

Capítulo 9

Aplicações em Fluidos

Uma extensão abrangente do formalismo Hamiltoniano para fluidos e é um assunto que ainda é objeto de intensa pesquisa teórica e computacional, e cujo tratamento está além do escopo deste livro. Há, porém, alguns casos particulares onde é possível aplicar uma descrição para poucos graus de liberdade, permitindo até mesmo em alguns casos o uso de ferramentas analíticas como a teoria de perturbação. Este capítulo tem como objetivo mostrar alguns exemplos desta classe de problemas.

9.1 Fluidos ideais

Na Mecânica dos Fluidos, há duas formas básicas de descrição: a chamada descrição Lagrangiana consiste em tomar uma determinada partícula do fluido e acompanhar seu movimento no espaço e no tempo. A outra, chamada descrição Euleriana, fixa a atenção num dado ponto do fluido, e analisa as variações das quantidades físicas de interesse naquele ponto. A descrição Lagrangiana assemelha-se mais ao tratamento dado até aqui a sistemas de partículas, enquanto a descrição Euleriana trabalha com campos escalares e vetoriais associados ao movimento do fluido.

Na descrição Euleriana, as quantidades físicas de interesse são funções da posição $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e do tempo t . Dependendo do tipo de escoamento a ser estudado, pode-se usar um número maior ou menor de campos. Considerando apenas o caso de fluidos ideais (sem viscosidade nem condução de calor), é suficiente descrever os campos escalares de pressão $p = p(\mathbf{r}, t)$, densidade $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ e velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Como este último tem três componentes espaciais, os fluidos ideais são descritos por um total de cinco campos escalares.

Estes campos escalares são determinados, por sua vez, a partir de equações de balanço, que traduzem matematicamente princípios de conservação aplicáveis a escoamentos de fluidos ideais: massa, momentum linear, e energia. O princípio de conservação de massa, quando aplicado ao escoamento de um fluido, conduz à chamada equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (9.1)$$

que pode ser deduzida usando essencialmente os mesmos argumentos que empregamos no Capítulo 3 (seção 3.5) na descrição do comportamento de pontos no espaço de fase. A equação (3.180) é formalmente idêntica a (9.1), mas esta última aplica-se ao espaço de configuração, de coordenadas (x, y, z) , enquanto (3.180) ao espaço de fase.

O produto $\rho \mathbf{v}$ é chamado de densidade de fluxo de massa, e é igual à massa de fluido, por unidade de tempo e de área, passando através de uma superfície perpendicular à velocidade em

cada ponto seu. De (9.1) temos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0. \quad (9.2)$$

Se o escoamento do fluido é incompressível, a densidade é constante no tempo e uniforme no espaço, donde resulta a condição de incompressibilidade

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (9.3)$$

Consideramos uma região limitada de um fluido com volume V_0 . A pressão p do fluido leva a uma força resultante atuando sobre a superfície S que limita essa região, dada por

$$-\oint_S p \hat{\mathbf{n}} da = -\int_{V_0} \nabla p dV, \quad (9.4)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário perpendicular a S em cada ponto. O fluido que envolve um elemento de volume dV exerce sobre ele uma força $-dV \nabla p$, donde a força que age sobre uma unidade de volume do fluido é $-\nabla p$.

Pela segunda lei de Newton, a força sobre uma unidade de volume deve ser igual ao produto da massa por unidade de volume (ou seja, a densidade ρ) pela aceleração da mesma, que é $d\mathbf{v}/dt$:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p. \quad (9.5)$$

No entanto, a derivada acima refere-se a um elemento de volume que se desloca com o tempo juntamente com o fluido (descrição Lagrangeana do movimento). Nós passamos para a descrição Euleriana do movimento do fluido levando em conta que uma quantidade física qualquer $\chi(\mathbf{r}, t)$ tem sua derivada total em relação ao tempo dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\chi(\mathbf{r}, t)}{dt} &= \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \chi}{\partial x} v_x + \frac{\partial \chi}{\partial y} v_y + \frac{\partial \chi}{\partial z} v_z + \frac{\partial \chi}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \nabla \chi + \frac{\partial \chi}{\partial t}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

o que nos conduz à chamada derivada material ou convectiva:

$$\frac{d}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t}, \quad (9.7)$$

que mede a taxa de variação de uma grandeza associada a uma partícula do fluido com velocidade \mathbf{v} . Aplicando a derivada material à própria velocidade do fluido, fornece

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (9.8)$$

de modo que a equação do movimento (9.5) torna-se

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (9.9)$$

conhecida como *equação de Euler*.

Se o fluido estiver, adicionalmente, sujeito a uma força externa por unidade de volume \mathbf{f} , então nós a adicionamos à força de pressão, e a equação de Euler assume a forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}. \quad (9.10)$$

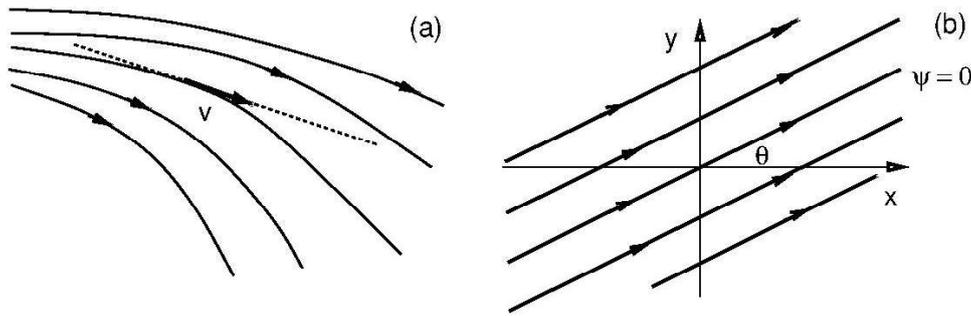


Figura 9.1: (a) Linhas de corrente, (b) escoamento plano uniforme.

Por exemplo, seja a força gravitacional sobre uma partícula de fluido de massa m , dada por $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$, onde \mathbf{g} é a aceleração da gravidade. A força gravitacional específica (por unidade de massa) será, portanto \mathbf{g} , de modo que a força gravitacional por unidade de volume (ou densidade de força gravitacional) é $\mathbf{f} = \rho\mathbf{F}_g = \rho\mathbf{g}$. Nesse caso a equação de Euler torna-se

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}. \quad (9.11)$$

Na dedução da equação de Euler supomos que não haja processos de dissipação de energia, como a viscosidade (atrito interno) ou a troca de calor entre partes do fluido (fluidos ideais). Assim, o escoamento de um fluido ideal é adiabático.

9.2 Escoamentos planos

O caso de fluxos no plano é particularmente importante nos exemplos a serem abordados neste Capítulo. Consideramos que o escoamento seja bidimensional, no plano $z = 0$, de modo que $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ e o campo de velocidades é $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$. Neste caso, a condição de incompressibilidade (9.3) é

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (9.12)$$

Definimos uma função de fluxo $\psi(x, y)$ tal que as componentes da velocidade podem ser escritas como suas derivadas, na forma

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (9.13)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (9.14)$$

de modo que a condição (9.12) é identicamente satisfeita, pois

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0.$$

As linhas de corrente são curvas que, num dado instante t , têm como tangentes em cada ponto o vetor velocidade \mathbf{v} [Fig. 9.1(a)]. Como $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ temos que

$$dx = v_x dt, \quad dy = v_y dt,$$

de maneira que as equações diferenciais que determinam as linhas de corrente são

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}. \quad (9.15)$$

Como consequência,

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -v_y dx + v_x dy = 0, \quad (9.16)$$

donde a função de fluxo $\psi(x, y)$ é constante ao longo de uma linha de corrente (por isso ela é, também, denominada linha de fluxo).

Usando (9.13)-(9.14), a velocidade do fluido num escoamento bidimensional é

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{z}} \times \nabla\psi = \nabla \times (\psi \hat{\mathbf{z}}). \quad (9.17)$$

Em diversos exemplos será conveniente exprimir a velocidade do fluido em coordenadas polares (r, θ) :

$$\mathbf{v}(r, \theta) = v_r(r, \theta) \hat{\mathbf{r}} + v_\theta(r, \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (9.18)$$

onde as componentes da velocidade, em termos de ψ , são

$$v_r(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi(r, \theta)}{\partial\theta}, \quad (9.19)$$

$$v_\theta(r, \theta) = -\frac{\partial\psi(r, \theta)}{\partial r}. \quad (9.20)$$

Definimos a vorticidade de um escoamento como o rotacional de sua velocidade em cada ponto,

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (9.21)$$

A grosso modo, a vorticidade é uma medida do grau de rotação do fluido, e é portanto uma quantidade de interesse na descrição de vórtices. Uma quantidade importante relacionada à vorticidade é a chamada circulação da velocidade do fluido ao longo de uma curva fechada C , definida pela integral

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}, \quad (9.22)$$

onde $d\mathbf{s}$ é o elemento de linha ao longo de C . Usando o Teorema de Stokes resulta que a circulação é dada por uma integral de superfície envolvendo a componente normal da vorticidade,

$$\Gamma = \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} da, \quad (9.23)$$

onde S é uma superfície aberta limitada pela curva C , e $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário perpendicular à superfície S em cada ponto. Nos escoamentos planos a vorticidade é dada por

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} = \omega \hat{\mathbf{z}}, \quad (9.24)$$

Pode-se mostrar que, nestas condições, a vorticidade é constante.

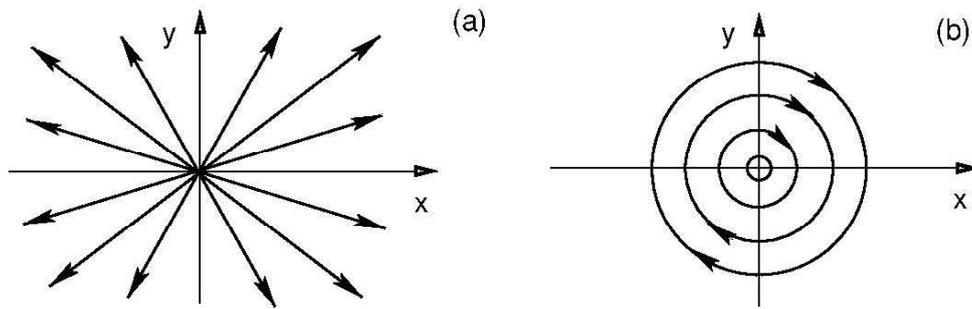


Figura 9.2: (a) Fonte, (b) Vórtice negativo.

9.2.1 Escoamento uniforme

Um exemplo simples de fluxo bidimensional é um escoamento plano uniforme, onde as componentes da velocidade são constantes [Fig. 9.1(b)] [95]:

$$\mathbf{v} = V_x \hat{\mathbf{x}} + V_y \hat{\mathbf{y}}.$$

A diferencial da função de fluxo será, de (9.13)-(9.14),

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -V_y dx + V_x dy, \quad (9.25)$$

que, por integração direta, fornece

$$\psi(x, y) = -V_y x + V_x y. \quad (9.26)$$

Isolando y na expressão anterior, obtemos as equações para as linhas de corrente neste exemplo

$$y(x) = \frac{\psi}{V_x} + (\tan \theta) x, \quad (9.27)$$

onde $\tan \theta = V_y/V_x$ é uma constante. As linhas de corrente são, portanto, retas paralelas formando um ângulo θ em relação ao eixo x . Para cada valor de ψ teremos uma linha de corrente diferente.

9.2.2 Fonte ou sorvedouro

Neste exemplo a velocidade só tem componente radial: $\mathbf{v} = v_r(r, \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}}$ [Fig. 9.2(a)]. Se $v_r > 0$ teremos uma fonte e, caso $v_r < 0$, um sorvedouro de fluido. Usando (9.20) temos que $\partial \psi / \partial r = 0$, de maneira que ψ não depende de r , ou seja, $\psi = \psi(\theta)$. Já (9.19) nos informa que

$$\frac{d\psi}{d\theta} = f(\theta) = r v_r, \quad (9.28)$$

onde $f(\theta)$ é uma função ainda indeterminada do ângulo, tal que

$$v_r = \frac{f(\theta)}{r}. \quad (9.29)$$

Supondo a existência de uma simetria radial, a velocidade v_r não dependerá de θ , donde $f(\theta)$ deve ser uma constante, que escreveremos na forma $\alpha/2\pi$. Logo, integrando (9.28), temos que

$$\psi(\theta) = \frac{\alpha \theta}{2\pi}. \quad (9.30)$$

As linhas de corrente $\psi = \text{const.}$ são raios com origem no centro, cada qual formando um ângulo θ com o eixo x . Finalmente, a velocidade será dada por

$$\mathbf{v}(r) = \frac{\alpha}{2\pi r} \hat{\mathbf{r}}. \quad (9.31)$$

9.2.3 Vórtice

Para este caso, a velocidade do fluido só possui componente angular: $\mathbf{v} = v_\theta(r, \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Caso $v_\theta > 0$, o vórtice é positivo (anti-horário) e, se $v_\theta < 0$, ele é negativo (horário). De (9.20) temos que $\partial\psi/\partial\theta = 0$, logo a função de fluxo não depende de θ : $\psi = \psi(r)$. Assim, de (9.19) resulta que $d\psi/dr = -v_\theta(r, \theta)$. Usando, ainda, a simetria axial do vórtice, v_θ não dependerá de θ , donde

$$\frac{d\psi}{dr} = -v_\theta(r). \quad (9.32)$$

Vamos considerar um círculo C de raio r em torno da origem. A circulação associada ao vórtice será, conforme (9.22), dada por

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot (r d\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} = v_\theta(r) r \int_0^{2\pi} d\theta = (2\pi r) v_\theta(r), \quad (9.33)$$

de maneira que a velocidade pode ser expressa na forma

$$v_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (9.34)$$

Assim, os casos $\Gamma > 0$ e $\Gamma < 0$ caracterizam vórtices positivos e negativos, respectivamente.

Substituindo este resultado em (9.32), a função de fluxo correspondente é obtida por integração direta como

$$\psi(r) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (9.35)$$

As linhas de corrente $\psi = \text{const.}$ serão circunferências de raio r e com centro na origem [Fig. 9.2(b)].

9.3 Advecção de escalares passivos

O fenômeno da advecção é definido como o transporte de uma substância ou quantidade por meio do escoamento de um fluido, ou seja, as propriedades da substância são transportadas pelo movimento do fluido [96]. Há diversas aplicações da advecção, como o transporte de poluentes, sedimentação, misturas, emulsões, etc. [97, 98]. Uma interessante aplicação é a advecção de partículas do sangue devido à sua passagem por vasos sanguíneos (o que pode causar acúmulos de placas gordurosas e consequente comprometimento circulatório) [99]. Outras importantes aplicações da advecção encontram-se na meteorologia e na oceanografia física, a partir do transporte de quantidades como calor, umidade, salinidade, etc. devido a fluxos atmosféricos ou oceânicos.

A categoria mais simples de advecção leva em conta partículas idealizadas denominadas escalares (ou traçadores) passivos. Estas partículas são suficientemente pequenas para não perturbar significativamente o escoamento do fluido, porém grandes o suficiente para que não entrem em movimento Browniano (ou seja, para que não sofram difusão) e sejam transportadas com o movimento do fluido. Em diversas aplicações este tipo de simplificação leva a resultados bastante satisfatórios [?].

É importante, aqui, enfatizar que a descrição do movimento dos escalares passivos é Lagrangiana: supomos que a velocidade das partículas advectadas é igual à velocidade do fluido em cada posição da partícula no plano (x, y) , ou seja, $\dot{x} = v_x$ e $\dot{y} = v_y$. Usando (9.13)-(9.14), as equações de movimento dos escalares passivos são

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (9.36)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (9.37)$$

e que podem ser identificadas com as equações de Hamilton, onde x é a coordenada e y o seu momentum canonicamente conjugado. Com tais associações, a função de fluxo é a própria Hamiltoniana do problema de advecção passiva: $H = \psi$.

Em princípio, o escoamento do fluido não precisa ser ideal. Praticamente qualquer tipo de escoamento plano e incompressível pode ser empregado, desde que conheçamos *a priori* a função de fluxo correspondente. Em fluidos viscosos, a equação de movimento (Navier-Stokes) pode ser resolvida em alguns casos, e a função $\psi(x, y)$ terá também o papel de Hamiltoniana da advecção de um escalar passivo.

9.3.1 Duplo giro

Se a função de fluxo for explicitamente independente do tempo, $\psi = \psi(x, y)$, então o problema de advecção passiva tem um grau de liberdade e, portanto, é integrável. Um exemplo é a função de fluxo de um duplo giro [?]

$$\psi(x, y) = A \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (9.38)$$

onde A é uma constante positiva, e para a qual as equações de Hamilton são

$$\dot{x} = A\pi \sin(\pi x) \cos(\pi y), \quad (9.39)$$

$$\dot{y} = -A\pi \cos(\pi x) \sin(\pi y). \quad (9.40)$$

Limitando a região no plano ao retângulo $\mathcal{R} = \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$, os oito pontos de equilíbrio correspondentes são

$$A: \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad B: \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad C_i: (x_{ci}, y_{ci}), \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (9.41)$$

onde $x_{ci} \in \{0, 1, 2\}$ e $y_{ci} \in \{1, 0\}$ [Fig. 9.3].

Para determinarmos sua estabilidade na aproximação linear construímos a matriz Jacobiana, cujos elementos são dados por (3.143)-(3.146),

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} \partial \dot{x} / \partial x & \partial \dot{x} / \partial y \\ \partial \dot{y} / \partial x & \partial \dot{y} / \partial y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A\pi^2 \cos \pi x \cos \pi y & -A\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y \\ A\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y & -A\pi^2 \cos \pi x \cos \pi y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Determinando os elementos da matriz Jacobiana nas posições dos cinco pontos de equilíbrio, obtemos que os seus autovalores nos pontos A e B são imaginários puros, dados por $\xi_{1,2} = \pm i\pi\sqrt{A}$. Logo A e B são centros (lineares). Já os seis pontos C_i são tais que as matrizes

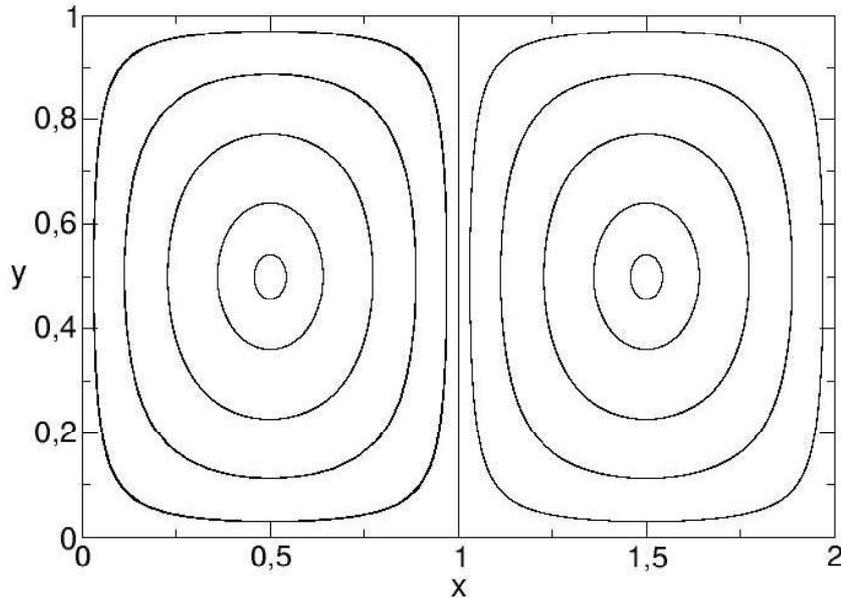


Figura 9.3: Trajetórias de escalares passivos advectados para o modelo de giro duplo dado por (9.38), para $A = 0, 1$.

Jacobianas correspondentes têm autovalores reais com sinais opostos, donde todos eles são pontos de sela, portanto instáveis.

Estes resultados podem ser verificados obtendo as trajetórias das partículas advectadas pelo movimento do fluido, determinando as linhas de fluxo, ou seja, as curvas onde ψ é uma constante. Outra maneira de fazermos isso é integrarmos numericamente as equações de Hamilton (9.39)-(9.40). Neste caso, a escolha de ψ é feita a partir das condições iniciais (x_0, y_0) , tal que

$$\psi(x_0, y_0) = A \sin(\pi x_0) \sin(\pi y_0). \quad (9.43)$$

Logo, a cada condição inicial corresponde um valor de ψ , gerando uma trajetória diferente.

O resultado é mostrado na Fig. 9.3, que ilustra a existência de dois vórtices (daí o termo *duplo giro*) com centros nos pontos de equilíbrio A e B , em torno dos quais as trajetórias dos escalares passivos são fechadas. Como este comportamento persiste a grandes distâncias dos pontos elípticos, eles são centros também não-lineares. Na Fig. 9.3 vemos também que os pontos de sela C_i estão conectados entre si pelas respectivas variedades invariantes, ou trajetórias heteroclínicas, que atuam como fronteiras dos dois vórtices centrados nos pontos A e B , com sentidos horário e anti-horário, respectivamente. A trajetória heteroclínica (o segmento de reta V) que conecta $C_1 = (1, 0)$ e $C_3 = (1, 1)$ separa os dois vórtices contidos no retângulo \mathcal{R} .

Por outro lado, se a função de fluxo depender explicitamente do tempo, $\psi = \psi(x, y, t)$, o sistema passa a não ser mais integrável. Um exemplo, construído a partir do modelo de duplo giro, tem a seguinte Hamiltoniana [100]

$$\psi(x, y, t) = A \sin[\pi f(x, t)] \sin(\pi y), \quad (9.44)$$

onde o termo dependente do tempo é periódico com frequência ω e período $\tau = 2\pi/\omega$, é dado

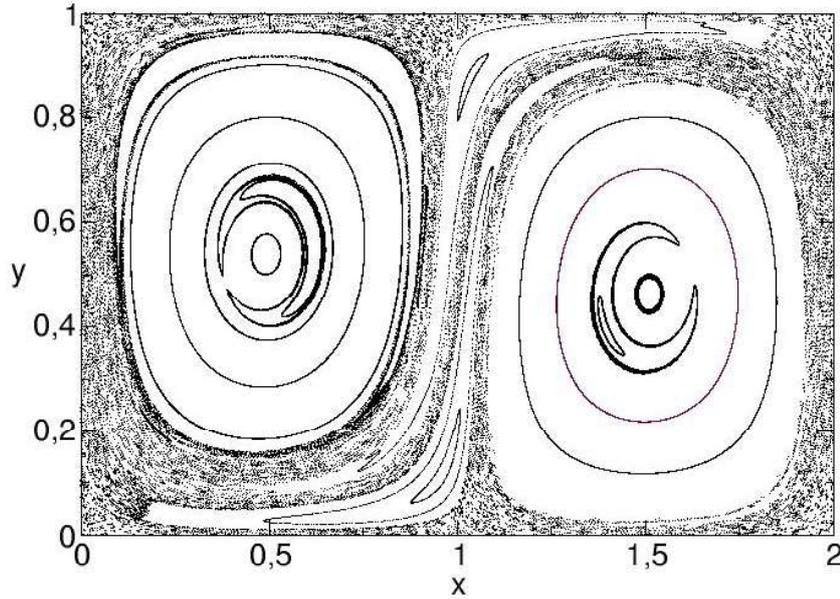


Figura 9.4: Trajetórias de escalares passivos advectados para o modelo de duplo giro perturbado dado por (9.44), com $A = 0, 1$, $\varepsilon = 0, 25$ e $\tau = 10$.

por:

$$f(x, t) = a(t)x^2 + b(t)x, \quad (9.45)$$

$$a(t) = \varepsilon \sin(\omega t), \quad (9.46)$$

$$b(t) = 1 - 2\varepsilon \sin(\omega t). \quad (9.47)$$

No limite $\varepsilon = 0$ temos que $a = 0$ e $b = 1$, o que nos faz recair no caso integrável (9.38). Logo, podemos interpretar ε como um parâmetro pequeno, medindo a intensidade da perturbação que torna o sistema não-integrável.

As equações de Hamilton referentes à função de fluxo (9.44) são

$$\dot{x} = \pi A \sin[\pi f(x, t)] \cos(\pi y), \quad (9.48)$$

$$\dot{y} = -\pi A \cos[\pi f(x, t)] \sin(\pi y) \frac{df}{dx}. \quad (9.49)$$

Não há solução analítica para estas equações, e devemos integrá-las numericamente sendo dados valores dos parâmetros A e ε e condições iniciais (x_0, y_0) .

Como a dependência com o tempo é periódica, podemos aplicar neste problema a técnica dos mapas estroboscópicos, vista no Capítulo 6. Ela consiste em registrarmos os valores de $(x(t), y(t))$ apenas quando o tempo é um múltiplo inteiro do período $\tau = 2\pi/\omega$ do forçamento, definindo as variáveis discretas

$$x_n = x(t = n\tau), \quad y_n = y(t = n\tau). \quad (9.50)$$

A evolução temporal destas variáveis gera um mapa de Poincaré bidimensional conservativo, preservando áreas no plano de fase.

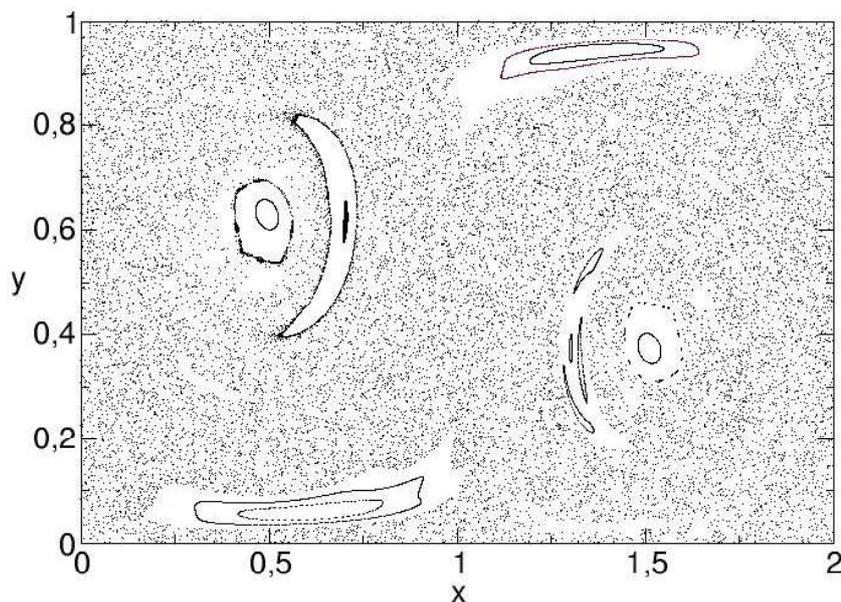


Figura 9.5: Trajetórias de escalares passivos advectados para o modelo de duplo giro dado por (9.38), com $A = 0, 1$, $\varepsilon = 0,5$ e $\tau = 10$.

Na Fig. 9.4 mostramos as trajetórias para o mapa estroboscópico relativo à Hamiltoniana (9.44) quando $\varepsilon = 0,25$ e $\tau = 10$. Primeiramente, o retângulo \mathcal{D} não se altera, como pode ser verificado diretamente a partir das equações de Hamilton. No entanto, a trajetória heteroclínica V entre os dois pontos de sela $(1,0)$ e $(1,1)$ já não mais existe para $\varepsilon \neq 0$. Na verdade, como discutimos no Capítulo 6, as curvas invariantes estável e instável destes dois pontos de sela deixam de ser ligadas suavemente pela trajetória heteroclínica e se cruzam de forma altamente irregular, produzindo um emaranhado homoclínico que associamos a uma trajetória caótica. Esta, por sua vez, é observada na Fig. 9.4 como uma trajetória preenchendo uma área finita do retângulo \mathcal{D} . Imersas nesta órbita caótica também são observadas ilhas periódicas.

Na ausência de perturbação ($\varepsilon = 0$) a trajetória heteroclínica V separa os dois vórtices com centros nos pontos A e B , de sorte que partículas advectadas pelo fluxo não podem cruzar esta barreira e ficam confinadas nos vórtices, de acordo com a condição inicial. Já para ε diferente de zero, como ilustrado pela Fig. 9.3, a ausência desta barreira permite que as partículas migrem de um lado a outro do retângulo \mathcal{D} . Não obstante, boa parte de cada vórtice permanece ainda na superfície de seção de Poincaré, ainda que com ligeiras alterações de forma e/ou posição, em concordância com o Teorema KAM (capítulo 6).

As trajetórias periódicas no interior dos vórtices têm frequências características que podem ser estimadas usando Teoria de Perturbações (capítulo 5), e que podem exibir ressonâncias com a frequência primária de forçamento. A presença de ilhas periódicas no interior dos vórtices, como observado na Fig. 9.3, resulta de tais ressonâncias secundárias. A rigor, nas separatrizes destas ilhas também haverá emaranhados homoclínicos que geram camadas delgadas de movimento caótico, mas elas são muito difíceis de observar na prática, devido à resolução finita dos mapas de Poincaré numericamente obtidos.

O aumento na taxa de difusão de partículas com movimento caótico é tanto maior quanto

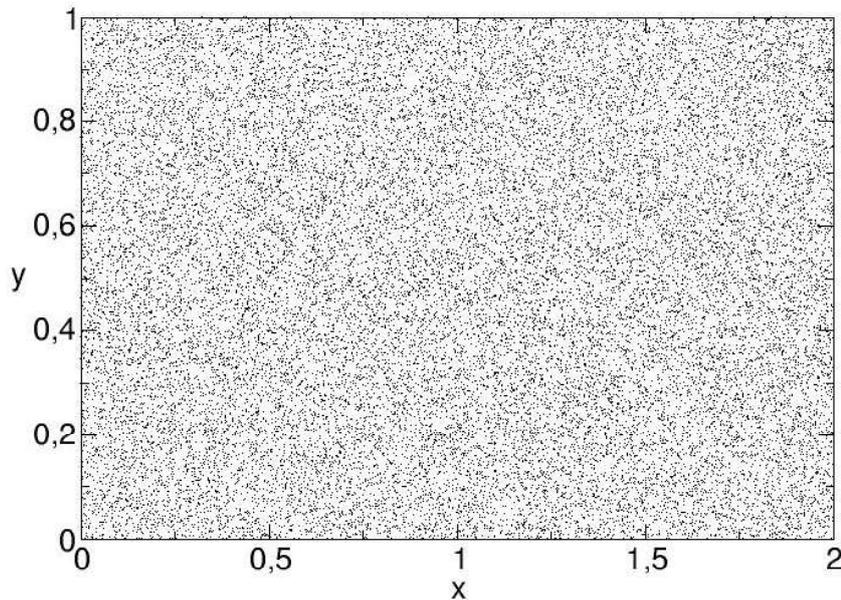


Figura 9.6: Trajetórias de escalares passivos advectados para o modelo de duplo giro dado por (9.38), com $A = 0,1$, $\varepsilon = 1,0$ e $\tau = 10$.

mais intensa for a perturbação, o que é exemplificado pela Fig. 9.5, onde escolhemos $\varepsilon = 0,5$. A região caótica é mais pronunciada e claramente vai erodindo as trajetórias dentro das ilhas periódicas, tanto as relativas aos vórtices principais, como as ilhas que apareceram entre os dois vórtices. O aumento da perturbação provoca a destruição de muitas curvas invariantes, tanto nas ressonâncias primárias como nas secundárias. Mesmo com um alto valor da perturbação ainda sobrevivem algumas curvas invariantes em ambas as ilhas.

Finalmente, para valores ainda maiores de ε a região de movimento caótico das partículas advectadas pelo fluxo se estende ao longo de todo o retângulo \mathcal{D} . Embora não visualizamos, aqui, resquícios de ilhas, é muito provável que elas ainda existam, embora tão minúsculas que apenas uma ampliação muito grande possa revelar sua presença. Na prática, no entanto, o efeito das ilhas é tão pequeno que podemos dizer, aproximadamente, que toda a superfície de seção de Poincaré apresenta movimento caótico.

Uma interessante aplicação é a possibilidade de misturar dois fluidos distintos pelo efeito da advecção caótica. Vamos supor, por exemplo, que no caso sem perturbação cada célula com seu vórtice seja ocupada por um fluido de cor diferente, como vermelho e azul. Devido à barreira existente neste caso não há mistura entre as duas espécies. Mas, quando $\varepsilon \neq 0$, a existência de órbitas caóticas que visitam ambos os lados do retângulo \mathcal{D} faz com que os dois fluidos se misturem. Por exemplo, a Fig. 9.7 mostra algumas trajetórias caóticas no caso $\varepsilon = 1,0$. Os pontos das trajetórias em cor vermelha são geradas por condições iniciais no disco centrado em $(x_0 = 0,1, y_0 = 0,1)$, ao passo que os pontos azuis o são por condições iniciais escolhidas no disco com centro no ponto $(x_0 = 1,0, y_0 = 0,9)$.

Se inicialmente colocamos duas gotas de cores diferentes nestas posições, após um certo tempo (medido em número de iterações do mapa estroboscópico) os fluidos estarão bem misturados, ainda que de forma um tanto heterogênea devido às ilhas periódicas que permanecem

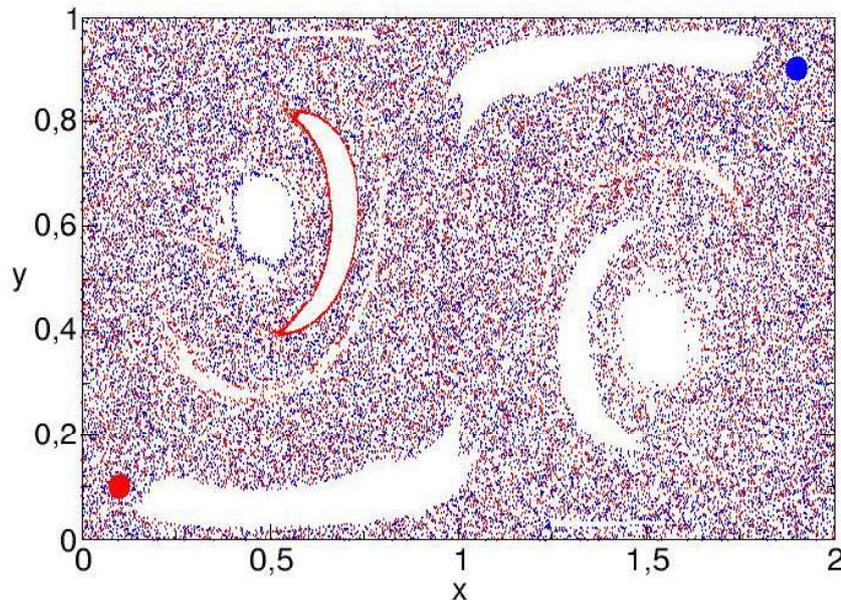


Figura 9.7: Trajetórias caóticas advectadas para o modelo de duplo giro dado por (9.38), com $A = 0,5$, $\varepsilon = 1,0$ e $\tau = 10$. As trajetórias em cor vermelha (resp. azul) são geradas por condições iniciais no disco centrado em $(x_0 = 0,1, y_0 = 0,1)$ (resp. $(x_0 = 1,9, y_0 = 0,9)$).

no plano de fase. Mas, se ε for tão grande que toda a região acessível seja caótica, como na Fig. 9.6, a tendência é de uma mistura mais homogênea. Há diversos trabalhos na literatura explorando o efeito de mistura entre fluidos usando perturbações no fluxo a partir de diferentes modelos, como o dos vórtices piscando, proposto por Aref [102].

9.4 Vórtices em fluidos

Um vórtice é uma região do espaço onde há uma rotação do fluido em relação a um eixo, que pode ser retilíneo ou curvilíneo. Em geral, a velocidade do escoamento é maior quanto mais nos aproximamos deste eixo, sendo menor na medida em que dele nos afastamos. Há diversos exemplos de vórtices em líquidos, como os redemoinhos formados quando há um escoamento através de um obstáculo, bem como em gases, como ciclones, tornados e furacões. A formação de vórtices é um elemento indispensável à descrição da turbulência em fluidos [101].

Uma peculiaridade dos vórtices é que eles podem mover-se devido à sua interação mútua. Por esse motivo é justificável falar em uma dinâmica de vórtices, como se estes fossem partículas com características próprias. Vamos trabalhar com vórtices puntiformes, para os quais o eixo de rotação é retilíneo e perpendicular ao plano do movimento. Estes vórtices foram introduzidos na seção 9.1 como um exemplo de escoamento plano incompressível.

Os vórtices puntiformes são extensões naturais do conceito de partículas na dinâmica Hamiltoniana. De fato, veremos que as equações de movimento de vórtices puntiforme têm a forma das equações de Hamilton, o que permite, às vezes, estudar sistemas de vórtices interagindo mutuamente usando analogias com o problema de N corpos.

9.4.1 Vórtices puntiformes

A vorticidade de um vórtice puntiforme na origem é expressa usando-se uma função delta de Dirac

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \Gamma \delta(\mathbf{r}), \quad (9.51)$$

onde Γ , também chamado intensidade do vórtice, é igual à circulação correspondente. Num vórtice puntiforme a vorticidade é infinitamente concentrada em um ponto (na origem). De fato, substituindo (9.51) em (9.23), a circulação do vórtice puntiforme será

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \Gamma \underbrace{\int_S \delta(\mathbf{r}) da}_{=1} = \Gamma, \quad (9.52)$$

onde usamos a normalização da função delta de Dirac numa superfície S que envolve o vórtice.

De forma análoga, caso o vórtice puntiforme esteja no ponto \mathbf{r}' , a vorticidade será dada por

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \Gamma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (9.53)$$

O caso mais geral a ser investigado aqui consiste em N vórtices puntiformes de intensidades $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$, localizados nos pontos $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$, respectivamente, para o qual a vorticidade é dada pela soma

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (9.54)$$

Em escoamentos bidimensionais, a vorticidade é uma constante [101]. Podemos, assim, imaginar que a vorticidade é transportada pelo escoamento do fluido: em outras palavras, a vorticidade sofre advecção. Não seria exato falar, aqui, num escalar passivo, pois os vórtices são advectados pelo fluxo que eles próprio criam. Na seção anterior mostramos que a função de fluxo correspondente ao problema de advecção desempenha o papel de uma Hamiltoniana, escrita em termos do par canônico formado pelas próprias coordenadas da partícula advectada. A função de fluxo para um vórtice puntiforme na origem foi determinada em (9.35) como

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln |\mathbf{r}|. \quad (9.55)$$

Caso o vórtice tenha centro no ponto \mathbf{r}_s , a expressão respectiva será

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|. \quad (9.56)$$

No caso de um sistema com N vórtices puntiformes com intensidades Γ_i e localizados em \mathbf{r}_i , com $i = 1, 2, \dots, N$, a função de fluxo total será a soma de todas as contribuições

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|. \quad (9.57)$$

Encarando o movimento de vórtices puntiformes como um processo de advecção, as equações de movimento do i -ésimo vórtice serão dadas por (9.36)-(9.37) [103]

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (9.58)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i}. \quad (9.59)$$

Para efetuar as derivadas da função de fluxo (9.57) usamos inicialmente a relação

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\}^{1/2} = \{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\}^{1/2}, \quad (9.60)$$

de tal modo que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \frac{x_i - x_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad \frac{\partial}{\partial y_i} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \frac{y_i - y_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (9.61)$$

Aplicando estes resultados em (9.58)-(9.59) teremos

$$\dot{x}_i = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1, j \neq i}^N \Gamma_j \frac{y_i - y_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (9.62)$$

$$\dot{y}_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1, j \neq i}^N \Gamma_j \frac{x_i - x_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}, \quad (9.63)$$

onde as somatórias excluem os termos singulares que aparecem para $i = j$.

Podemos interpretar fisicamente as equações acima da seguinte forma: cada vórtice estabelece em torno de si um campo de velocidades de módulo $\Gamma/2\pi r$, onde r é a distância ao vórtice. Havendo mais de um vórtice, qualquer um deles sofrerá advecção devido à velocidade combinada produzida por todos os outros vórtices. Em outras palavras, a velocidade de um vórtice num dado instante será a soma vetorial das velocidades produzidas, em sua posição, por todos os outros vórtices.

Para construir uma formulação Hamiltoniana do problema, definimos a chamada função de Kirchhoff-Routh [104]

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|. \quad (9.64)$$

tal que podemos reescrever (9.62)-(9.63) na seguinte forma:

$$\Gamma_i \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (9.65)$$

$$\Gamma_i \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (9.66)$$

Note que as os valores das somatórias em (9.62)-(9.63) correspondem à metade da dupla somatória presente em (9.64).

Definindo as variáveis canonicamente conjugadas do problema:

$$q_i = \begin{cases} \sqrt{\Gamma_i} x_i & \text{se } \Gamma_i > 0, \\ \sqrt{-\Gamma_i} y_i & \text{se } \Gamma_i < 0, \end{cases} \quad (9.67)$$

$$p_i = \begin{cases} \sqrt{\Gamma_i} y_i & \text{se } \Gamma_i > 0, \\ \sqrt{-\Gamma_i} x_i & \text{se } \Gamma_i < 0, \end{cases} \quad (9.68)$$

resulta que (9.65)-(9.66) assumem a forma de equações de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (9.69)$$

onde a Hamiltoniana é igual à função de Kirchhoff-Routh (9.64) que, embora lembre a energia potencial do problema de N -corpos é, de fato, igual à energia cinética do movimento do fluido no qual os vórtices estão imersos.

9.4.2 Integrais do movimento

Cada vórtice puntiforme corresponde a um grau de liberdade: suas coordenadas no plano formam um par canônico, tal que um sistema de N vórtices terá N graus de liberdade. O caso $N = 1$ será, portanto, integrável, já que a Hamiltoniana $H = H(p_1, q_1)$, sendo independente do tempo, é uma constante do movimento. Fisicamente isto significa que um vórtice isolado (num plano infinito) permanece estacionário.

Para a pesquisa de outras constantes do movimento, será conveniente definir os colchetes de Poisson de forma análoga à empregada no Capítulo 3, mas levando em conta as redefinições (9.67)-(9.68) [105]

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Gamma_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right), \quad (9.70)$$

onde f e g são funções arbitrárias das coordenadas dos vórtices. A equação de evolução de uma quantidade f será, conforme (3.85),

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}. \quad (9.71)$$

Com o auxílio de (9.70) e (9.65)-(9.66), podemos obter os colchetes de Poisson fundamentais:

$$\{x_1, \Gamma_1 y_1\} = \{x_2, \Gamma_2 y_2\} = \dots = 1, \quad (9.72)$$

$$\{x_1, y_2\} = \{x_2, y_1\} = \{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\} \dots = 0. \quad (9.73)$$

Para o sistema de N vórtices puntiformes temos as duas componentes do impulso linear total do sistema

$$Q = \sum_{i=1}^N \Gamma_i x_i, \quad P = \sum_{i=1}^N \Gamma_i y_i, \quad (9.74)$$

e o impulso angular total

$$I = \sum_{i=1}^N \Gamma_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (9.75)$$

Calculando explicitamente os colchetes de Poisson (9.72)-(9.73) associados a estas quantidades, obteremos que

$$\{Q, H\} = \{P, H\} = \{I, H\} = 0. \quad (9.76)$$

Portanto, como Q , P e I não dependem explicitamente do tempo, de (9.71) concluímos que todas são constantes do movimento:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dP}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0. \quad (9.77)$$

As quantidades Q e P são constantes do movimento em virtude da invariância da Hamiltoniana H em relação a translações nas coordenadas x e y , enquanto I o é devido à invariância de H em relação a rotações.

Para analisar a integrabilidade (no sentido de Liouville) dos sistemas com $N \geq 2$ vórtices, lembramos que deve haver N integrais do movimento independentes (ou em involução). Assim, exige-se que os colchetes de Poisson destas novas constantes entre si e com H devem ser todas

nulas. Por este motivo, há que se tomar um certo cuidado, pois as integrais do movimento Q , P e I não são independentes, já que

$$\{Q, P\} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i, \quad \{Q, I\} = 2P, \quad \{P, I\} = -2Q, \quad (9.78)$$

como pode ser verificado por cálculo direto dos colchetes. Por outro lado, se tomarmos a combinação $J = Q^2 + P^2$ entre duas destas constantes, resulta que

$$\{J, I\} = \{Q^2 + P^2, I\} = 2Q\{Q, I\} + 2P\{P, I\} = 4QP - 4PQ = 0. \quad (9.79)$$

Portanto as três integrais do movimento H , I e J são independentes (em involução). Assim, os casos de $N = 2$ e $N = 3$ vórtices são integráveis para quaisquer valores das suas intensidades Γ_i . Já o caso de $N = 4$ vórtices é, em geral, não-integrável. No entanto, há dois casos particulares interessantes: (i) se $\sum_{i=1}^4 \Gamma_i = 0$ então $\{Q, P\} = 0$; (ii) se $P = Q = 0$. Em ambos, haverá quatro integrais do movimento independentes: P , Q , I e H , e o sistema de quatro vórtices será integrável. Uma série de resultados interessantes podem ser deduzidos usando as ferramentas da Dinâmica Hamiltoniana (ver [105] para uma revisão recente).

9.4.3 Solução para $N = 2$ vórtices

O caso de $N = 2$ vórtices puntiformes é integrável e tem uma solução analítica exata, no plano complexo [106]. Consideramos dois vórtices de intensidades Γ_1 e Γ_2 , com $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$. As posições dos vórtices, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , satisfazem as equações de advecção (9.62)-(9.63):

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{2\pi} \Gamma_2 \frac{y_1 - y_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}, \quad \dot{y}_1 = \frac{1}{2\pi} \Gamma_2 \frac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}, \quad (9.80)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2\pi} \Gamma_1 \frac{y_2 - y_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}, \quad \dot{y}_2 = \frac{1}{2\pi} \Gamma_1 \frac{x_2 - x_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}. \quad (9.81)$$

Definindo as variáveis complexas

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad (9.82)$$

reescrevemos as equações diferenciais acima numa forma compacta

$$\dot{z}_1 = \frac{i}{2\pi} \Gamma_2 \frac{z_1 - z_2}{|z_1 - z_2|^2}, \quad (9.83)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{i}{2\pi} \Gamma_1 \frac{z_2 - z_1}{|z_1 - z_2|^2}. \quad (9.84)$$

Vamos considerar as duas quantidades seguintes

$$C = \frac{\Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad (9.85)$$

$$D^2 = |z_1 - z_2|^2 = (z_1^* - z_2^*)(z_1 - z_2). \quad (9.86)$$

Usando as equações de movimento (9.83)-(9.84) pode-se mostrar, por cálculo direto, que

$$\frac{dC}{dt} = 0, \quad \frac{dD^2}{dt} = 0, \quad (9.87)$$

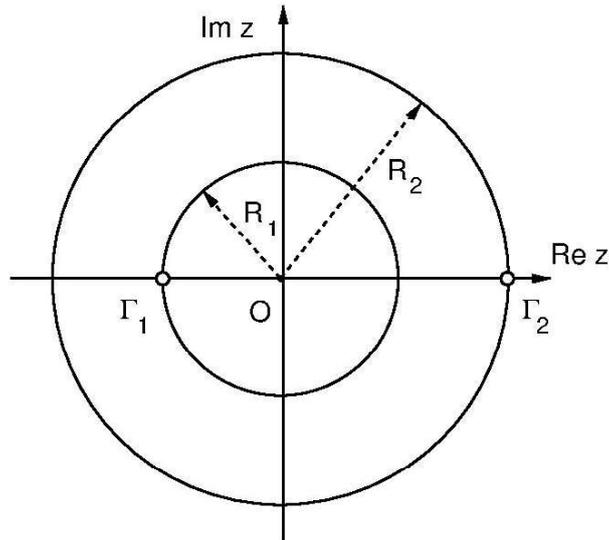


Figura 9.8: Dois vórtices em mútua rotação no plano complexo.

ou seja, tanto C como D^2 são integrais do movimento. Por definição, C é a posição do baricentro dos dois vórtices no plano complexo, e $\sqrt{D^2}$ a sua distância mútua. Substituindo estas quantidades em (9.83)-(9.84) resultam duas equações desacopladas, a saber

$$\dot{z}_1 = \frac{i(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi D^2}(z_1 - C) = i\omega(z_1 - C), \quad (9.88)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{i(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi D^2}(z_2 - C) = i\omega(z_2 - C), \quad (9.89)$$

onde definimos

$$\omega = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi D^2}, \quad (9.90)$$

Aplicando a transformação canônica

$$z_1 - C = \sqrt{2R_1}e^{i\theta_1}, \quad z_2 - C = \sqrt{2R_2}e^{i\theta_2}, \quad (9.91)$$

nas equações (9.88)-(9.89), e igualando partes real e imaginária, temos que

$$\dot{R}_1 = 0, \quad \dot{\theta}_1 = \omega, \quad (9.92)$$

$$\dot{R}_2 = 0, \quad \dot{\theta}_2 = \omega. \quad (9.93)$$

Portanto, os vórtices giram (no plano complexo) em círculos concêntricos de raios R_1 e R_2 com a mesma velocidade angular ω em torno do seu baricentro [Fig. 9.8]. Se $\Gamma_1 = \Gamma_2$ os vórtices movem-se no mesmo círculo. Já se $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$, o baricentro tende ao infinito e os vórtices deslocam-se paralelamente com a mesma velocidade.

9.5 O limite do contínuo

Nas seções precedentes deste Capítulo, abordamos a descrição Hamiltoniana de problemas envolvendo fluidos mas que, por motivos diversos, são caracterizados por um pequeno número de graus de liberdade. No entanto, se desejamos fazer uma descrição Hamiltoniana de um

fluido propriamente dito, precisamos trabalhar com um número infinitamente grande de graus de liberdade.

Para isso, é necessário fazer uma transição entre sistemas mecânicos discretos com muitos graus de liberdade e sistemas contínuos. Um modelo bastante usado para descrever esta transição é o de uma cadeia linear de osciladores harmônicos que, no limite do contínuo, descreve vibrações longitudinais de uma barra muito longa. A descrição matemática deste problema nos levará, através de uma generalização relativamente simples, a um sistema contínuo como um gás. O formalismo desenvolvido pode ser aplicado, com as devidas adaptações, a campos clássicos descrevendo problemas de interesse na Teoria Quântica de Campos.

9.5.1 Descrição Lagrangiana

Nas aplicações vistas até agora neste Capítulo, empregamos a descrição Euleriana do movimento de um fluido, que focaliza a evolução temporal de grandezas físicas em pontos fixos do espaço. Nosso objetivo, agora, é construir uma formulação Hamiltoniana para um fluido como um sistema com infinitos graus de liberdade. Para este fim é mais conveniente utilizar a descrição Lagrangiana do movimento o fluido, que identifica o movimento de partículas individuais do fluido.

Densidade de Lagrangiana

No âmbito da descrição Lagrangiana, imaginamos que um fluido é um sistema de partículas infinitamente próximas entre si, que resulta aplicando o limite do contínuo a um sistema discreto de partículas, como por exemplo uma cadeia de osciladores harmônicos acoplados. Considerando uma partícula do fluido localizada, no tempo t , no ponto do espaço de coordenadas (x, y, z) , denotaremos por $\boldsymbol{\eta} = (\eta_x, \eta_y, \eta_z)$ o deslocamento da partícula. Ele é um campo vetorial da forma $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}, t)$.

A formulação Lagrangiana de sistemas no limite do contínuo considera as componentes do deslocamento (η_x, η_y, η_z) como as coordenadas generalizadas. Já as coordenadas cartesianas são meros parâmetros, assim como o tempo. Adotaremos uma notação de índices para as coordenadas cartesianas x_k , onde $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, e para as componentes do deslocamento das partículas η_j , onde $\eta_1 = \eta_x$, $\eta_2 = \eta_y$, $\eta_3 = \eta_z$.

As velocidades generalizadas serão as derivadas temporais das componentes do deslocamento das partículas do fluido $\dot{\eta}_j$, com $j = 1, 2, 3$. Para abreviar a notação a ser usada, denotaremos as derivadas em relação às coordenadas espaciais como

$$\eta_{j,k} = \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k}, \quad \dot{\eta}_{j,k} = \frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial x_k}. \quad (9.94)$$

A Lagrangiana L de um sistema de partículas e, por extensão, de um fluido, é uma quantidade extensiva. Será, assim, conveniente trabalhar com a densidade de Lagrangiana \mathcal{L} , definida como a Lagrangiana por unidade de volume no espaço de configuração

$$L = \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \mathcal{L}, \quad (9.95)$$

onde V é o volume ocupado pelo fluido. Em geral, a densidade de Lagrangiana depende das componentes do deslocamento, das suas derivadas temporais e espaciais, e ainda da posição e do tempo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta_j, \dot{\eta}_j, \eta_{j,k}, x_k, t), \quad (j, k = 1, 2, 3). \quad (9.96)$$

Princípio de Hamilton

Analogamente ao procedimento adotado no Capítulo 1, as equações de movimento do fluido podem ser obtidas a partir do princípio de Hamilton. Em nosso contexto presente, ele é expresso como

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \mathcal{L} = 0, \quad (9.97)$$

onde, entre dois instantes de tempo fixos t_1 e t_2 , há infinitos caminhos que os ligam. O símbolo δ denota uma variação entre estes caminhos, para posições (x_1, x_2, x_3) e tempo t constantes.

Em outras palavras, não há variação nas coordenadas, como havia na dedução mostrada na Seção 1.2. As variações são obtidas em relação às variáveis η_j e $\dot{\eta}_j$. Assim como a variação de η_j anula-se nos instantes t_1 e t_2 , ela é igual a zero também na superfície S que limita o volume de integração V .

Como no Capítulo 1, é conveniente introduzir um parâmetro variacional α , de modo que a variação das quantidades é definida como

$$\delta \eta_j = d\alpha \frac{\partial \eta_j}{\partial \alpha}, \quad \delta \dot{\eta}_j = d\alpha \frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial \alpha}, \quad (9.98)$$

tal que as propriedades do símbolo δ sejam essencialmente as mesmas de uma diferencial comum. Para a densidade de Lagrangiana (9.96) temos

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} \delta \eta_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} \delta \dot{\eta}_j + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \delta \eta_{j,k} \right\} \quad (9.99)$$

O princípio de Hamilton, na forma (9.97) é, pois,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} \delta \eta_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} \delta \dot{\eta}_j + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \delta \eta_{j,k} \right\} = 0. \quad (9.100)$$

Integrando por partes o termo sublinhado

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} \delta \dot{\eta}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} \delta \dot{\eta}_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \eta_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} \right), \quad (9.101)$$

onde os termos calculados nos pontos fixos anulam-se pois $\delta \eta_j(t_1) = \delta \eta_j(t_2) = 0$.

O termo duplamente sublinhado é, em relação à integração na k -ésima coordenada espacial

$$\int_V dx_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \delta \eta_{j,k} = \int_V \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \delta \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} dx_k. \quad (9.102)$$

Integrando por partes, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \delta \eta_j \Big|_S - \int_V \delta \eta_j \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \right) dx_k, \quad (9.103)$$

onde o termo calculado na superfície S do volume V é tal que as variações anulam-se sobre ela. Podemos, também, imaginar que o volume V é infinitamente grande, de modo que a superfície S é “jogada para o infinito”, onde supomos que $\delta \eta_j = 0$. Logo

$$\int_V dx_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \delta \eta_{j,k} = - \int_V \delta \eta_j \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \right) dx_k. \quad (9.104)$$

Substituindo (9.101) e (9.104) em (9.100) obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} \right) - \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \right) \right\} \delta \eta_j = 0. \quad (9.105)$$

Equações de Lagrange

Para uma variação $\delta\eta_j$ arbitrária, a integral é igual a zero se e somente se o integrando for identicamente nulo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} - \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \right) = 0, \quad (9.106)$$

que são as equações de Lagrange para o campo de deslocamento das partículas do fluido. Observe que, ao contrário de sistemas discretos, onde temos sistemas de equações diferenciais ordinárias, no limite do contínuo temos uma equação diferencial parcial, cuja solução é a função $\eta_k(x_j, t)$.

Definimos a derivada funcional da Lagrangiana em relação a η_j :

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} - \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \right). \quad (9.107)$$

Como a densidade de Lagrangiana não depende das derivadas espaciais de $\dot{\eta}_j$, a derivada funcional respectiva é

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j}. \quad (9.108)$$

Com o auxílio destas definições, as equações de Lagrange são expressas de maneira concisa como

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j} \right) = 0 \quad (9.109)$$

A variação na densidade de Lagrangiana é

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \delta \mathcal{L} \\ &= \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} \delta \eta_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} \delta \dot{\eta}_j + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \delta \eta_{j,k} \right\} \end{aligned} \quad (9.110)$$

Integrando por partes o termo sublinhado, um cálculo análogo ao que foi feito em (9.104) leva à expressão

$$\delta L = \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} \delta \eta_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} \delta \dot{\eta}_j - \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \right) \delta \eta_j \right\} \quad (9.111)$$

Usando as derivadas funcionais definidas em (9.107) e (9.108) obtemos

$$\delta L = \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\delta L}{\delta \eta_j} \delta \eta_j + \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j} \delta \dot{\eta}_j \right\} \quad (9.112)$$

9.5.2 Descrição Hamiltoniana

Para fazer uma descrição Hamiltoniana do sistema, definimos os momenta canonicamente conjugados às coordenadas generalizadas

$$p_j = \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \pi_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_j}, \quad (9.113)$$

com a respectiva densidade

$$\pi_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j}. \quad (9.114)$$

A Hamiltoniana é a transformada de Legendre da Lagrangiana

$$H = \sum_{k=1}^3 p_k \dot{\eta}_k - L. \quad (9.115)$$

Definindo a densidade de Hamiltoniana \mathcal{H} pela relação

$$H = \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \mathcal{H}, \quad (9.116)$$

resulta que

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^3 \pi_k \dot{\eta}_k - \mathcal{L}. \quad (9.117)$$

Como a Hamiltoniana é uma função, em geral, de η_k , π_k , $\eta_{k,j}$ e do tempo, sua diferencial total é

$$dH = \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \left\{ \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_k} d\eta_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} d\pi_k + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{k,j}} d\eta_{k,j} \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right\} \quad (9.118)$$

Integrando por partes o termo sublinhado, teremos

$$\begin{aligned} dH &= \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \left\{ \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_k} d\eta_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} d\pi_k - \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{k,j}} \right) d\eta_k \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right\} \\ &= \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \left\{ \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\delta H}{\delta \eta_k} d\eta_k + \frac{\delta H}{\delta \pi_k} d\pi_k \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right\} \end{aligned} \quad (9.119)$$

onde usamos (9.107) e (9.108).

Calculando a diferencial total de (9.115)

$$\begin{aligned} dH &= \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \left\{ \sum_{k=1}^3 (\dot{\eta}_k d\pi_k + \pi_k d\dot{\eta}_k) - dL \right\} \\ &= \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \left\{ \sum_{k=1}^3 \left(\dot{\eta}_k d\pi_k + \pi_k d\dot{\eta}_k - \frac{\delta L}{\delta \eta_k} d\eta_k - \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_k} d\dot{\eta}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \right\} \\ &= \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \left\{ \sum_{k=1}^3 (\dot{\eta}_k d\pi_k - \dot{\pi}_k d\eta_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \right\}, \end{aligned} \quad (9.120)$$

onde usamos (9.109) e (9.114). Comparando (9.119) e (9.120) resultam as equações de Hamilton

$$-\dot{\pi}_k = \frac{\delta H}{\delta \eta_k} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_k} - \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{k,j}} \right), \quad (9.121)$$

$$\dot{\eta}_k = \frac{\delta H}{\delta \pi_k} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} \quad (9.122)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (9.123)$$

A derivada total da Hamiltoniana é, devido a (9.119), dada por

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \left\{ \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\delta H}{\delta \eta_k} \dot{\eta}_k + \frac{\delta H}{\delta \pi_k} \dot{\pi}_k \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right\} \\ &= \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \left\{ \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\delta H}{\delta \eta_k} \frac{\delta H}{\delta \pi_k} + \frac{\delta H}{\delta \pi_k} \frac{\delta H}{\delta \eta_k} \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right\} \\ &= \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9.124)$$

Portanto, se a densidade de Hamiltoniana não depender explicitamente do tempo, então a Hamiltoniana é uma constante do movimento.

De forma geral, a derivada total de uma função

$$G(\eta_k, \pi_k, t) = \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \mathcal{G} \quad (9.125)$$

é

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \left\{ \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\delta G}{\delta \eta_k} \dot{\eta}_k + \frac{\delta G}{\delta \pi_k} \dot{\pi}_k \right] + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} dt \right\} \\ &= \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \left\{ \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\delta G}{\delta \eta_k} \frac{\delta H}{\delta \pi_k} + \frac{\delta G}{\delta \pi_k} \frac{\delta H}{\delta \eta_k} \right] + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} dt \right\} \\ &= \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t}, \end{aligned} \quad (9.126)$$

onde definimos os colchetes de Poisson, neste caso, como

$$\{G, H\} = \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\delta G}{\delta \eta_k} \frac{\delta H}{\delta \pi_k} + \frac{\delta G}{\delta \pi_k} \frac{\delta H}{\delta \eta_k} \right). \quad (9.127)$$

Pode-se verificar que as propriedades dos colchetes de Poisson vistas no Capítulo 3 são válidas também neste caso. Se $G = H$, a expressão (9.126) reduz-se a (9.124), uma vez que $\{H, H\} = 0$.

9.5.3 Vibrações sonoras num gás

Uma aplicação notável do formalismo desenvolvido para o limite do contínuo é a propagação de ondas sonoras em gases. Além do deslocamento $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ das partículas do fluido, também trabalharemos com a pressão p e a densidade ρ . Vamos designar por p_0 e ρ_0 os valores da pressão e densidade no equilíbrio, respectivamente, e considerar as ondas como perturbações infinitesimais destas grandezas.

Densidade de Lagrangiana

Definimos as densidades de energia cinética e potencial pelas expressões

$$T = \int_V dV \mathcal{T}, \quad U = \int_V dV \mathcal{U}, \quad (9.128)$$

respectivamente, onde $dV = dx_1 dx_2 dx_3$. Uma partícula do fluido de massa $dM = \rho_0 dV$ tem um elemento de energia cinética

$$dT = \frac{1}{2} dM \dot{\eta}^2 = \frac{1}{2} \rho_0 dV (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2), \quad (9.129)$$

tal que, de (9.128), a densidade de energia cinética é

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \rho_0 (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2). \quad (9.130)$$

Supondo que a densidade de energia potencial seja uniforme ao longo do volume V_0 no equilíbrio, então $U = \mathcal{U}V_0$. A onda sonora leva a uma expansão ou compressão do gás, caracterizada por uma pequena variação de volume ΔV . Se o trabalho é realizado **sobre** o gás, o correspondente aumento da sua energia potencial é igual ao trabalho realizado $-pdV$ (note o uso da convenção de sinal usual em termodinâmica). Assim, numa variação quase-estática de volume a energia potencial é

$$\mathcal{U}V_0 = - \int_{V_0}^{V_0 + \Delta V} p dV. \quad (9.131)$$

Considerando a expansão/contração do gás como um processo adiabático, usamos a relação

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma = \text{const.} \quad (9.132)$$

onde $\gamma = C_p/C_v$ é a razão entre as capacidades térmicas a pressão e volume constantes do gás. Substituindo (9.132) em (9.131), uma integração elementar fornece

$$\mathcal{U}V_0 = - \frac{p_0 V_0^\gamma}{1-\gamma} V_0^{1-\gamma} \left[\left(1 + \frac{\Delta V}{V_0} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] \quad (9.133)$$

Supondo que $\Delta V \ll V_0$ podemos usar a expansão binomial

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1)x^2 + \dots$$

em (9.133) para obter

$$\mathcal{U}V_0 = -p_0 \Delta V + \frac{1}{2} \gamma p_0 V_0^{-1} (\Delta V)^2 \quad (9.134)$$

Como $\rho = dM/dV$, onde M é a massa do gás,

$$dV = -\frac{M}{\rho_0^2} d\rho,$$

de sorte que

$$\Delta V = -\frac{M}{\rho_0} \sigma = -V_0 \sigma, \quad (9.135)$$

onde definimos a variação relativa de densidade do gás

$$\sigma = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}. \quad (9.136)$$

Substituindo (9.135) em (9.134) obtemos

$$\mathcal{U} = p_0 \sigma + \frac{1}{2} \gamma p_0 \sigma^2 \quad (9.137)$$

Para expressar σ em função dos deslocamentos η_i vamos considerar um volume de controle V no interior do gás, cuja superfície é S . Devido à compressão/expansão do gás provocada pela passagem da onda sonora, haverá um fluxo de massa através de S dado por

$$\oint_S \rho_0 \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_V dV \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\eta}, \quad (9.138)$$

onde usamos o teorema do divergente, e $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário perpendicular à superfície S em cada ponto. Como $\rho = \rho_0(1 + \sigma)$ a massa envolvida pela superfície S é

$$M = \int dV \rho = \rho_0 \int dV (1 + \sigma) = M_0 + \Delta M,$$

onde a variação (negativa) de massa é

$$-\Delta M = \rho_0 \int dV \sigma \quad (9.139)$$

Devido à conservação de massa, o fluxo (9.138) será responsável por uma variação na massa M do fluido envolvido pela superfície S , donde

$$-\rho_0 \int dV \sigma = \int_V dV \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\eta},$$

que será válida se

$$\sigma = -\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}. \quad (9.140)$$

Como $\dot{\rho} = \rho_0/\Delta t$ é a taxa de variação da densidade do gás, a relação (9.140) é equivalente à equação da continuidade (9.1)

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \dot{\boldsymbol{\eta}}) = 0, \quad (9.141)$$

que representa o princípio de conservação de massa no movimento do fluido.

Inserindo a expressão (9.140) em (9.137) resulta a densidade de energia potencial

$$\mathcal{U} = -p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2} \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})^2, \quad (9.142)$$

que, combinada a (9.130), leva à densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 + 2p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} - \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})^2 \right\} \quad (9.143)$$

Equação da onda

Na descrição Lagrangiana, a equação de movimento do fluido é dada por (9.106):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} - \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} \right) = 0, \quad (9.144)$$

As derivadas da densidade de Lagrangiana (9.143) são

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} = \rho_0 \sum_{k=1}^3 \dot{\eta}_k \delta_{kj} = \rho_0 \dot{\eta}_j, \quad (9.145)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{j,k}} = p_0 I_{jk} - \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) I_{jk}, \quad (9.146)$$

$$I_{jk} = \frac{\partial (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})}{\partial (\partial \eta_j / \partial x_k)} = \frac{\partial}{\partial (\partial \eta_j / \partial x_k)} \sum_{\ell=1}^3 \eta_{\ell,\ell} = \sum_{\ell=1}^3 \delta_{j\ell} \delta_{\ell k} = \delta_{jk} \quad (9.147)$$

Observe que $I_{jk} = 1$, se $j = k$, e é nulo, se $j \neq k$. Logo o termo $p_0 \delta_{jk}$ representa uma constante aditiva na Lagrangiana, que pode portanto ser ignorada, de modo que os termos relevantes são

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 - \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})^2 \right\} \quad (9.148)$$

Assim, as equações de Lagrange para as componentes do deslocamento, dadas por (9.144), fornecem

$$-\rho_0 \ddot{\eta}_j + \gamma p_0 \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) = 0, \quad (j = 1, 2, 3), \quad (9.149)$$

e que podem ser sintetizadas numa única equação vetorial

$$\rho_0 \ddot{\boldsymbol{\eta}} - \gamma p_0 \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) = 0. \quad (9.150)$$

Tomando o divergente desta equação

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} - \gamma p_0 \nabla^2 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) = 0. \quad (9.151)$$

Usando (9.140) reescrevemos (9.150) como uma equação de onda

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\sigma}}{\partial t^2} = 0, \quad (9.152)$$

onde definimos a velocidade de fase das ondas sonoras no gás

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}. \quad (9.153)$$

No caso de propagação unidimensional a equação de onda

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0, \quad (9.154)$$

tem como solução geral a expressão

$$\sigma(x, t) = \sigma_+(x + vt) + \sigma_-(x - vt), \quad (9.155)$$

onde σ_{\pm} são funções arbitrárias dos seus argumentos. Para ondas harmônicas, por exemplo,

$$\sigma(x, t) = A_+ \sin(x + vt) + A_- \sin(x - vt) \quad (9.156)$$

onde A_{\pm} são constantes, determinadas pelas condições iniciais.

Descrição hamiltoniana

Como a densidade de momentum associada à Lagrangiana (9.143) é

$$\pi_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_k} = \rho_0 \dot{\eta}_k \Rightarrow \boldsymbol{\pi} = \rho_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad (9.157)$$

a densidade de Hamiltoniana correspondente é dada por (9.117) como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \rho_0 \dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 - \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2\rho_0} \boldsymbol{\pi}^2 + \frac{\gamma p_0}{2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})^2, \end{aligned} \quad (9.158)$$

igual à soma das densidades de energia cinética e potencial, ou seja, à densidade de energia total.

As equações de Hamilton (9.160)-(9.159) são

$$\dot{\eta}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} = \frac{1}{\rho_0} \pi_k, \quad (9.159)$$

$$\dot{\pi}_k = \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{k,j}} \right) = \gamma p_0 \frac{d}{dx_k} (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}). \quad (9.160)$$

onde o cálculo na segunda equação é análogo ao efetuado para obter (10.163). Derivando (9.159) em relação ao tempo e usando (9.160) obtemos novamente a equação de onda (9.152)

$$\ddot{\eta}_k - \gamma p_0 \frac{\partial}{\partial x_k} (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}). \quad (9.161)$$

9.6 Problemas

- 1.