

# Ondas em Plasmas

## (Capítulo 4)

Referência:

F. F. Chen

Introduction to Plasma Physics

## 4-1 Representação de ondas

# Ondas / Oscilações Espaciais e Temporais

$$n = \bar{n} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

Variação da densidade de partículas

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

$\vec{k}$ : vetor de onda

$\vec{r}$ : vetor da posição

$$\vec{k} = k \hat{i} \Rightarrow$$

$$n = \bar{n} e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\text{Re}(n) = \bar{n} \cos(kx - \omega t)$$

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} \cos(kx - \omega t + \delta) \quad \text{or} \quad \mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} e^{i(kx - \omega t + \delta)}$$

Velocidad de Fase

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_\varphi}$$

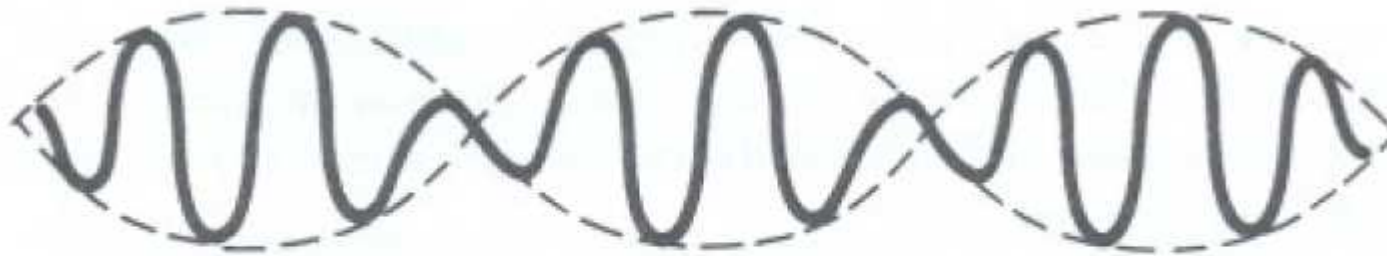
## 4-2 Velocidade de Grupo

# Superposição de Ondas

$$E_1 = E_0 \cos [(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t]$$

$$E_2 = E_0 \cos [(k - \Delta k)x - (\omega - \Delta\omega)t]$$

$$E_1 + E_2 = 2E_0 \cos [(\Delta k)x - (\Delta\omega)t] \cos (kx - \omega t)$$



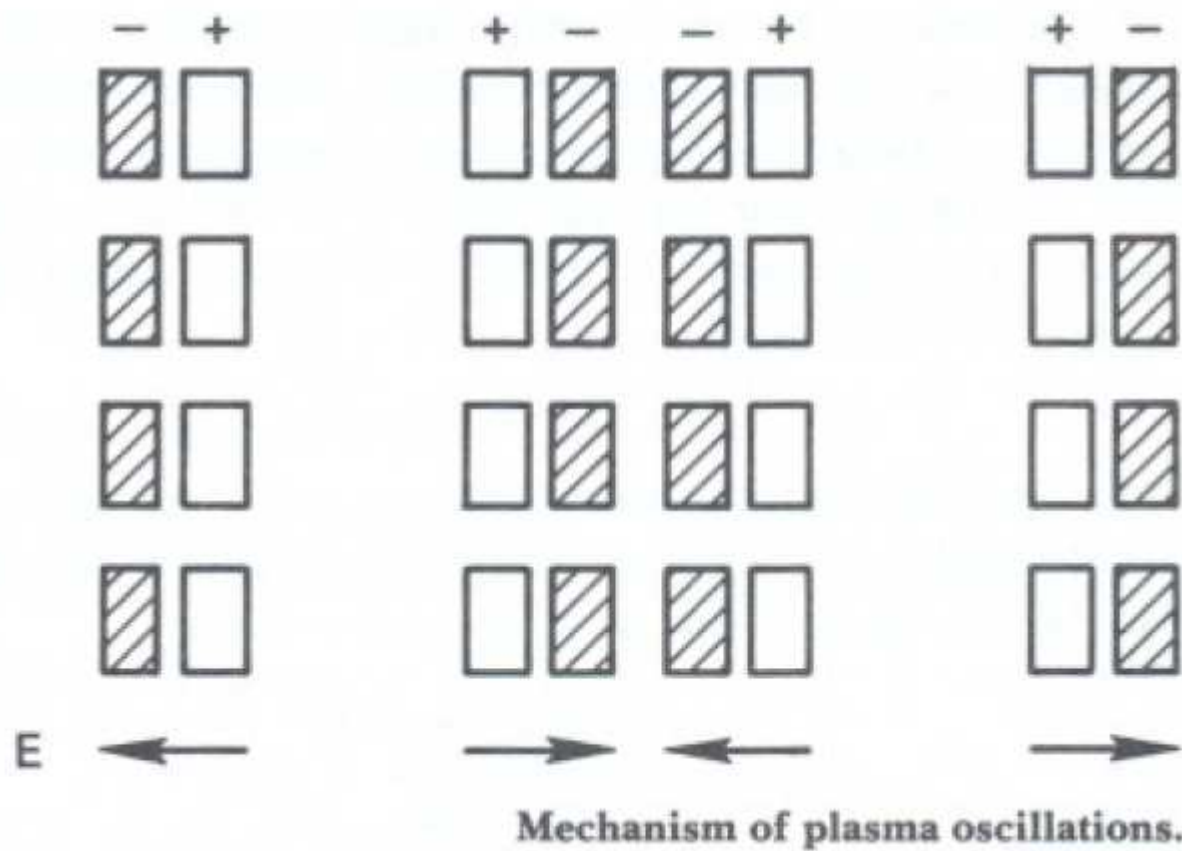
Spatial variation of the electric field of two waves with a frequency difference.

Velocidade de Grupo

$$v_g = d\omega / dk$$

## 4.3- Oscilações do Plasma

## Representação das Oscilações de Plasma



# Equações Básicas

Plasma frio ( $K_{Ti} = K_{Te} = 0$ ) e infinito. Ions distribuídos uniformemente. Movimento dos elétrons na direção x.

$$\nabla = \hat{x} \partial / \partial x \quad \mathbf{E} = E \hat{x} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi$$

$$mn_e \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e \right] = -en_e \mathbf{E}$$

Equação de movimento

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0$$

Equação da conservação das cargas

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial x = e(n_i - n_e)$$

Equação de Poisson



# Equilíbrio e Perturbações

$$n_e = n_0 + n_1 \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$$

$$\nabla n_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{E}_0 = 0$$

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} = 0$$

## Linearização das Equações Básicas

$$m \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \overset{0}{\nabla}) \mathbf{v}_1 \right] = -e \mathbf{E}_1$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \mathbf{v}_1 + n_1 \overset{0}{\nabla}) = 0$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \overset{0}{\nabla} n_0 = 0$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -e n_1$$

# Relação de Dispersão

$$\mathbf{v}_1 = v_1 e^{i(kx - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}$$

$$n_1 = n_1 e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\mathbf{E} = E e^{i(kx - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}$$

Oscilações das três variáveis

$$-im\omega v_1 = -eE_1$$

$$-i\omega n_1 = -n_0 i k v_1$$

$$ik\epsilon_0 E_1 = -en_1$$

Três equações  
e três variáveis

$$-im\omega v_1 = -e \frac{-e}{ik\epsilon_0} \frac{-n_0 i k v_1}{-i\omega} = -i \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 \omega} v_1$$

Equação de movimento

Relação de Dispersão

Frequência de plasma

$$\omega^2 = n_0 e^2 / m \epsilon_0$$

## Estimativa da Frequência de Plasma

$$\omega^2 = n_0 e^2 / m \epsilon_0$$

$$\omega_p / 2\pi = f_p \approx 9\sqrt{n} \quad n = 10^{18} \text{ m}^{-3}$$

$$f_p \approx 9(10^{18})^{1/2} = 9 \times 10^9 \text{ sec}^{-1} = 9 \text{ GHz}$$

$$f_{ce} \approx 28 \text{ GHz/Tesla}$$

Thus if  $B \approx 0.32 \text{ T}$  and  $n \approx 10^{18} \text{ m}^{-3}$ , the cyclotron frequency is approximately equal to the plasma frequency for electrons.

## Ilustração Mecânica da Onda de Plasma



**FIGURE 4-3** Synthesis of a wave from an assembly of independent oscillators.

## 4-4 Ondas de Elétrons em Plasma

# Ondas de Elétrons com Movimento Térmico

$$\nabla p_e = 3KT_e \nabla n_e = 3KT_e \nabla(n_0 + n_1) = 3KT_e \frac{\partial n_1}{\partial x} \hat{x}$$

Densidade de força devido ao gradiente de pressão

Equações linearizadas

$$mn_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -en_0 E_1 - 3KT_e \frac{\partial n_1}{\partial x}$$

$$-im\omega n_0 v_1 = -en_0 E_1 - 3KT_e ik n_1$$

Relação de dispersão

$$im\omega n_0 v_1 = \left[ en_0 \left( \frac{-e}{ik\epsilon_0} \right) + 3KT_e ik \right] \frac{n_0 ik}{i\omega} v_1$$

$$\omega^2 v_1 = \left( \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} + \frac{3KT_e}{m} k^2 \right) v_1$$

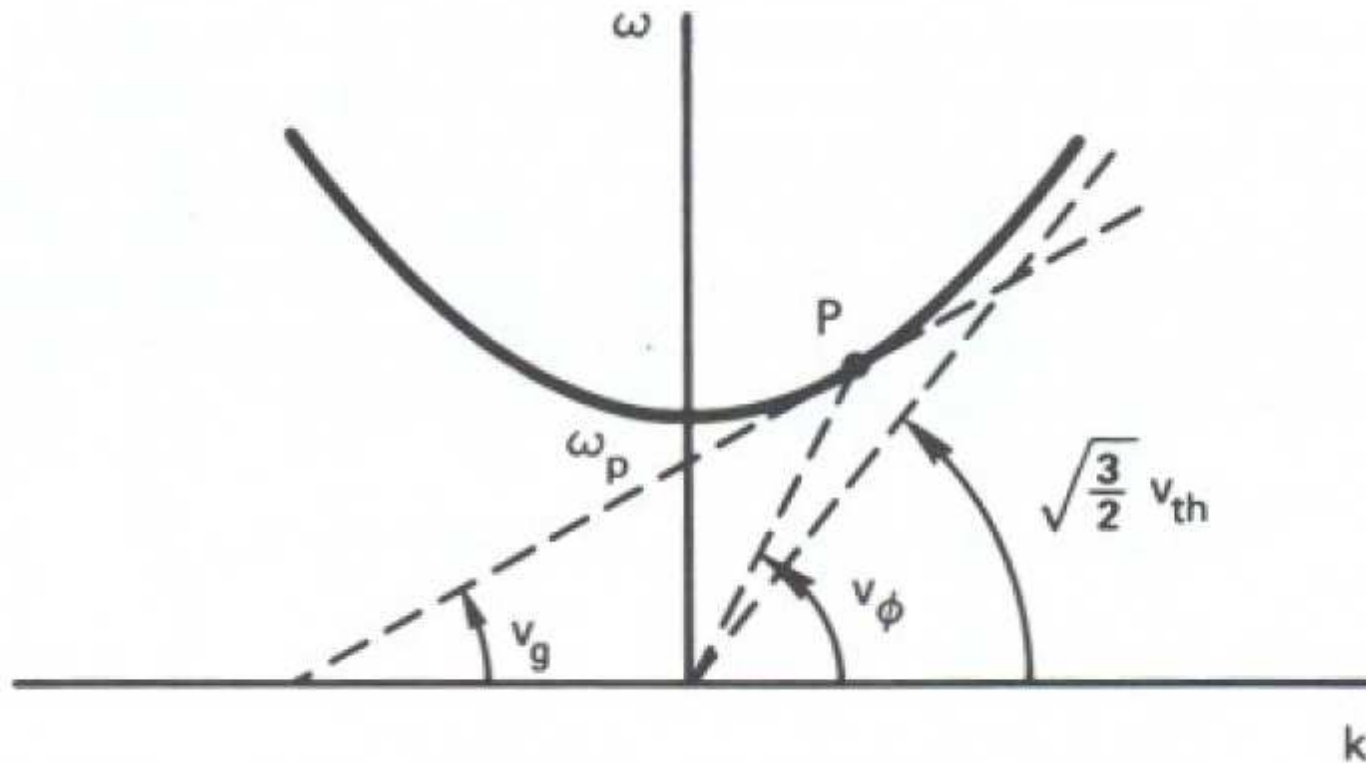
$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2} k^2 v_{th}^2}$$

## Diagrama da Relação de Dispersão

$$2\omega d\omega = \frac{3}{2}v_{th}^2 2k dk$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \frac{k}{\omega} v_{th}^2 = \frac{3}{2} \frac{v_{th}^2}{v_\phi}$$

Velocidades de grupo e de fase



Dispersion relation for electron plasma waves (Bohm-Gross waves).



# Verificação Experimental

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 93, NUMBER 5

MARCH 1, 1954

## The Excitation of Plasma Oscillations\*

DUNCAN H. LOONEY,<sup>†</sup> AND SANBORN C. BROWN

*Research Laboratory of Electronics and Department of Physics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts*

(Received November 24, 1953)

# Equipamento

Plasma de mercúrio

$P = 3 \times 10^{-3} \text{ Torr}$

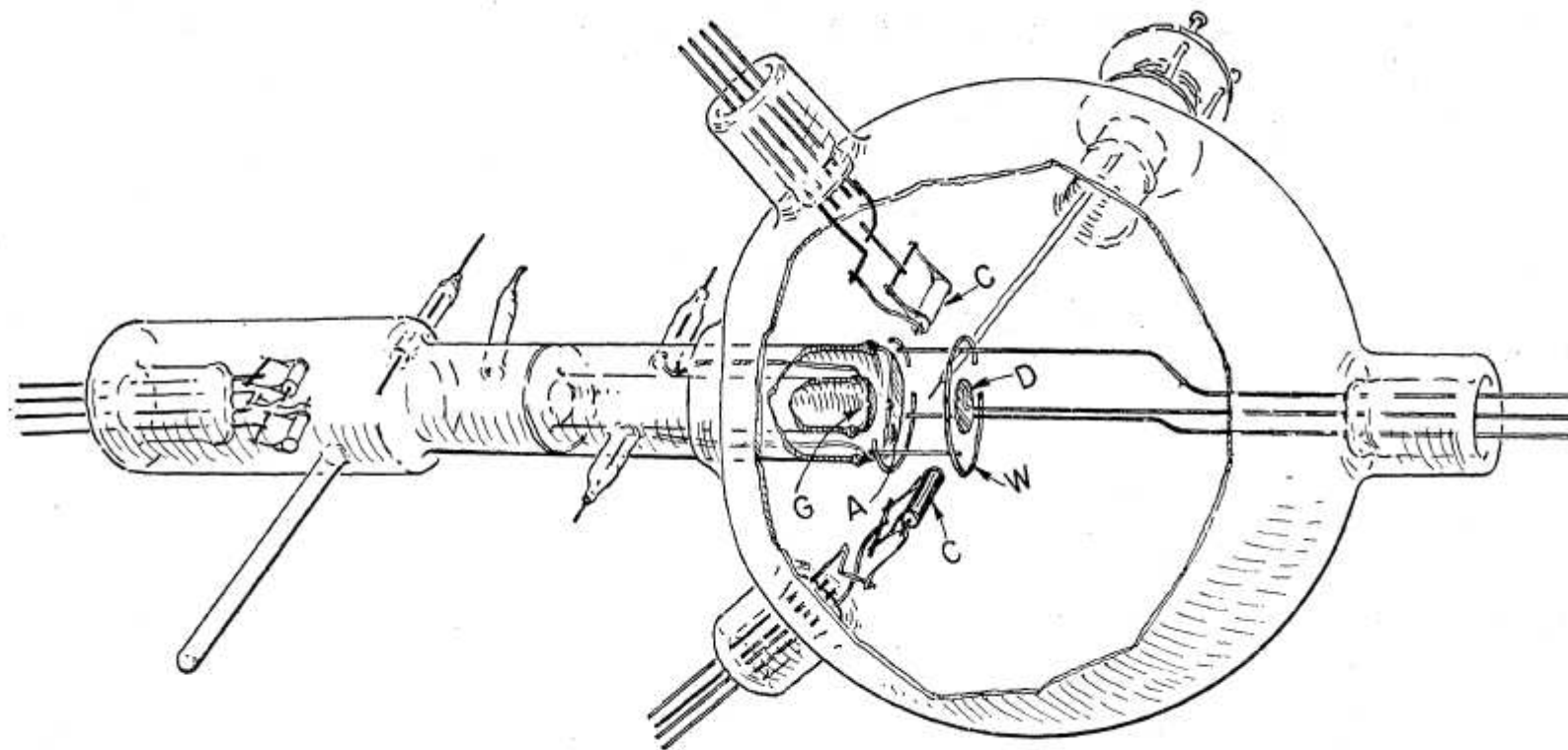
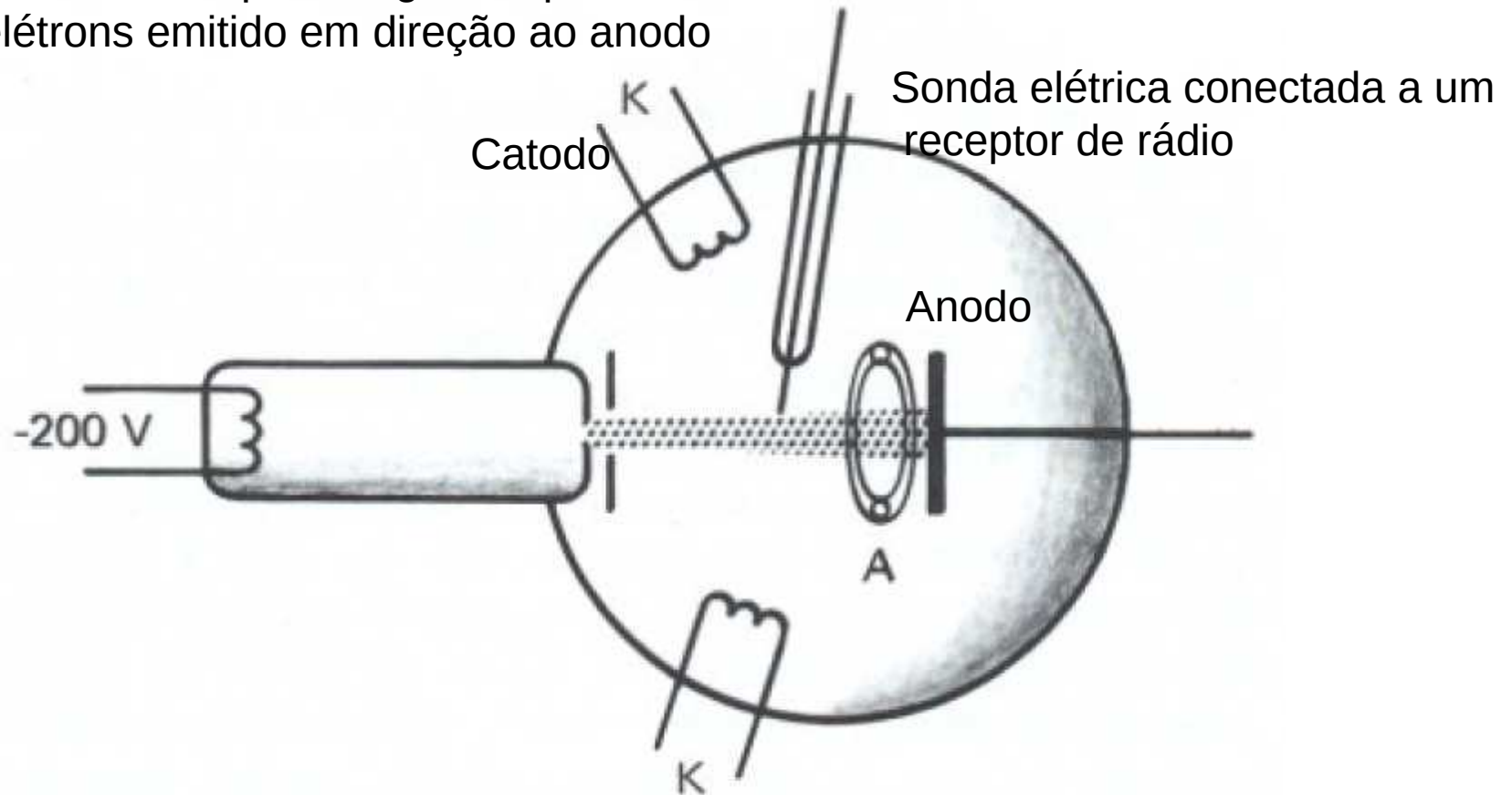


FIG. 1. Sketch of the experimental tube.

## Esquema do Equipamento

Onda estacionária de plasma gerada pelo feixe de elétrons emitido em direção ao anodo



**Schematic of the Looney-Brown experiment on plasma oscillations.**

# Dependência da Frequência com a Densidade

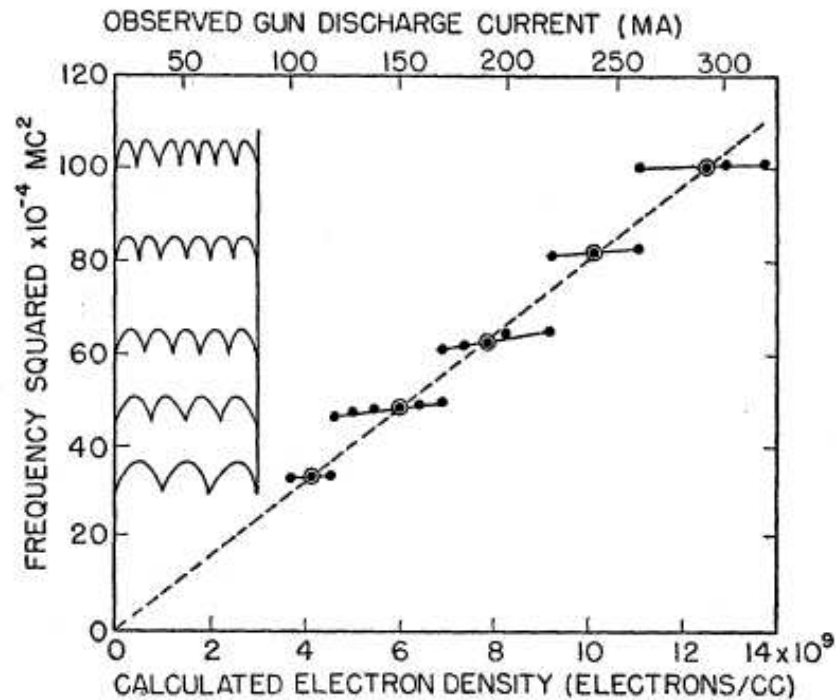


FIG. 2. Oscillation frequency as a function of the gun discharge current and electron density.

Relação de dispersão  
(previsão teórica)

$$\omega^2 = n_0 e^2 / m \epsilon_0$$

## DISPERSION OF ELECTRON PLASMA WAVES

P. J. BARRETT and H. G. JONES\*

U.K.A.E.A. Research Group, Culham Laboratory, Abingdon, Berks.

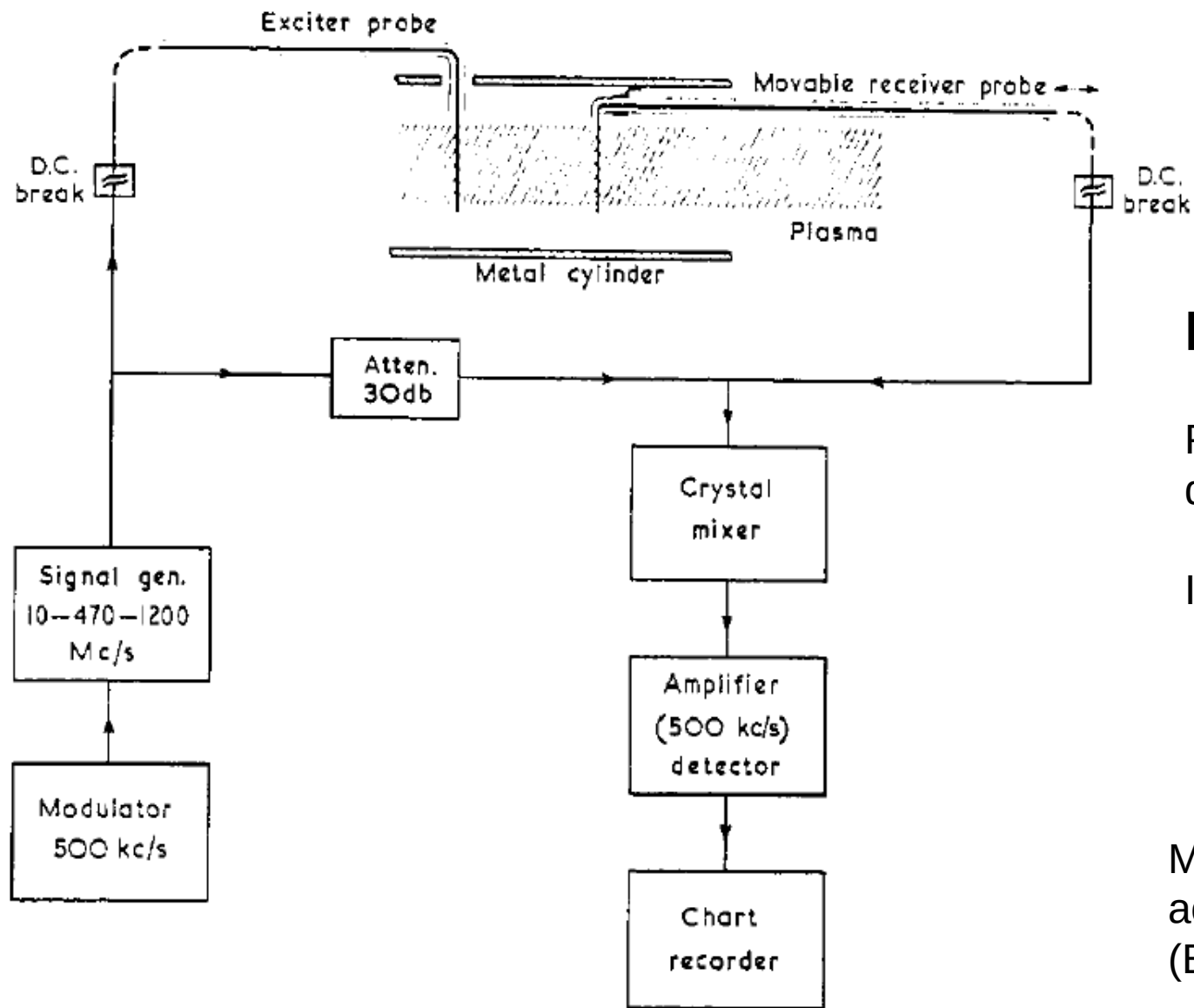
R. N. FRANKLIN

Department of Engineering Science, Oxford University, Oxford

*(Received 26 February 1968)*

The term electron plasma wave refers to the longitudinal electrostatic wave in the electrons of the plasma. Such waves are described by the well known BOHM and GROSS (1949) dispersion relation

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 v_e^2$$



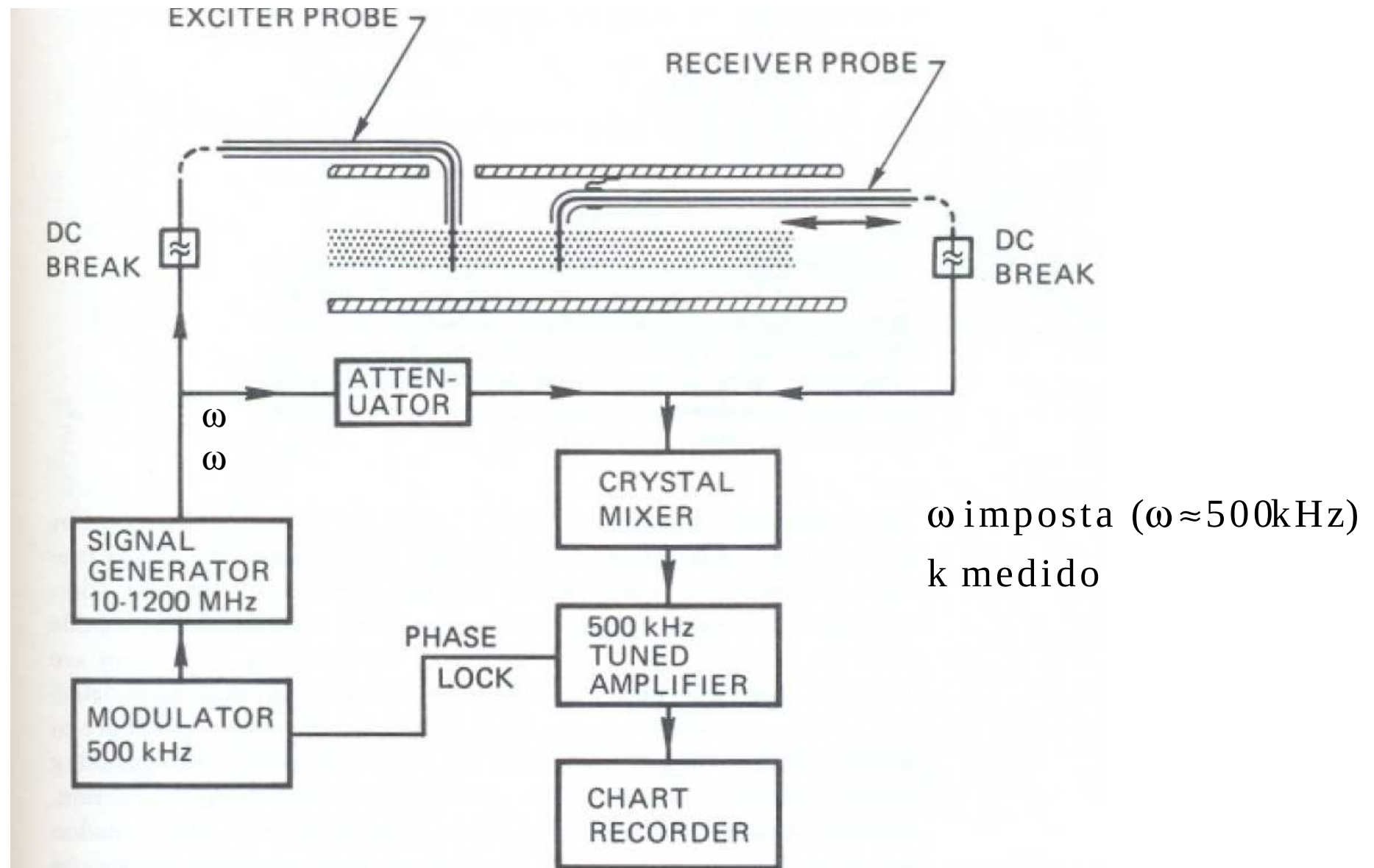
## Máquina Q

Plasma cilíndrico  
de Cs

Ionização térmica

Movimento de elétron:  
ao longo da coluna  
(B intenso)

FIG. 3.—Apparatus.



Schematic of an experiment to measure plasma waves. [From P. J. Barrett, H. G. Jones, and R. N. Franklin, *Plasma Physics* 10, 911 (1968).] **FIGURE 4-8**

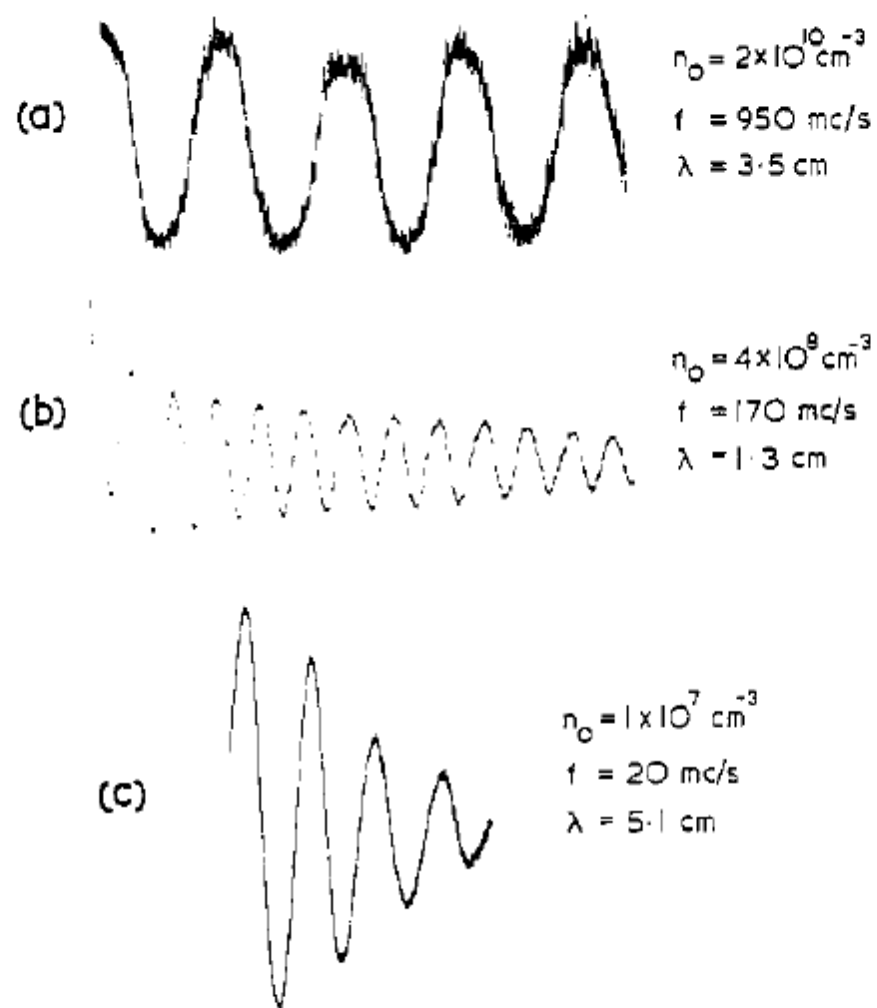


FIG. 4.—Waveform recordings at different electron densities. (Note: as  $n_0$  decreases, the percentage density fluctuation usually increases and the waveforms become more heavily damped.)



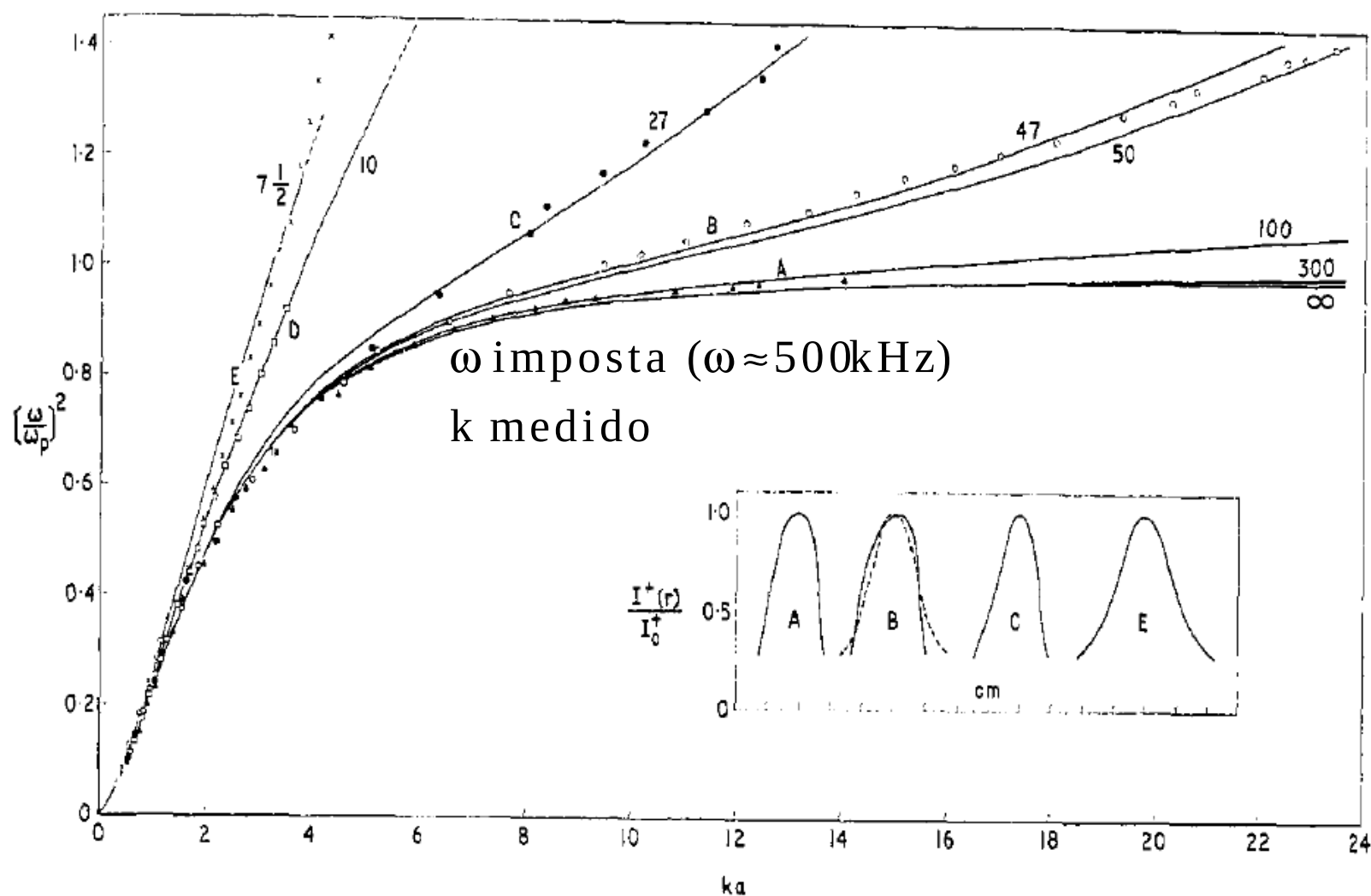
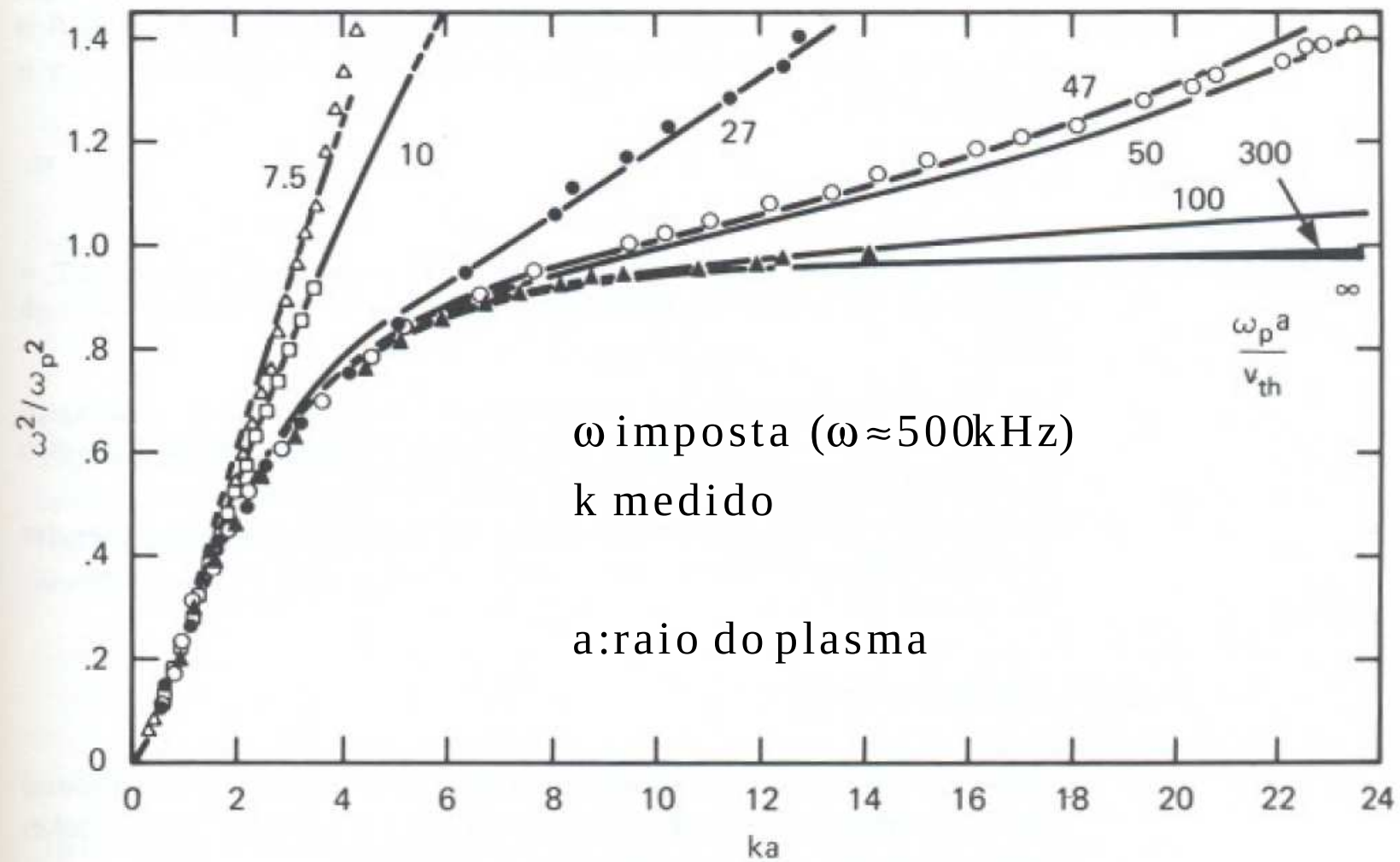


FIG. 1.—Dispersion diagram. Curves computed for  $n(r)$  parabolic at different values of  $\omega_p a / v_e$  (from  $7\frac{1}{2}$  to  $\infty$ ). Sets of points A, B, C, D from present experiment, and E from Malmberg and Wharton. Inset: radial profiles A, B, C of ion current to probe and radial profile E of electron density from Malmberg and Wharton.



$\omega$  imposta ( $\omega \approx 500\text{kHz}$ )

$k$  medido

$a$ :raio do plasma

Comparison of the measured and calculated dispersion curves for electron plasma waves in a cylinder of radius  $a$ . [From Barrett, Jones, and Franklin, *loc. cit.*]

FIGURE 4-10

## 4-5 Ondas Sonoras

- Gás neutro

## Equações básicas

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p = -\frac{\gamma p}{\rho} \nabla \rho \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

## Perturbação

$$\exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

## Equações linearizadas

$$-i\omega\rho_0\mathbf{v}_1 = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0}i\mathbf{k}\rho_1$$

$$-i\omega\rho_1 + \rho_0i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0$$

## Relação de dispersão

$$\boxed{\frac{\omega}{k} = \left( \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} = \left( \frac{\gamma K T}{M} \right)^{1/2} \equiv c_s}$$

## 4-6 Ondas de Íons

- Plasma

## Equação de movimento dos íons

$$Mn \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right] = en\mathbf{E} - \nabla p = -en\nabla\phi - \gamma_i K T_i \nabla n \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi$$

$$-i\omega M n_0 v_{i1} = -en_0 i k \phi_1 - \gamma_i K T_i i k n_1 \quad \text{Equação linearizada}$$

$$\text{Equação de continuidade dos íons} \quad i\omega n_1 = n_0 i k v_{i1}$$

Elétrons em equilíbrio eletrostático

$$n_e = n = n_0 \exp\left(\frac{e\phi_1}{K T_e}\right) = n_0 \left(1 + \frac{e\phi_1}{K T_e} + \dots\right) \quad n_1 = n_0 \frac{e\phi_1}{K T_e}$$

$$i\omega M n_0 v_{i1} = \left( en_0 i k \frac{K T_e}{en_0} + \gamma_i K T_i i k \right) \frac{n_0 i k v_{i1}}{i\omega}$$

$$\omega^2 = k^2 \left( \frac{K T_e}{M} + \frac{\gamma_i K T_i}{M} \right)$$

Relação de dispersão

$$\boxed{\frac{\omega}{k} = \left( \frac{K T_e + \gamma_i K T_i}{M} \right)^{1/2} \equiv v_s}$$

## Equação de continuidade dos íons

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \mathbf{v}_1 + n_1^0 \mathbf{v}_1) = 0$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla n_0^0 = 0$$

$$i\omega n_1 = n_0 i k v_{i1}$$

$$\frac{\omega}{k} = \left( \frac{KT_e + \gamma_i KT_i}{M} \right)^{1/2} \equiv v_s$$

Em laboratórios,  $T_i \ll T_e$

$$T_i = 0 \Rightarrow v_s = (KT_e/M)^{1/2}$$



## 4-7 Aproximação de Plasma

Validade da condição de neutralidade do plasma:

$$n_i = n_e$$

Equação de Poisson

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \epsilon_0 k^2 \phi_1 = e(n_{i1} - n_{e1})$$

Flutuação da densidade de elétrons

$$n_e = n = n_0 \exp\left(\frac{e\phi_1}{KT_e}\right) = n_0 \left(1 + \frac{e\phi_1}{KT_e} + \dots\right)$$

$$n_{e1} = \frac{e\phi_1}{KT_e} n_0$$

$$\epsilon_0 \phi_1 \left( k^2 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 K T_e} \right) = e n_{i1}$$

$$\epsilon_0 \phi_1 (k^2 \lambda_D^2 + 1) = e n_{i1} \lambda_D^2$$

Equação da continuidade para os ions

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \mathbf{v}_1 + n_1 \mathbf{v}_0) = 0$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla n_0 = 0$$

$$n_{i1} = \frac{k}{\omega} n_0 v_{i1}$$

Flutuação da densidade dos ions

Equação de movimento dos ions

$$Mn \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right] = en\mathbf{E} - \nabla p = -en\nabla\phi - \gamma_i K T_i \nabla n$$

Equação de movimento linearizada

$$-i\omega M n_0 v_{i1} = -en_0 i k \phi_1 - \gamma_i K T_i i k n_1$$

## Relação de dispersão

$$i\omega M n_0 v_{i1} = \left( \frac{en_0 i k}{\epsilon_0} \frac{e\lambda_D^2}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \gamma_i K T_i i k \right) \frac{k}{\omega} n_0 v_{i1}$$

Cálculo anterior  
com neutralidade

$$\omega^2 = \frac{k^2}{M} \left( \frac{n_0 e^2 \epsilon_0^{-1} \lambda_D^2}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \gamma_i K T_i \right)$$

$$n_i = n_e$$

$$\frac{\omega}{k} = \left( \frac{K T_e}{M} \frac{1}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \frac{\gamma_i K T_i}{M} \right)^{1/2}$$

$$\frac{\omega}{k} = \left( \frac{K T_e + \gamma_i K T_i}{M} \right)^{1/2} \equiv v_s$$

Correção

$$1 + k^2 \lambda_D^2$$

$$k^2 \lambda_D^2 = (2\pi \lambda_D / \lambda)^2$$

$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 K T_e}{n e^2} \right)^{1/2}$$

Plasma neutro para  $\left[ 2\pi \frac{\lambda_D}{\lambda} \right]^2 \ll 1$

# Comparações entre Ondas de Elétrons e de Íons

$$k^2 \lambda_D^2 \gg 1$$

Frequência de plasma dos ions

$$T_i = 0$$

$$\omega^2 = k^2 \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 M k^2} = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 M} = \Omega_p^2$$

Ondas de ions

velocidade de fase é constante para k pequenos

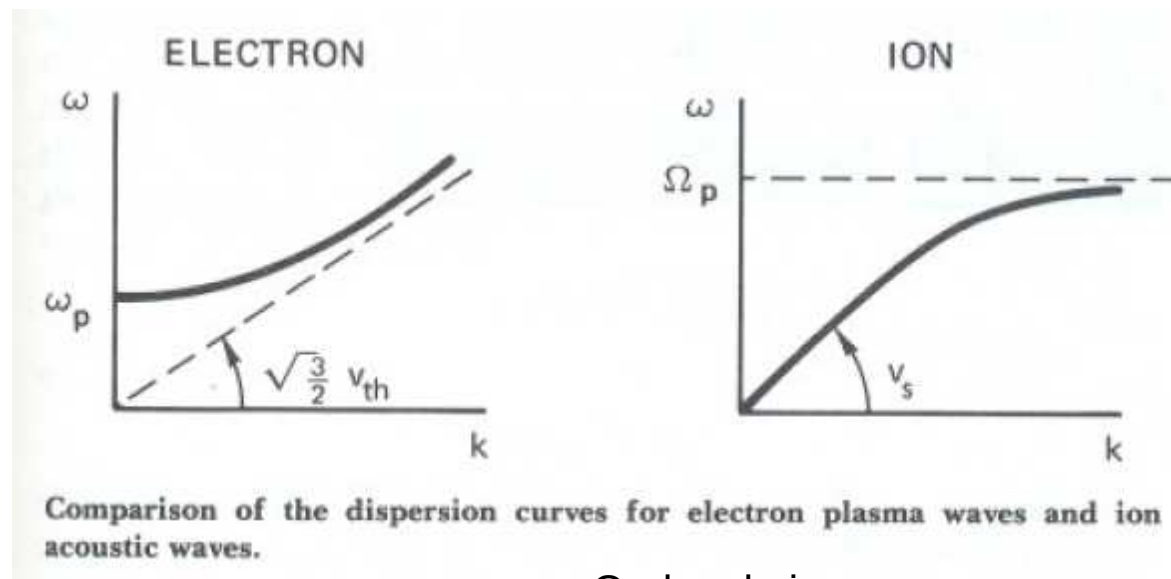
frequência constante para k altos

Ondas de elétrons

velocidade de fase é constante para k altos

frequência constante para k baixos

## Relações de Dispersão para Elétrons e Ions

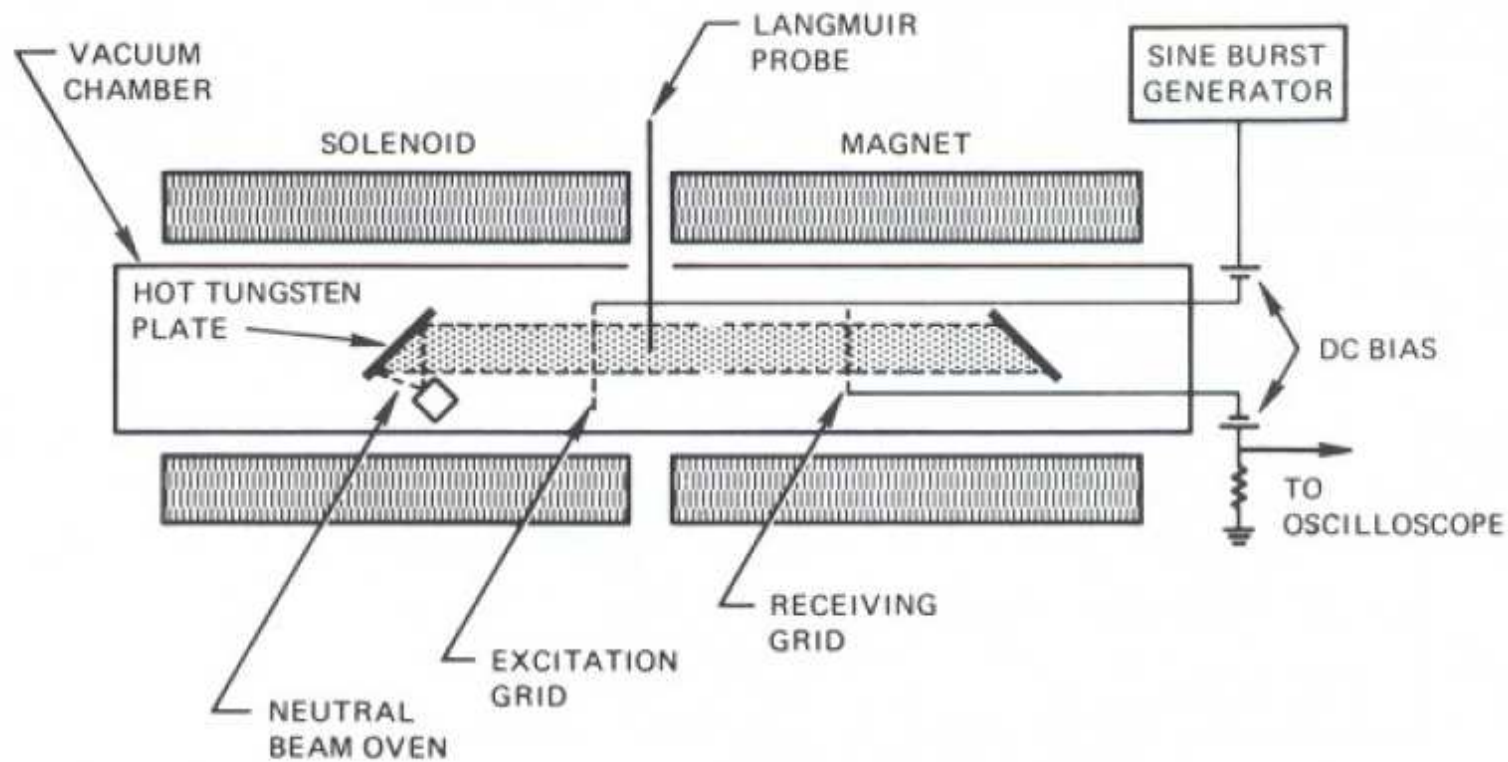


Ondas de elétrons  
velocidade de fase é constante para  $k$  altos  
frequência constante para  $k$  baixos

Ondas de ions  
velocidade de fase é constante para  $k$  pequenos  
frequência constante para  $k$  altos

# Comprovação das Ondas de Ions

## Arranjo Experimental

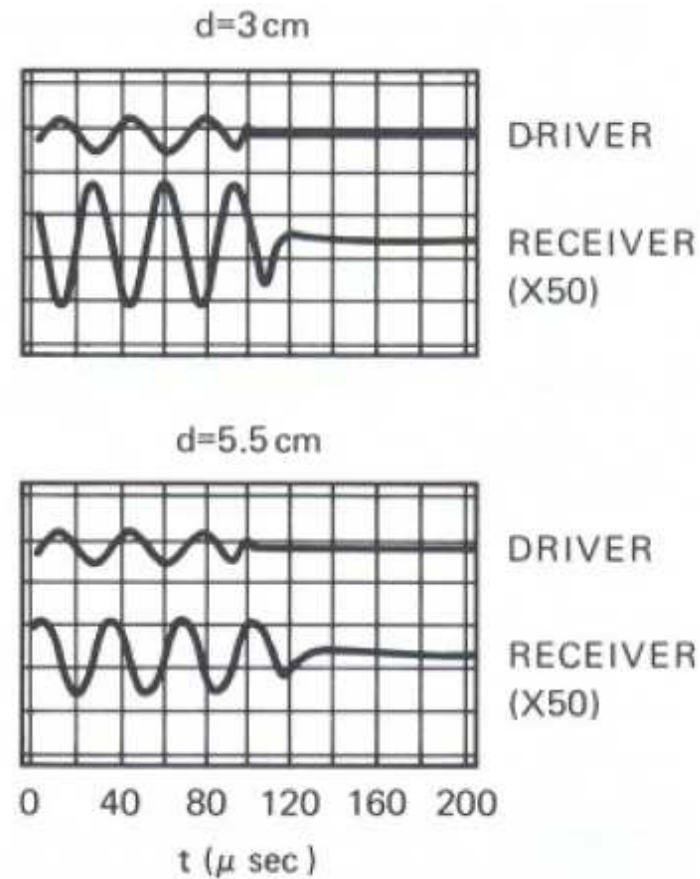


**FIGURE 4-14** Q-machine experiment to detect ion waves. [From N. Rynn and N. D'Angelo, *Rev. Sci. Instrum.* 31, 1326 (1960).]



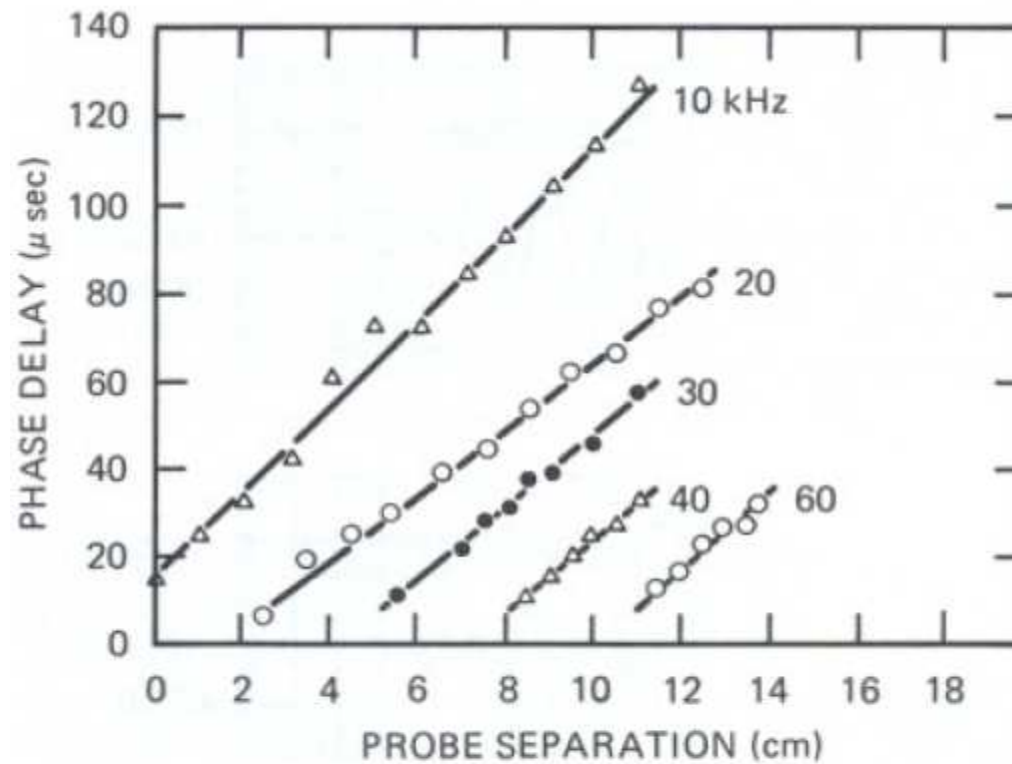
# Propagação das Ondas de Ions

## Evidência Experimental



**Oscillograms of signals from the driver and receiver grids, separated by a distance  $d$ , showing the delay indicative of a traveling wave.**  
[From A. Y. Wong, R. W. Motley, and N. D'Angelo, *Phys. Rev.* 133, A436 (1964).]

## Diferenças de Fase para Várias Frequências

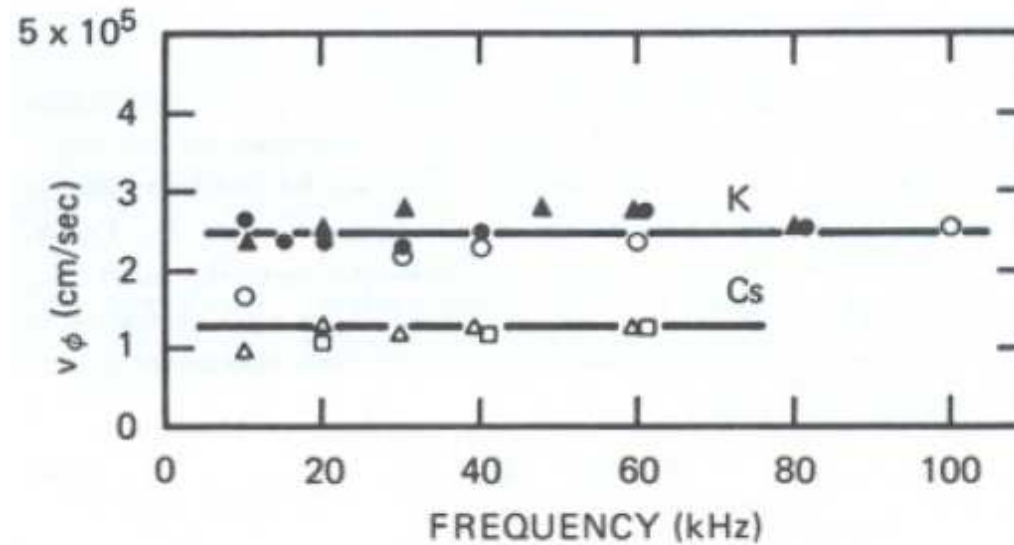


Experimental measurements of delay vs. probe separation at various frequencies of the wave exciter. The slope of the lines gives the phase velocity. [From Wong, Motley, and D'Angelo, *loc. cit.*]

Densidade

$$n = 3 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$$

## Velocidades de Fase Independem da Frequência



Measured phase velocity of ion waves in potassium and cesium plasmas as a function of frequency. The different sets of points correspond to different plasma densities. [From Wong, Motley, and D'Angelo, *loc. cit.*]

# Oscilações Eletrostáticas de Elétrons (Perpendiculares ao Campo Magnético)

- Plasma em um campo magnético uniforme.
- Ondas se propagando na direção perpendicular à do campo magnético.

# Terminologia

$\vec{B}_1 = 0 \Rightarrow$  Onda eletrostática

$\vec{B}_1 \neq 0 \Rightarrow$  Onda eletromagnética (pois  $\vec{E}_1 \neq 0$ )

$\vec{k} \perp \vec{B}_1 \Rightarrow$  onda perpendicular

$\vec{k} // \vec{B}_1 \Rightarrow$  onda paralela

$\vec{k} \perp \vec{E}_1$  ,  $\vec{k} \cdot \vec{E}_1 = 0 \Rightarrow$  onda transversal

$\vec{k} // \vec{E}_1$  ,  $\vec{k} \times \vec{E}_1 = 0 \Rightarrow$  onda longitudinal

## Equação de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dot{\mathbf{B}}_1$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = \omega \mathbf{B}_1$$

$$\vec{k} // \vec{E}_1 \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E}_1 = 0 \Rightarrow \text{onda eletrostática / longitudinal}$$

$$\therefore \vec{B}_1 = 0 \Rightarrow \text{onda eletrostática}$$

## Equilíbrio

Ions fixos  $\Rightarrow$  fundo de densidade uniforme carga positiva

$$KT_e = 0 \quad \vec{E}_0 = 0 \quad \vec{v}_0 = 0$$

$$\frac{dn}{dx} = 0 \quad \vec{B}_0 \neq 0$$

## Equações Linearizadas

$$m \frac{\partial \mathbf{v}_{e1}}{\partial t} = -e (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{e1} \times \mathbf{B}_0)$$

Equação de movimento

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_{e1} = 0$$

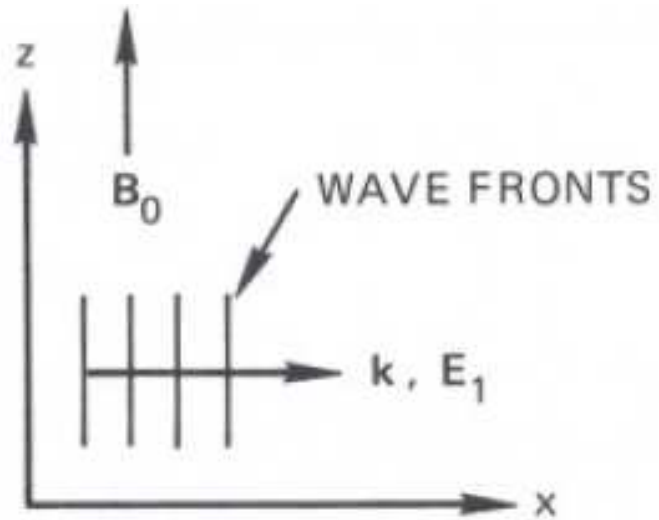
Equação da continuidade

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -en_{e1}$$

Equação de Poisson



## Esquema da Propagação da Onda



Geometry of a longitudinal plane wave propagating at right angles to  $\vec{B}_0$ .

$$\vec{k} // \vec{E}_1$$

$$\vec{k} = k \vec{e}_x \quad \vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_x$$

## Linearização das equações

$$m \frac{\partial \mathbf{v}_{e1}}{\partial t} = -e(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{e1} \times \mathbf{B}_0)$$

Equação de movimento dos elétrons

$$-i\omega m v_x = -eE - ev_y B_0$$

$$-i\omega m v_y = +ev_x B_0$$

$$-i\omega m v_z = 0$$

$$i\omega m v_x = eE + eB_0 \frac{ieB_0}{m\omega} v_x$$

$$v_x = \frac{eE/im\omega}{1 - \omega_c^2/\omega^2}$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -en_{e1} \quad i k \epsilon_0 E = -en_{e1}$$

Equação de Poisson

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_{e1} = 0 \quad n_1 = \frac{k}{\omega} n_0 v_x$$

Equação da continuidade

Equação linearizada com a variável  $E$

$$ik\epsilon_0 E = -e \frac{k}{\omega} n_0 \frac{eE}{im\omega} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}$$

$$\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) E = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} E$$

$$E \neq 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 \equiv \omega_h^2}$$

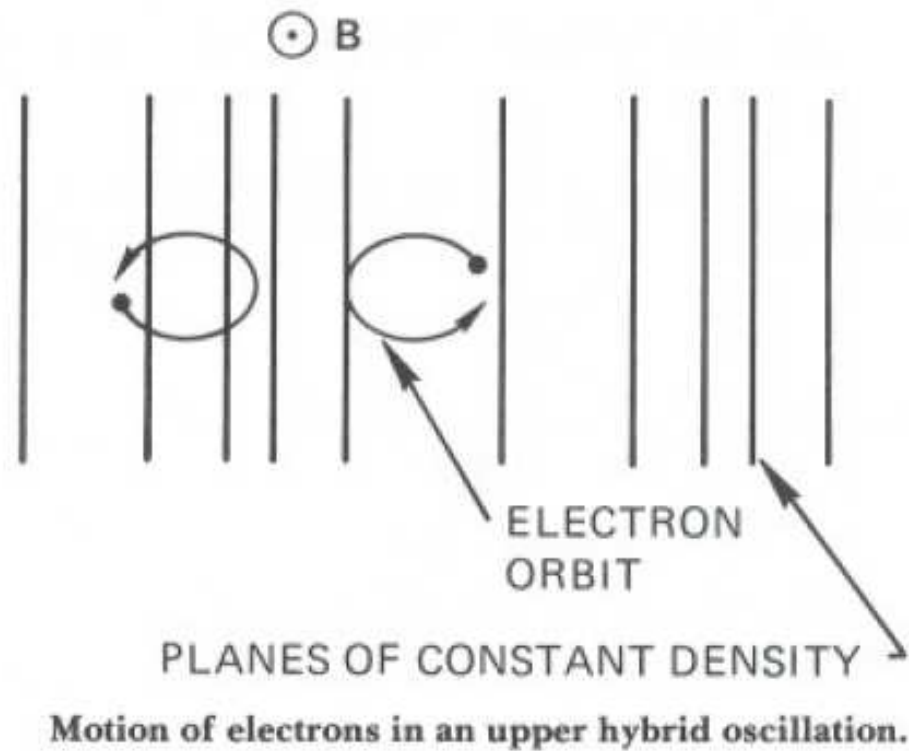
Relação de Dispersão

$\omega_h$  : frequência híbrida inferior

$\vec{k} \perp \vec{B}_0 \Rightarrow$  onda eletrostática com  $\omega = \omega_h$

$\vec{k} // \vec{B}_0 \Rightarrow$  onda eletrostática com  $\omega = \omega_p$

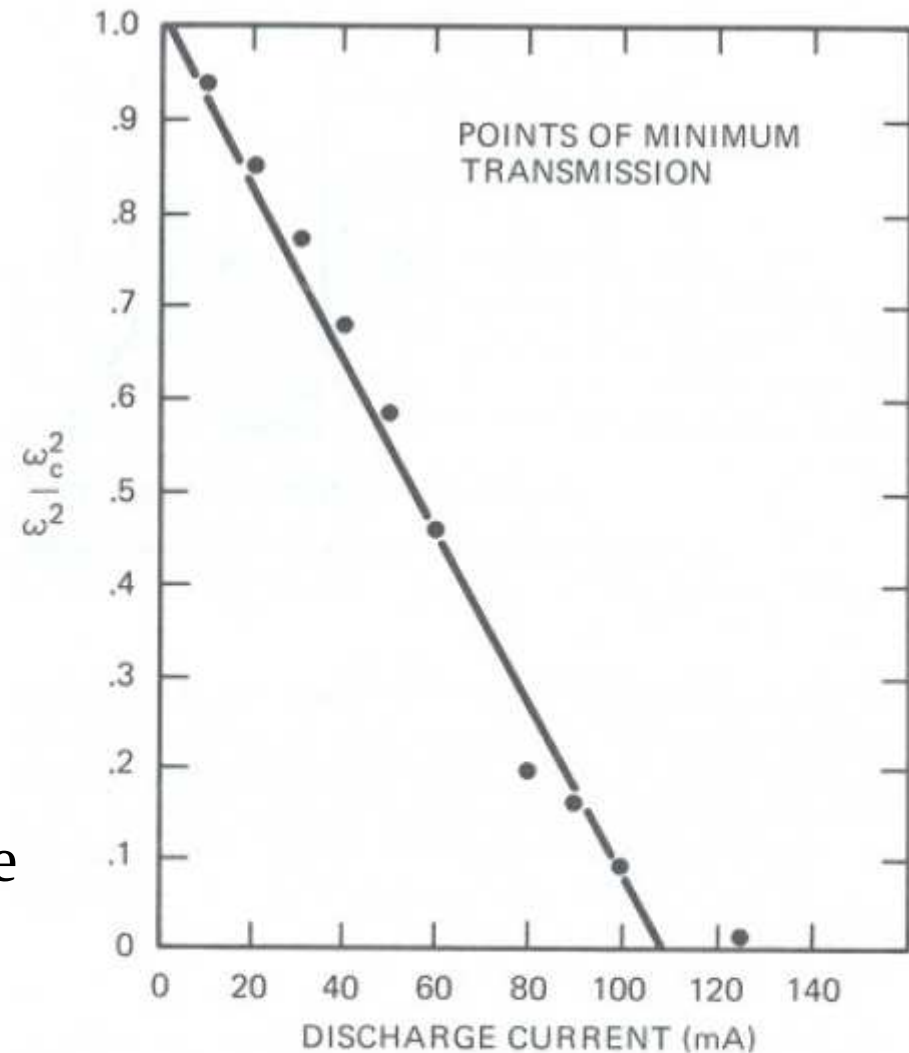
## Onda com variação da densidade dos elétrons



Evidência experimental  
da onda híbrida superior

$$\frac{\omega_c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2}$$

Corrente proporcional à densidade



Results of an experiment to detect the existence of the upper hybrid frequency by mapping the conditions for maximum absorption (minimum transmission) of microwave energy sent across a magnetic field. The field at which this occurs (expressed as  $\omega_c^2/\omega^2$ ) is plotted against discharge current (proportional to plasma density). [From R. S. Harp, *Proceedings of the Seventh International Conference on Phenomena in Ionized Gases*, Belgrade, 1965, II, 294 (1966).]

# Ondas Eletromagnéticas

$$\vec{B}_0 = 0$$

$$\vec{B}_1 \neq 0 \quad ( \vec{E}_1 \neq 0 )$$

## Onda Eletromagnética no Vácuo

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dot{\mathbf{B}}_1$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B}_1 = \dot{\mathbf{E}}_1$$

Equações de Maxwell no vácuo

$$\omega^2 \mathbf{B}_1 = -c^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) = -c^2 [\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1) - k^2 \mathbf{B}_1]$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1 = -i \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$$

$$\exp [i(kx - \omega t)] \quad \rightarrow \quad \omega^2 = k^2 c^2 \quad \text{Relação de dispersão}$$

Em um plasma com  $\vec{B}_0 = 0$ ,

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dot{\mathbf{B}}_1 \quad \rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_1) - \nabla^2 \mathbf{E}_1 = -\nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{\mathbf{j}_1}{\epsilon_0} + \dot{\mathbf{E}}_1 \quad \rightarrow \quad c^2 \nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} + \ddot{\mathbf{E}}_1$$

Das equações acima obtemos

$$-\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) + k^2 \mathbf{E}_1 = \frac{i\omega}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = -i\omega \mathbf{j}_1 / \epsilon_0$$

Ondas transversais



$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = -i\omega \mathbf{j}_1 / \epsilon_0$$

Para ions em repouso  $\mathbf{j}_1 = -n_0 e \mathbf{v}_{e1}$

Eq. de movimento  
Para os elétrons  $m \frac{\partial \mathbf{v}_{e1}}{\partial t} = -e \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{v}_{e1} = \frac{e \mathbf{E}_1}{im\omega}$

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = \frac{i\omega}{\epsilon_0} n_0 e \frac{e \mathbf{E}_1}{im\omega} = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \mathbf{E}_1 \Rightarrow \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$

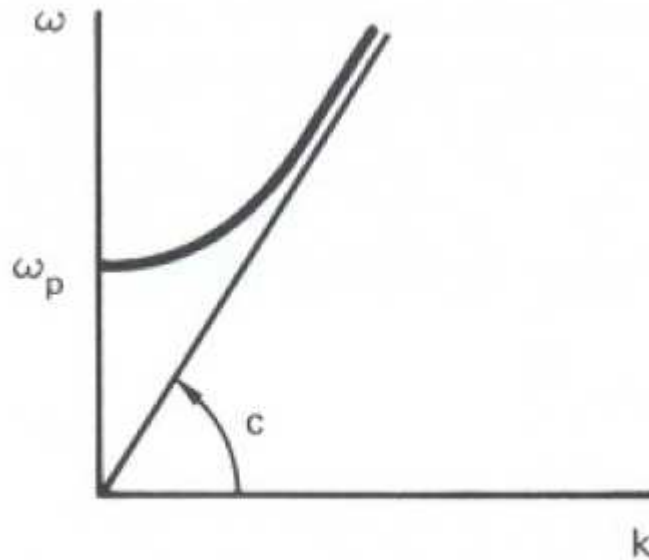
Velocidade de fase

$$v_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2} > c^2$$

Velocidade de grupo

$$\frac{d\omega}{dk} = v_g = \frac{c^2}{v_\phi}$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$



Dispersion relation for electromagnetic waves in a plasma with no dc magnetic field.

Velocidade de fase

$$v_{\phi}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2} > c^2$$

Velocidade de grupo

$$\frac{d\omega}{dk} = v_g = \frac{c^2}{v_{\phi}}$$

## Cutoff

Onda criada com frequência  $\omega$ , vai ter  $k$  dado pela relação de dispersão

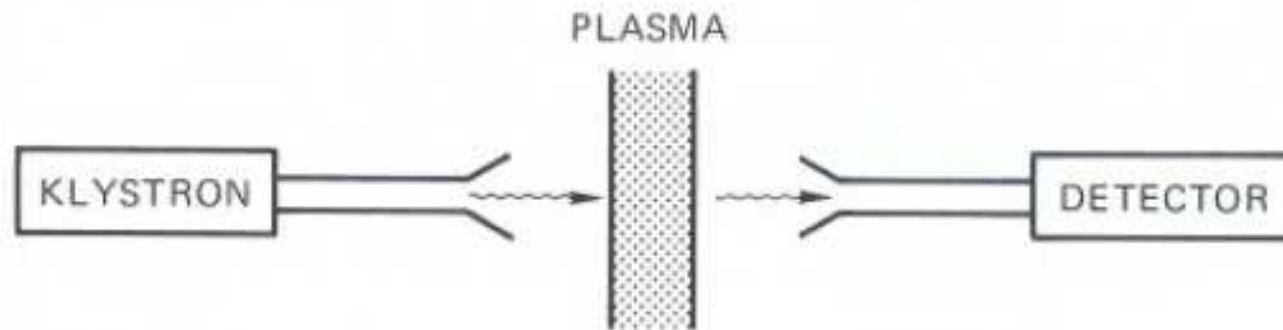
$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad \omega_p = \left( \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \right)^{1/2}$$

Quanto maior  $n$ , menor será  $k$

$$k=0 \text{ para } \omega = \omega_p \quad n_c = m \epsilon_0 \omega^2 / e^2$$

Se  $n$  for muito grande, a onda não atravessa o plasma

## Medida da Densidade Máxima do Plasma



Microwave measurement of plasma density by the cutoff of the transmitted signal.

Ondas com frequência variável é enviada até não atravessar o plasma.  
Isso ocorre para a densidade máxima

$$n_c = m\epsilon_0\omega^2/e^2$$

## Medida da Densidade do Plasma

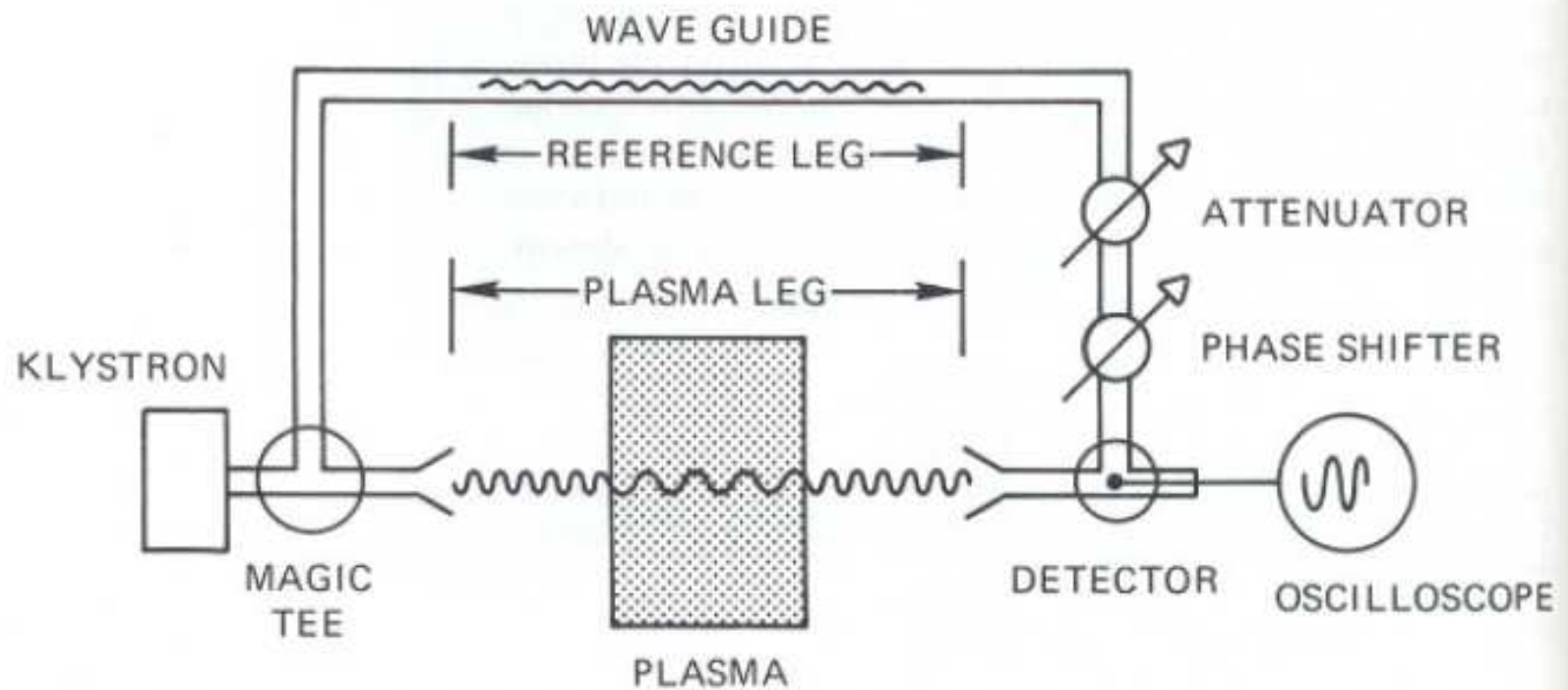
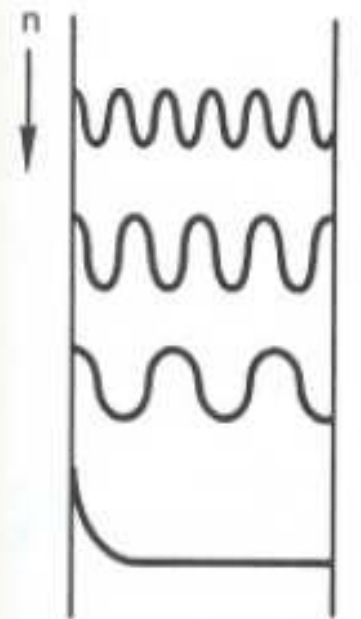


FIGURE 4-28 A microwave interferometer for plasma density measurement.

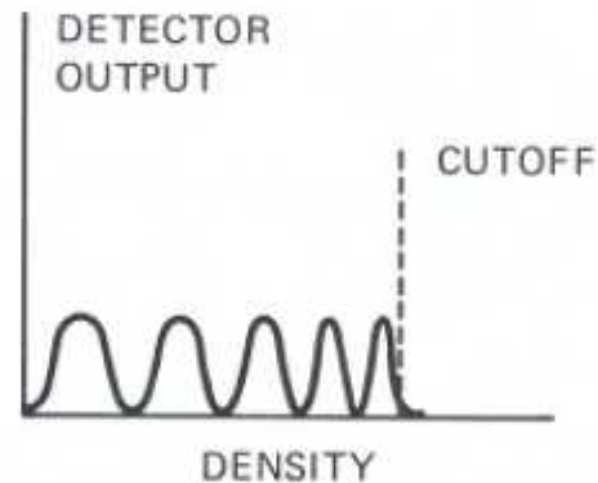
$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$

$$\omega_p = \left( \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \right)^{1/2}$$

Quanto maior a densidade, menor  $k$  e maior  $\lambda$



WAVE PATTERN  
IN PLASMA



The observed signal from an interferometer (right) as plasma density is increased, and the corresponding wave patterns in the plasma (left).

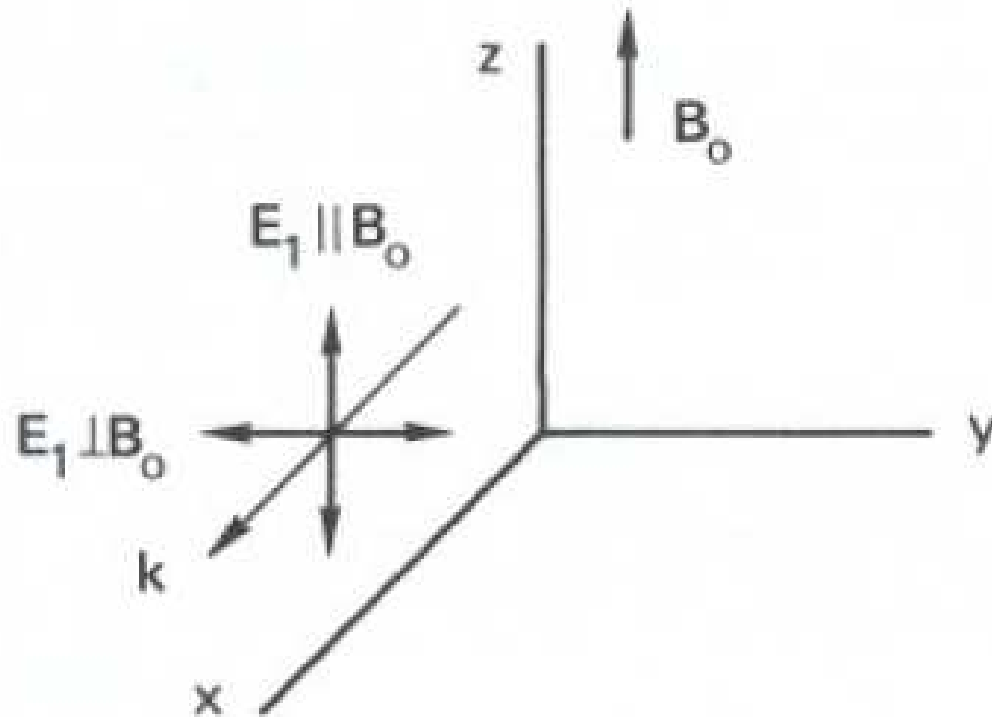
# Ondas Eletromagnéticas Perpendiculares ao Campo Magnético ( $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ )

Vamos analisar ondas com

$\vec{k} \perp \vec{E}_1 \Rightarrow$  ondas transversais

Duas possibilidades :  $\vec{E}_1 \parallel \vec{B}_0$  ou  $\vec{E}_1 \perp \vec{B}_0$

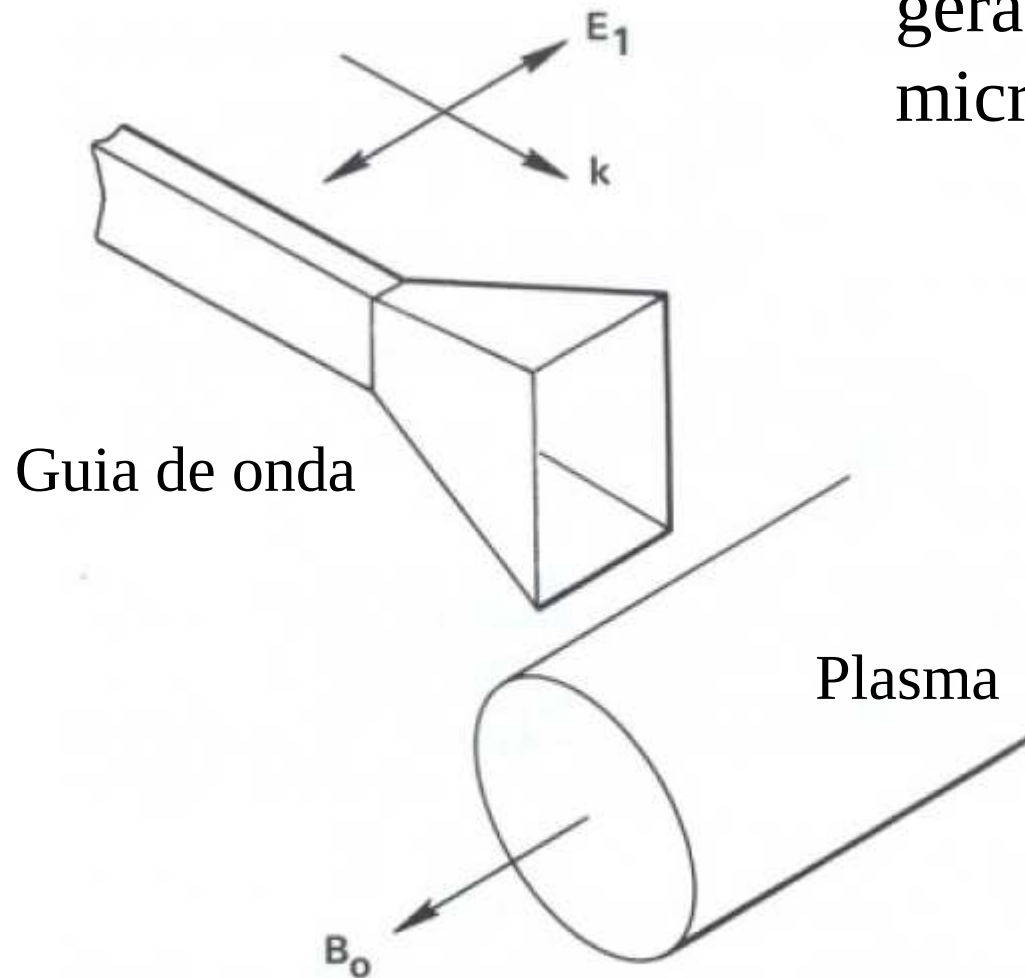
## Ondas Eletromagnéticas



**Geometry for electromagnetic waves propagating at right angles to  $B_0$ .**



Ondas ordinárias podem ser geradas por injeção de microondas no plasma



An ordinary wave launched from a waveguide antenna toward a magnetized plasma column.

Onda Ordinária  $\vec{E}_1 \parallel \vec{B}_0$

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z \quad \vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_z \quad \vec{k} = k \vec{e}_x$$

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = -i\omega \mathbf{j}_1 / \epsilon_0 = in_0 e \omega \mathbf{v}_{e1} / \epsilon_0 \quad \text{Equação da onda}$$

$$m \partial v_x / \partial t = -e E_x$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$

Relação de dispersão

## Onda Extraordinária Perpendicular ao Campo Magnético

$$\vec{E}_1 \perp \vec{B}_0$$

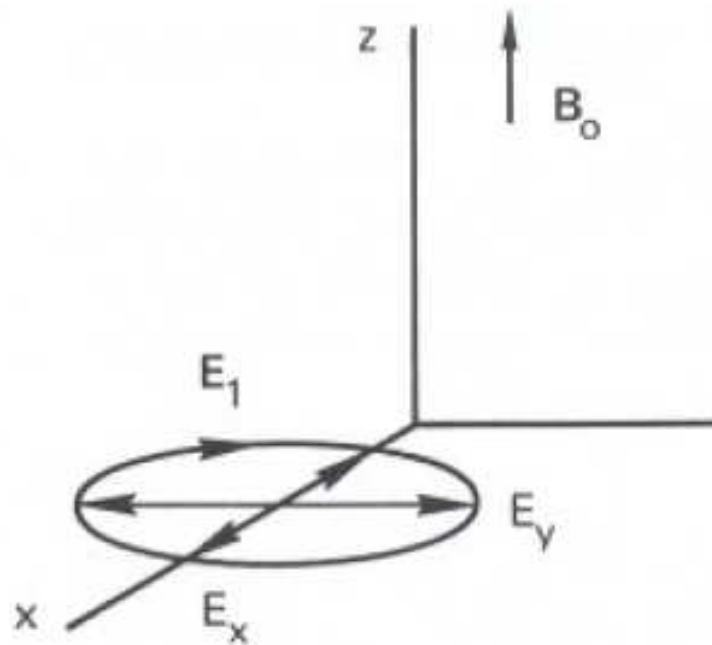
$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z \quad \vec{k} = k \vec{e}_x$$

Se onda entrar no plasma com  $\vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_y$

Ao longo do tempo  $\rightarrow \vec{E}_1 = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$

Por tanto, onda polarizada plana se torna  
polarizada elipticamente

# Onda Polarizada Elipticamente



The E-vector of an extraordinary wave is elliptically polarized. The components  $E_x$  and  $E_y$  oscillate  $90^\circ$  out of phase, so that the total electric field vector  $E_1$  has a tip that moves in an ellipse once in each wave period.

Relação de dispersão

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{v_\phi^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2}$$

$$\frac{\omega}{k} = v_\phi$$

$$\omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega_h^2$$

$$\omega_p = \left( \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \right)^{1/2}$$

## Cortes (Cutoffs)

Corte para índice de refração  $\tilde{n} = \frac{ck}{\omega} \rightarrow 0$

Portanto,  $k \rightarrow 0$  (ou  $\lambda \rightarrow \infty$ ) ocorre para

$$\omega_R = \frac{1}{2}[\omega_c + (\omega_c^2 + 4\omega_p^2)^{1/2}]$$

$$\omega_L = \frac{1}{2}[-\omega_c + (\omega_c^2 + 4\omega_p^2)^{1/2}]$$

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{v_{\phi}^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2}$$

Relação de dispersão

## Ressonâncias

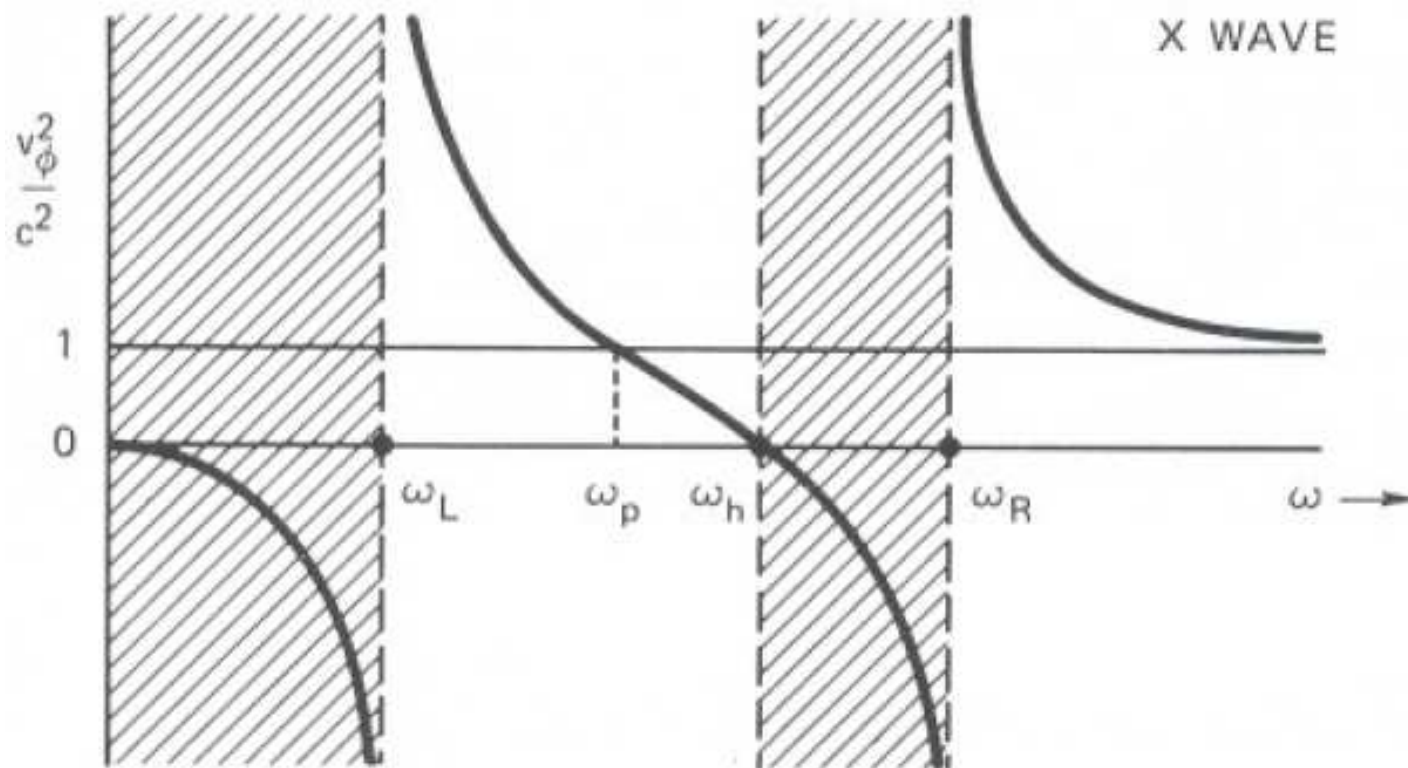
Ressonância para índice de refração  $\tilde{n} = \frac{ck}{\omega} \rightarrow \infty$

Portanto,  $k \rightarrow \infty$  (ou  $\lambda \rightarrow 0$ ) ocorre para

$$\omega^2 = \omega_h^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2$$

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{v_{\phi}^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2}$$

Relação de dispersão



The dispersion of the extraordinary wave, as seen from the behavior of the phase velocity with frequency. The wave does not propagate in the shaded regions.

Em um plasma com  $\vec{B}_0 = 0$ ,

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dot{\mathbf{B}}_1 \quad \rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_1) - \nabla^2 \mathbf{E}_1 = -\nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{\mathbf{j}_1}{\epsilon_0} + \dot{\mathbf{E}}_1 \quad \rightarrow \quad c^2 \nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} + \ddot{\mathbf{E}}_1$$

Das equações acima obtemos

$$-\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) + k^2 \mathbf{E}_1 = \frac{i\omega}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = -i\omega \mathbf{j}_1 / \epsilon_0$$

Ondas transversais



## Cutoff

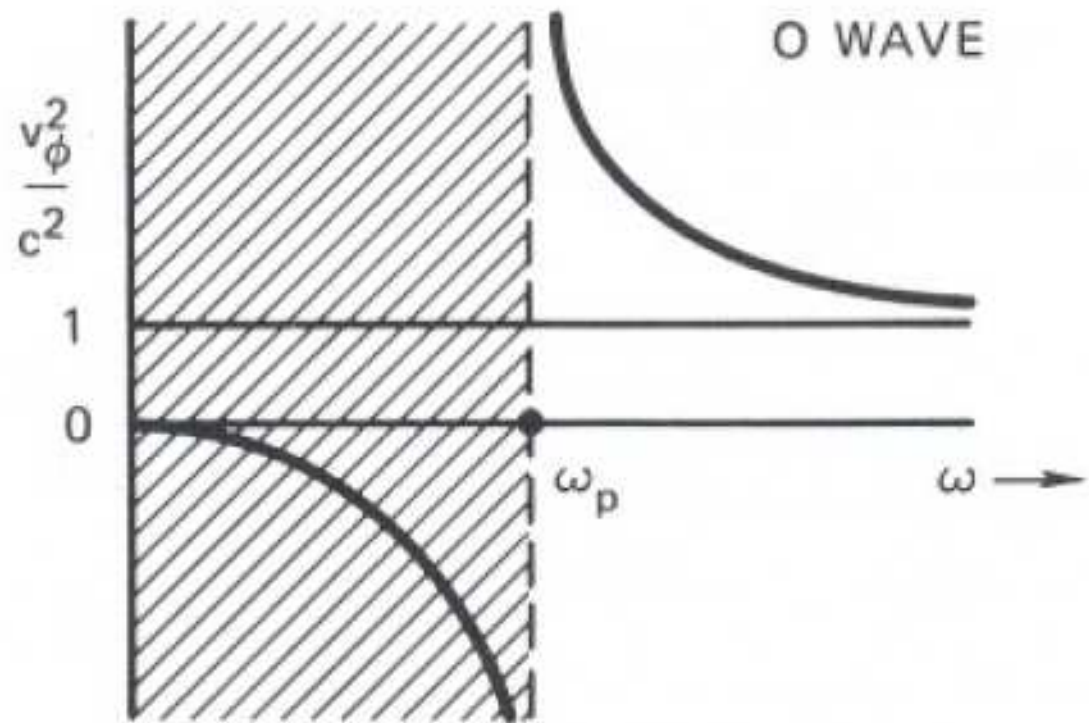
Onda criada com frequência  $\omega$ , vai ter  $k$  dado pela relação de dispersão

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad \omega_p = \left( \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \right)^{1/2}$$

Quanto maior  $n$ , menor será  $k$

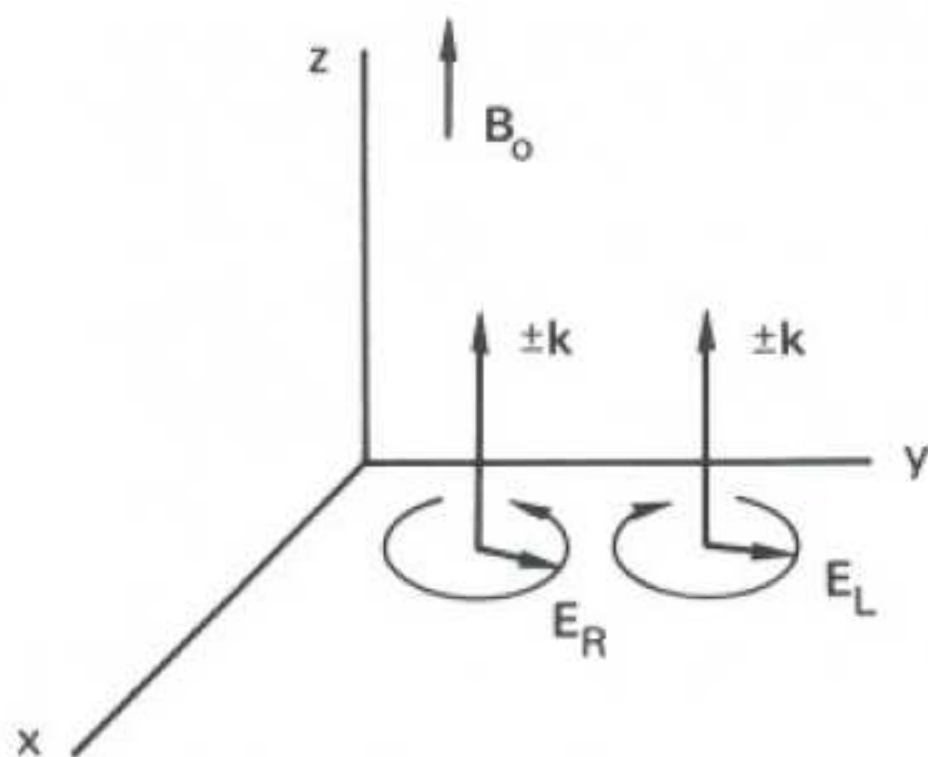
$$k=0 \text{ para } \omega = \omega_p \quad n_c = m \epsilon_0 \omega^2 / e^2$$

Se  $n$  for muito grande, a onda não atravessa o plasma



A similar dispersion diagram for the ordinary wave.





**Geometry of right- and left-handed circularly polarized waves propagating along  $B_0$ .**

Ondas Eletromagnéticas  $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$

$$\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{E}_1 = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}}$$

$$\tilde{n}^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{1 - (\omega_c / \omega)} \quad (R \text{ wave})$$

Relação de dispersão

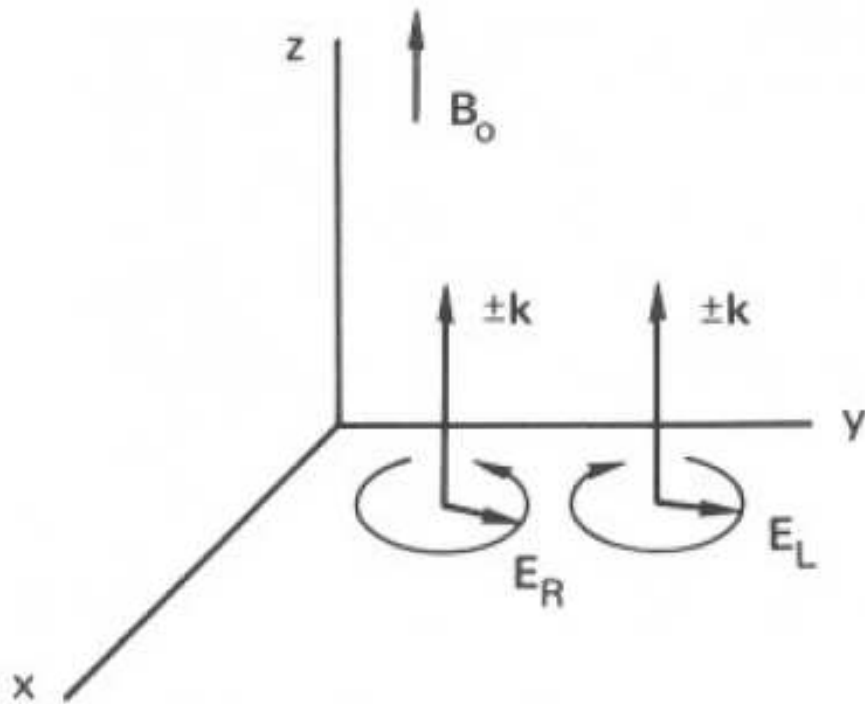
$$\tilde{n}^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{1 + (\omega_c / \omega)} \quad (L \text{ wave})$$

# Ondas Eletromagnéticas Paralelas ao Campo Magnético ( $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ )

Vamos analisar ondas com

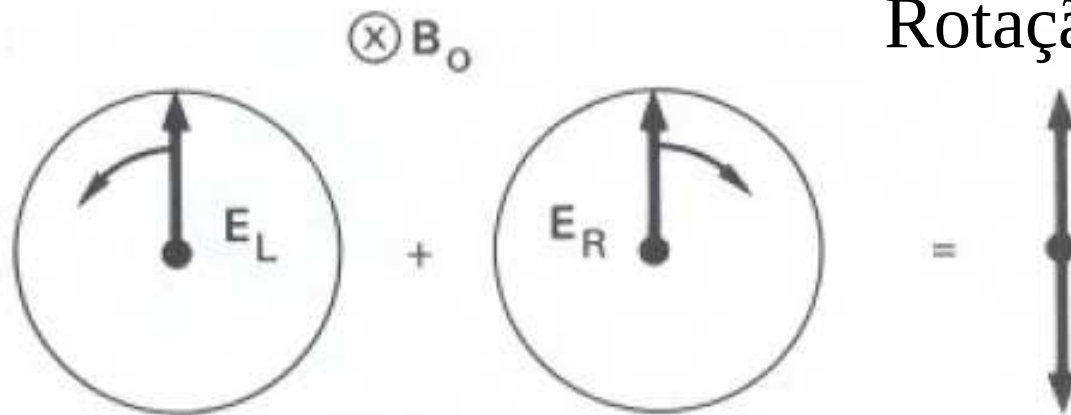
$$\vec{k} = k \vec{e}_z \quad \vec{E}_1 = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$$

## Ondas Polarizadas Circularmente

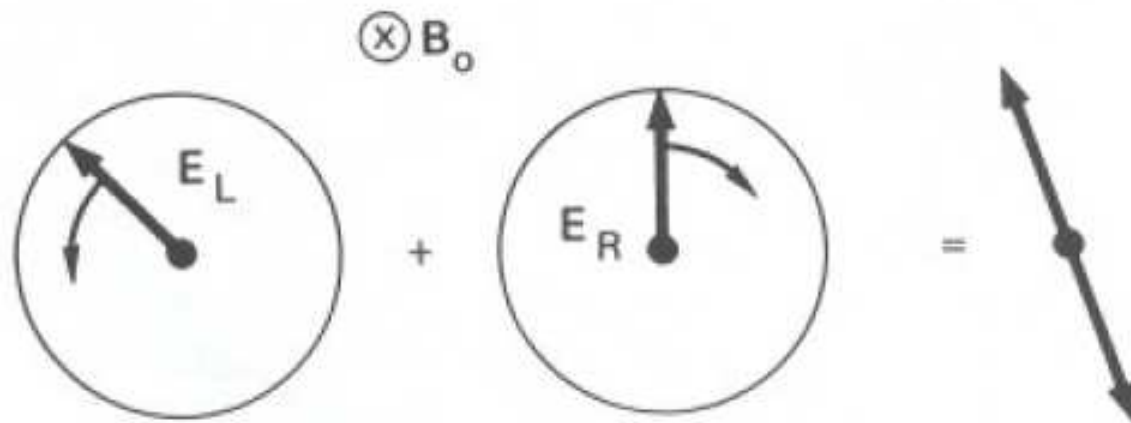


**Geometry of right- and left-handed circularly polarized waves propagating along  $B_0$ .**

## Rotação da Polarização



A plane-polarized wave as the sum of left- and right-handed circularly polarized waves.



After traversing the plasma, the  $L$  wave is advanced in phase relative to the  $R$  wave, and the plane of polarization is rotated.



# Ondas Hidromagnéticas

- Ondas de Alfvén: ondas de ions na direção do campo magnético

$$(\vec{k} \perp \vec{B}_0)$$

- Ondas Magnetosônicas: ondas de ions perpendiculares ao campo magnético

$$(\vec{k} \perp \vec{B}_0)$$

# Ondas de Alfvén

Equação da onda

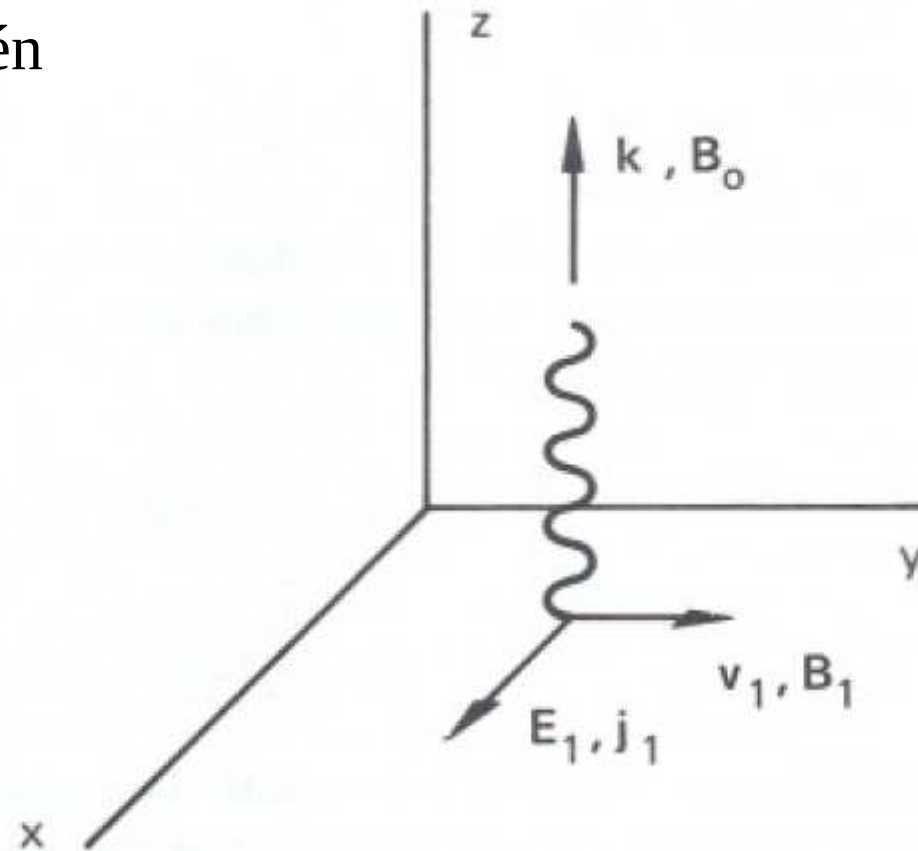
$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) + k^2 \mathbf{E}_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 + \frac{i\omega}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j}_1$$

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z \quad \vec{k} = k \vec{e}_z \quad \vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_x$$

Da equação da onda concluímos que  $\vec{j}_1 = j_1 \vec{e}_x$

$$\epsilon_0(\omega^2 - c^2 k^2) E_1 = -i\omega n_0 e (v_{ix} - v_{ex})$$

## Esquema da Onda de Alfvén



Geometry of an Alfvén wave propagating along  $B_0$ .

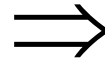
$$T_i = 0$$

$$M \frac{\partial \mathbf{v}_{i1}}{\partial t} = -e \nabla \phi_1 + e \mathbf{v}_{i1} \times \mathbf{B}_0$$

Equação de movimento dos ions

$$-i\omega M v_{ix} = -eik\phi_1 + ev_{iy}B_0$$

$$-i\omega M v_{iy} = -ev_{ix}B_0$$



$$v_{ix} = \frac{ie}{M\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1$$

$$v_{iy} = \frac{e}{M\omega} \frac{\Omega_c}{\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1$$

Analogamente, obtemos para as velocidades dos elétrons frios

The corresponding solution to the electron equation of motion is found by letting  $M \rightarrow m$ ,  $e \rightarrow -e$ ,  $\Omega_c \rightarrow -\omega_c$ , and then taking the limit  $\omega_c^2 \gg \omega^2$ :

$$v_{ex} = \frac{ie}{m\omega} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} E_1 \rightarrow 0$$

$$v_{ey} = -\frac{e}{m} \frac{\omega_c}{\omega^2} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} E_1 = -\frac{E_1}{B_0}$$

Movimento de deriva dos elétrons

Substituindo as componentes das velocidades na direção x

$$\epsilon_0(\omega^2 - c^2 k^2)E_1 = -i\omega n_0 e \frac{ie}{M\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1$$

$$\omega^2 \ll \Omega_c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{1 + (\rho/\epsilon_0 B_0^2)} = \frac{c^2}{1 + (\rho\mu_0/B_0^2)c^2}$$

Desprezando o número 1,

$$\frac{\omega}{k} = v_\phi = \frac{B_0}{(\mu_0 \rho)^{1/2}}$$

These hydromagnetic waves travel along  $\mathbf{B}_0$  at a constant velocity  $v_A$ , called the *Alfvén velocity*:

$$v_A \equiv B/(\mu_0 \rho)^{1/2}$$

[4-126]

## Interpretação da Onda de Alfvén

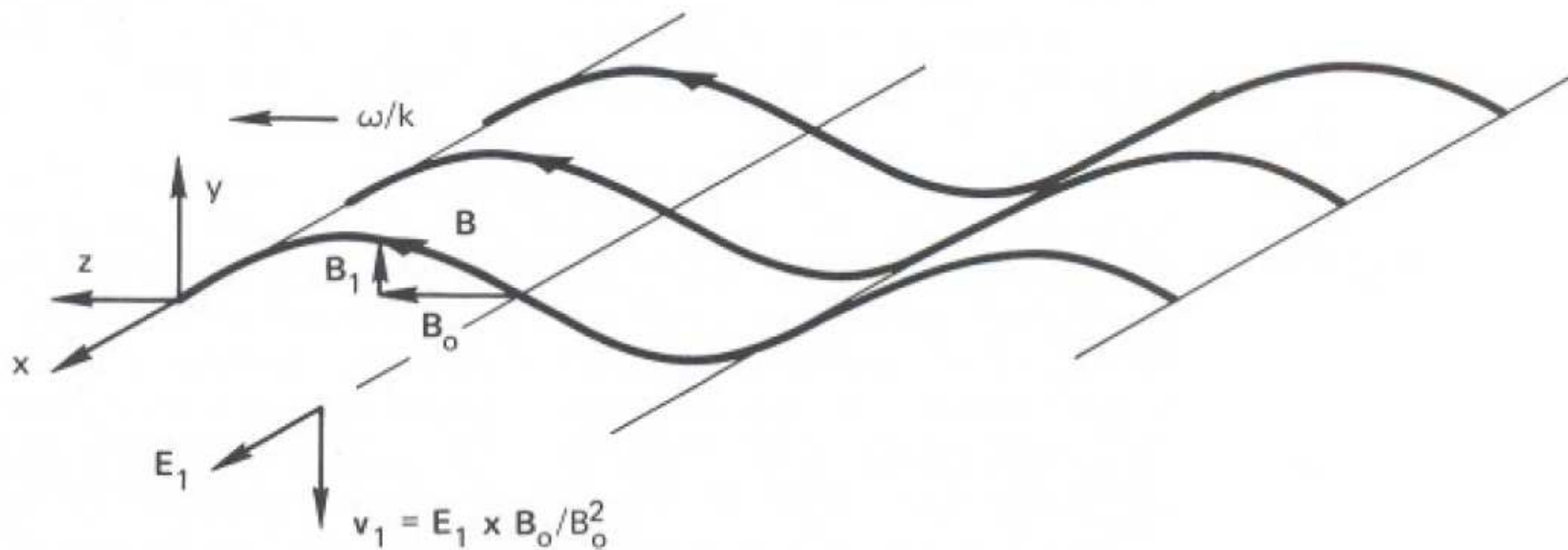
$$\nabla \times \vec{E}_1 = -\vec{B}_1 \Rightarrow E_x = \frac{\omega}{k} B_y$$

Movimento dos íons e elétrons na direção y

$$v_y = \frac{E_x}{B_0}$$

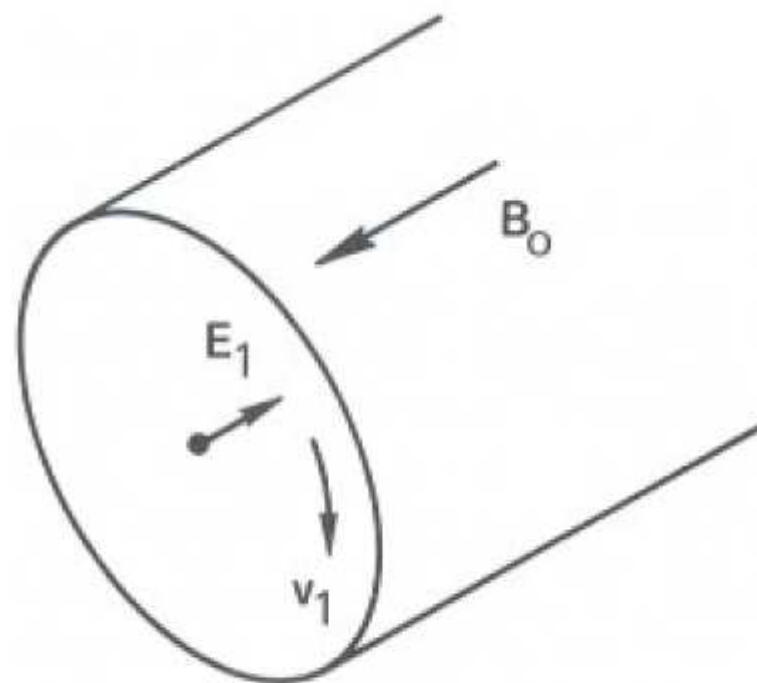
Linha do campo magnético se desloca com velocidade

$$\frac{\omega}{k} \frac{B_y}{B_0} = \frac{E_x}{B_0}$$

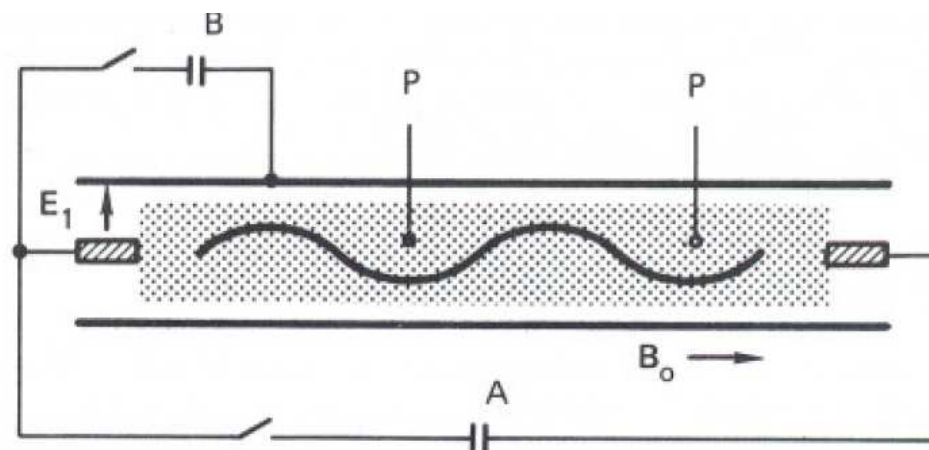


Relation among the oscillating quantities in an Alfvén wave and the (exaggerated) distortion of the lines of force. FIGURE 4-46

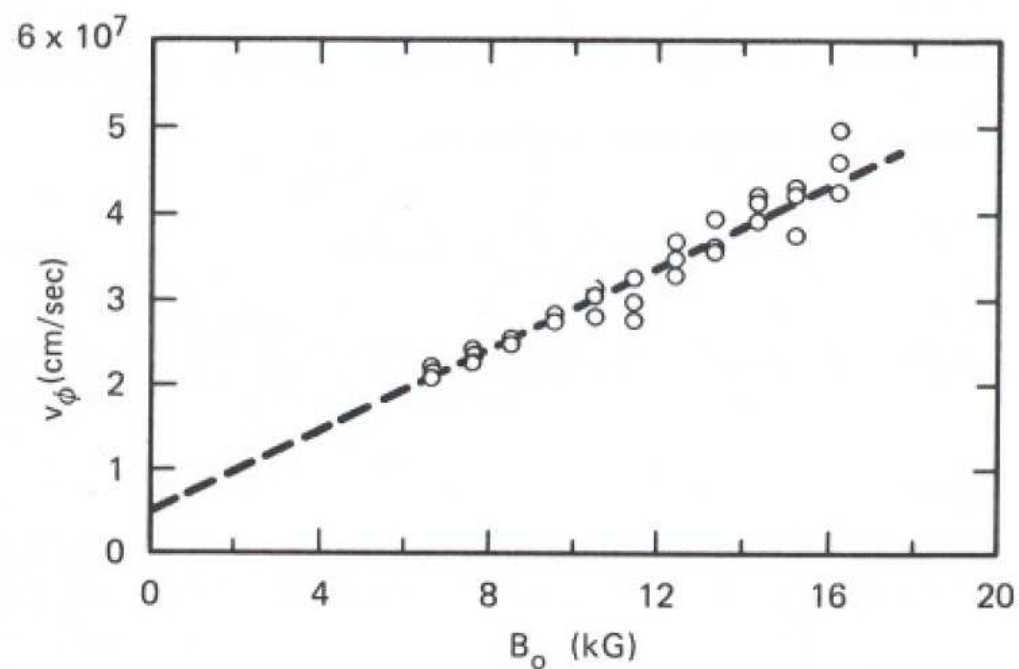




Geometry of a torsional (or shear)  
Alfvén wave in a cylindrical column.



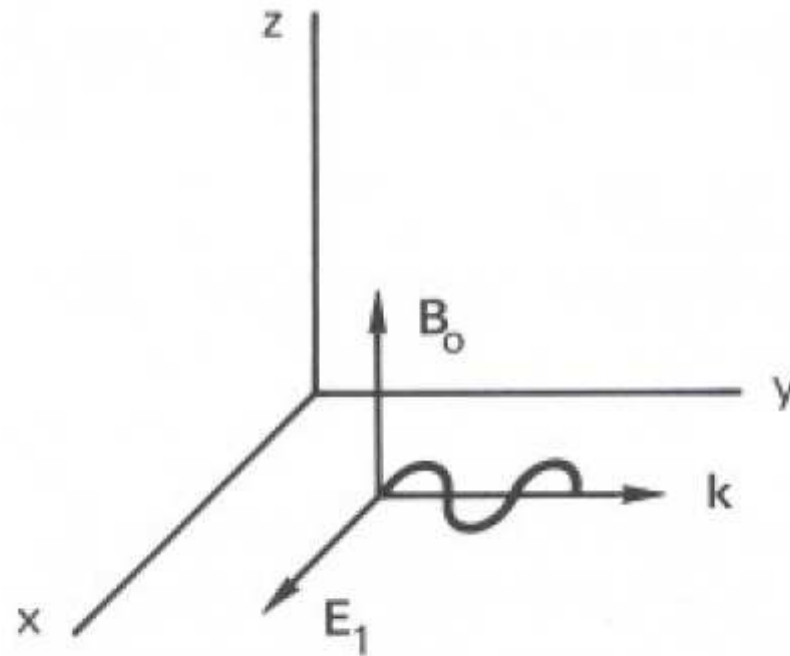
**Schematic of an experiment to detect Alfvén waves.** [From J. M. Wilcox, F. I. Boley, and A. W. DeSilva, *Phys. Fluids* 3, 15 (1960).]



**Measured phase velocity of Alfvén waves vs. magnetic field.** [From Wilcox, Boley, and DeSilva, *loc. cit.*]

# Ondas Magnetosônicas

$$\vec{k} \perp \vec{B}_0$$



- | Geometry of a magnetosonic wave propagating at right angles to  $B_0$ .

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z \quad \vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_x \quad \vec{k} = k \vec{e}_y \quad \nabla p \neq 0$$

Equação de movimento dos ions

$$Mn_0 \frac{\partial \mathbf{v}_{i1}}{\partial t} = en_0(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{i1} \times \mathbf{B}_0) - \gamma_i K T_i \nabla n_1$$

$$v_{ix} = \frac{ie}{M\omega} (E_x + v_{iy} B_0)$$

$$v_{iy} = \frac{ie}{M\omega} (-v_{ix} B_0) + \frac{k}{\omega} \frac{\gamma_i K T_i}{M} \frac{n_1}{n_0}$$

Equação de continuidade dos ions

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{k}{\omega} v_{iy}$$

Das equações anteriores obtemos

$$v_{ix} \left( 1 - \frac{\Omega_c^2 / \omega^2}{1 - A} \right) = \frac{ie}{M\omega} E_x$$

$$A \equiv \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\gamma_i K T_i}{M}$$

Equação da onda

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = -i\omega \mathbf{j}_1 / \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_0 (\omega^2 - c^2 k^2) E_x = -i\omega n_0 e (v_{ix} - v_{ex})$$

Falta obter a velocidade dos elétrons

To obtain  $v_{ex}$ , we need only to make the appropriate changes in Eq. [4-135] and take the limit of small electron mass, so that  $\omega^2 \ll \omega_c^2$  and  $\omega^2 \ll k^2 v_{the}^2$ :

$$v_{ex} = \frac{ie}{m\omega} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \left( 1 - \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\gamma_e K T_e}{m} \right) E_x \rightarrow -\frac{ik^2}{\omega B_0^2} \frac{\gamma_e K T_e}{e} E_x \quad [4-137]$$

Das equações anteriores obtemos

$$\epsilon_0(\omega^2 - c^2 k^2) E_x = -i\omega n_0 e \left[ \frac{ie}{M\omega} E_x \left( \frac{1-A}{1-A - (\Omega_c^2/\omega^2)} \right) + \frac{ik^2 M}{\omega B_0^2} \frac{\gamma_e K T_e}{eM} E_x \right]$$

$$\omega^2 \ll \Omega_c^2,$$

$\Rightarrow$

$$\Omega_p^2/\Omega_c^2 = c^2/v_A^2$$

$$\boxed{\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_s^2 + v_A^2}{c^2 + v_A^2}}$$

Relação de dispersão da  
onda magnetosônica

## Relações de Dispersão Obtidas

- Ondas de elétrons eletrostáticas
- Ondas de íons eletrostáticas
- Ondas de elétrons eletromagnéticas
- Ondas de íons eletromagnéticas



*Electron waves (electrostatic)*

$$\mathbf{B}_0 = 0 \text{ or } \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0: \quad \omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2}k^2 v_{th}^2 \quad (\text{Plasma oscillations})$$

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0: \quad \omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega_h^2 \quad (\text{Upper hybrid oscillations})$$

*Ion waves (electrostatic)*

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 = 0 \text{ or } \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0: \quad \omega^2 &= k^2 v_s^2 \\ &= k^2 \frac{\gamma_e K T_e + \gamma_i K T_i}{M} \quad (\text{Acoustic waves}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0: \quad \omega^2 = \Omega_c^2 + k^2 v_s^2 \quad (\text{Electrostatic ion cyclotron waves})$$

OR

$$\omega^2 = \omega_i^2 = \Omega_c \omega_c \quad (\text{Lower hybrid oscillations})$$

*Electron waves (electromagnetic)*

$$\mathbf{B}_0 = 0: \quad \omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$$

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{B}_0: \quad \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_0: \quad \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_h^2}{\omega^2 - \omega_h^2}$$

$$\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0: \quad \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{1 - (\omega_c / \omega)}$$

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{1 + (\omega_c / \omega)}$$

*Ion waves (electromagnetic)*

$\mathbf{B}_0 = 0$ : None

$\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$ :  $\omega^2 = k^2 v_A^2$  (Alfvén wave)

$\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ :  $\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_s^2 + v_A^2}{c^2 + v_A^2}$  (Magnetosonic wave)



