

Difusão e Resistividade

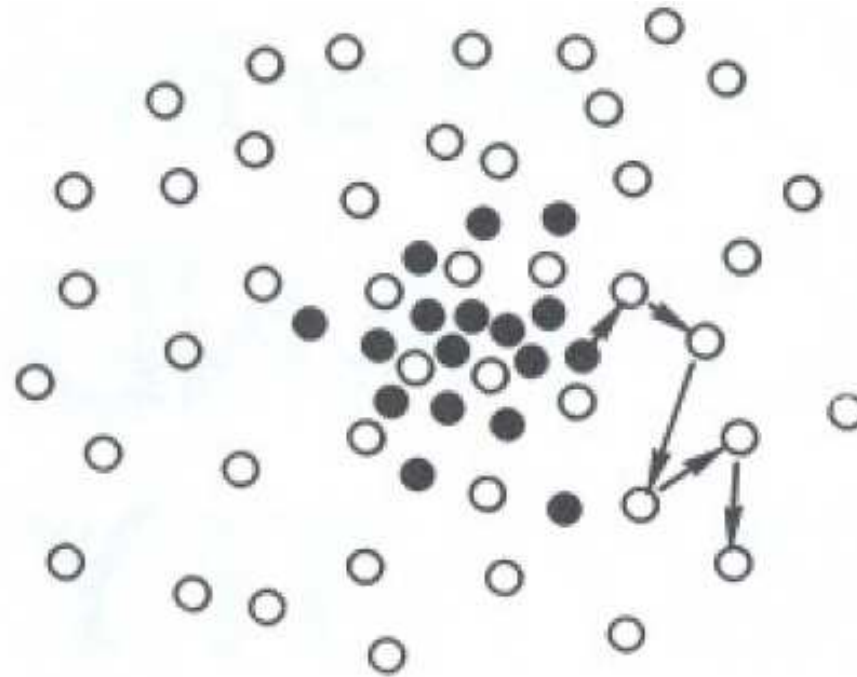
F. F. Chen

Capítulo 5

1- Parâmetros de Colisões

- Conceitos básicos
- Parâmetros

Difusão em um Gás de Partículas Neutras



Diffusion of gas atoms by random collisions.

Secção de Choque

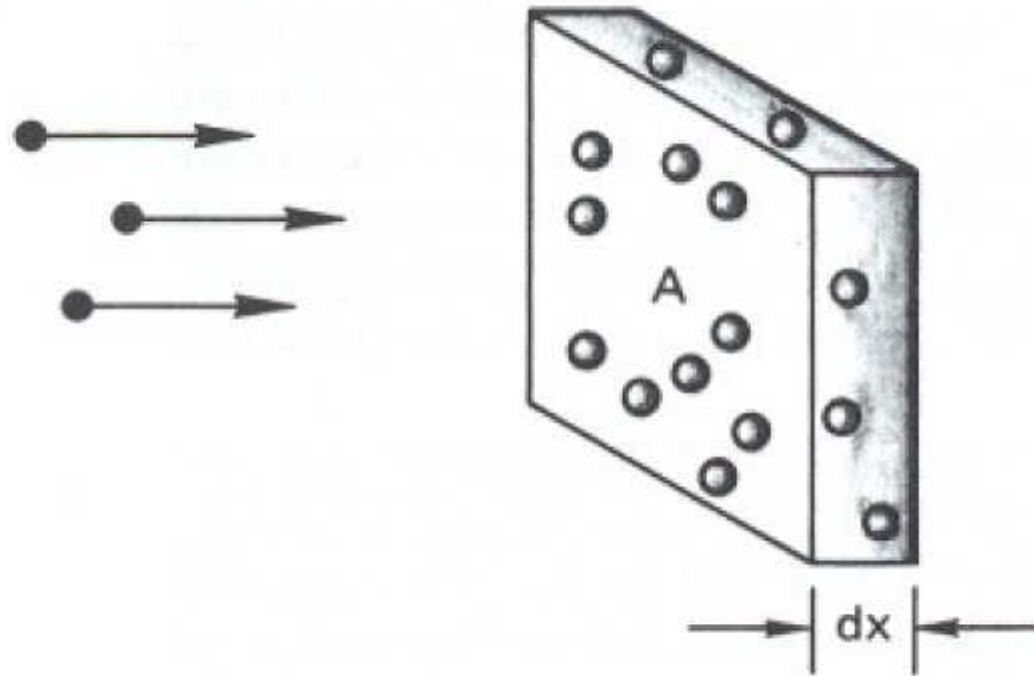


FIGURE 5-2 Illustration of the definition of cross section.

Parâmetros Básicos

- Livre caminho médio e secção de choque $\lambda_m = \frac{1}{n \sigma}$
- Tempo médio entre colisões $\tau = \lambda_m / v$
- Frequência média das colisões $\tau^{-1} = v / \lambda_m = n \sigma v$
- Para uma distribuição Maxwelliana de velocidades
 $\nu = n \langle \sigma v \rangle$

Colisões entre Partículas Carregadas

- Conceitos básicos
- Parâmetros

Parâmetros Básicos

(os mesmos válidos para partículas neutras)

- Livre caminho médio e secção de choque $\lambda_m = \frac{1}{n \sigma}$
- Tempo médio entre colisões $\tau = \lambda_m / v$
- Frequência média das colisões $\tau^{-1} = v / \lambda_m = n \sigma v$
- Para uma distribuição Maxwelliana de velocidades
$$V = n \langle \sigma v \rangle$$

2- Difusão em Plasmas

Parâmetros de Difusão

- Fluxo para íons e elétrons ($j = i, e$)

Fluxo de partículas

$$\vec{\Gamma}_j = n \vec{v} = \pm \mu_j n \vec{E} - D_j \nabla n$$

Mobilidade

$$\mu_j = e D_j / m \nu \quad \nu = \tau^{-1}$$

Coeficiente de difusão

$$D = KT / m \nu$$

Para partículas neutras vale a lei de Fick

$$\vec{\Gamma} = -D \nabla n$$

Difusão Ambipolar

- Plasma permanece neutro

$$\Gamma_i = \Gamma_e = \Gamma$$

Com essa condição o campo elétrico é:

$$\vec{E} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n}$$

Substituindo \vec{E} na expressão de Γ ,

$$\vec{\Gamma} = \mu_i n \vec{E} - D_i \nabla n = D_a \nabla n$$

$$D_a = \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e}$$

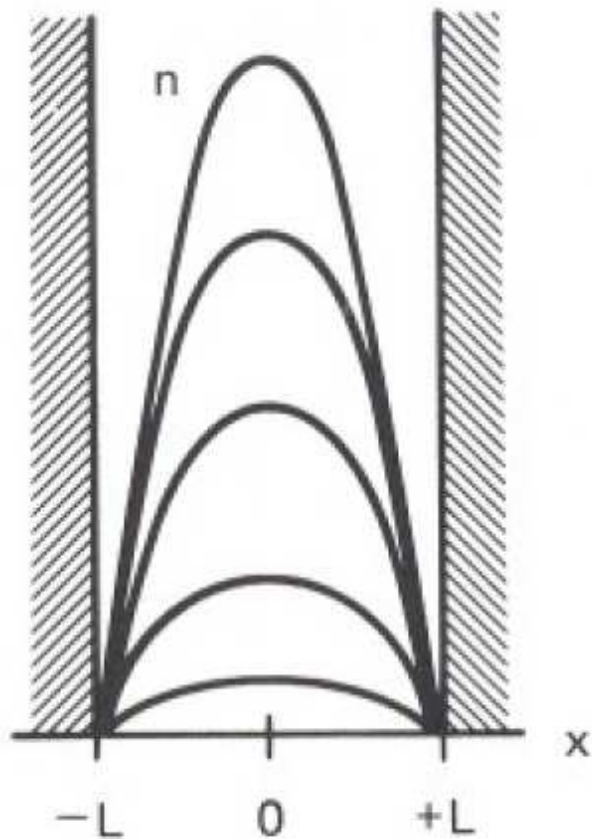
Equação da Difusão

- Equação da continuidade $\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\Gamma}$
- Fluxo $\vec{\Gamma} = D_a \nabla n$

- Das equações acima obtemos para D_a (coeficiente de difusão ambipolar) constante, a equação de difusão

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_a \nabla^2 n$$

Exemplo de Difusão (Solução da Equação de Difusão)



Density of a plasma at various times as it decays by diffusion to the walls.

Modo de difusão mais lento

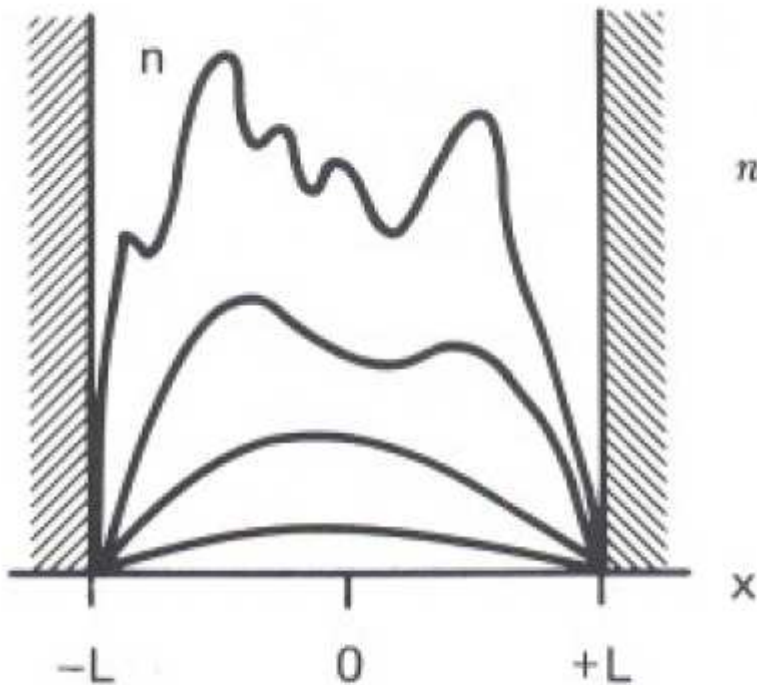
$$n = n_0 e^{-t/\tau} \cos \frac{\pi x}{2L}$$

$$\frac{L}{(D\tau)^{1/2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\tau = \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \frac{1}{D}$$

Exemplo de Difusão (Solução da Equação de Difusão)

Decomposição em modos de difusão



Decay of an initially nonuniform plasma, showing the rapid disappearance of the higher-order diffusion modes.

$$n = n_0 \left(\sum_l a_l e^{-t/\tau_l} \cos \frac{(l + \frac{1}{2})\pi x}{L} + \sum_m b_m e^{-t/\tau_m} \sin \frac{m\pi x}{L} \right)$$

Tempo de decaimento do modo l

$$\tau_l = \left[\frac{L}{(l + \frac{1}{2})\pi} \right]^2 \frac{1}{D}$$

Modo de difusão mais lento predomina no final da difusão

4- Recombinação

Sem difusão, a equação de continuidade, com recombinação, é

$$\partial n / \partial t = -\alpha n^2$$

Equação não linear

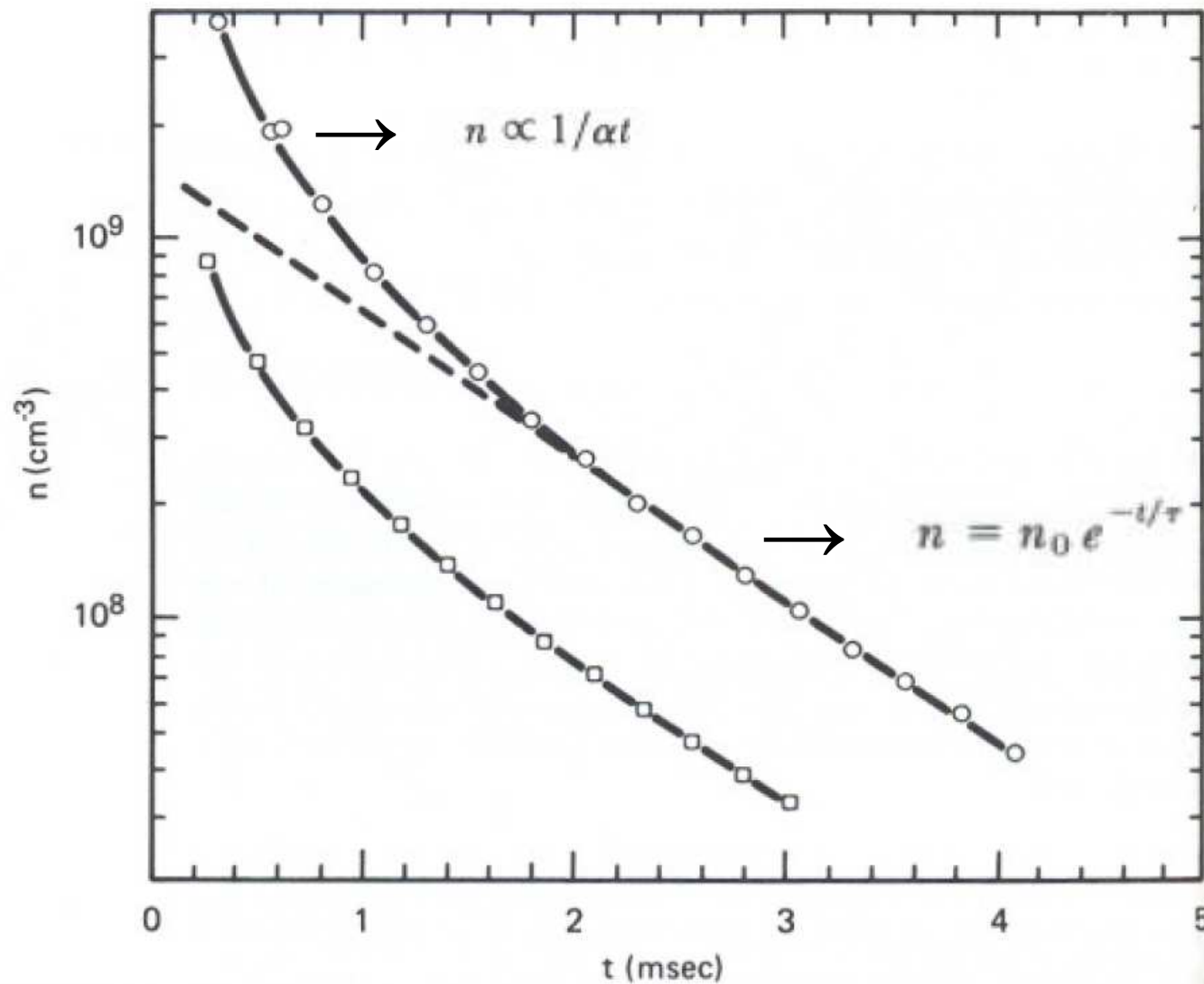
→

$$\frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} = \frac{1}{n_0(\mathbf{r})} + \alpha t$$

$$n \propto 1/\alpha t$$

Solução particular

Experiência sobre Decaimento da Densidade

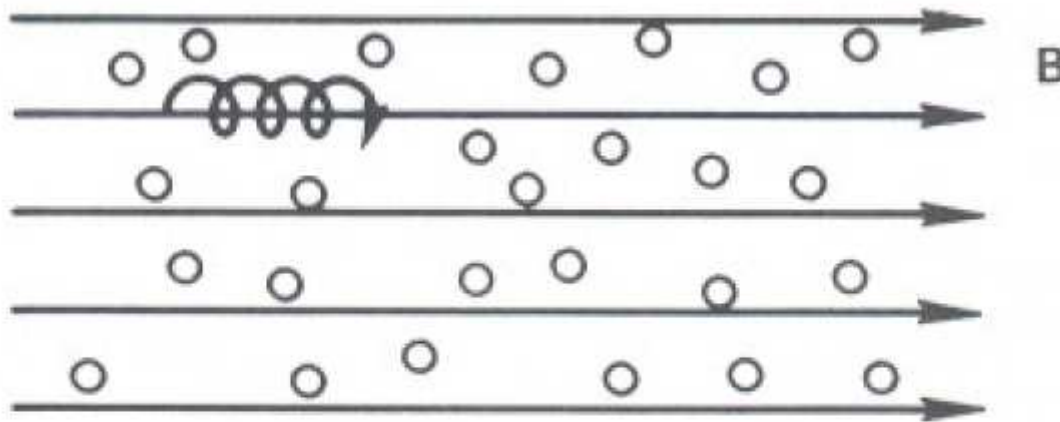


No início
predomina a
recombinação

Na fase final
predomina a
difusão com
decaimento
exponencial

FIGURE 5-9 Density decay curves of a weakly ionized plasma under recombination and diffusion. [From S. C. Brown, *Basic Data of Plasma Physics*, John Wiley and Sons, New York, 1959.]

5- Difusão em um Campo Magnético



A charged particle in a magnetic field will gyrate about the same line of force until it makes a collision.

Difusão num plasma cilíndrico com campo magnético

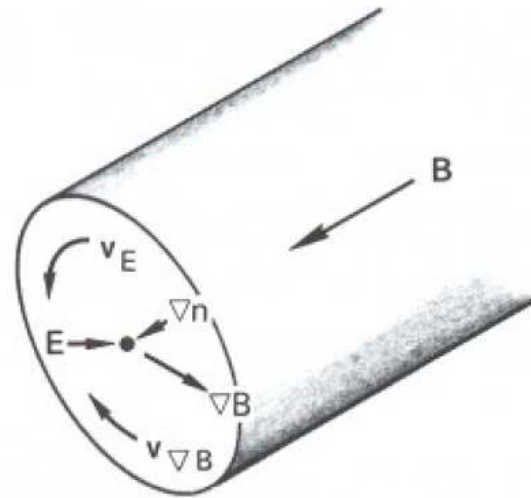


FIGURE 5-11 Particle drifts in a cylindrically symmetric plasma column do not lead to losses.

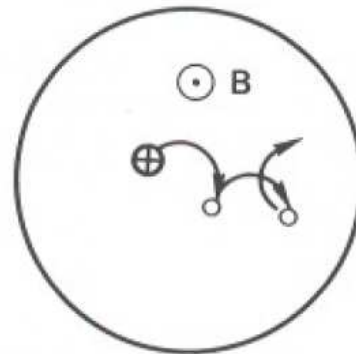


FIGURE 5-12 Diffusion of gyrating particles by collisions with neutral atoms.

Difusão através do campo magnético $\vec{B} = B \hat{e}_z$

Campo elétrico na direção radial e longitudinal $\vec{E} = E_r \hat{e}_r + E_z \vec{e}_z$

Fluxo na direção z $\Gamma_z = \pm \mu n E_z - D \partial n / \partial z$

Na direção perpendicular ao campo

$$\vec{v}_\perp = \pm \mu_\perp \vec{E} - D_\perp \nabla n / n + \frac{\vec{v}_E + \vec{v}_D}{1 + (\omega_c^2 \tau^2)^{-1}} \quad \omega_c = e B / m$$

Derivas $\vec{v}_E = \vec{E} \times \vec{B} / B^2 \quad \vec{v}_D = \pm \frac{K T}{e B} \frac{\nabla n}{n} \times \vec{e}_z$

Coeficientes $\mu_\perp = \frac{\mu}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \quad D_\perp = \frac{D}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$

Características da difusão

Para $\omega_c^2 \tau^2 \gg 1$

$$\omega_c \tau = \frac{\omega_c}{v} = \mu B \cong \frac{\lambda_m}{r_L} \gg 1$$

Difusão randômica com comprimento r_L e período τ

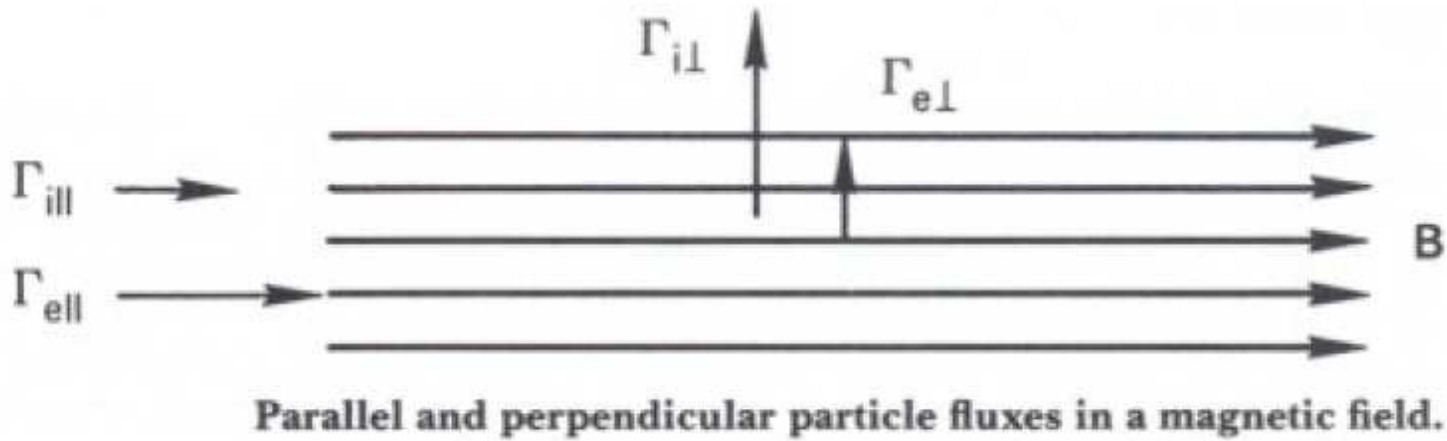
$$D_{\perp} = \frac{K T}{m v} \frac{1}{\omega_c^2 \tau^2} = \frac{K T v}{m \omega_c^2} = v_{th}^2 \frac{r_L^2}{v_{th}^2} v \approx \frac{r_L^2}{\tau}$$

Para $B = 0$, difusão com comprimento λ_m e período τ

$$D = \frac{K T}{m v} \approx v_{th}^2 \tau \approx \frac{\lambda_m^2}{\tau}$$

$D_{\perp} \ll D$ campo \vec{B} retarda difusão

Difusão Ambipolar em um Campo Magnético



Variação da difusão com o Campo B

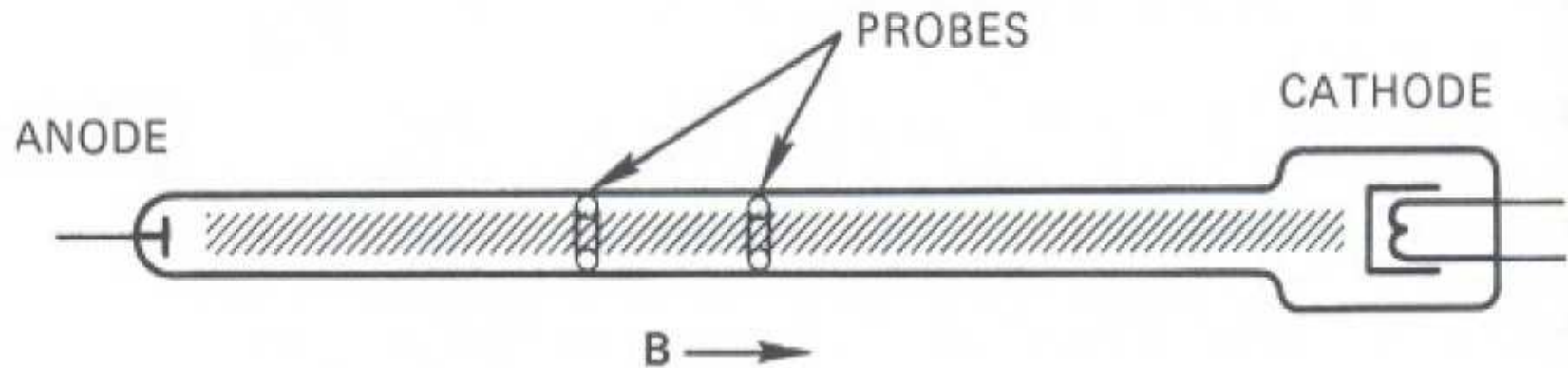


FIGURE 5-14 The Lehnert-Hoh experiment to check the effect of a magnetic field on diffusion in a weakly ionized gas.

Difusão deve diminuir com o aumento de B

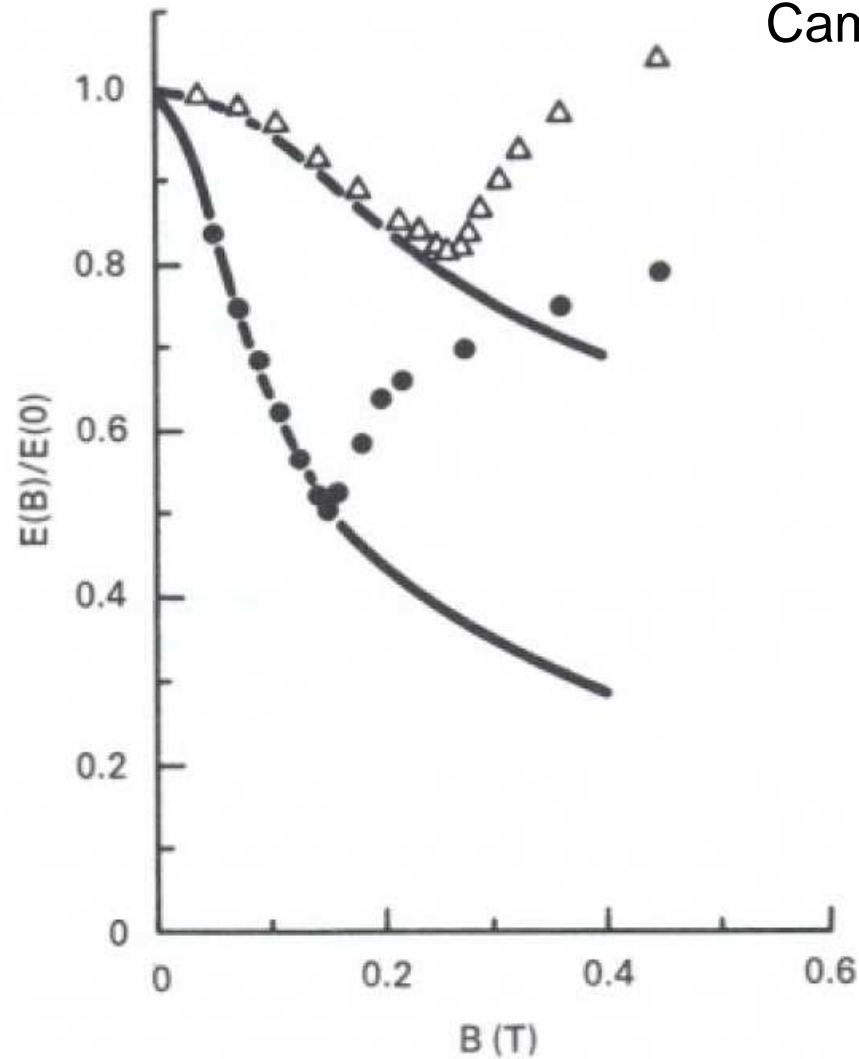
$$\Gamma_z = \pm \mu n E_u$$

$$D_{\perp} = \frac{D}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m}$$

Resultado esperado:

Campo elétrico longitudinal deve diminuir com a difusão



Campo elétrico longitudinal
X
Campo magnético

$$B < B_c$$

Resultado previsto:
campo elétrico diminui
com o aumento de B

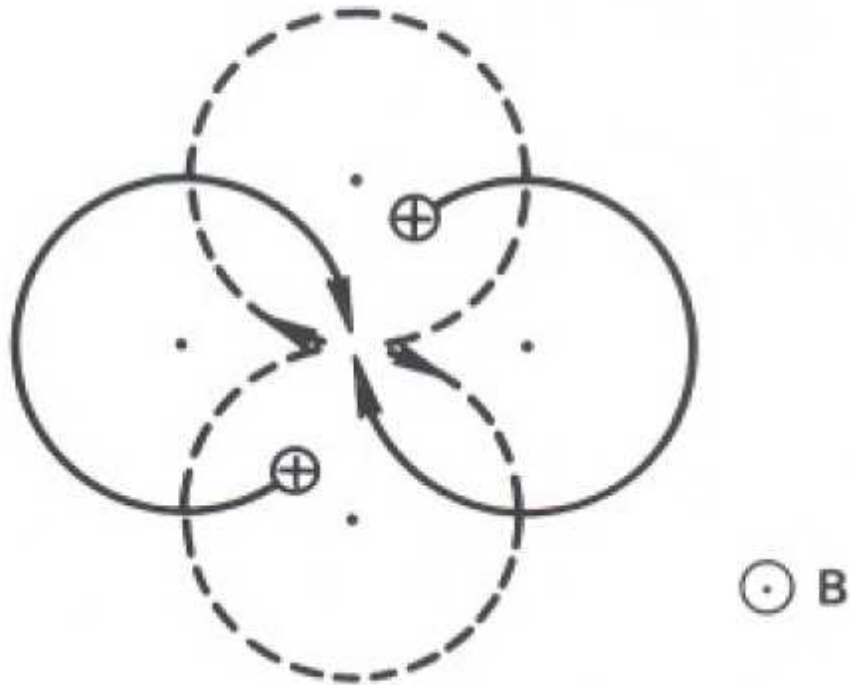
$$B > B_c$$

A partir de um valor
crítico de B , surge uma
instabilidade que
produz aumento de
difusão !

The normalized longitudinal electric field measured as a function of B at two different pressures. Theoretical curves are shown for comparison. [From F. C. Hoh and B. Lehnert, *Phys. Fluids* 3, 600 (1960).]

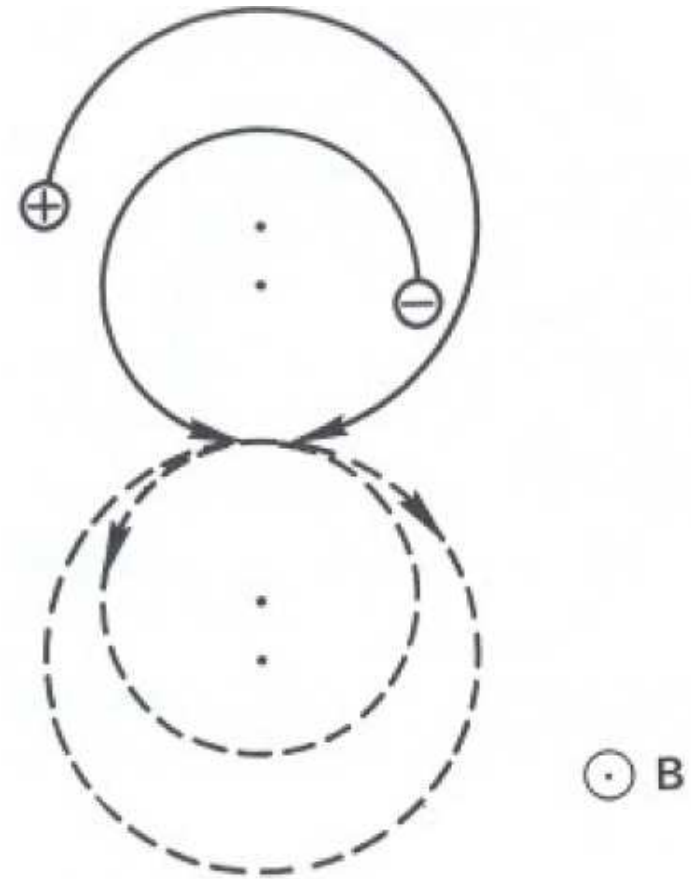
6- Colisões (e-i) em Plasmas Ionizados

Colisão entre partículas iguais



Shift of guiding centers of two like particles making a 90° collision.

Colisão entre partículas diferentes



Shift of guiding centers of two oppositely charged particles making a 180° collision.

Resistividade Elétrica

- Troca de momento linear por colisões, fricção entre fluidos

$$\vec{P}_{ei} = - \vec{P}_{ie}$$

- $\vec{P}_{ei} = m n (\vec{v}_i - \vec{v}_e) v_{ei} = \eta e^2 n^2 (\vec{v}_i - \vec{v}_e)$
Frequência de colisões

$$v_{ei} = \frac{n e^2}{m} \eta = \omega_p^2 \eta$$

- Resistividade elétrica

$$\eta \approx \frac{e^2 \sqrt{m}}{(K T_e)^{3/2}} \ln \Lambda$$

Em tokamaks, $\ln \Lambda \approx 16$ (depende de n e $K T_e$)

$$e \eta \approx 5 \times 10^{-7} \Omega \text{ m}$$

Propriedades da Resistividade Elétrica

Para $B=0$, $KT_e=0$, obtemos da equação de movimento

$$en\vec{E} = \vec{P}_{ei}$$

Como $\vec{j} = en(\vec{v}_i - \vec{v}_e)$,

$$\vec{P}_{ei} = \eta en \vec{j}$$

$$\vec{E} = \eta \vec{j}$$

Equação de Dois Fluidos

Densidade $\rho = n_i M + n_e m \approx n (M + m)$

Velocidade $\vec{v} = \frac{1}{\rho} (n_i M \vec{v}_i + n_e m \vec{v}_e) \approx \frac{M \vec{v}_i + m \vec{v}_e}{M + m}$

Densidade de corrente $\vec{j} = e (n_i \vec{v}_i - n_e \vec{v}_e) \approx n e (\vec{v}_i - \vec{v}_e)$

Pressão $p = p_i + p_e$

Equações para os fluidos de elétrons e íons

$$M n \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = e n (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) - \nabla p_i + \vec{P}_{ie}$$

$$m n \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e n (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) - \nabla p_e + \vec{P}_{ei}$$

Equação de Um Fluido

Equações MHD

Somando as equações dos dois fluidos $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p$

Combinação linear das eqs. $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} + \frac{1}{e n} (\vec{j} \times \vec{B} - \nabla p_e) \approx \eta \vec{j}$

Conservação da massa $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

Conservação da carga elétrica $\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{j}) = 0$

Difusão Clássica

Estado estacionário, $\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p$ $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}$

Na direção do campo magnético, $E_z = \eta_z j_z$ Lei de Ohm

Na direção perpendicular a \vec{B} , $\vec{v}_\perp = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \frac{\eta_\perp}{B^2} \nabla p$

$$v_\theta = -\frac{E_r}{B} \quad v_r = -\frac{\eta_\perp}{B^2} \frac{\partial p}{\partial r}$$

O fluxo associado à difusão è: $\Gamma_\perp = n v_\perp = \frac{\eta_\perp n (KT_i + KT_e)}{B^2} \nabla n$

Lei de Fick com coeficiente de difusão $D = \frac{\eta_\perp n (KT)}{B^2}$

Difusão em Tokamaks

Fórmula empírica, Bohm em 1946, $D_{\perp} = \frac{K T_e}{16 e B} \equiv D_B$

D_B não depende de n , aumenta com T_e e varia com B^{-1}

Num cilindro, o tempo de decaimento pode ser estimado como

$$\tau \approx \frac{N}{dN/dt} = \frac{n \pi R^2 L}{\Gamma_r 2 \pi R L} = \frac{n R}{2 \Gamma_r} \quad N \text{ é o número total de partículas}$$

Usando a lei de Fick com D_B , obtemos o tempo de Bohm τ_B

$$\tau_B \approx \frac{n R}{2 D_B \partial n / \partial r} \approx \frac{n R}{2 D_B n / R} = \frac{R^2}{2 D_B}$$

Estimativa de D_{\perp} e D_B

Para $KT_e = 100\text{eV}$, $B = 1\text{T}$

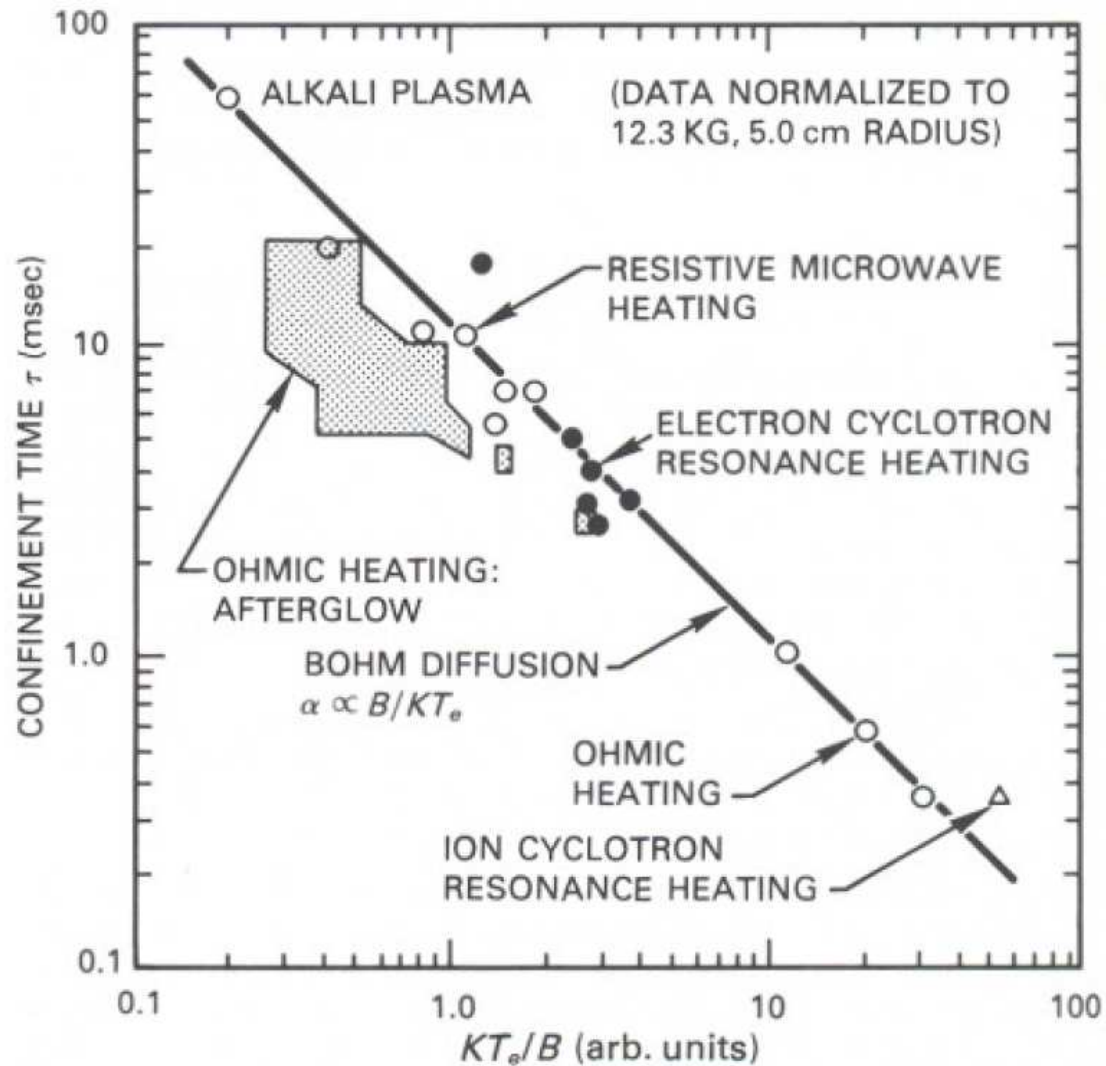
Com $n = 10^{19}\text{m}^{-3}$,

$$D_B \cong 6\text{ m}^2/\text{s}$$

$$D_{\perp} \cong 5,5 \times 10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$$

$$\frac{1}{16} \frac{KT_e}{eB} \cong D_B$$

$$D_{\perp} = \frac{2nKT_e\eta_{\perp}}{B^2}$$



Summary of confinement time measurements taken on various types of discharges in the Model C Stellarator, showing adherence to the Bohm diffusion law. [Courtesy of D. J. Grove, Princeton University Plasma Physics Laboratory, sponsored by the U.S. Atomic Energy Commission.]

Difusão pela Deriva $\vec{E} \times \vec{B}$

Fluxo perpendicular a \vec{B} , $\Gamma_{\perp} = n v_{\perp} = \frac{n E}{B}$

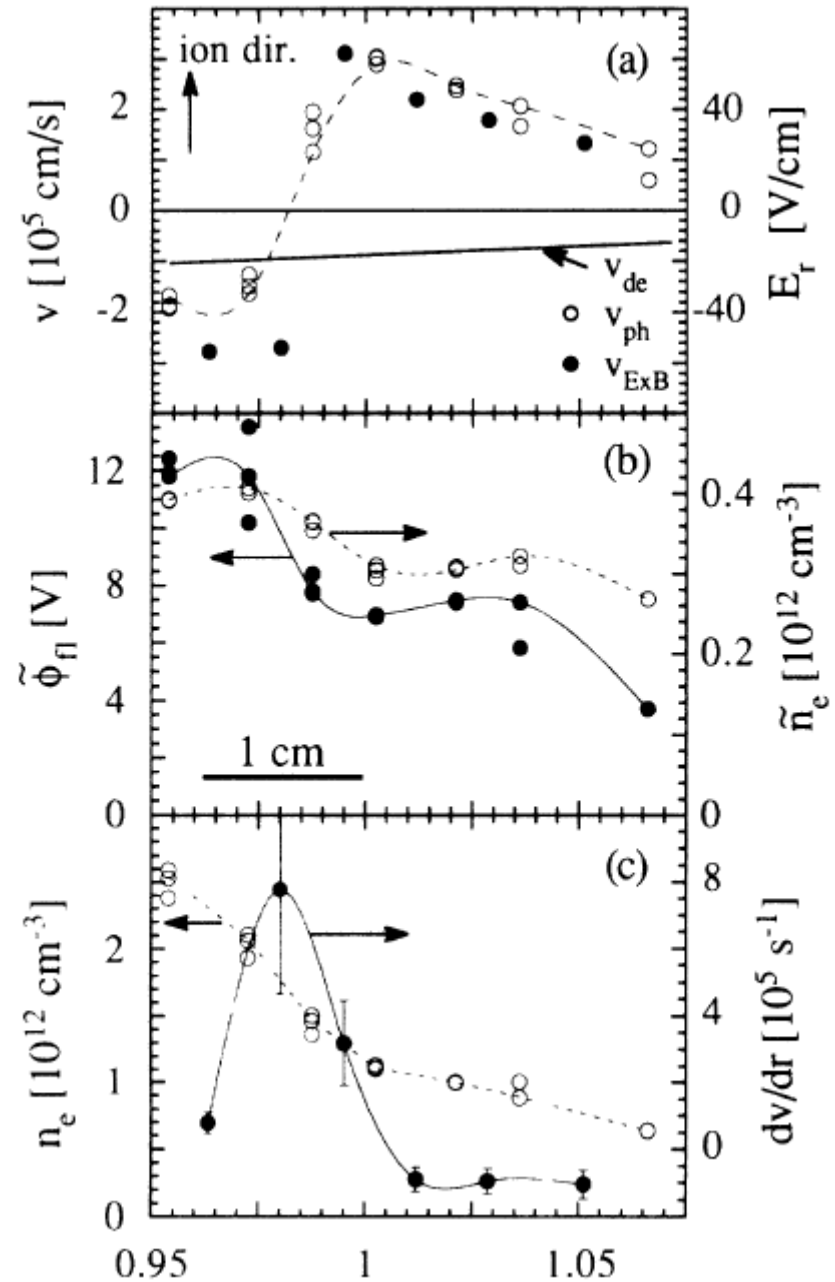
Se $e \Phi_{\max} \approx K T_e$, obtemos $E_{\max} \approx \frac{\Phi_{\max}}{R} \approx \frac{K T_e}{e R}$

Assim, $\Gamma_{\perp} \approx \gamma \frac{n K T_e}{e R B} \approx \gamma \frac{K T_e}{e B} \nabla n = -D_B \nabla n$

Fator empírico $\gamma \approx 1/16$

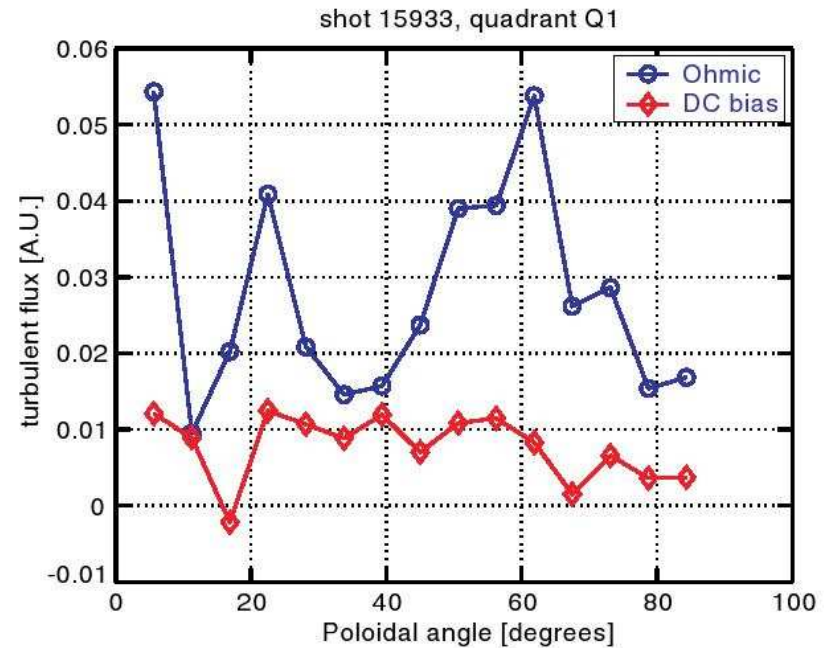
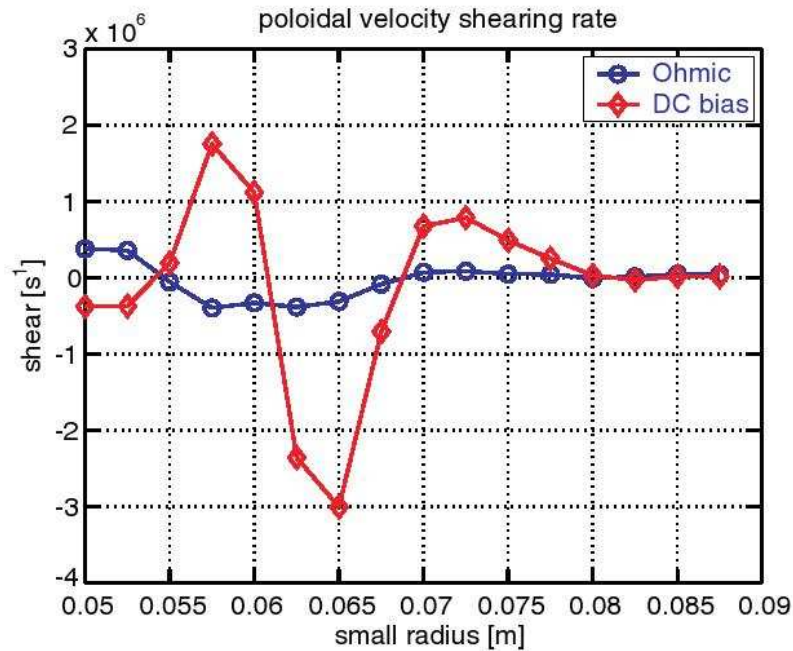
TextUp tokamak
Ritz, PRL, 1989

$V_E \approx V_{ph} \rightarrow$ regions where
 $U \approx 0$ (high transport)
 $U \approx 1$ (barrier)



CASTOR tokamak, Devinck, Phys. Plasmas, 2005

- ohmic discharge
- discharge with biased electrode



shear $\frac{dE}{dr} \approx \frac{dV_E}{dr}$

Particle transport at plasma edge
(as a function of poloidal angle)

