frac{p_x}{m}, \quad \tilde{p}_y = \frac{p_y}{m}, \quad \tilde{p}_z = \frac{p_z}{m}, \quad \tilde{K} = \frac{K}{m}, \quad (8.56)$$

com as seguintes equações de Hamilton

$$\frac{d\tilde{p}_x}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}, \quad (8.57)$$

$$\frac{d\tilde{p}_y}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y}, \quad (8.58)$$

$$\frac{d\tilde{p}_z}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial z}, \quad (8.59)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_x}, \quad (8.60)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_y}, \quad (8.61)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_z}. \quad (8.62)$$



Aplicando (8.56) a (8.55) temos

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} (\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2 + \tilde{p}_z^2) + \Omega(y\tilde{p}_x - x\tilde{p}_y) + \Phi(r_1, r_2). \quad (8.63)$$

Com esta Hamiltoniana reescalada as equações dinâmicas (8.57)-(8.60) fornecem

$$\tilde{p}_x = \dot{x} - \Omega y, \quad (8.64)$$

$$\tilde{p}_y = \dot{y} + \Omega x, \quad (8.65)$$

$$\tilde{p}_z = \dot{z}, \quad (8.66)$$

$$\frac{d\tilde{p}_x}{dt} = \Omega\tilde{p}_y - \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad (8.67)$$

$$\frac{d\tilde{p}_y}{dt} = -\Omega\tilde{p}_x - \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad (8.68)$$

$$\frac{d\tilde{p}_z}{dt} = \ddot{z}. \quad (8.69)$$

Derivando (8.64)-(8.65) em relação ao tempo e usando (8.67)-(8.68) chegamos às equações diferenciais acopladas

$$\ddot{x} = 2\Omega\dot{y} + \Omega^2 x - \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad (8.70)$$

$$\ddot{y} = -2\Omega\dot{x} + \Omega^2 y - \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad (8.71)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad (8.72)$$

que, após definirmos uma energia potencial efetiva,

$$U = \frac{\Omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \Phi, \quad (8.73)$$

tornam-se

$$\ddot{x} = 2\Omega\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (8.74)$$

$$\ddot{y} = -2\Omega\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (8.75)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (8.76)$$

Na expressão (8.55) o termo  $-\Omega^2(x^2 + y^2)$  pode ser interpretado como uma energia potencial associada à força centrífuga, que é uma das forças fictícias que aparecem na descrição do movimento num referencial girante. Já a força de Coriolis, também fictícia, não possui uma energia potencial associada pois, sendo sempre perpendicular à velocidade, não realiza trabalho. Não obstante, o seu efeito aparece no termo proporcional a  $\Omega$  das equações de movimento (8.74)-(8.75).

### 8.3.2 Integral de Jacobi

No referencial girante a Hamiltoniana (8.63) não depende do tempo, por construção, e portanto é uma constante do movimento. Em seu lugar, porém, será mais conveniente definir a chamada integral de Jacobi

$$C = -2\tilde{H} \quad (8.77)$$

Como o problema restrito de três corpos no plano tem dois graus de liberdade, a existência de apenas uma constante de movimento (a integral de Jacobi) continua nos informando que o sistema é não-integrável.

Substituindo (8.64) e (8.65) em (8.63), expressamos a integral de Jacobi como

$$C = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \Omega^2(x^2 + y^2) - 2\Phi, \quad (8.78)$$

$$= -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + 2U. \quad (8.79)$$

Como o termo entre parênteses na expressão acima é sempre maior ou igual a zero, resulta que

$$U \geq \frac{1}{2}C. \quad (8.80)$$

onde, de (8.73),  $U \geq 0$ . Por ser uma constante do movimento, se conhecemos a posição e a velocidade iniciais da partícula-teste, o valor de  $C$  é fixado e permanece o mesmo para quaisquer tempos posteriores. Se  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  então  $C = 2U$ , o que define as chamadas curvas de velocidade zero no plano  $xy$ . As curvas de velocidade zero separam as regiões permitidas para o movimento da partícula-teste (tais que  $U > C/2$ ) das regiões proibidas, onde  $U < C/2$ .

Para um exemplo numérico, consideremos o caso  $\mu = 0,3$ . Na Fig. 8.4 mostramos as curvas de velocidade zero como as fronteiras entre as regiões proibidas (hachureadas) e permitidas (em branco), para diferentes valores da integral de Jacobi. Quando  $C = 2,5$ , por exemplo, as regiões permitidas estão concentradas na vizinhança das massas primária e secundária, bem como o exterior do círculo hachureado [Fig. 8.4(a)]. Como as regiões permitidas estão numa vizinhança das massas, podemos afirmar que o sistema é estável no sentido de Hill. Para um valor menor ( $C = 1,95$ ) as regiões internas se tocam num ponto Lagrangiano  $L_1$  (do qual falaremos na sequência), formando uma curva em formato de número oito (chamada lóbulo de Hill) [Fig. 8.4(b)].

Para valores menores de  $C$  a tanto a região permitida interior quanto a exterior aumentam de tamanho. Para  $C = 1,777$  as duas regiões permitidas se tocam no ponto Lagrangiano  $L_2$  [Fig. 8.4(c)]. Se  $C = 1,646$  há um outro contato destas regiões no ponto Lagrangiano  $L_3$ , próximo à massa primária [Fig. 8.4(d)]. Além disso, aumenta o tamanho da abertura próxima à massa secundária permitindo uma excursão maior das trajetórias da partícula-teste que, em tese, pode “escapar” da proximidade das outras partículas. Quando  $C = 1,5$  há um aumento da abertura próxima à massa primária [Fig. 8.4(e)] e, finalmente, para  $C = 1,42$  praticamente toda a região disponível é permitida, com exceção de pequenas vizinhanças dos pontos Lagrangianos  $L_4$  e  $L_5$ .

É interessante explorar algumas consequências astronômicas destes resultados matemáticos. Uma realização do problema restrito de três corpos no plano é o sistema formado pelo Sol (massa primária), um grande planeta como Júpiter (massa secundária) e um corpo pequeno, como um asteroide, no papel de partícula-teste. Se a integral de Jacobi  $C$  tem um valor relativamente grande, o asteroide pode orbitar tanto o Sol como Júpiter, nunca saindo destas vizinhanças; ou então ele pode mover-se numa órbita bastante larga em torno das duas massas primárias. Se estas regiões permitidas interiores e exteriores não estão conectadas, como na Fig. 8.4(a), o asteroide jamais poderá migrar de uma órbita para outra.

Para valores menores de  $C$  as regiões permitidas internas podem se conectar, como na Fig. 8.4(c), e um asteroide que inicialmente esteja orbitando em torno do Sol poder ser capturado para uma órbita em torno de Júpiter. O contrário também pode ocorrer, ou seja, um planeta pode perder um satélite para uma órbita em torno do Sol.

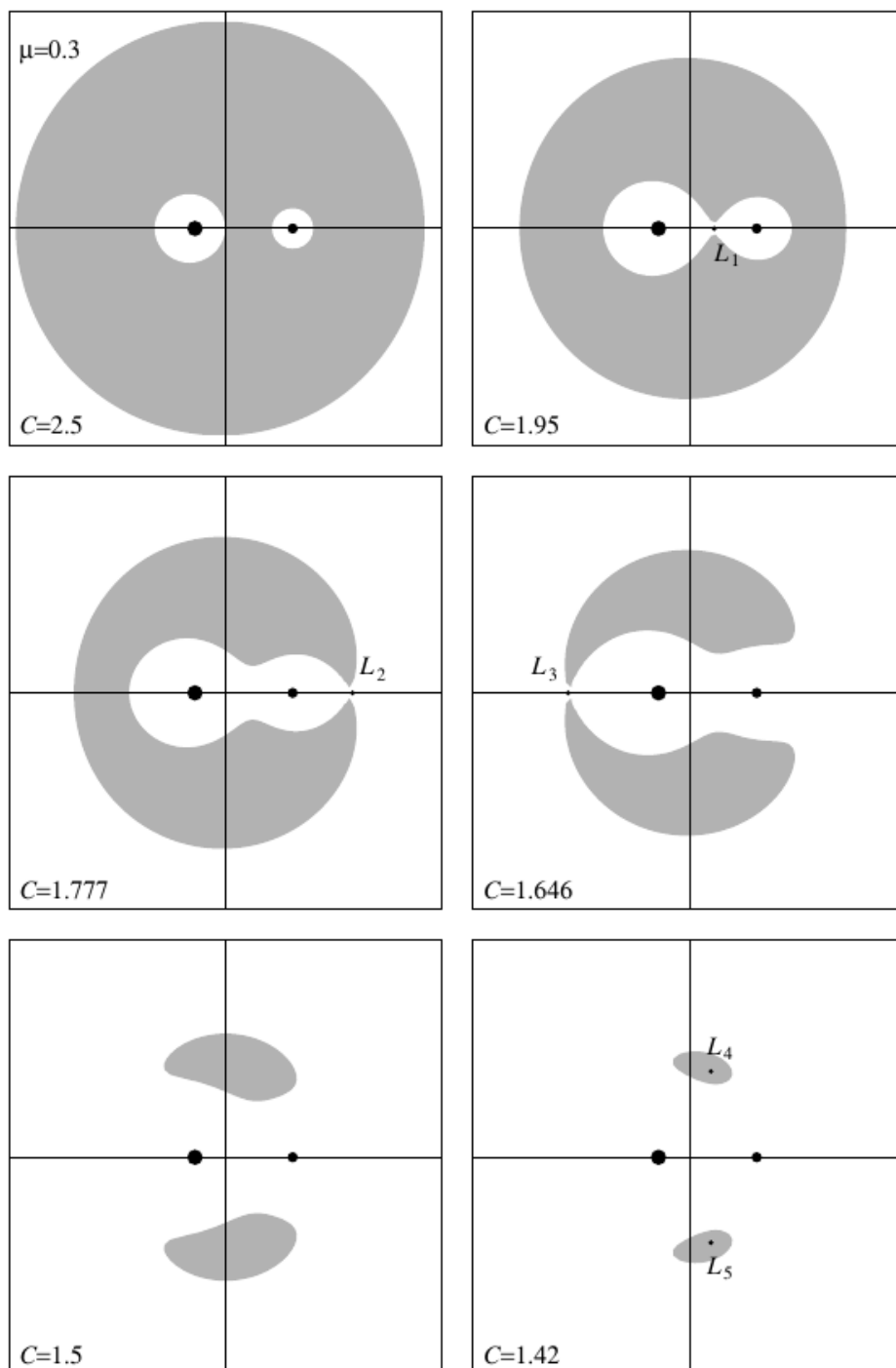


Figura 8.4: Curvas de velocidade zero e regiões proibidas (hachureadas) para  $\mu = 0,3$  e diferentes valores da integral de Jacobi  $C$ .

## 8.4 Pontos Lagrangianos

Os chamados pontos Lagrangianos são pontos de equilíbrio de uma partícula-teste movendo-se no potencial efetivo  $U$  gerado pelas massas primária e secundária. Como vimos há pouco, eles desempenham um papel central na evolução das regiões permitidas e proibidas para o movimento da partícula-teste. As condições que definem os pontos Lagrangianos são, portanto

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{(x^*, y^*)} = 0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{(x^*, y^*)} = 0. \quad (8.81)$$

É importante notar que a partícula-teste estará em repouso nos pontos Lagrangianos apenas no referencial girante. No referencial inercial (sideral) a partícula estará se movendo com velocidade angular  $\Omega$ , tal que sua posição em relação às outras partículas é constante.

De (8.73) resulta que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \Omega x - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (8.82)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \Omega y - \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (8.83)$$

onde, de (8.53),

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1-\mu}{r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\mu}{r_2^2} \frac{\partial r_2}{\partial x}, \quad (8.84)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1-\mu}{r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\mu}{r_2^2} \frac{\partial r_2}{\partial y}, \quad (8.85)$$

e, finalmente, usando (8.111)-(8.52),

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{x+\mu}{r_1}, \quad (8.86)$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y} = \frac{y}{r_1}, \quad (8.87)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x} = \frac{x-(1-\mu)}{r_2}, \quad (8.88)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial y} = \frac{y}{r_2}. \quad (8.89)$$

Juntando tudo em (8.81) e fazendo  $\Omega = 1$  temos as duas condições seguintes para as posições dos pontos Lagrangianos

$$x^* - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^{*3}} - \frac{\mu(x^*-1+\mu)}{r_2^{*3}} = 0, \quad (8.90)$$

$$y^* \left\{ 1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^{*3}} - \frac{\mu}{r_2^{*3}} \right\} = 0. \quad (8.91)$$

onde

$$r_1^* = \sqrt{(x^* + \mu)^2 + y^{*2}}, \quad (8.92)$$

$$r_2^* = \sqrt{[x^* - (1-\mu)]^2 + y^{*2}}. \quad (8.93)$$

De (8.91) temos que há duas famílias de soluções: aquelas para as quais  $y^* = 0$  (pontos colineares) e  $y^* \neq 0$  (pontos triangulares).

### 8.4.1 Pontos colineares

Como  $y^* = 0$  estes pontos encontram-se sobre a reta que contém as massas primária e secundária. Para determinarmos as abscissas do pontos colineares usamos (8.111) e (8.52) para reescrever (8.90) na forma

$$x^* - \frac{1-\mu}{(x^*+\mu)^2} \frac{x^*+\mu}{|x^*+\mu|} - \frac{\mu}{(x^*-1+\mu)^2} \frac{x^*-1+\mu}{|x^*-1+\mu|} = 0. \quad (8.94)$$

Há três casos possíveis onde esta expressão se aplica:

1.  $x^* < -\mu$ :  $x^*$  está à esquerda de ambas as massas, com

$$x^* + \frac{1-\mu}{(x^*+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x^*-1+\mu)^2} \frac{x^*-1+\mu}{|x^*-1+\mu|} = 0, \quad (8.95)$$

2.  $-\mu < x^* < 1-\mu$ :  $x$  está entre a massa primária e a secundária, tal que

$$x^* - \frac{1-\mu}{(x^*+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x^*-1+\mu)^2} = 0. \quad (8.96)$$

3.  $x > 1-\mu$ :  $x$  está à direita de ambas as massas, de modo que

$$x^* - \frac{1-\mu}{(x^*+\mu)^2} - \frac{\mu}{(x^*-1+\mu)^2} = 0. \quad (8.97)$$

Todas estas são equações algébricas de quinto grau, e devem ser resolvidas numericamente para um dado valor de  $\mu$ . Cada uma delas só possui uma raiz real no intervalo para o qual ela é válida. Estas soluções reais identificam os pontos Lagrangianos colineares denotados por  $L_1$  (entre as massas),  $L_2$  (à direita) e  $L_3$  (à esquerda). Por exemplo, para  $\mu = 0,3$ , temos que

$$x_{L_1}^* = 0,3, \quad x_{L_2}^* \approx 1,25, \quad x_{L_3}^* \approx -1,12$$

### 8.4.2 Pontos triangulares

Vamos, agora, considerar os pontos Lagrangianos para os quais  $y \neq 0$ . Neste caso (8.91) fica

$$1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^{*3}} - \frac{\mu}{r_2^{*3}} = 0. \quad (8.98)$$

Multiplicando esta expressão por  $x^* + \mu$  e subtraindo o resultado de (8.90) obtemos

$$\mu - \frac{\mu}{r_1^{*3}}, \quad (8.99)$$

cuja solução é  $r_1^* = 1$ .

Analogamente, multiplicando (8.98) por  $(x^* - 1 + \mu)$  e subtraindo de (8.90) chegamos a

$$1 - \mu - \frac{1-\mu}{r_2^{*3}}, \quad (8.100)$$

de modo que  $r_2^* = 1$ . Como a distância entre as massas primária e secundária também é igual a 1, o ponto Lagrangiano não-colinear é o terceiro vértice de um triângulo equilátero cujos demais vértices são as outras massas [Fig. 8.5].

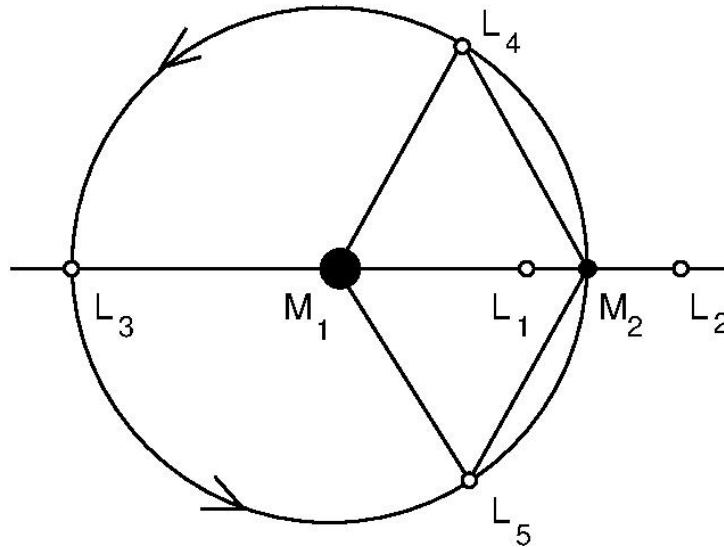


Figura 8.5: Pontos Lagrangianos colineares e triangulares.

De fato, há dois pontos Lagrangianos triangulares, denotados por  $L_4$  e  $L_5$ . Para mostrar este fato, fazemos  $r_1^* = r_2^* = 1$  em (8.111)-(8.52):

$$(x^* + \mu)^2 + y^{*2} = 1, \quad (8.101)$$

$$(x^* - 1 + \mu)^2 + y^{*2} = 1. \quad (8.102)$$

Inserindo (8.101) em (8.102) obtemos  $x^* = -\mu + 1/2$ , tal que

$$(x^* + \mu)^2 = 1 - y^{*2} = \frac{1}{4}, \quad (8.103)$$

onde  $y^* = \pm\sqrt{3}/2$ . Assim, o ponto triangular  $L_4$  tem  $y$  positivo e  $L_5$ ,  $y$  negativo. Logo há, na verdade, dois triângulos equiláteros posicionados simetricamente em relação à linha  $y = 0$  [Fig. 8.5].

## 8.5 Equações de Hill

Se  $\mu \ll 1$  a órbita da partícula-teste é essencialmente Kepleriana em relação à massa primária  $M_1$ , desde que a partícula-teste esteja suficientemente longe da massa secundária  $M_2$ . Essa órbita Kepleriana só é perturbada de forma significativa quando a partícula-teste está próxima da massa secundária. Para descrever este tipo de situação, podemos obter equações de movimento aproximadas para descrever o movimento da partícula-teste nas proximidades da massa secundária, chamadas equações de Hill.

Partimos das equações de movimento (8.74)-(8.75) que, em vista de (8.73), são escritas como (fazendo  $\Omega = 1$ ):

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu[x-(1-\mu)]}{r_2^3}, \quad (8.104)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}, \quad (8.105)$$

onde, de (8.111)-(8.52)

$$r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2, \quad (8.106)$$

$$r_2^2 = [x - (1 - \mu)]^2 + y^2. \quad (8.107)$$

Fazemos uma transformação de variáveis dada por

$$x' = x - 1 + \mu, \quad y' = y, \quad (8.108)$$

e que resulta nas seguintes equações de movimento da partícula-teste

$$\ddot{x}' - 2\dot{y}' = x' + 1 - \mu - \frac{(1 - \mu)(x' + 1)}{r_1'^3} - \frac{\mu x'}{r_2'^3}, \quad (8.109)$$

$$\ddot{y}' + 2\dot{x}' = y' - \frac{(1 - \mu)y'}{r_1'^3} - \frac{\mu y'}{r_2'^3}, \quad (8.110)$$

onde, de (8.111)-(8.52),

$$r_1'^2 = (x' + 1)^2 + y'^2, \quad (8.111)$$

$$r_2'^2 = x'^2 + y'^2 \equiv \Upsilon^2. \quad (8.112)$$

No limite  $\mu \ll 1$  temos que  $1 - \mu \sim 1 + \mu \sim 1$  e

$$\ddot{x}' - 2\dot{y}' \approx x' + 1 - \frac{x' + 1}{r_1'^3} - \frac{\mu x'}{r_2'^3}, \quad (8.113)$$

$$\ddot{y}' + 2\dot{x}' - y' \approx -\frac{y'}{r_1'^3} - \frac{\mu y'}{r_2'^3}, \quad (8.114)$$

Expandindo em séries de Taylor em torno do ponto  $(x' = 0, y' = 0)$  obtemos

$$-\frac{x' + 1}{r_1'^3} \approx -1 + 2x', \quad -\frac{y'}{r_1'^3} \approx -y', \quad (8.115)$$

resultando nas chamadas *equações de Hill*

$$\dot{x}' - 2\dot{y}' = \left(3 - \frac{\mu}{\Upsilon^3}\right) x', \quad (8.116)$$

$$\dot{y}' + 2\dot{x}' = -\frac{\mu y'}{\Upsilon^3}. \quad (8.117)$$

Definindo o potencial

$$U_H = \frac{3}{2}x'^2 + \frac{\mu}{\Upsilon^3}, \quad (8.118)$$

expressamos as equações de Hill como

$$\dot{x}' - 2\dot{y}' = \frac{\partial U_H}{\partial x'}, \quad (8.119)$$

$$\dot{y}' + 2\dot{x}' = \frac{\partial U_H}{\partial y'}. \quad (8.120)$$

Uma aplicação das equações de Hill é a determinação da posição dos pontos Lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$  quando  $\mu \ll 1$ . Impondo as condições de equilíbrio

$$\dot{x}^* = \ddot{x}^* = 0, \quad \dot{y}^* = \ddot{y}^* = 0,$$

nas equações de Hill temos que

$$x'^* = \pm \Upsilon_H, \quad y'^* = 0 \quad (8.121)$$

onde

$$\Upsilon_H = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}, \quad (8.122)$$

sendo que o sinal positivo corresponde à posição de  $L_1$ , e o negativo, a  $L_2$ . Observamos que estes pontos colineares estão simetricamente posicionados em relação à massa secundária. Esta, por sua vez, é o centro de uma esfera de raio  $\Upsilon_H$  (esfera de Hill).

## 8.6 Estabilidade dos pontos Lagrangianos

Os pontos Lagrangianos são pontos de equilíbrio para uma partícula-teste sob o potencial efetivo  $U$  criado pelas massas primária e secundária. No entanto, o movimento da partícula-teste depende da estabilidade destes pontos de equilíbrio. Para estudar este problema utilizaremos a aproximação linear, como fizemos no Capítulo 2 (seção 2.4). O procedimento consiste em tomar pequenas perturbações das posições  $(x^*, y^*)$  dos pontos Lagrangianos, na forma

$$x = x^* + \delta x, \quad y = y^* + \delta y, \quad (8.123)$$

onde  $|\delta x| \ll |x^*|$  e  $|\delta y| \ll |y^*|$  são pequenos o suficiente para que possamos linearizar as equações de movimento nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio. Se as perturbações  $\delta x$  e  $\delta y$  têm valores que permanecem dentro dessa vizinhança, o ponto de equilíbrio é um centro, e as trajetórias próximas executam órbitas fechadas [vide Fig. 2.3(a)]. Neste caso, podemos dizer que o ponto Lagrangiano será estável no sentido de Lyapunov. Já se as perturbações tiverem valores que aumentam indefinidamente com o passar do tempo, o ponto de equilíbrio será instável, e similar ao ponto de sela mostrado na Fig. 2.3(b). Como o problema restrito de três corpos no plano tem quatro graus de liberdade, a análise de estabilidade demanda um volume maior de cálculos algébricos, em comparação com o tratamento que fizemos na seção 2.4, mas as ideias básicas permanecem as mesmas.

### 8.6.1 Equações linearizadas

Partimos das equações (8.74)-(8.75) que, em vista de (8.123), são expressas em termos das perturbações como (por simplicidade fazemos  $\Omega = 1$ )

$$\ddot{\delta x} - 2\dot{\delta y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (8.124)$$

$$\ddot{\delta y} + 2\dot{\delta x} = \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (8.125)$$



onde expandimos os segundos membros em séries de Taylor nos deslocamentos, retendo apenas os termos lineares

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{(x^*, y^*)} + \delta x \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{(x^*, y^*)} + \delta y \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_{(x^*, y^*)}, \quad (8.126)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{(x^*, y^*)} + \delta x \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right)_{(x^*, y^*)} + \delta y \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{(x^*, y^*)}. \quad (8.127)$$

Os termos constantes em ambas as expansões são identicamente nulos, em vista das condições (8.81). As demais derivadas, quando calculadas nos pontos Lagrangianos, são constantes, denotadas por

$$a = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{(x^*, y^*)}, \quad (8.128)$$

$$d = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{(x^*, y^*)}, \quad (8.129)$$

$$b = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_{(x^*, y^*)} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right)_{(x^*, y^*)}, \quad (8.130)$$

e as equações de segunda ordem (8.74)-(8.75) tornam-se

$$\ddot{\delta x} - 2\dot{\delta y} = a\delta x + b\delta y, \quad (8.131)$$

$$\ddot{\delta y} + 2\dot{\delta x} = b\delta x + d\delta y, \quad (8.132)$$

que podem ser transformadas num sistema de quatro equações de primeira ordem

$$\dot{\delta x} = \delta v_x, \quad (8.133)$$

$$\dot{\delta y} = \delta v_y, \quad (8.134)$$

$$\dot{\delta v}_x = a\delta x + b\delta y + 2\dot{\delta y}, \quad (8.135)$$

$$\dot{\delta v}_y = b\delta x + d\delta y - 2\dot{\delta x} \quad (8.136)$$

Podemos, finalmente, expressar este sistema numa forma matricial:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}, \quad (8.137)$$

onde definimos

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta v_x \\ \delta v_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 2 \\ b & d & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.138)$$

Como vimos na seção 2.4, a estabilidade linear dos pontos de equilíbrio é determinada pelos autovalores  $\xi$  da matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$ , e que são dados pelas raízes da equação secular

$$\det(\mathbf{J} - \xi \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 2 \\ b & d & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (8.139)$$

Abrindo o determinante de quarta ordem acima resulta uma equação biquadrática

$$\xi^4 + (4 - a - d)\xi^2 + (ad - b^2) = 0, \quad (8.140)$$

que terá, de modo geral, quatro raízes reais ou complexas, dadas por

$$\xi_{1,2} = \pm \left\{ -\frac{1}{2}(4 - a - d) - \frac{1}{2} \left[ (4 - a - d)^2 - 4(ad - b^2) \right]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (8.141)$$

$$\xi_{3,4} = \pm \left\{ -\frac{1}{2}(4 - a - d) + \frac{1}{2} \left[ (4 - a - d)^2 - 4(ad - b^2) \right]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (8.142)$$

Assim como no estudo da estabilidade em sistemas com dois graus de liberdade, aqui também teremos duas situações possíveis:

1. os autovalores são imaginários puros (e complexos conjugados entre si): o ponto de equilíbrio será um centro, e portanto linearmente estável no sentido de Lyapunov, de tal modo que as trajetórias próximas executam pequenas oscilações em torno do ponto Lagrangiano;
2. os autovalores são reais: em havendo uma ou mais raízes positivas, o ponto de equilíbrio será um ponto de sela, e portanto linearmente instável: as trajetórias afastam-se do ponto Lagrangiano a uma taxa exponencial igual ao autovalor correspondente.

### 8.6.2 Elementos da matriz Jacobiana

Para uso na análise de estabilidade, precisamos calcular explicitamente os elementos da matriz Jacobiana. Usando (8.73) e (8.53) a energia potencial efetiva é dada por

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2}}, \quad (8.143)$$

cujas derivadas parciais são

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{(\mu - 1)(x + \mu)}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu(x + \mu - 1)}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} + x, \quad (8.144)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\mu - 1}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{3(\mu - 1)(x + \mu)^2}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{5/2}} - \frac{\mu}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{3\mu(x + \mu - 1)^2}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{5/2}} + 1, \quad (8.145)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{(\mu - 1)y}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu y}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} + y, \quad (8.146)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\mu - 1}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{3(\mu - 1)y^2}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{5/2}} - \frac{\mu}{[(x + \mu - 1)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{3\mu y^2}{[(x + \mu - 1)^2 + y^2]^{5/2}} + 1, \quad (8.147)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{3\mu(x + \mu - 1)y}{[(x + \mu - 1)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu z}{[(x + \mu - 1)^2 + y^2]^{3/2}}, \quad (8.148)$$

Agora devemos calcular estas derivadas parciais nos pontos de equilíbrio  $(x^*, y^*)$ . Segundo (8.128) -(8.130), temos

$$a = 1 - \tilde{a} + \tilde{d}, \quad (8.149)$$

$$b = \tilde{c}y^*, \quad (8.150)$$

$$d = 1 - \tilde{a} + \tilde{b}y^{*2}, \quad (8.151)$$

onde

$$\tilde{a} = \frac{1-\mu}{(r_1^3)_0} + \frac{\mu}{(r_2^3)_0}, \quad (8.152)$$

$$\tilde{b} = 3 \left[ \frac{1-\mu}{(r_1^5)_0} + \frac{\mu}{(r_2^5)_0} \right], \quad (8.153)$$

$$\tilde{c} = 3 \left[ \frac{(1-\mu)(x^* + \mu)}{(r_1^5)_0} + \frac{\mu(x^* + \mu - 1)}{(r_2^5)_0} \right], \quad (8.154)$$

$$\tilde{d} = 3 \left[ \frac{(1-\mu)(x^* + \mu)^2}{(r_1^5)_0} + \frac{\mu(x^* + \mu - 1)^2}{(r_2^5)_0} \right]. \quad (8.155)$$

e, portanto,

$$(r_1^3)_0 = \left[ (x^* + \mu)^2 + y^{*2} \right]^{3/2}, \quad (8.156)$$

$$(r_2^3)_0 = \left[ (x^* + \mu - 1)^2 + y^{*2} \right]^{3/2}, \quad (8.157)$$

### 8.6.3 Estabilidade dos pontos colineares

Para os pontos Lagrangianos colineares temos que  $y^* = 0$ , de sorte que as expressões anteriores se simplificam um pouco:

$$(r_1)_0 = x^* + \mu, \quad (8.158)$$

$$(r_2)_0 = x^* + \mu - 1, \quad (8.159)$$

$$\tilde{a} = \frac{1-\mu}{(x^* + \mu)^3} + \frac{\mu}{(x^* + \mu - 1)^3}, \quad (8.160)$$

$$\tilde{d}' = 3\tilde{a}, \quad (8.161)$$

$$a = 1 + 2\tilde{a}, \quad b = 0, \quad (8.162)$$

$$d = 1 - \tilde{a}. \quad (8.163)$$

Os autovalores correspondentes  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , são as raízes da equação secular (8.140) que, em vista das relações precedentes, é

$$\xi^4 + (2 - \tilde{a})\xi^2 + (1 + 2\tilde{a})(1 - \tilde{a}) = 0. \quad (8.164)$$

Escrevendo  $s = \xi^2$  essa equação biquadrática torna-se do segundo grau,

$$s^2 + (2 - \tilde{a})s + (1 + 2\tilde{a})(1 - \tilde{a}) = 0, \quad (8.165)$$

tendo  $s_1$  e  $s_2$  como as suas raízes. Pelas relações de Girard, sabemos que

$$s_1 s_2 = (\xi_1 \xi_2)(\xi_3 \xi_4) = (1 + 2\tilde{a})(1 - \tilde{a}). \quad (8.166)$$

Os pontos de equilíbrio serão estáveis (centros) se forem imaginários puros. Como eles são complexos conjugados entre si, então  $\xi_2 = -\xi_1$  e  $\xi_4 = -\xi_3$ , donde  $\xi_1^2 < 0$  e  $\xi_3^2 < 0$ , tal que (8.166) nos leva à seguinte condição de estabilidade

$$\xi_1^2 \xi_3^2 = (1 + 2\tilde{a})(1 - \tilde{a}) > 0. \quad (8.167)$$

Como  $\tilde{a} > 0$ , isto implica em que  $\tilde{a} < 1$  para estabilidade dos pontos colineares (uma condição necessária, porém não suficiente).

No ponto de equilíbrio temos, de (8.163), que

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{(x^*, y^*=0)} = -\frac{(1-\mu)}{(x^*+\mu)^2} - \frac{\mu}{(x^*+\mu-1)^2} + x^* = 0, \quad (8.168)$$

o que nos permite escrever (8.160) na forma

$$1 - \tilde{a} = \frac{\mu(1-\mu)}{x^*} \left( \frac{1}{(x^*+\mu)^3} - \frac{1}{(x^*+\mu-1)^3} \right) > 0 \quad (8.169)$$

devido à condição de estabilidade  $\tilde{a} < 1$ . Um pouco de álgebra nos leva à inequação

$$\frac{(x^*+\mu-1)^2 - (x^*+\mu)^2}{x^*} = \frac{-2(x^*+\mu)+1}{x^*} > 0, \quad (8.170)$$

e nos defrontamos com duas situações possíveis:

1. se  $x^* > 0$  (o que vale para os pontos colineares  $L_1$  e  $L_2$ ) então  $-2(x^*+\mu)+1 > 0$ , ou seja,  $x^* < 1/2 - \mu$ , o que nunca é o caso tanto para  $L_1$  como  $L_2$ ;
2. se  $x^* < 0$  (caso de  $L_3$ ) então  $-2(x^*+\mu)+1 < 0$ , logo  $x^* > 1/2 - \mu$ . Mas  $\mu < 1/2$  por definição, então essa condição implicaria em  $x^* > 0$ , ou seja, numa contradição.

Concluimos, assim, que todos os três pontos colineares nunca poderão satisfazer simultaneamente a condição de estabilidade  $\tilde{a} < 1$ , todos os três serão necessariamente instáveis (na aproximação linear). De fato, eles são pontos de sela: instáveis ao longo de um sub-espaço invariante, e estáveis ao longo de outro. Os sub-espaços invariantes estável e instável são gerados pelos autovetores correspondentes aos autovalores negativos e positivos, respectivamente.

Sendo os pontos de equilíbrio instáveis, uma pequena perturbação ao longo de qualquer direção (exceto o caso em que estamos no sub-espaço estável) irá produzir uma trajetória que afasta-se a uma taxa exponencialmente rápida do ponto Lagrangiano. Como estudamos no Capítulo 2, no caso bidimensional, onde um ponto de sela tem uma direção invariantes estável e instável, as trajetórias no plano de fase são hiperbólicas, tendo estas direções como assíntotas.

Supondo que  $\xi_m$  seja o maior autovalor positivo associado ao ponto Lagrangiano, o afastamento de uma trajetória próxima a ele na direção do autovetor correspondente será  $\sim \exp(\xi_m t)$ . Portanto, o tempo característico para que haja um afastamento apreciável da partícula-teste é da ordem de

$$T \sim \frac{1}{\xi_m}. \quad (8.171)$$

Para avaliarmos o grau de instabilidade de um ponto de sela devemos comparar o tempo de afastamento  $T$  com os períodos característicos do movimento.

### 8.6.4 Estabilidade dos pontos triangulares

Os pontos Lagrangianos triangulares  $L_4$  e  $L_5$  estão localizados em  $x^* = 1/2 - \mu$  e  $y^* = \pm\sqrt{3}/2$ , e formam os vértices de triângulos equiláteros de lado unitário com as massas primária e secundária. Logo  $(r_1)_0 = (r_2)_0 = 1$ . Para ambos os pontos, as constantes (8.152)-(8.155) assumem os seguintes valores

$$\tilde{a} = 1, \quad \tilde{b} = 3, \quad \tilde{c} = \frac{3}{2}(1 - 2\mu), \quad \tilde{d} = \frac{3}{4}, \quad (8.172)$$

e os elementos de matriz (8.149)-(8.150) são

$$a = 3/4, \quad b = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu), \quad d = \frac{9}{4}. \quad (8.173)$$

A equação secular (8.140), neste caso, será

$$\xi^4 + \xi^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0, \quad (8.174)$$

ou, ainda, uma vez que  $s = \xi^2$ , a equação do segundo grau,

$$s^2 + s + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0, \quad (8.175)$$

cujas raízes são

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (8.176)$$

onde o discriminante é

$$\Delta = 1 - 27\mu(1 - \mu). \quad (8.177)$$

Novamente, alguns casos possíveis apresentam-se:

1. se  $\Delta \geq 0$  as raízes  $s_{1,2}$  são reais. Os pontos de equilíbrio serão estáveis se os autovalores forem negativos, havendo portanto duas possibilidades

- (a)  $s_1 < 0$ : de (8.176) implica em  $\Delta < 1$  que, de (8.177),

$$2 + \mu(1 - \mu) > 0 \quad (8.178)$$

que é sempre satisfeita para  $\mu < 1/2$ .

- (b)  $s_2 < 0$ : para isso  $-1 - \Delta < 0$ , que sempre é satisfeita.

2. se  $\Delta < 0$  as raízes serão números complexos conjugados

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \mp \frac{|\Delta|^{1/2}}{2}$$

Cada um deles, como  $s_1$ , corresponde por sua vez aos autovalores

$$\xi_{1,2} = \pm a_1 \pm ib_1$$

A relação  $\xi_1^2 = s_1$  implica em

$$a_1^2 - b_1^2 + 2ia_1b_1 = -\frac{1}{2} - \frac{|\Delta|^{1/2}}{2}$$

que não pode ser satisfeita se  $a_1 = 0$ , donde necessariamente  $a_1 \neq 0$ . Mas se  $a_1 > 0$  o autovalor  $\xi_1$  terá uma parte real positiva, o que indica instabilidade. Analogamente, se  $a_1 < 0$ , será  $\xi_2$  a ter uma parte real positiva: ambas as escolhas levam à instabilidade.

Resumindo esta análise, a condição necessária e suficiente para que os pontos triangulares  $L_4$  e  $L_5$  sejam estáveis é  $\Delta \geq 0$  que, em vista de (8.177), leva à inequação quadrática

$$\mu^2 - \mu + \frac{1}{27} \geq 0, \quad (8.179)$$

cuja solução é (lembrando que  $\mu < 1/2$ )

$$\mu \leq \mu_0 = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{23}{27}} \right) = 0,03852. \quad (8.180)$$

Este notável resultado mostra que os pontos  $L_4$  e  $L_5$  são estáveis, na aproximação linear, se a massa primária contiver mais do que  $\sim 96\%$  da massa total do sistema. Em princípio, a estabilidade linear não implica necessariamente a estabilidade não-linear, ou seja, em relação a perturbações arbitrariamente grandes dos pontos de equilíbrio. No entanto, a estabilidade não-linear de  $L_4$  e  $L_5$ , no intervalo (8.180) também foi demonstrada recentemente.

Dentro do intervalo de estabilidade  $0 < \mu \leq \mu_0$ , e usando (8.176) e (8.177) os autovalores são

$$\xi_{1,2} = \pm \sqrt{s_1} = \pm \left[ \frac{-1 - \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}{2} \right]^{1/2}, \quad (8.181)$$

$$\xi_{3,4} = \pm \sqrt{s_2} = \pm \left[ \frac{-1 + \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}{2} \right]^{1/2}. \quad (8.182)$$

Se  $\mu$  é pequeno, podemos usar o teorema binomial para escrever

$$\sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)} \approx 1 - \frac{27}{2}\mu,$$

e obter, pois, expressões aproximadas para os autovalores,

$$\xi_{1,2} \approx \pm \sqrt{-1 + \frac{27}{4}\mu}, \quad (8.183)$$

$$\xi_{3,4} \approx \pm \sqrt{-\frac{27}{4}\mu}. \quad (8.184)$$

No caso de um espaço de fase bidimensional, vimos no Capítulo 2 que, sendo centros os pontos de equilíbrio, as trajetórias nas suas vizinhanças são curvas fechadas em torno do ponto de equilíbrio. No pêndulo, por exemplo, as trajetórias são elipses pois o espaço de fase tem apenas duas dimensões. Os deslocamentos do ponto de equilíbrio são dados por termos do tipo  $\cos(\xi t)$  e  $\sin(\xi t)$ , onde o tempo característico é  $T = 2\pi/|\xi|$ , que corresponde ao período das órbitas fechadas.

Como, no problema restrito de três corpos, a dimensão do espaço de fase é quatro, as trajetórias nas vizinhanças dos pontos triangulares são mais complicadas, tendo dois períodos característicos

$$T_{1,2} = \frac{2\pi}{|\xi_{1,2}|}, \quad T_{3,4} = \frac{2\pi}{|\xi_{3,4}|}. \quad (8.185)$$

Quando  $\mu \ll 1$  as expressões (8.183) e (8.184) sugerem que os períodos característicos são distintos: enquanto  $|\xi_{1,2}| \sim 1$  temos um período curto  $T_{1,2} \sim 2\pi$ , correspondente a um movimento epicíclico. Já  $|\xi_{3,4}| \ll 1$  implica em oscilações de longo período  $T_{3,4} \gg 2\pi$ , que correspondem às órbitas fechadas (librações) em torno do ponto triangular [Fig. 8.6(a)]. No referencial girante, as trajetórias da partícula-teste nas vizinhanças dos pontos triangulares são combinações destes dois movimentos, ou seja, são epiciclos cujos centros executam órbitas do tipo libração [Fig. 8.6(b)].

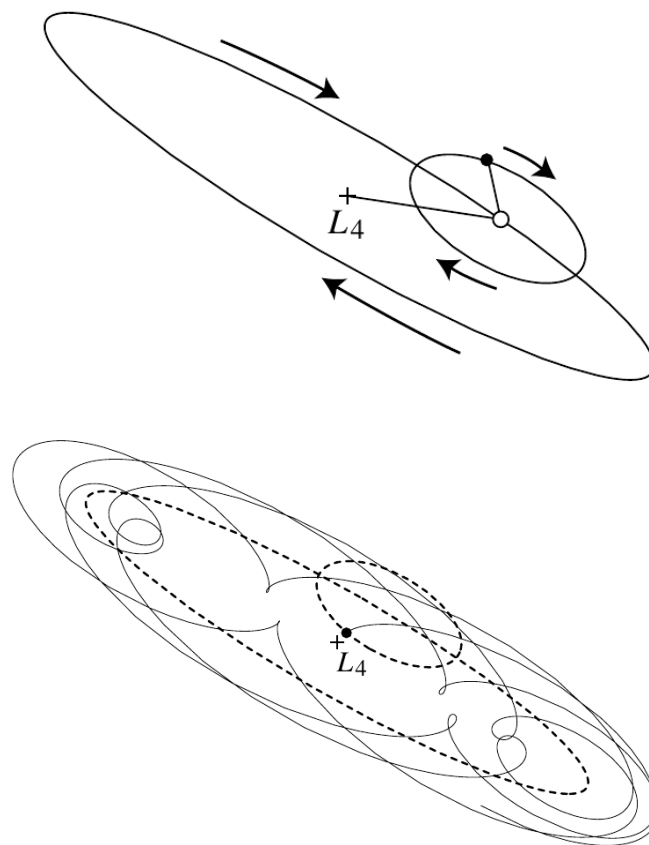


Figura 8.6: (a) Movimentos associados a cada período característico, (b) Movimento resultante da partícula-teste nas vizinhanças de um ponto Lagrangiano triangular.

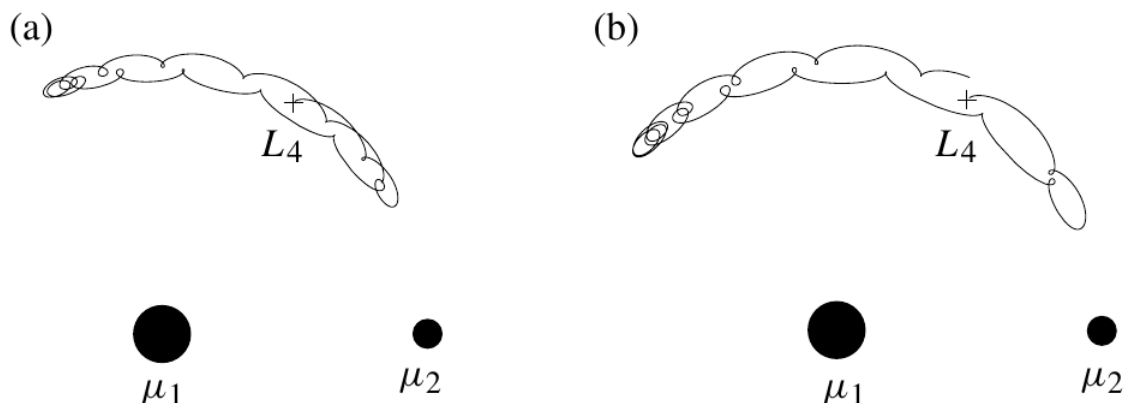


Figura 8.7: Órbitas do tipo girino em torno do ponto Lagrangiano  $L_4$ , situado em  $x^* = 0,5 - \mu_2$  e  $y^* = \sqrt{3}/2$ , com  $\mu_2 = 0,001$  e as seguintes condições iniciais: (a)  $x_0 = x^* + 0,0065$ ,  $y_0 = y^* + 0,0065$ ,  $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ ; (b)  $x_0 = x^* + 0,008$ ,  $y_0 = y^* + 0,008$ ,  $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ .

### 8.6.5 Órbitas girino e ferradura

A descrição que fizemos decorre da análise linear de estabilidade e, portanto, corresponde apenas aos movimentos nas vizinhanças dos pontos triangulares. Para condições iniciais suficientemente longe dos mesmos, como o sistema é não-integrável, precisamos integrar numericamente as equações de movimento (8.74)-(8.75). Para isso, é conveniente escrevê-las na forma de um sistema de primeira ordem

$$\dot{x} = v_x \quad (8.186)$$

$$\dot{y} = v_y, \quad (8.187)$$

$$\dot{v}_x = 2v_y + \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (8.188)$$

$$\dot{v}_y = -2v_x + \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (8.189)$$

onde

$$U(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{[x - (1 - \mu)]^2 + y^2}}. \quad (8.190)$$

As Figs. 8.7(a) e (b) mostram exemplos de trajetórias obtidas numericamente em torno do ponto Lagrangiano  $L_4$ , situado em  $x^* = 0,5 - \mu_2$  e  $y^* = \sqrt{3}/2$ , com  $\mu_2 = 0,001$ , para condições iniciais diferentes. Estas trajetórias são essencialmente as mesmas que descrevemos anteriormente, para as vizinhanças do ponto triangular  $L_4$ , ou seja, são epiciclos superpostos a uma órbita fechada. Este formato de órbita é conhecida como *girino*, e pode envolver tanto  $L_4$  como  $L_5$ . Para outras condições iniciais, no entanto, a órbita envolve ambos os pontos triangulares, e é conhecida como órbita *ferradura*, pelo seu formato. As Figs. 8.8(a) e (b) ilustram órbitas do tipo ferradura em torno do ponto Lagrangiano  $L_4$ , com  $\mu_2 = 0,000953875$  e condições iniciais diferentes.

Como a integral de Jacobi  $C$  é uma constante de movimento no referencial girante que estamos usando, para cada condição inicial  $(x_0, y_0; v_{x0}, v_{y0})$  temos uma única trajetória, associada a um dado valor de  $C$ . As trajetórias estão limitadas pela curva de velocidade zero, ou seja, só



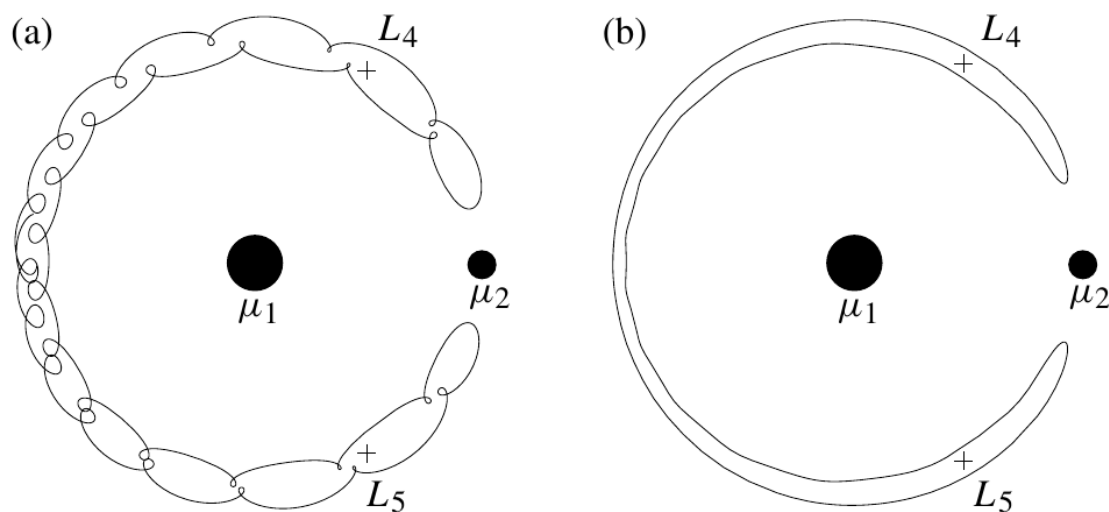


Figura 8.8: Órbitas do tipo ferradura em torno do ponto Lagrangiano  $L_4$ , com  $\mu_2 = 0,000953875$  e as seguintes condições iniciais: (a)  $x_0 = -0,97668$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0, \dot{y}_0 = -0,06118$ ; (b)  $x_0 = -1,02745$ ,  $y_0 = \dot{x}_0 = 0$ ,  $\dot{y}_0 = 0,04032$ .

podem existir nas regiões permitidas. Assim, aumentando o valor de  $C$ , podemos passar de uma órbita do tipo girino para outra do tipo ferradura e *vice-versa*.

### 8.6.6 Aplicações astronômicas

Os pontos colineares  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  foram descobertos por Euler em 1750; enquanto que os pontos triangulares  $L_4$  e  $L_5$  o foram por Lagrange, em 1772. Para sistemas com  $\mu \leq 0,038$  os pontos  $L_4$  e  $L_5$  são estáveis, de modo que espera-se que existam asteróides nas suas vizinhanças. Há várias situações desse tipo no Sistema Solar, principalmente no cinturão principal de asteróides que existe entre as órbitas de Marte e Júpiter, que conta com  $\sim 10^6$  asteróides, dos quais os mais conhecidos são Ceres, Pallas e Juno.

Por exemplo, considerando o sistema Sol-Júpiter-asteróide, onde as massas são, respectivamente, da ordem de

$$M_1 \approx 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad M_2 \approx 2,0 \times 10^{27} \text{ kg}, \quad m \sim 3,0 \times 10^{21} \text{ kg}, \quad (8.191)$$

resulta que

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \sim 0,001 \ll 1, \quad \frac{m}{M_2} \sim 10^{-6} \lll 1, \quad (8.192)$$

A órbita elíptica Sol-Júpiter tem semi-eixo maior  $a = 778,34 \times 10^9 \text{ m}$  e excentricidade  $e = 0,0487$ , com período orbital de 11.862 anos.

Os pontos Lagrangianos triangulares  $L_4$  e  $L_5$  do sistema Sol-Júpiter são populados por asteróides chamados *Troianos* [Fig. 8.11]. O primeiro asteróide troiano (Aquiles 588) foi descoberto em 1906. Outros troianos são Agamenon e Heitor. Até hoje já foram catalogados mais de seis mil troianos. Todos os asteróides troianos movem-se em órbitas do tipo girino.

Outros sistemas Sol-planetras também possuem troianos nas proximidades dos seus pontos triangulares, como Marte, Vênus, Urano e Netuno. Até mesmo sistemas Planeta-satélite-asteróide podem possuir troianos, chamados nestes casos de satélites coorbitais ou *luas troianas*.

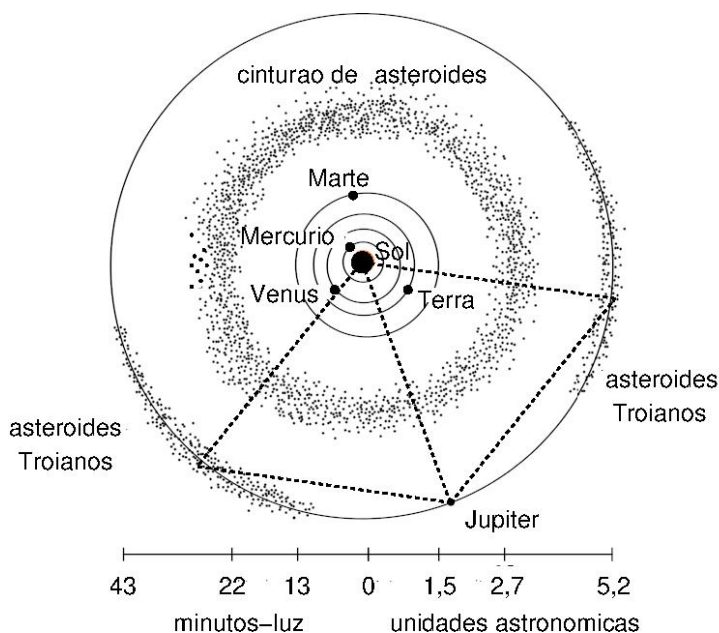


Figura 8.9: Cinturão de asteroídes e grupos de gregos e troianos nas proximidades dos pontos Lagrangianos triangulares.

Exemplos interessantes são os sistemas Saturno-Tétis e Saturno-Dione, cujas luas troianas são chamadas Telesto e Calipsi, e Helena e Polideuce, respectivamente. Curiosamente, não foram observadas até agora luas troianas em Júpiter.

Considerando, agora, o sistema Sol-Terra-asteróide, onde as massas são, respectivamente, da ordem de

$$M_1 \approx 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad M_2 \approx 1,0 \times 10^{25} \text{ kg}, \quad (8.193)$$

temos  $\mu \sim 10^{-6}$ . A órbita da Terra tem uma distância média ao Sol  $a = 1 \text{ U.A.} = 1,49 \times 10^{11} \text{ m}$  e uma excentricidade  $e = 0.017$ . Podemos encontrar as posições dos pontos colineares  $L_1$  e  $L_2$  usando a aproximação de Hill, válida quando  $\mu \ll 1$ . Chamando  $d_1$  e  $d_2$  as distâncias de  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente, da Terra, e usando (8.121)-(8.122) temos

$$d_1 = d_2 = \Upsilon_H = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}, \quad (8.194)$$

que, multiplicada pelo fator  $a$ , resulta em  $1,49 \times 10^9 \text{ km}$ . Este valor de 1,5 milhões de quilômetros é aproximadamente igual a quatro vezes a distância Terra-Lua.

Na seção anterior vimos que os três pontos Lagrangianos colineares  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  são instáveis. Isso significa que uma partícula-teste nas vizinhanças destes pontos irá se afastar dos mesmos a uma taxa exponencial igual ao módulo do maior autovalor. O inverso desta taxa será, portanto, um tempo característico no qual a partícula se afasta apreciavelmente do ponto Lagrangiano, dado por (8.171). No caso de  $L_1$ , por exemplo, este tempo característico é da ordem de 23 dias.

Se um satélite artificial for colocado nas proximidades de  $L_1$ , a cada 23 dias aproximadamente ele exigirá correções de trajetória para ser posicionado novamente próximo a  $L_1$ , o que pode ser feito acionando retrofoguetes de maneira apropriada. Como  $L_1$  está entre o Sol e a Terra, permitindo uma observação aprimorada do Sol: lá está posicionada a sonda espacial não-tripulada SOHO (*Solar and Heliospheric Observatory*, lançada em dezembro de 1995), cujo propósito é estudar as propriedades do Sol e de sua Heliosfera, como o vento solar.

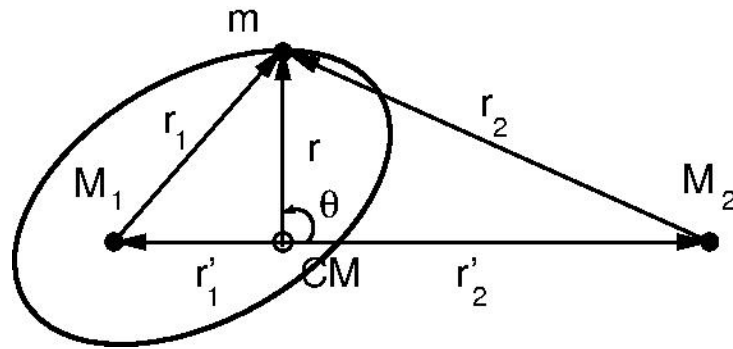


Figura 8.10: Definição das variáveis para o problema restrito de três corpos.

Como a posição de  $L_1$  oferece um acesso relativamente fácil a órbitas Terrestres e Lunares com pequenas variações de velocidade, imagina-se que  $L_1$  seja uma posição vantajosa para uma futura estação espacial tripulada que possa auxiliar a transportar pessoas e cargas da Terra à Lua e *vice-versa*.

O ponto  $L_2$  tem o mesmo tempo característico de 23 dias, e é considerado ideal para a observação astronômica de maneira geral, pois está suficientemente próximo à Terra para permitir uma comunicação rápida, e também porque deixa para trás o Sol, a Terra e a Lua, permitindo uma visão mais nítida do espaço. Por estes motivos, foi posicionado em  $L_2$  a sonda WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*), cuja missão foi estudar aspectos da radiação cósmica de fundo. Será também a posição do Telescópio Espacial James Webb, lançado pela NASA no Natal de 2021. Em ambos os casos serão, também, necessárias correções periódicas de órbita e atitude para as sondas, devido à instabilidade do ponto Lagrangiano colinear  $L_2$ .

Já o ponto  $L_3$ , estando “escondido” por detrás do Sol, tem atizado a imaginação de alguns escritores de ficção científica, que lançaram a ideia de um suposto *Planeta X* nesta posição. No entanto, o tempo característico de  $L_3$  é da ordem de 150 anos, o que inviabilizaria a permanência de um planeta nesta posição numa escala de tempo astronomicamente relevante.

Em 1956 foram observadas grandes concentrações de poeira cósmica nos pontos triangulares  $L_4$  e  $L_5$  do sistema Sol-Terra. Mais recentemente, foi descoberto em 2010 o troiano TK7, um pequeno asteróide de apenas 300 metros de diâmetro, e que orbita nas vizinhanças de  $L_4$ . Em 2020 foi descoberto o segundo troiano deste sistema (XL5), também nas proximidades de  $L_4$ . A sua relativa proximidade com a órbita de Vênus, no entanto, causa perturbações na sua órbita do tipo girino, e estima-se que XL5 permanecerá apenas cerca de 10 mil anos como troiano.

## 8.7 Sistema quase-integrável

No espírito da aproximação que nos levou às equações de Hill, podemos considerar o movimento da partícula-teste em torno da massa primária  $M_1$  como uma órbita Kepleriana que, como sabemos, é um sistema Hamiltoniano integrável. Desde que a partícula-teste esteja suficientemente longe da massa secundária  $M_2$  podemos considerar a influência gravitacional entre elas como uma perturbação de fraca intensidade. Assim, o movimento da partícula-teste poderá ser encarado como um sistema quase-integrável.

Partindo da Kamiltoniana (8.55), e usando (8.53) temos

$$\tilde{K} = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \frac{(1-\mu)m}{r_1} - \frac{\mu m}{r_2}. \quad (8.195)$$

É conveniente introduzir os vetores  $\mathbf{r}'_1$  e  $\mathbf{r}'_2$ , definidos como as posições das massas primária e secundária em relação ao centro de massa, respectivamente, tais que [Fig. 8.10]

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}_2, \quad (8.196)$$

com os quais (8.195) é reescrita como

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \frac{(1-\mu)m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|} - \frac{\mu m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|}. \quad (8.197)$$

Como  $|\mathbf{r}'_1| = \mu$ , se  $\mu \ll 1$  podemos aproximar  $\mathbf{r}'_1 \approx \mathbf{r}$ , de modo que a Hamiltoniana correspondente ao movimento integrável em torno da massa primária será

$$H_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \frac{(1-\mu)m}{r}, \quad (8.198)$$

onde  $r = |\mathbf{r}|$ , enquanto a perturbação da massa secundária é representada pela Hamiltoniana

$$\varepsilon H_1 = -\frac{\mu m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|}. \quad (8.199)$$

A Hamiltoniana  $H_0$  é essencialmente a mesma do problema de Kepler correspondente mais um termo que provém da força centrífuga, aqui existente graças ao uso de um referencial girante (não-inercial). Como a força centrífuga tem a direção radial, continuamos a ter um problema de força central, para o qual a órbita é limitada a um plano. É conveniente usarmos coordenadas polares  $(r, \theta)$  no plano, onde  $\theta$  é o ângulo entre o vetor posição  $\mathbf{r}$  da partícula-teste e a reta que liga as massas primária e secundária [Fig. 8.10].

Desta forma, podemos empregar as expressões vistas no Capítulo 2 para o problema de Kepler: os momenta canonicamente conjugados serão dados por (2.71)-(2.72),

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad (8.200)$$

tal que o módulo quadrado do momentum é

$$\mathbf{p}^2 = p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}. \quad (8.201)$$

Podemos aqui, também, identificar  $p_\theta$  como o momentum angular, dado por

$$p_\theta = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = xp_y - yp_x = \frac{1}{\Omega} \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \quad (8.202)$$

de maneira que a Hamiltoniana não-perturbada no referencial girante assume a forma

$$H_0(p_r, p_\theta; r, \theta) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \Omega p_\theta - \frac{(1-\mu)m}{r} = E, \quad (8.203)$$

que é cíclica em  $\theta$ , donde  $p_\theta$  é uma constante do movimento. Como  $H_0$  não depende explicitamente do tempo, ela é igual à energia  $E$ , a qual é também uma constante de movimento. Assim  $H_0$  representa, de fato, um sistema integrável.

Para aplicar as ideias da teoria de perturbações precisamos expressar a Hamiltoniana não-perturbada  $H_0$  em termos de variáveis de ação, como fizemos no Capítulo 4 para o problema de Kepler [vide (4.152)-(4.153)]

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = \alpha_\theta, \quad (8.204)$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint dr \frac{\partial W}{\partial r}, \quad (8.205)$$

onde  $\alpha_\theta$  representa a constante de movimento angular. Isolando o momentum radial na Hamiltoniana (8.203) temos

$$p_r = \pm \left\{ 2m \left[ E + \Omega \alpha_\theta + \frac{m(1-\mu)}{r} \right] - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} \right\}^{1/2}. \quad (8.206)$$

Substituindo esta expressão em (8.205) e definindo as quantidades

$$A = 2m(E + \Omega \alpha_\theta), \quad (8.207)$$

$$B = m^2(1-\mu), \quad (8.208)$$

$$C = \alpha_\theta^2, \quad (8.209)$$

resulta que

$$J_r = \pm \frac{1}{2\pi} \oint dr \sqrt{A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}}. \quad (8.210)$$

Usando o teorema dos resíduos teremos [vide [40], pp. xxx]

$$J_r = i \left( \sqrt{-C} + \frac{B}{\sqrt{A}} \right), \quad (8.211)$$

que, em vista de (8.207)-(8.209), resulta em

$$J_r = -\alpha_\theta + \frac{m^2(1-\mu)}{\sqrt{-2m(E + \Omega \alpha_\theta)}}. \quad (8.212)$$

A Hamiltoniana não-perturbada (8.203), expressa em função das variáveis de ação, é

$$H_0(J_r, J_\theta) = -\frac{m^3(1-\mu)^2}{2(J_r + J_\theta)^2} - \Omega J_\theta, \quad (8.213)$$

e as frequências associadas a ela são, conforme (4.160) e (4.161),

$$\omega_r = \frac{\partial H_0}{\partial J_r} = \frac{m^3(1-\mu)^2}{(J_r + J_\theta)^3} \equiv \omega_T, \quad (8.214)$$

$$\omega_\theta = \frac{\partial H_0}{\partial J_\theta} = -\Omega + \frac{m^3(1-\mu)^2}{(J_r + J_\theta)^3} = -\Omega + \omega_T, \quad (8.215)$$

tal que  $\omega_T$  é a frequência do movimento da partícula-teste, orbitando em torno da massa primária, em relação ao referencial inercial (não-girante). De fato, neste referencial as duas frequências serão iguais a  $\omega_T$  (degenerescência), o que é uma característica específica do problema de Kepler, e que leva a trajetória a ser uma elipse. As duas variáveis de ângulo correspondentes são  $\theta_r$  e  $\theta_\theta$ , cujas taxas de variação são justamente as frequências respectivas.

No espaço de fase quadridimensional, o problema configurado por  $H_0$  limita o movimento da partícula-teste à “superfície de energia” tridimensional descrita por  $H_0(J_r, J_\theta) = E$ . As equações de Hamilton correspondentes são

$$\frac{dJ_r}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta_r} = 0, \quad (8.216)$$

$$\frac{d\theta_r}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial J_r} = \omega_r, \quad (8.217)$$

$$\frac{dJ_\theta}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta_\theta} = 0, \quad (8.218)$$

$$\frac{d\theta_\theta}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial J_\theta} = \omega_\theta, \quad (8.219)$$

cujas soluções são

$$J_r(t) = J_r(0) = \text{const.}, \quad (8.220)$$

$$\theta_r(t) = \theta_r(0) + \omega_r t, \quad (8.221)$$

$$J_\theta(t) = J_\theta(0) = \text{const.}, \quad (8.222)$$

$$\theta_\theta(t) = \theta_\theta(0) + \omega_\theta t, \quad (8.223)$$

de modo que a trajetória da partícula-teste - na superfície de energia do espaço de fase - está confinada a toros bidimensionais, parametrizados pelas variáveis  $\theta_r$  e  $\theta_\theta$ .

Cada toro é identificado pelo seu número de rotação, que é a razão entre as frequências das variáveis angulares:

$$\alpha(J_r) = \frac{\omega_\theta}{\omega_r}. \quad (8.224)$$

Se o número de rotação for igual à razão entre dois inteiros, primos entre si,  $\alpha = m_1/m_2$ , então o toro correspondente é racional, e as trajetórias fecham-se sobre si mesmas após um certo número de voltas nas duas direções do toro. Caso contrário, teremos um toro irracional, e as trajetórias nunca fecham-se sobre si próprias, preenchendo densamente o toro.

### 8.7.1 Aplicações astronômicas

De modo geral, o problema restrito de três corpos no plano é não-integrável, pois só há uma constante de movimento (a integral de Jacobi). No entanto, o problema perturbado  $H = H_0 + \varepsilon H_1$  pode ser considerado quase-integrável se  $\mu \ll 1$ , e  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|$  não for pequeno demais, o que ocorrerá se a partícula-teste estiver nas proximidades da massa secundária. Para aplicar a Teoria Canônica de Perturbações, vista no Capítulo 5, seria necessário expressar a perturbação  $H_1$  nas variáveis de ação  $J_r$  e  $J_\theta$ , o que não será feito neste trabalho.

Por outro lado, algumas interessantes conclusões qualitativas decorrem da análise feita no Capítulo 6 envolvendo sistemas quase-integráveis. Por exemplo, o teorema KAM indica que, se a perturbação  $\varepsilon H_1$  for de pequena intensidade, o movimento da partícula-teste continuará a existir sobre toros invariantes cujo número de rotação  $\alpha$  seja suficientemente irracional, o que corresponde à maioria dos casos. Por outro lado, os toros racionais serão todos destruídos pela perturbação, o que impede movimentos próximos a eles. Em termos de (8.224), os toros racionais correspondem a ressonâncias entre as frequências da massa primária e da partícula-teste. Usando (8.214) e (8.215) o número de rotação destes toros será

$$\alpha(J_r) = 1 - \frac{\Omega}{\omega_T} = \frac{m_1}{m_2}, \quad (8.225)$$

de maneira que não haverá movimento da partícula-teste nas vizinhanças dos toros para os quais

$$\frac{\Omega}{\omega_T} = \frac{m}{n}, \quad (8.226)$$

onde  $m = m_2 - m_1$  e  $n = m_2$  são inteiros positivos.

No Sistema Solar existem dois exemplos bem conhecidos de distribuições quase-contínuas de partículas-teste em problemas restritos de três corpos, nos quais a distinção entre toros racionais e irracionais pode ser verificada empiricamente. São elas os hiatos de Kirkwood e os anéis de Saturno.

Vamos considerar novamente o sistema Sol-Júpiter, e tomar como partícula-teste um asteróide pertencente ao cinturão existente entre as órbitas de Marte e Júpiter, a uma distância

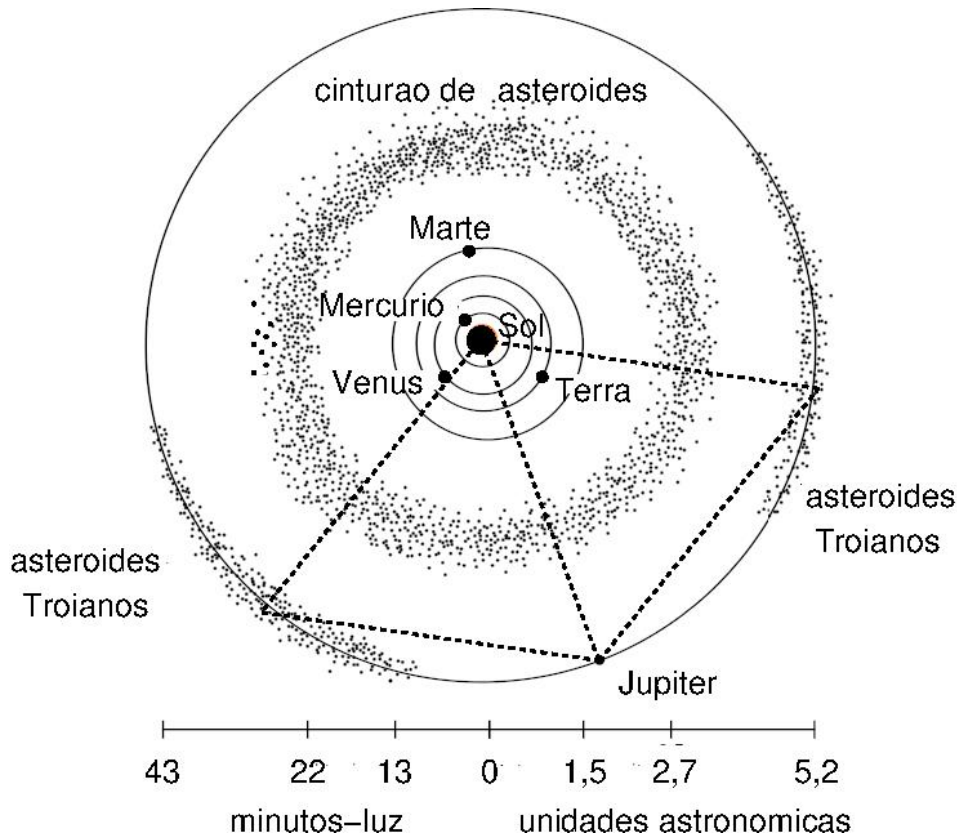


Figura 8.11: Cinturão de asteróides e asteróides Troianos.

da ordem de 2,8 unidades astronômicas (UA) do Sol. O cinturão consiste de milhões de objetos, desde asteróides com centenas de quilômetros de diâmetro até partículas de poeira. Os asteróides giram em torno do Sol e suas trajetórias são perturbadas pela órbita de Júpiter [Fig. 8.11, adaptada de [https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Asteroid\\_Belt.svg](https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Asteroid_Belt.svg)]. A influência da órbita de Marte é desprezível, visto que Júpiter tem massa 2960 vezes maior que a de Marte.

As frequências das órbitas dos asteróides são dadas por (8.214)

$$\omega_T = \frac{m^3(1-\mu)^2}{(J_r + J_\theta)^3}, \quad (8.227)$$

e diferem entre si, basicamente devido às suas massa  $m$  e semi-eixos maiores diferentes, o que altera os valores das energias e momenta angulares e, por conseguinte, os valores das variáveis de ação  $J_r$  e  $J_\theta$ . Daniel Kirkwood descobriu, em 1866, que há muito poucos asteróides com semi-eixos maiores próximos a 2,50 unidades astronômicas e períodos orbitais de 3,95 anos [71]. Tais asteróides executam três órbitas para cada órbita completa de Júpiter. Assim a razão entre suas frequências é

$$\frac{\Omega}{\omega_T} = \frac{\tau_T}{\tau_\Omega} = \frac{3\tau_\Omega}{\tau_\Omega} = \frac{3}{1}, \quad (8.228)$$

o que configura uma ressonância orbital 3 : 1. Outros hiatos (*gaps* de Kirkwood) aparecem em diferentes ressonâncias orbitais entre os asteróides e Júpiter.

Na Fig. 8.12 mostramos um histograma mostrando o número de asteróides em função do semi-eixo maior de suas órbitas (adaptada de: [https://en.wikipedia.org/wiki/Kirkwood\\_](https://en.wikipedia.org/wiki/Kirkwood_)

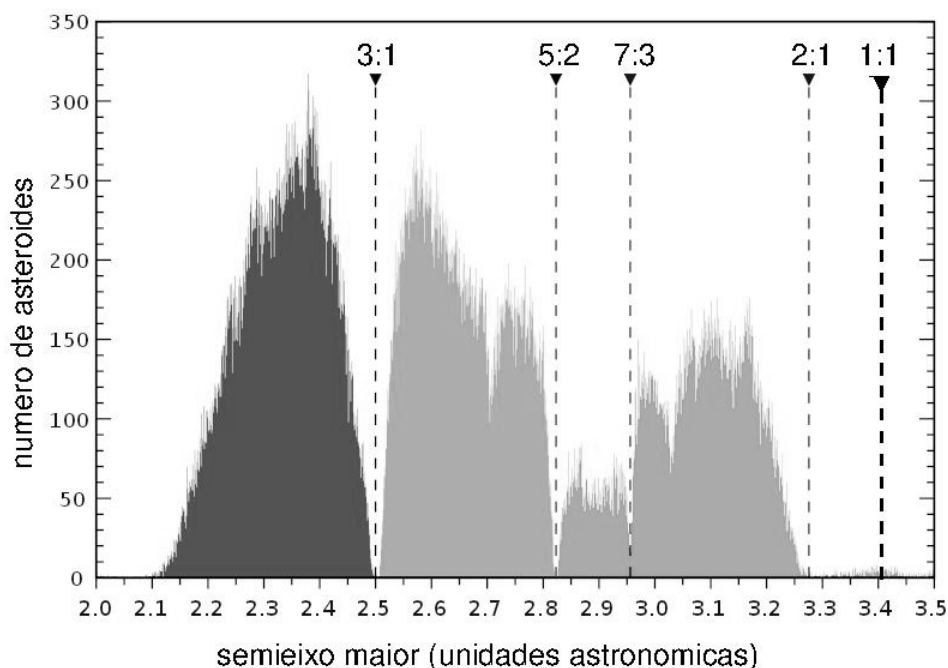


Figura 8.12: Histograma mostrando o número de asteroídes do cinturão existente entre Marte e Júpiter em função do semi-eixo maior de suas órbitas. As depressões observadas no histograma correspondem aos hiatos de Kirkwood.

gap#/media/File:Kirkwood\_Gaps.svg). Observe que, de fato, há um hiato para o valor do semi-eixo maior de 2,50 UA que corresponde a uma ressonância 3 : 1. Outros hiatos correspondem a ressonâncias 5 : 2 (em 2,82 UA), 7 : 3 (em 2,95 UA) e 2 : 1 (em 3,27 UA).

Uma exceção importante a esta regra é a ressonância orbital 1 : 1, situada a uma distância de 3,4 UA, onde há um pequeno pico no histograma da Fig. 8.12. Este pico corresponde aos asteroídes troianos que aglomeram-se em redor dos pontos Lagrangianos triangulares do sistema Sol-Júpiter. Estas órbitas do tipo girinos representam soluções isoladas do problema restrito de 3 corpos, não tendo relação com toros racionais do mesmo. No referencial inercial o triângulo equilátero formado pelas três partículas gira com velocidade angular  $\Omega$  em torno da origem. Como esta frequência é aproximadamente igual à frequência orbital de Júpiter, então  $\Omega \approx \omega_T$  e forma-se um pequeno pico no histograma da Fig. (8.12) devido à existência dos troianos.

A interpretação dos hiatos de Kirkwood em termos unicamente do teorema KAM tem recebido críticas na atualidade. Jack Wisdom argumenta que, para que o teorema KAM possa ser aplicado de forma quantitativa, a intensidade da perturbação teria de ser absurdamente pequena (da ordem de  $\sim 10^{-48}$ ) [72]. Uma explicação mais realística para os hiatos de Kirkwood nas vizinhanças dos toros racionais estaria, de fato, no movimento caótico da partícula-teste nas regiões entre ressonâncias [73]. Com efeito, no Capítulo anterior, vimos que a superposição de ressonâncias na Hamiltoniana do rotor periodicamente forçado leva a um aumento na região caótica do plano de fase. Estendendo esta interpretação de Wisdom para o problema restrito de três corpos, a existência de órbitas caóticas levaria a um escape de partículas-teste situadas nas proximidades de toros racionais, onde há sobreposição de ressonâncias primárias e secundárias próximas. Um tratamento mais aprofundado do problema pode ser encontrados nas referências



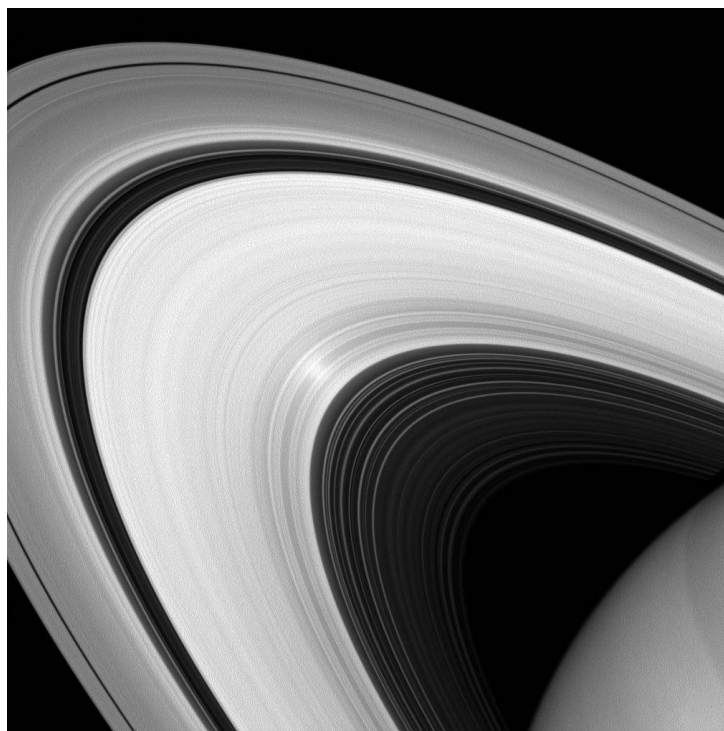


Figura 8.13: Imagem infra-vermelha dos anéis de Saturno, obtida em 2013 pela sonda Cassini. Créditos: NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute.

[?]

Os anéis de Saturno foram descobertos por Galileo em 1610, mas a sua natureza foi objeto de controvérsias durante mais de dois séculos [?]. James Clerk Maxwell, em 1859, demonstrou que um anel rígido ou mesmo líquido seria instável, de maneira que os anéis de Saturno deveriam conter partículas essencialmente independentes, movendo-se em órbitas circulares em torno de Saturno, e sem colidirem entre si. Assim, podemos tratar o sistema formado pelo planeta Saturno e um dos seus satélites interiores, como Mimas e Encelado (também chamados de “luas pastoras”), como um problema restrito de três corpos, onde a partícula-teste seria um grão pertencente ao anel de Saturno. Haverá, portanto, toros racionais nas posições correspondentes a ressonâncias entre as frequências orbitais de Saturno e seu satélite (Mimas ou Encelado), com número de rotação  $\Omega/\omega_T$  igual a um número racional.

Os anéis de Saturno exibem hiatos, que vem sendo detalhadamente estudados pelos astrônomos desde o trabalho de Cassini, em 1679. A grosso modo, existem três grandes divisões: o anel de Crepe e os anéis A e B, estes últimos separados pela chamada divisão de Cassini. Cada um destes anéis tem uma extensão medida em unidades iguais a milhares de quilômetros, a partir do centro de Saturno. Por exemplo, o anel de Crepe inicia a 74,6 unidades e termina a 88,9 unidades. O anel B, que o sucede, começa a 90,5 unidades, e termina a 117,1 unidades. Existe, assim, um hiato entre o anel de Crepe e o anel B.

No interior deste primeiro hiato, a 89,2 unidades do centro, existe um toro racional devido a uma ressonância entre a frequência  $\Omega$  de Saturno e  $\omega_T$  de Mimas:

$$\frac{\Omega}{\omega_T} = \frac{3}{1}. \quad (8.229)$$

Já nas proximidades da divisão de Cassini encontramos um toro racional, correspondentes a

uma ressonância entre Júpiter e Encelado, com  $\Omega/\omega_T = 2/1$ ; e outra entre Júpiter e Mimas, com  $\Omega/\omega_T = 2/1$ . Maiores detalhes podem ser encontrados na referência [59].

## 8.8 Problemas

1. Obtenha uma expressão para  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$  em termos das coordenadas siderais  $(\xi, \eta, \zeta)$ .
2. Exprima a integral de Jacobi  $C$  em função das coordenadas siderais  $(\xi, \eta, \zeta)$ .
3. Considere um problema restrito de três corpos onde as massas primária e secundária são o Sol e Júpiter, de modo que  $1 - \mu \sim 1$  (nas unidades empregadas neste Capítulo). Se a partícula-teste for um cometa de massa  $m$  desprezível, e supondo que o cometa não esteja muito próximo a Júpiter, podemos usar a aproximação

$$\frac{\mu}{r_2} \ll \frac{1}{r_1},$$

e considerar o movimento do cometa em torno do Sol como um problema de Kepler (de dois corpos).

(a) Mostre que a integral de Jacobi é

$$C = \frac{1}{a} = 2\Omega(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}),$$

onde  $a$  é o semi-eixo maior da órbita do cometa.

(b) Mostre que, sendo  $i$  o ângulo de inclinação da órbita do cometa em relação ao plano orbital de Júpiter, então

$$m(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) = \ell_\zeta = \ell_z = \ell \cos i$$

onde  $\ell_z$  é a componente do momentum angular do cometa em relação ao eixo  $\zeta = z$ .

(c) Mostre que o momentum angular satisfaz a relação

$$\ell = m\sqrt{a(1 - e^2)},$$

onde  $e$  é a excentricidade da órbita do cometa. Use as fórmulas do Cap. 1 com  $GM_1 \approx 1$ .

4. Usando unidades onde  $\Omega = 1$ , use os resultados do problema anterior para demonstrar a relação de Tisserand

$$\frac{C}{2} = \frac{1}{2a} + \sqrt{a(1 - e^2)} = \text{constante}$$

A relação de Tisserand pode ser usada para determinar se um cometa observado é realmente um objeto novo ou trata-se de um corpo cuja órbita tenha sido alterada pela sua passagem próxima a Júpiter, por exemplo.

5. Mostre que, se  $\mu \ll 1$ , as coordenadas dos pontos Lagrangianos  $L_1$  e  $L_2$  são tais que

$$\delta = x - (1 - \mu) \propto \mu^{1/3}.$$