

# Apêndice A

## Integrais e Funções Elípticas

### A.1 Integrais elípticas

Definindo o módulo elíptico  $k$  tal que  $0 < k^2 < 1$  e a amplitude de Jacobi [77]

$$\phi = \text{am}(u, k), \quad (-\pi/2 < \phi < \pi/2), \quad (\text{A.1})$$

a *integral elíptica incompleta de primeira espécie* é definida como

$$u = F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2\theta}}, \quad (\text{A.2})$$

onde a função inversa correspondente é  $\phi$ .

No caso de  $\phi = \pi/2$  temos a *integral elíptica completa de primeira espécie*

$$K(k) = F(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2\theta}}. \quad (\text{A.3})$$

Para  $k = 0$  resulta que

$$K(0) = \int_0^{\pi/2} \sec\theta d\theta = \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.4})$$

ao passo que  $K(1)$  diverge. Na Figura A.1(a) mostramos o gráfico de  $K(k)$  no domínio  $0 < k < 1$ .

Analogamente, a *integral elíptica incompleta de segunda espécie* é definida como

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi d\theta \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2\theta}. \quad (\text{A.5})$$

Também no caso de  $\phi = \pi/2$  temos a *integral elíptica completa de segunda espécie*

$$E(k) = E(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} d\theta \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2\theta}. \quad (\text{A.6})$$

Se  $k = 0$  é  $E(0) = \pi/2$ , enquanto  $E(1) = 1$ . Na Figura A.1(b) mostramos o gráfico de  $E(k)$ .

As derivadas das integrais elípticas completas são dadas pelas fórmulas [30]

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k}, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E(k) - K(k)}{k}. \quad (\text{A.8})$$

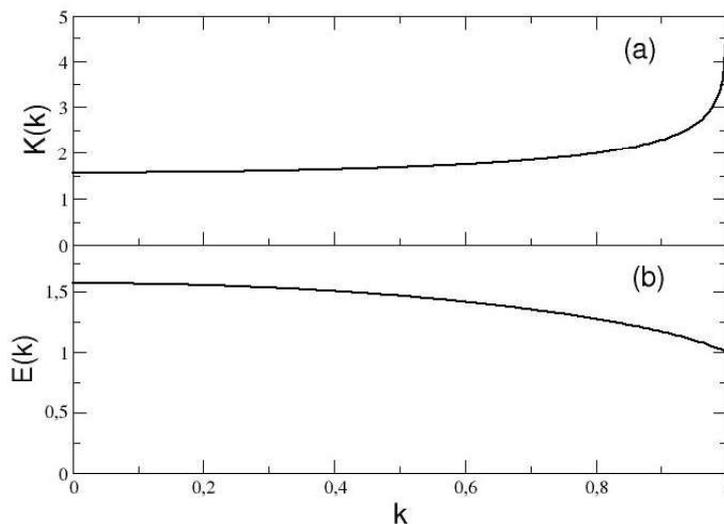


Figura A.1: Integrais elípticas completas de (a) primeira e (b) segunda espécies, em função do módulo elíptico  $k$ .

Para valores pequenos de  $k$  podemos usar as seguintes expansões em séries

$$K(k) \approx \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \dots \right\}, \quad (k \ll 1), \quad (\text{A.9})$$

$$E(k) \approx \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \dots \right\}, \quad (k \ll 1). \quad (\text{A.10})$$

Já para valores próximos a  $k = 1$  podemos usar a seguinte expressão assintótica

$$K(k) \approx \ln \left[ \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \right], \quad (k \lesssim 1). \quad (\text{A.11})$$

## A.2 Funções elípticas de Jacobi

As funções elípticas de Jacobi:  $\text{sn}(u, k)$ ,  $\text{cn}(u, k)$  e  $\text{dn}(u, k)$ , onde  $k$  é o módulo elíptico, são definidas em termos da amplitude de Jacobi [78]:

$$\text{sn}(u, k) = \text{sen } \phi = \text{sen}[\text{am}(u, k)], \quad (\text{A.12})$$

$$\text{cn}(u, k) = \text{cos } \phi = \text{cos}[\text{am}(u, k)], \quad (\text{A.13})$$

$$\text{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi} = \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2[\text{am}(u, k)]}. \quad (\text{A.14})$$

Nos casos onde  $k$  é igual a zero ou um temos que

$$\text{sn}(u, 0) = \text{sen } u, \quad \text{sn}(u, 1) = \text{tgh } u, \quad (\text{A.15})$$

$$\text{cn}(u, 0) = \text{cos } u, \quad \text{cn}(u, 1) = \text{sech } u, \quad (\text{A.16})$$

$$\text{dn}(u, 0) = 1, \quad \text{dn}(u, 1) = \text{sech } u. \quad (\text{A.17})$$

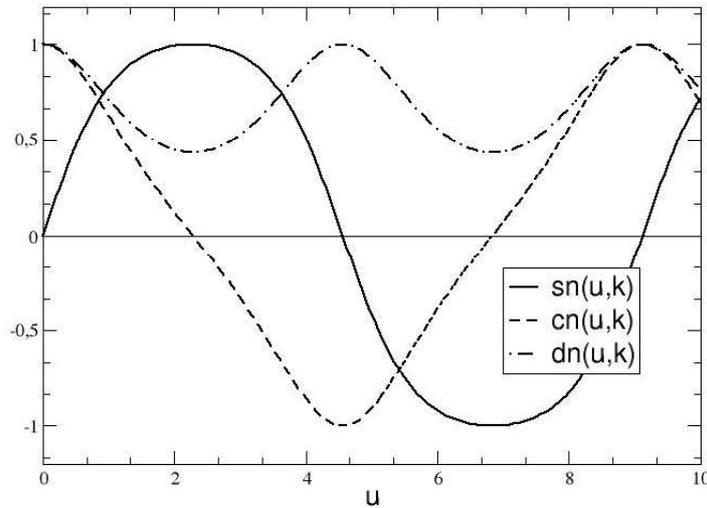


Figura A.2: Funções elípticas de Jacobi em função da amplitude  $u$ , no caso  $k = 0,9$ .

Para  $k$  arbitrário temos as seguintes propriedades (escreveremos, por simplicidade,  $\text{sn } u$  no lugar de  $\text{sn}(u, k)$ , etc.)

$$\text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1, \quad (\text{A.18})$$

$$k^2 \text{sn}^2 u + \text{dn}^2 u = 1, \quad (\text{A.19})$$

$$k^2 \text{cn}^2 u + (1 - k^2) = \text{dn}^2 u, \quad (\text{A.20})$$

$$\text{cn}^2 u + (1 - k^2) \text{sn}^2 u = \text{dn}^2 u. \quad (\text{A.21})$$

Alguns valores especiais das funções elípticas são:

$$\text{sn } 0 = \text{cn}(K(k)) = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$\text{cn } 0 = \text{dn } 0 = \text{sn}(K(k)) = 1, \quad (\text{A.23})$$

$$\text{dn}(K(k)) = \sqrt{1 - k^2}, \quad (\text{A.24})$$

$$\text{sn}(u + K) = \frac{\text{cn } u}{\text{dn } u}, \quad (\text{A.25})$$

$$\text{cn}(u + K) = -(1 - k^2) \frac{\text{sn } u}{\text{dn } u}, \quad (\text{A.26})$$

$$\text{dn}(u + K) = \frac{1 - k^2}{\text{dn } u}, \quad (\text{A.27})$$

$$\text{sn}(u + 2K) = -\text{sn } u, \quad (\text{A.28})$$

$$\text{cn}(u + 2K) = -\text{cn } u, \quad (\text{A.29})$$

$$\text{dn}(u + 2K) = \text{dn } u, \quad (\text{A.30})$$

de forma que as funções  $\text{sn } u$  e  $\text{cn } u$  têm período  $4K(k)$ , e que  $\text{dn } u$  tem período  $2K(k)$ , o que também pode ser verificado nos gráficos destas funções [Fig. A.2].

Uma expressão importante envolvendo o módulo recíproco  $k^{-1}$  é

$$k \text{sn}(u, k) = \text{sn}(ku, k^{-1}). \quad (\text{A.31})$$

As derivadas das funções elípticas são

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \quad (\text{A.34})$$

O seno elíptico  $\operatorname{sn}(u, k)$  é a solução, para  $k^2 < 1$ , da equação diferencial de Jacobi

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2). \quad (\text{A.35})$$

Se escrevermos  $y = \sin \phi$ , onde  $\phi = \operatorname{am}(u, k)$  é a amplitude de Jacobi, a equação acima torna-se

$$\left(\frac{d\phi}{du}\right)^2 = 1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi, \quad (\text{A.36})$$

cuja solução é

$$\phi = \operatorname{arcsen}[\operatorname{sn}(u, k)] \quad (\text{A.37})$$

# Apêndice B

## Condição semi-clássica de quantização

No problema unidimensional do movimento de uma partícula de massa  $m$  sob um potencial  $U(x)$  os pontos de retorno são dadas pela condição  $U(x) = E$ . Supomos a existência de dois pontos de retorno  $x_1$  e  $x_2 > x_1$  [Fig. B.1]. Neste Apêndice mostraremos os detalhes matemáticos da dedução da condição semi-clássica de quantização.

### B.1 Linearização do potencial

Nas vizinhanças dos pontos de retorno o momentum é muito pequeno, levando a um comprimento de De Broglie grande o suficiente para tornar inválida a condição de aproximação WKB (4.230):

$$\lambda(x) \ll \frac{p^2/2m}{dU(x)/dx} \quad (\text{B.1})$$

Para tratar esta região devemos resolver a equação de Schrödinger independente do tempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + [U(x) - E]\psi = 0, \quad (\text{B.2})$$

onde expandimos em série de potências o potencial nas vizinhanças dos pontos de retorno  $x_1$  e  $x_2$ , até termos quadráticos na diferença  $(x - x_{1,2})$ ,

$$U(x) = U(x_{1,2}) + (x - x_{1,2})U'(x_{1,2}) + \dots \quad (\text{B.3})$$

Substituindo (B.3) em (B.2) obtemos a seguinte equação

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U'(x_{1,2})(x - x_{1,2})\psi = 0, \quad (\text{B.4})$$

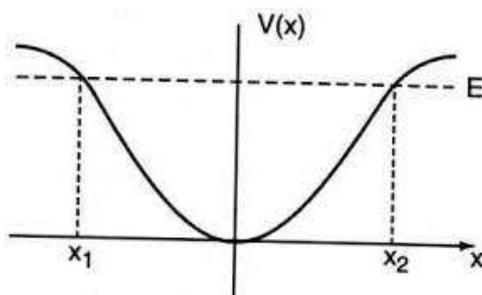


Figura B.1: Potencial unidimensional com dois pontos de retorno.

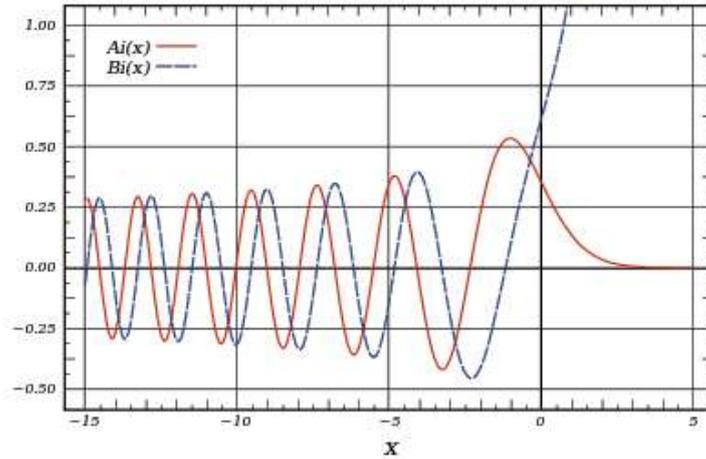


Figura B.2: Funções de Airy de primeira e segunda espécies.

onde usamos que  $U(x_{1,2}) = E$  para os pontos de retorno. Definindo as quantidades adimensionais

$$\alpha^3 = \frac{2m}{\hbar^2} U'(x_{1,2}), \quad \xi = (x - x_{1,2}), \quad z = \alpha\xi, \quad (\text{B.5})$$

chegamos à equação de Airy

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - z\psi = 0, \quad (\text{B.6})$$

cuja solução geral tem a forma (podemos chamá-la de solução *emenda*, por atuar como uma emenda entre as soluções WKB à direita e à esquerda do ponto de retorno)

$$\psi(z) = C_1 Ai(z) + C_2 Bi(z), \quad (\text{B.7})$$

onde usamos as funções de Airy de primeira e segunda espécies [Fig. B.2]

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + zt\right) dt, \quad (\text{B.8})$$

$$Bi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \exp\left(-\frac{t^3}{3} + zt\right) + \sin\left(\frac{t^3}{3} + zt\right) \right\} dt. \quad (\text{B.9})$$

Dividimos a vizinhança de cada ponto de retorno em três regiões: um entorno próximo onde vale a solução da equação de Schrödinger linearizada e, ladeando este entorno, há duas soluções WKB à esquerda e à direita. Naturalmente será necessário casar estas três soluções, o que será mostrado na sequência.

## B.2 Fórmulas de conexão

Inicialmente vamos considerar a vizinhança do ponto de retorno  $x_2$ , no qual  $U'(x_2) > 0$ . A região à esquerda de  $x_2$  tem  $U(x) < E$ , ou seja, é uma região classicamente permitida, onde a energia cinética é positiva. Após o entorno imediato do ponto de retorno, a solução WKB deve representar uma combinação linear de ondas, na forma (4.225),

$$\psi_\ell(x) = \frac{A_+}{\sqrt{p(x)}} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{x_2}^x p(x') dx' \right\} + \frac{A_-}{\sqrt{p(x)}} \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{x_2}^x p(x') dx' \right\}, \quad (\text{B.10})$$

onde o momentum da partícula é

$$p(x) = \sqrt{2m(E - U(x))} \approx \sqrt{-2m(x - x_2)U'(x_2)} = \hbar\alpha^{3/2}(-\xi)^{3/2}, \quad (\text{B.11})$$

e usamos (B.3) e (B.5). As fases na solução WKB, (B.10), são dadas por

$$\int_{x_2}^x p(x')dx' = \hbar\alpha^{3/2} \int_0^\xi (-\xi)^{3/2} d\xi = -\frac{2}{3}\hbar(-\alpha\xi)^{3/2}, \quad (\text{B.12})$$

de forma que reescrevemos a solução à esquerda do ponto de retorno  $x_2$  como

$$\psi_\ell(z) = \frac{A_+}{(\hbar\alpha)^{1/2}(-z)^{1/4}} \exp\left(-\frac{2i}{3}(-z)^{3/2}\right) + \frac{A_-}{(\hbar\alpha)^{1/2}(-z)^{1/4}} \exp\left(\frac{2i}{3}(-z)^{3/2}\right). \quad (\text{B.13})$$

À região à direita do ponto de retorno  $x_2$  tem  $U(x) > E$ , ou seja, é uma região classicamente proibida, pois a energia cinética é negativa. Após o entorno do ponto de retorno, a solução WKB deve representar uma combinação linear de exponenciais reais. Adaptando a na forma (4.225),

$$\psi_r(x) = \frac{B_+}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left\{\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx'\right\} + \frac{B_-}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left\{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx'\right\}, \quad (\text{B.14})$$

ou, em termos da coordenada normalizada,

$$\psi_r(z) = \frac{B_+}{(\hbar\alpha)^{1/2}z^{1/4}} e^{2z^{3/2}/3} + \frac{B_-}{(\hbar\alpha)^{1/2}z^{1/4}} e^{-2z^{3/2}/3}. \quad (\text{B.15})$$

Uma vez determinadas as soluções à direita e à esquerda do ponto de retorno  $x_2$ , devemos casá-las com as soluções no entorno imediato. Para o casamento à esquerda, devemos utilizar as seguintes formas assintóticas das funções de Airy para  $z \ll 0$ :

$$\begin{aligned} Ai(z) &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \sin\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \frac{1}{2i} \left[ \exp\left(i\frac{2i}{3}(-z)^{3/2} + i\frac{\pi}{4}\right) - \exp\left(-i\frac{2i}{3}(-z)^{3/2} - i\frac{\pi}{4}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} Bi(z) &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \sin\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \frac{1}{2} \left[ \exp\left(i\frac{2i}{3}(-z)^{3/2} + i\frac{\pi}{4}\right) + \exp\left(-i\frac{2i}{3}(-z)^{3/2} - i\frac{\pi}{4}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Substituindo estas expressões assintóticas na solução emenda (B.7) temos

$$\begin{aligned} \psi_\ell(z) &= \frac{C_1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \frac{1}{2i} \left[ \exp\left(i\frac{2i}{3}(-z)^{3/2} + i\frac{\pi}{4}\right) - \exp\left(-i\frac{2i}{3}(-z)^{3/2} - i\frac{\pi}{4}\right) \right] + \\ &\quad \frac{C_2}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \frac{1}{2} \left[ \exp\left(i\frac{2i}{3}(-z)^{3/2} + i\frac{\pi}{4}\right) + \exp\left(-i\frac{2i}{3}(-z)^{3/2} - i\frac{\pi}{4}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Comparando com a solução WKB (B.13), à esquerda do ponto de retorno  $x_2$ , resulta que

$$C_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\hbar\alpha}} \left( A_+ e^{-i\pi/4} + A_- e^{i\pi/4} \right), \quad (\text{B.19})$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{\pi}{\hbar\alpha}} \left( A_+ e^{i\pi/4} + A_- e^{-i\pi/4} \right). \quad (\text{B.20})$$

Para celebrar o casamento à direita, utilizamos as formas assintóticas das funções de Airy para  $z \gg 0$ :

$$Ai(z) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi z^{1/4}}} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right), \quad (\text{B.21})$$

$$Bi(z) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi z^{1/4}}} \exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right), \quad (\text{B.22})$$

que, após serem substituídas na solução emenda (B.7), levam-nos a

$$\Psi_r(z) = \frac{C_1}{2\sqrt{\pi z^{1/4}}} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + \frac{C_2}{\sqrt{\pi z^{1/4}}} \exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right). \quad (\text{B.23})$$

Ao compará-la com a solução WKB (B.15), à direita do ponto de retorno  $x_2$ , temos

$$C_1 = \sqrt{\frac{4\pi}{\hbar\alpha}} B_-, \quad (\text{B.24})$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{\pi}{\hbar\alpha}} B_+. \quad (\text{B.25})$$

Cotejando (B.24)-(B.25) com (B.19)-(B.20) podemos eliminar as constantes  $C_1$  e  $C_2$  em favor de

$$A_+ = \frac{1}{2}B_+e^{-i\pi/4} + B_-e^{i\pi/4}, \quad (\text{B.26})$$

$$A_- = \frac{1}{2}B_+e^{i\pi/4} + B_-e^{-i\pi/4}. \quad (\text{B.27})$$

Em segundo lugar, focalizaremos a vizinhança do ponto de retorno  $x_1$ , onde  $U'(x_1) < 0$ . A região à direita de  $x_1$  é uma região classicamente permitida, enquanto à região à sua esquerda é classicamente proibida. A solução WKB à direita de  $x_1$  será similar a (B.10), enquanto a solução à esquerda será parecida com (B.14). As diferenças são mínimas, a começar das integrais que aparecem em ambas, onde há trocas de sinal, resultando em

$$\int_{x_1}^x p(x')dx' = \frac{2\hbar}{3}(-\alpha\xi)^{3/2}, \quad \int_{x_1}^x |p(x')|dx' = -\frac{2\hbar}{3}(\alpha\xi)^{3/2}, \quad (\text{B.28})$$

à direita e à esquerda de  $x_1$ , respectivamente, onde  $\xi = x - x_1$ . Devido a tais semelhanças as fórmulas de conexão entre a solução emenda e as WKB são obtidas trocando  $A_+$  por  $A_-$ , e  $B_+$  por  $B_-$  e *vice-versa* para ambas. Por exemplo, no lugar de (B.26)-(B.27) teremos

$$A_+ = \frac{1}{2}B_-e^{i\pi/4} + B_+e^{-i\pi/4}, \quad (\text{B.29})$$

$$A_- = \frac{1}{2}B_-e^{-i\pi/4} + B_+e^{i\pi/4}. \quad (\text{B.30})$$

### B.3 Casamento das soluções

Uma vez determinadas as soluções nas vizinhanças dos pontos de retorno, obtidas pelo casamento das soluções emenda com as soluções WKB em ambos os lados, o passo seguinte é compatibilizar as soluções obtidas para obter a condição de quantização. Batizaremos como

1. I: região classicamente proibida à esquerda de  $x_1$ ;
2. II: região classicamente permitida à direita de  $x_1$  e à esquerda de  $x_2$ ;
3. III: região classicamente proibida à direita de  $x_2$ .

Iniciamos o processo no ponto de retorno  $x_1$ : as soluções WKB correspondentes às regiões I e II são

$$\psi_I(x) = \frac{B_+}{\sqrt{|p|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'\right) + \frac{B_-}{\sqrt{|p|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'\right), \quad (\text{B.31})$$

$$\psi_{II}(x) = \frac{A_+}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx'\right) + \frac{A_-}{\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx'\right). \quad (\text{B.32})$$

A condição de contorno é a de que  $\psi_I(x) \rightarrow 0$  se  $x \rightarrow -\infty$ . Para que isso seja sempre verdadeiro, temos de ter  $B_- = 0$ . Usando as fórmulas de conexão (B.29)-(B.30), os coeficientes de ambas satisfazem

$$A_+ = B_+ e^{-i\pi/4}, \quad A_- = B_+ e^{i\pi/4}, \quad (\text{B.33})$$

de modo que

$$\psi_{II}(x) = \frac{B_+}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' - \frac{i\pi}{4}\right) + \frac{B_+}{\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \frac{i\pi}{4}\right). \quad (\text{B.34})$$

Passamos, agora, ao ponto de retorno  $x_2$ : as soluções WKB à esquerda e à direita são, respectivamente

$$\psi_{II}(x) = \frac{A'_+}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{x_2}^x p(x') dx'\right) + \frac{A'_-}{\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{x_2}^x p(x') dx'\right), \quad (\text{B.35})$$

$$\psi_{III}(x) = \frac{B'_+}{\sqrt{|p|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx'\right) + \frac{B'_-}{\sqrt{|p|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx'\right). \quad (\text{B.36})$$

Desta vez, a condição de contorno é a de que  $\psi_{III}(x) \rightarrow 0$  se  $x \rightarrow \infty$ , o que implica em  $B'_+ = 0$ . Antes de mais nada, reescreveremos (B.34) na forma

$$\begin{aligned} \psi_{II}(x) = & \frac{B_+}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} p(x') dx' + \int_{x_2}^x p(x') - \frac{\pi}{4} \right\}\right) + \\ & \frac{B_+}{\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} p(x') dx' + \int_{x_2}^x p(x') - \frac{\pi}{4} \right\}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Comparando com (B.35) obtemos

$$A'_+ = B_- e^{i(\theta-\pi/4)}, \quad A'_- = B_- e^{-i(\theta-\pi/4)}, \quad (\text{B.38})$$

onde definimos a integral

$$\theta = \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} p(x') dx'. \quad (\text{B.39})$$

Usando as fórmulas de conexão (B.26)-(B.27), resultam as relações entre os coeficientes

$$A'_+ = \frac{1}{2} B'_+ e^{-i\pi/4} + B'_- e^{i\pi/4}, \quad (\text{B.40})$$

$$A'_- = \frac{1}{2} B'_+ e^{i\pi/4} + B'_- e^{-i\pi/4}. \quad (\text{B.41})$$

Resolvendo o sistema, e usando (B.38), obtemos

$$B'_+ = A'_+ e^{i\pi/4} + A'_- e^{-i\pi/4} = 2B_+ \cos \theta \quad (\text{B.42})$$

Como  $B'_+ = 0$ , temos que  $\cos \theta = 0$ , donde  $\theta = (n + 1/2)\pi$ , onde  $n$  é um inteiro positivo. Expressando em termos da integral (B.39), chegamos à condição de quantização semi-clássica

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x') dx' = \hbar\pi \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{B.43})$$

que nos leva à regra de Bohr-Sommerfeld.

]

# Apêndice C

## Perturbação relativística do problema de Kepler

A métrica do espaço-tempo é dada pela solução das equações de Einstein para uma distribuição esfericamente simétrica [cf. [79], seção 100]:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (\text{C.1})$$

onde o raio de Schwarzschild de uma estrela de massa  $M$  é definido como

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (\text{C.2})$$

sendo  $G$  a constante gravitacional Newtoniana e  $d\tau$  é o intervalo de tempo próprio (medido por um relógio movendo-se junto com a partícula).

A trajetória de uma partícula material no espaço-tempo é uma geodésica. Como a métrica de Schwarzschild (C.1) é simétrica em relação ao plano equatorial ( $\theta = \pi/2$ ) qualquer geodésica que tenha um ponto contido neste plano irá ter todos os demais pontos com essa propriedade. Fazemos, assim,  $d\theta = 0$ , e (C.1) fornece

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - dr^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} - r^2 d\phi^2. \quad (\text{C.3})$$

A energia total e o momentum angular da partícula serão dados por [62]

$$E_T = mc^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}, \quad (\text{C.4})$$

$$\ell = mr^2 \frac{d\phi}{d\tau}. \quad (\text{C.5})$$

Substituindo ambas em (C.3) obtemos, após algumas manipulações algébricas

$$E_T^2 = m^2 c^2 \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + m^2 c^4 + \frac{c^2 \ell^2}{r^2} - \frac{m^2 c^4 r_s}{r} - \frac{c^2 r_s \ell^2}{r^3}. \quad (\text{C.6})$$

A energia relativística total da partícula é

$$E_T = E + mc^2 = mc^2 \left(1 + \frac{E}{mc^2}\right). \quad (\text{C.7})$$

Se  $E \ll mc^2$  então,

$$E_T^2 \approx m^2 c^4 \left( 1 + \frac{2E}{mc^2} \right) = m^2 c^4 + 2mc^2 E. \quad (\text{C.8})$$

Substituindo em (C.6) podemos escrever o resultado na forma

$$E = \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + U_{ef}(r), \quad (\text{C.9})$$

onde definimos a energia potencial efetiva

$$U_{ef}(r) = -\frac{mc^2 r_s}{2r} + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{r_s \ell^2}{2mr^3} = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{h}{r^3}, \quad (\text{C.10})$$

onde fizemos

$$k = GMm, \quad (\text{C.11})$$

$$h = \frac{GM\ell^2}{mc^2} = \frac{k\ell^2}{m^2 c^2}. \quad (\text{C.12})$$

A expressão (C.9) corresponde à parte radial da Hamiltoniana de uma partícula de massa  $m$ , onde o primeiro termo é a energia cinética relativística, enquanto o segundo termo é um potencial efetivo constituído de três partes: o potencial de Kepler ( $-k/r$ ), a barreira centrífuga  $\ell^2/2mr^2$ , e um potencial central correspondente ao efeito da Relatividade Geral, que é do tipo  $-h/r^3$ . Como o valor de  $h$  é tipicamente muito pequeno quando  $m \ll M$ , este último termo pode ser encarado como uma perturbação ao problema de Kepler.

## Apêndice D

### Expoente de Lyapunov máximo para o mapa padrão no limite $K \gg 1$

O cálculo do expoente de Lyapunov máximo para o mapa padrão

$$p_{n+1} = p_n + K \sin \theta_n, \quad (\text{D.1})$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1}, \quad (\text{mod } 2\pi), \quad (\text{D.2})$$

só pode ser feito numericamente. No entanto, para valores altos do parâmetro  $K$  Chirikov estimou o valor de  $\lambda_1$  em função de  $K$ , neste limite.

Para isso linearizamos o mapa padrão em torno de um ponto arbitrário  $\bar{\mathbf{v}} = (p, \theta)$ , não necessariamente um ponto fixo. O mapa linearizado tem a forma (6.135)

$$\delta \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{J}(\bar{\mathbf{v}}) \cdot \delta \mathbf{v}_n, \quad (\text{D.3})$$

onde  $\delta \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_n - \bar{\mathbf{v}}$  é um desvio do ponto considerado para a linearização, e (6.158) fornece a matriz Jacobiana, cujos pontos são calculados no ponto  $\bar{\mathbf{v}}$ :

$$\mathbf{J}(\bar{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} 1 + K \cos \theta & K \cos \theta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.4})$$

Os autovalores  $\xi_{1,2}$  da matriz Jacobiana acima nos dão informações acerca da estabilidade dos pontos fixos e órbitas periódicas do mapa padrão. Para a linearização em torno de um ponto qualquer, os autovalores indicam as taxas de convergência ou divergência de trajetórias próximas.

Usando (6.116) os autovalores da matriz (D.4) são

$$\xi_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4}}{2}, \quad (\text{D.5})$$

onde o traço da matriz Jacobiana é, de (6.117),

$$\tau = 2 + K \cos \theta. \quad (\text{D.6})$$

Substituindo (D.6) em (D.5) obtemos

$$\xi_{1,2} = \frac{2 + K \cos \theta \pm \sqrt{4K \cos \theta + K^2 \cos^2 \theta}}{2}. \quad (\text{D.7})$$

No limite de  $K \gg 1$ , o termo que depende de  $K^2$  domina completamente o termo dependente de  $K$ . O maior autovalor terá a seguinte expressão aproximada

$$\xi_1 \approx 1 + K \cos \theta \approx K \cos \theta, \quad (K \gg 1). \quad (\text{D.8})$$

Chirikov usou, para o cálculo do expoente de Lyapunov máximo, a média do fator  $\ln |\xi_1|$  sobre as fases distribuídas aleatoriamente para uma órbita caótica no plano de fase<sup>1</sup>, ou seja,

$$\lambda_1 = \langle \ln |\xi_1| \rangle_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |K \cos \theta| d\theta, \quad (\text{D.9})$$

onde

Inicialmente calcularemos a integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos \theta) d\theta \quad (\text{D.10})$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] d\theta = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta) d\theta = I. \quad (\text{D.11})$$

Somando (D.10) com (D.11) resulta

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\pi/2} [\ln(\cos \theta) + \ln(\sin \theta)] d\theta = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln \left( \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \ln \sin(2\theta) d\theta - \ln 2 \int_0^{\pi/2} d\theta. \end{aligned}$$

Fazendo a transformação de variável  $2\theta = \varphi$

$$\begin{aligned} 2I &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(\sin \varphi) d\varphi - \frac{\pi}{2} \ln 2 \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \varphi) d\varphi - \frac{\pi}{2} \ln 2 = I - \frac{\pi}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

de modo que

$$I = -\frac{\pi}{2} \ln 2. \quad (\text{D.12})$$

Substituindo este resultado em (D.9)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\cos \theta| d\theta + \ln K \\ &= \frac{4I}{2\pi} + \ln K = -\ln 2 + \ln K = \ln \left( \frac{K}{2} \right) \end{aligned}$$

que é a Eq. (7.35).

<sup>1</sup>Na verdade, ele usou uma estimativa da chamada entropia de Kolmogorov-Sinai, que reduz-se ao expoente de Lyapunov máximo no caso do mapa padrão.

# Apêndice E

## Respostas de problemas selecionados

### Capítulo 1

1.

$$L = \frac{m}{2} [R^2\omega^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2R\omega a\dot{\theta} \sin(\theta - \omega t)] - mg(R \sin \omega t - a \cos \theta).$$

2. (a)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 + 4k^2\dot{r}^2r^2) - mgkr^2,$$

(b)  $k = \omega^2/2g$ .

3. (a)  $z = r \cot \alpha$ ; (b)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + r^2\dot{\theta}^2),$$

(c)  $\tau = (2\pi/\sqrt{3})(mR^2/\ell \sin \alpha)$ .

5.  $\arccos(2/3)$

6. (a)

$$L = \frac{1}{2}Ms^2 + \frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta}^2 - Mg(L-s) \sin \alpha,$$

(b)  $Q_s = -Mg \sin \alpha/3$ ,  $Q_\theta = -aQ_s$ .

8.  $K = -8a^2\ell^2/m$ ,  $\alpha = 5$ .

9. (a)  $I_1 = I_2 = M(a^2 + b^2)/3$ ,  $I_3 = 2Ma^2/3$ ; (b)

$$\omega_1(t) = \omega_{10} \cos(At + \varphi), \quad \omega_2(t) = -\omega_{20} \sin(At + \varphi), \quad \omega_3 = \Omega, \quad A = 2a^2\Omega/(a^2 + b^2).$$

### Capítulo 2

1. (a)

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha = E.$$

2. (a)

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}kz^2.$$

3. (a)

$$H = \frac{1}{2ma^2} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right) + mga \cos \theta.$$

4. (a)

$$H = \frac{p_r^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{p_\theta^2}{2m_1r^2} - m_2g(L - r).$$

5. (a)

$$H = \frac{1}{2ma^2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}ka^2(\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2}mga(\theta_1^2 + \theta_2^2),$$

(d)  $\theta_1 = \pm\theta_2$  com frequências  $\omega$  e  $\sqrt{2\omega_0^2 + \omega^2}$ 7. (a)  $(\omega_3)_{min} = \sqrt{4MgaI_1/I_3}$ **Capítulo 3**2.  $\alpha = 1/2, \beta = 2.$ 

$$F_3(p, Q) = -(Q^2/2)\text{tg}(2p)$$

5. (a)

$$F_1(q, Q) = \frac{1}{2}(q^2 + Q^2)\text{cotg}\alpha - Qq\text{cosec}\alpha.$$

**Capítulo 4**

1. (a)

$$S = \alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z - \frac{t}{2m}(\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2) + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3,$$

(b)

$$x = \beta_x + \frac{\alpha_x t}{m}, \quad y = \beta_y + \frac{\alpha_y t}{m}, \quad z = \beta_z + \frac{\alpha_z t}{m},$$

2. (a)

$$S = \alpha_x x + \alpha_y y - \frac{(\alpha_z^2 - 2m^2gz)^{3/2}}{3m^2g} - \frac{t}{2m}(\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2) + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3,$$

(b)

$$x = \beta_x + \frac{\alpha_x t}{m}, \quad y = \beta_y + \frac{\alpha_y t}{m},$$

$$z = \left( \frac{\alpha_z^2}{2m^2g} - \frac{m^2g\beta_z^2}{2\alpha_z^2} \right) - \frac{m\beta_zgt}{\alpha_z} - \frac{gt^2}{2}.$$

**Capítulo 5**

2. (a)

$$S(q, t) = \alpha q - \frac{\alpha^2}{2m}t,$$

(b)

$$p_1(t) = \alpha_0 - \frac{1}{2}\omega^2\alpha_0 t^2, \quad q_1(t) = \frac{\alpha_0}{m}t - \frac{\omega_0^2\alpha_0 t^3}{6}.$$

3.

$$\dot{\beta}_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\sigma\left(\frac{G}{F}\right)^{3/4}\frac{E_0}{\omega_0}.$$

4.

$$\dot{\beta}_1 = -\frac{G E_0}{8 \omega_0}.$$

5.

$$\dot{\theta}_{21} = \frac{2\pi hm}{\ell^2 \tau}.$$

**Capítulo 6**