

Equilíbrio e Estabilidade

Baseada no Capítulo 6

F. F. Chen

Equação de Dois Fluidos

Densidade $\rho = n_i M + n_e m \approx n (M + m)$

Velocidade $\vec{v} = \frac{1}{\rho} (n_i M \vec{v}_i + n_e m \vec{v}_e) \approx \frac{M \vec{v}_i + m \vec{v}_e}{M + m}$

Densidade de corrente $\vec{j} = e (n_i \vec{v}_i - n_e \vec{v}_e) \approx n e (\vec{v}_i - \vec{v}_e)$

Pressão $p = p_i + p_e$

Equações para os fluidos de elétrons e íons

$$M n \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = e n (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) - \nabla p_i + \vec{P}_{ie}$$

$$m n \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e n (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) - \nabla p_e + \vec{P}_{ei}$$

Equação de Um Fluido

Equações MHD

Somando as equações dos dois fluidos

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p$$

Combinação linear das eqs.

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} + \frac{1}{en} (\vec{j} \times \vec{B} - \nabla p_e) \approx \eta \vec{j}$$

Consevação da massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Conservação da carga elétrica

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{j}) = 0$$

Equilíbrio MHD

Das equações do movimento, para equilíbrio estático :

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{j}_\perp = \frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2} = (KT_i + KT_e) \frac{\vec{B} \times \nabla n}{B^2}$$

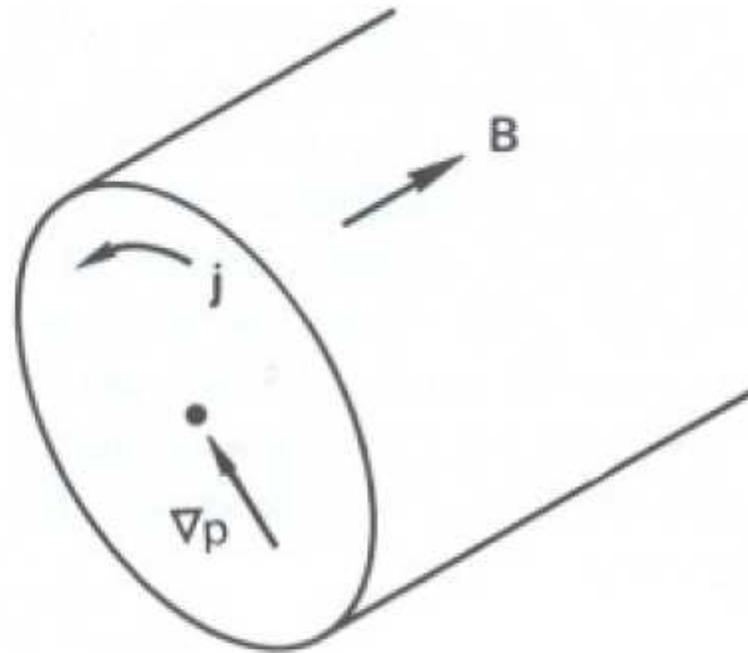


FIGURE 6-2 The $j \times B$ force of the diamagnetic current balances the pressure-gradient force in steady state.

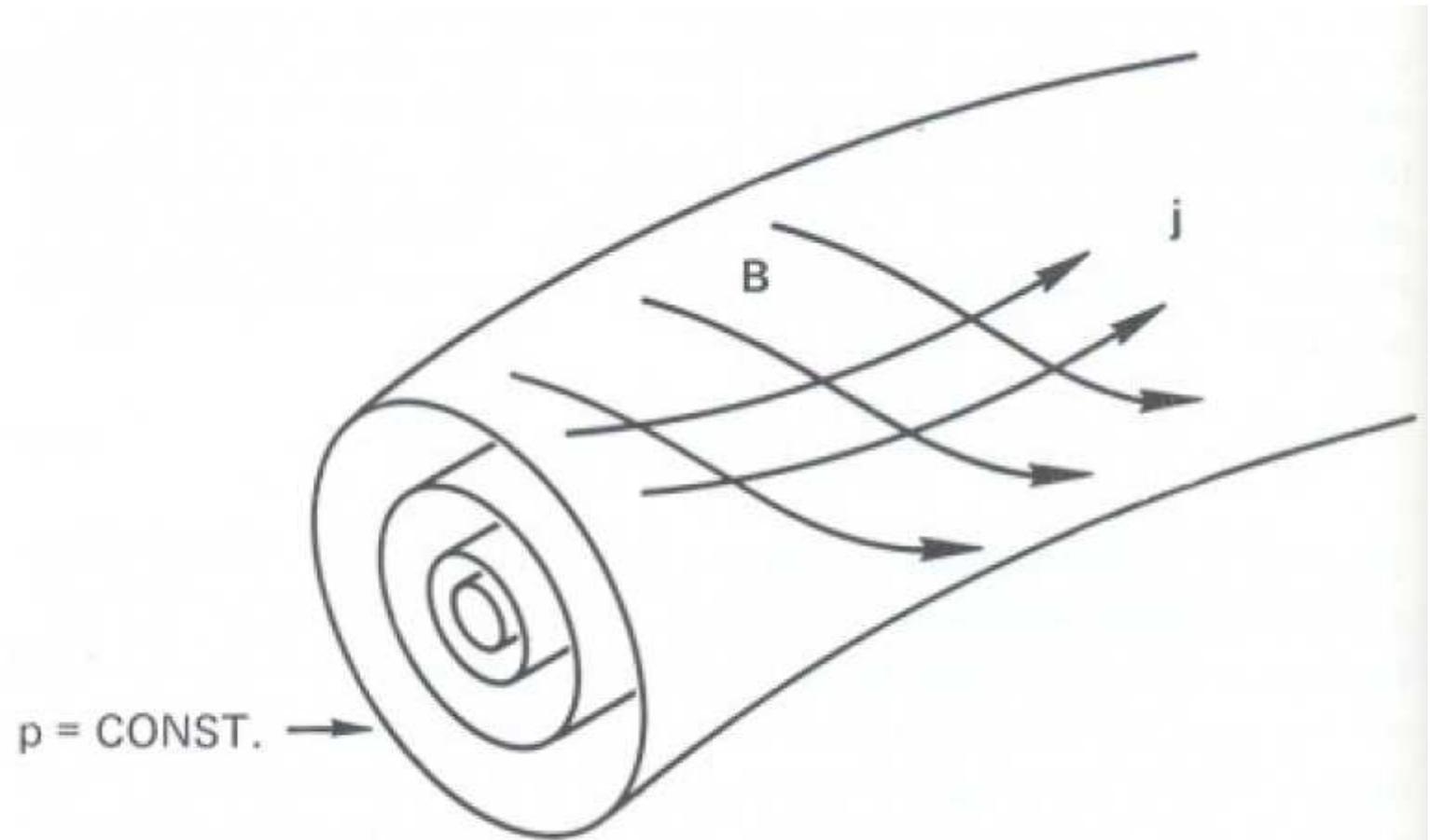
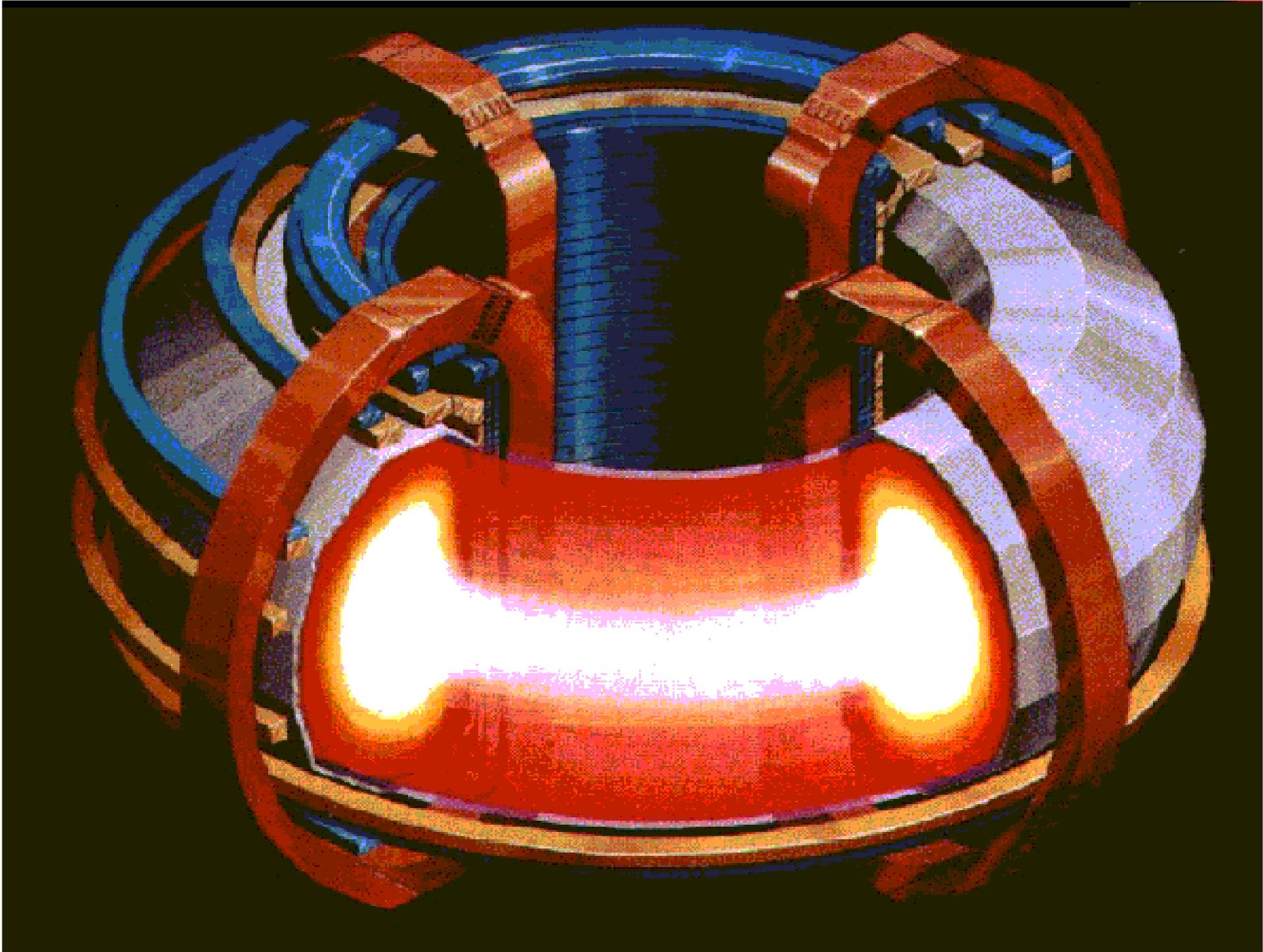
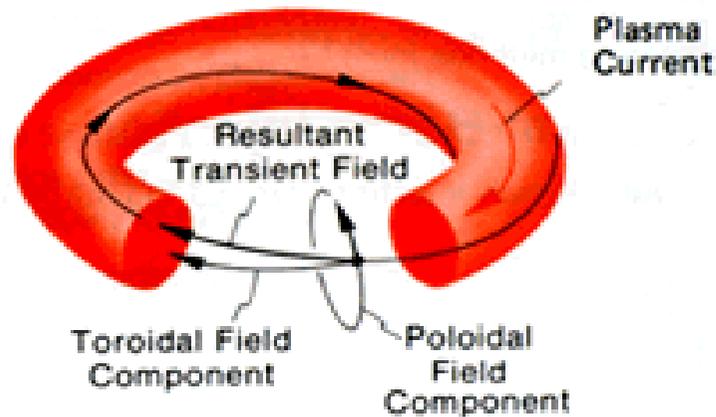
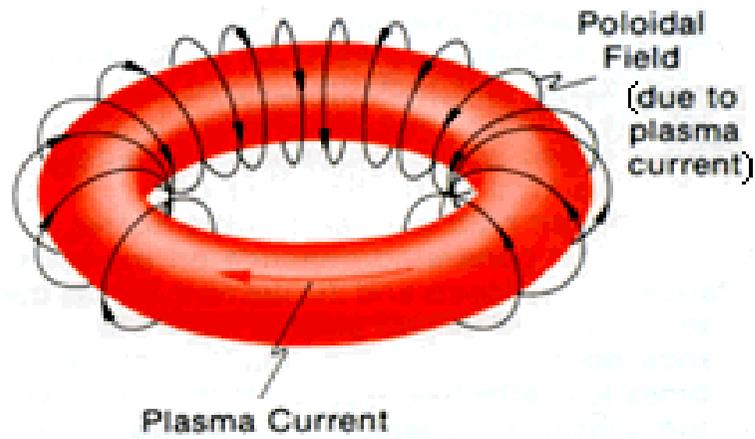
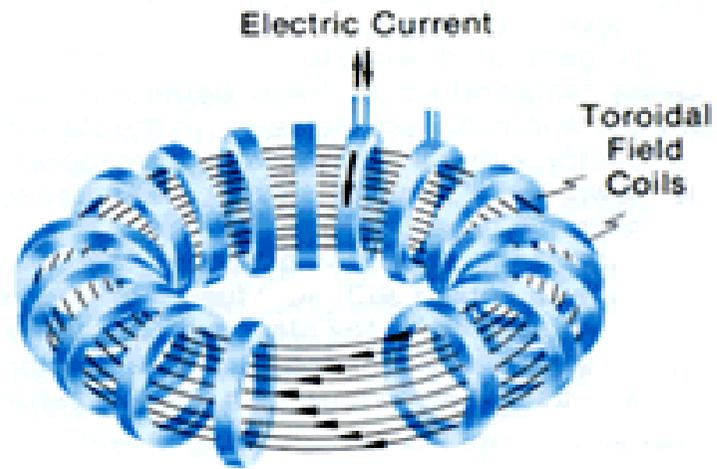


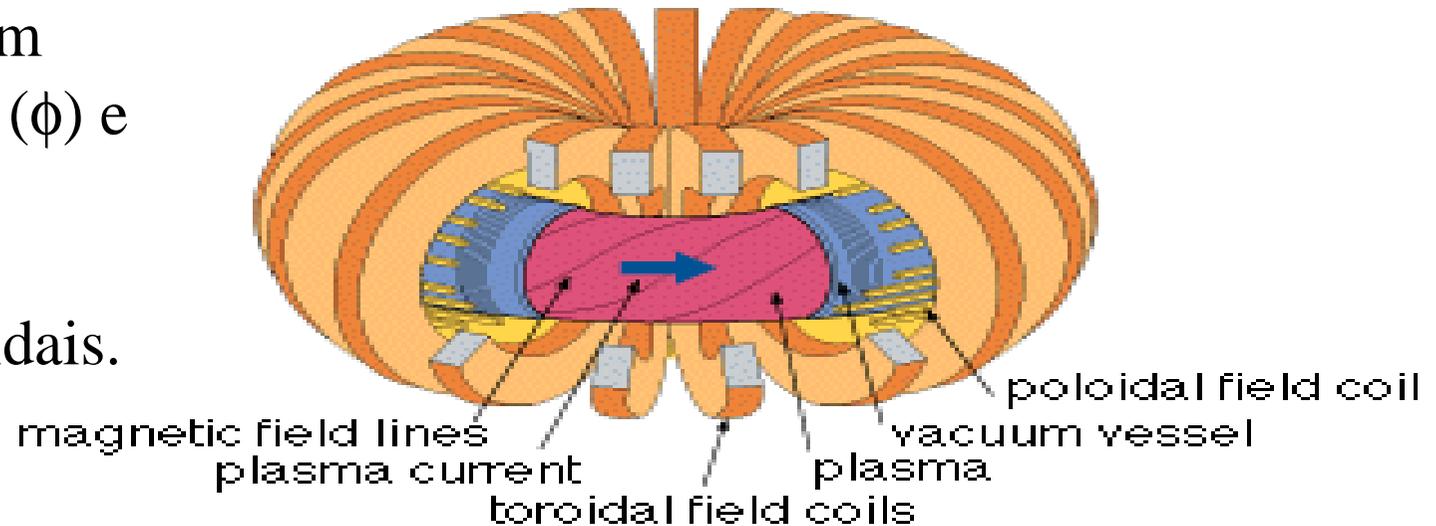
FIGURE 6-3 Both the j and B vectors lie on constant-pressure surfaces.





Campo Magnético de Equilíbrio no Tokamak

Linhas descrevem
 ângulos toroidal (ϕ) e
 poloidal (θ),
 em superfícies
 magnéticas toroidais.



Equação da linha

$$\vec{B}_0 \times d\vec{l} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\vartheta} = \frac{\partial H_0(J)}{\partial J}, \quad \dot{j} = -\frac{\partial H_0(J)}{\partial \vartheta}$$

Campo integrável

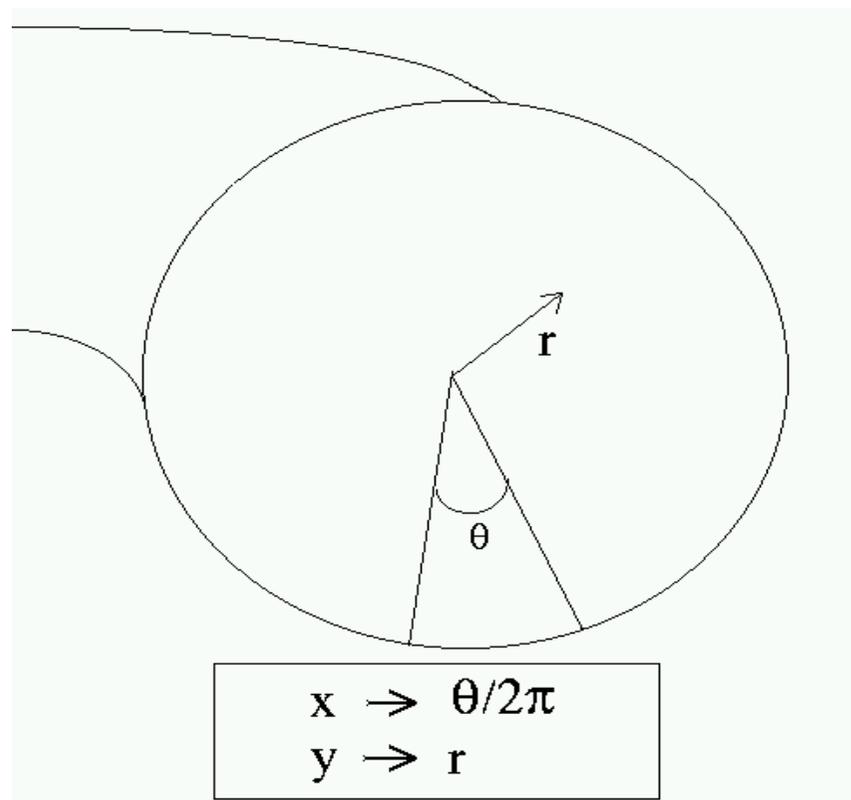
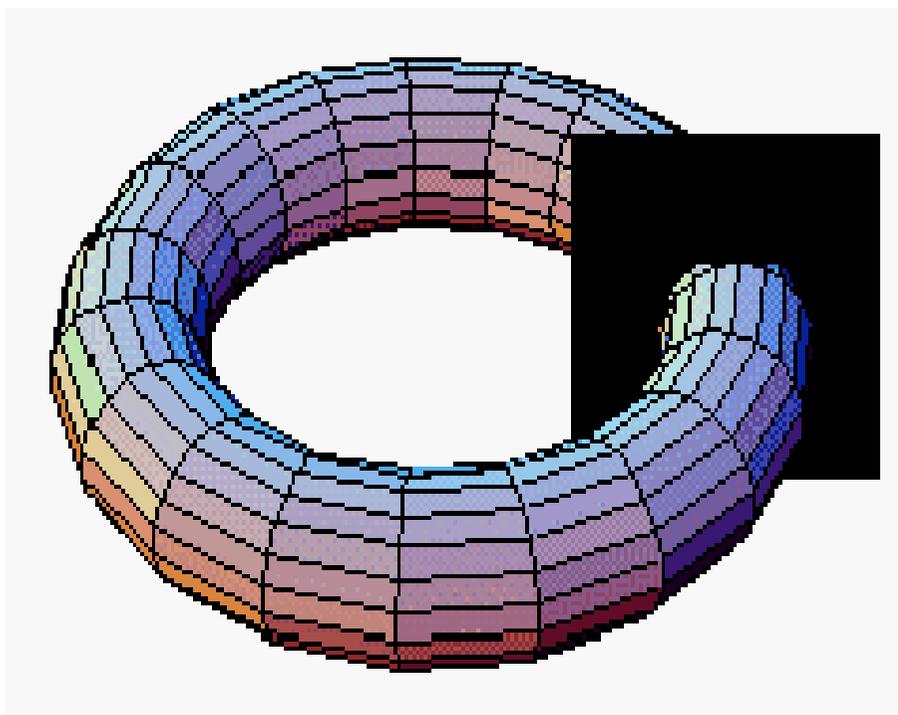
t (tempo canônico) $\equiv \phi$ (ângulo toroidal)

Frequência $\omega(J) = \frac{\partial H_0}{\partial J}$

Plano para o mapa de Poincaré

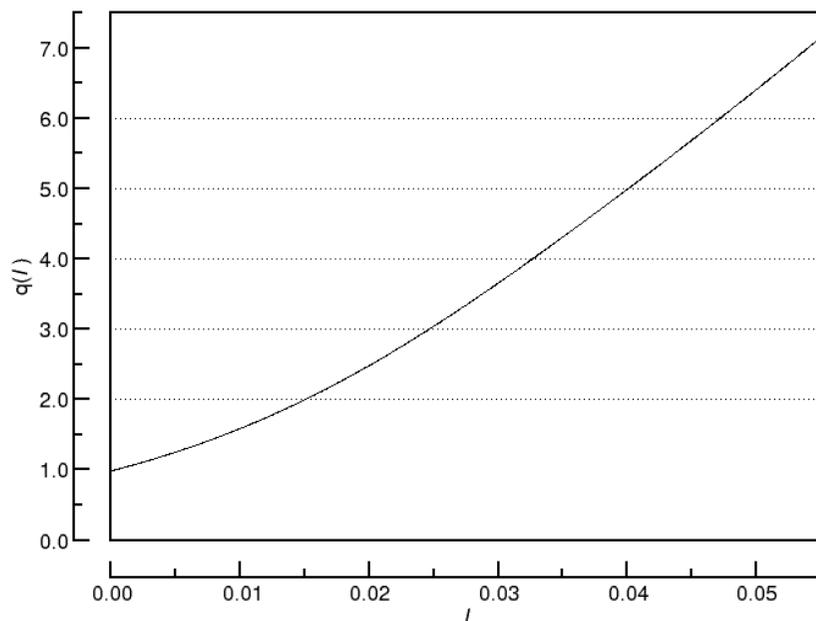
Ângulos φ (toroidal) e θ (poloidal)

$m\varphi - n\theta = 0$ equação da linha magnética na superfície racional com $q = d\theta/d\varphi = m/n$.

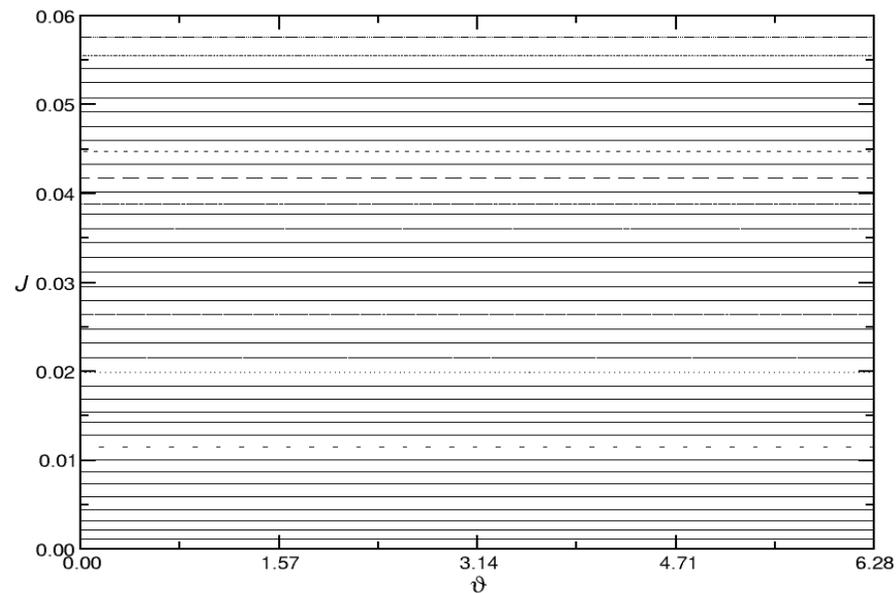


Mapa de Poincaré não perturbado

Superfície racional em $q = m/1$ (m ilhas a serem criadas pela perturbação ressonante com $m/1$).



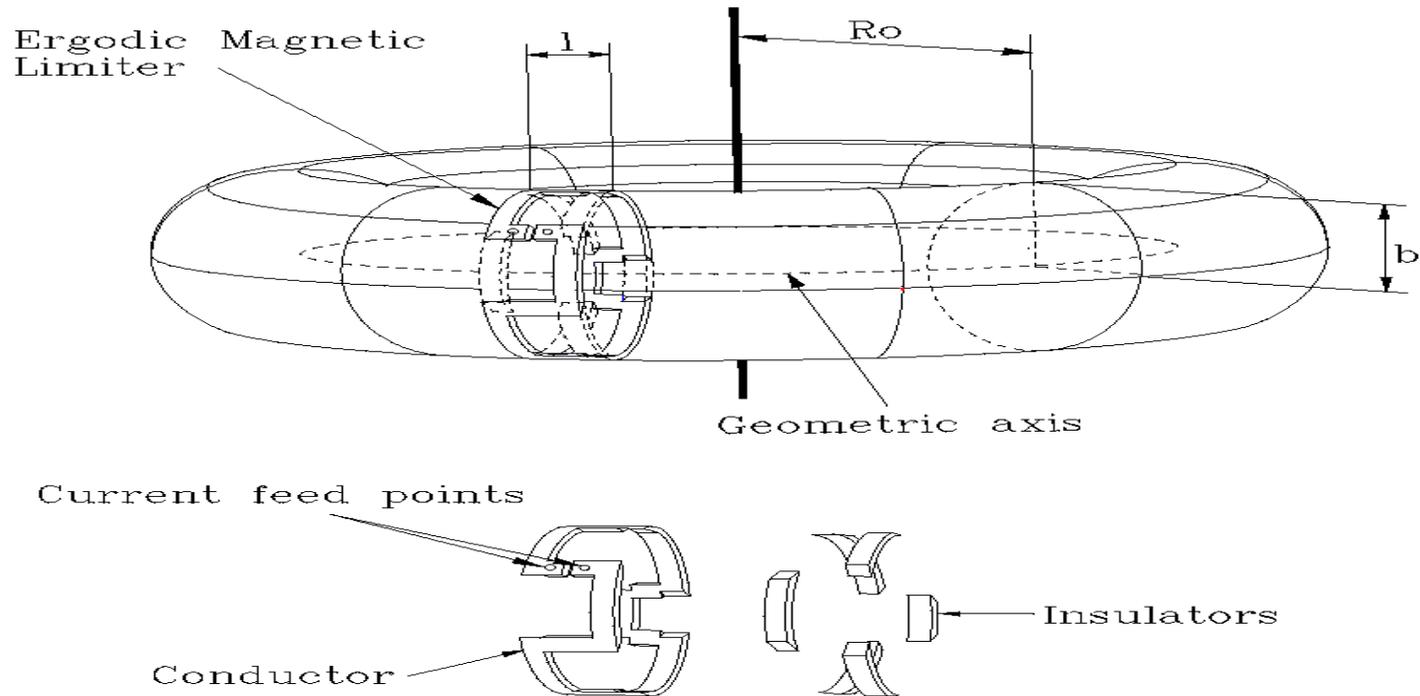
Perfil radial de $q = 1/\omega$ para equilíbrio com $\gamma=3,25$.



Ação (J) x ângulo (θ).

Limitador Caótico

Perturbações ressonantes em superfícies magnéticas



Prturbação ressonante m/n .

Parâmetro de controle: corrente no limitador I_h .

Caos Lagrangiano

Simetria \Rightarrow sistema integrável

$$H = H_0(I) \Rightarrow I = I_0, \vartheta = \omega t + \vartheta_0$$

(I, ϑ) ângulo/ação de H_0

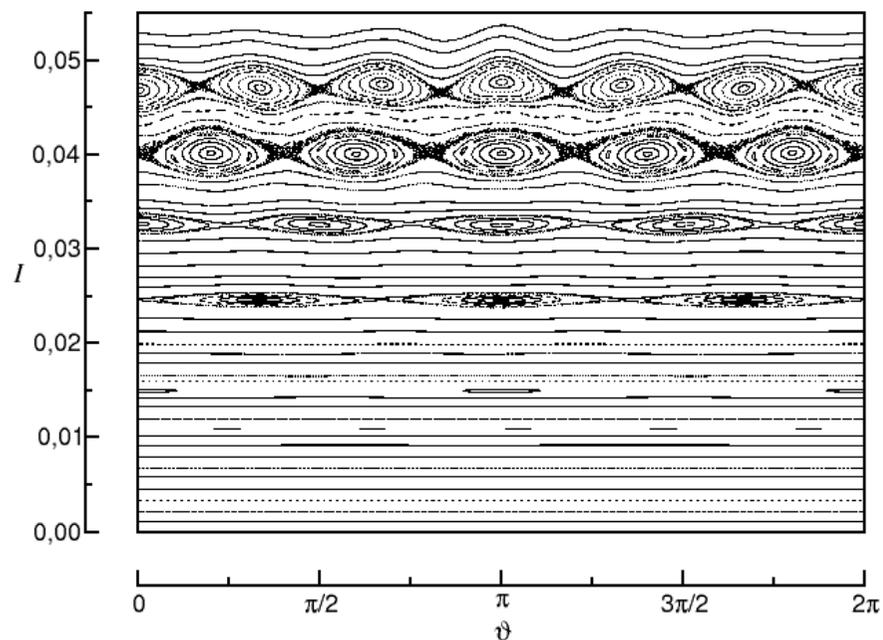
Perturbações helicoidais ($\varepsilon \neq 0$) \Rightarrow quebra de simetria

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \vartheta)$$

$\varepsilon \ll 1 \Leftrightarrow$ sistema quase-integrável

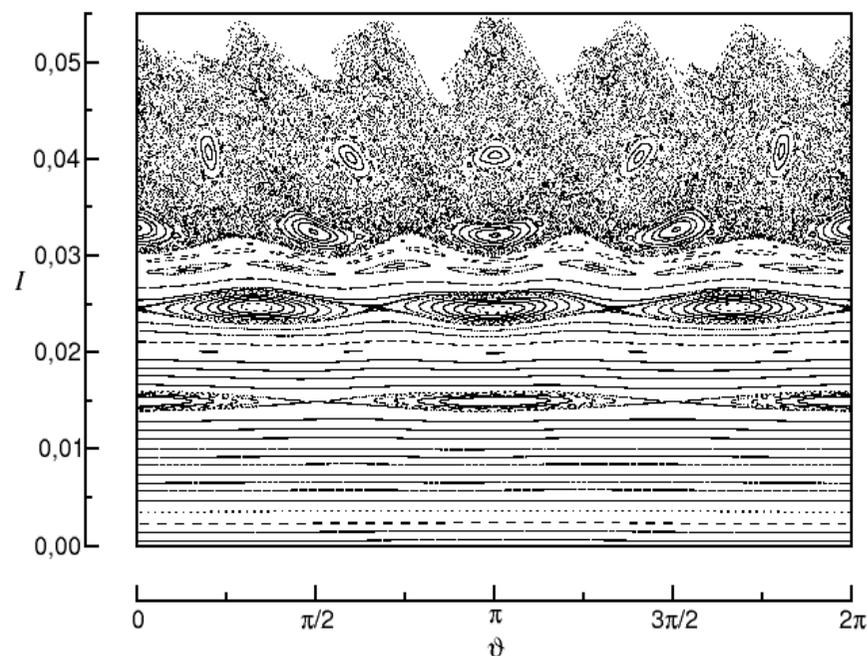
Mapas de Poincaré para Mesmo Equilíbrio e Perturbações Diferentes

Ilhas magnéticas



$$5/1, I_h/I_p = 0,7 \times 10^{-2}$$
$$\gamma = 3,25, \beta = 0$$

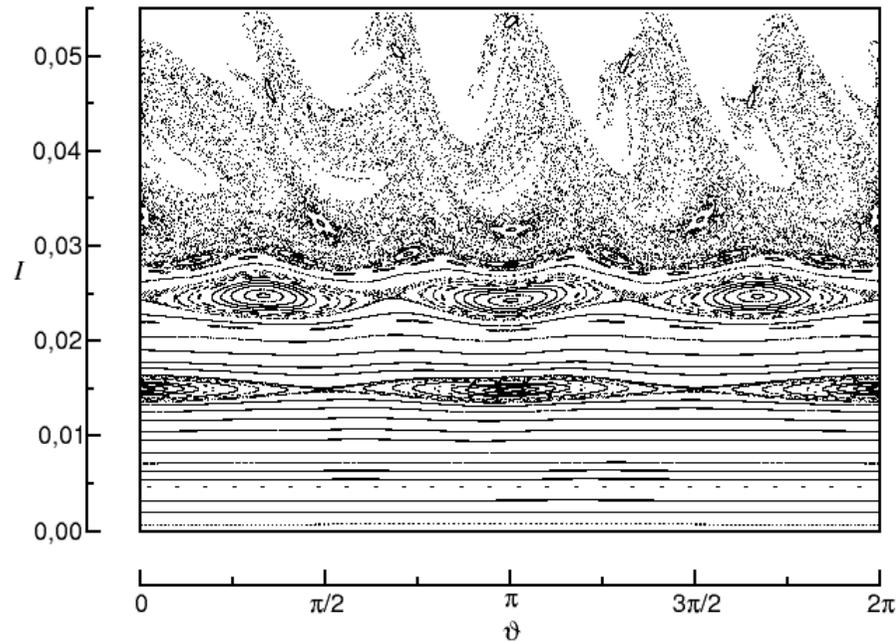
Superfícies destruídas na borda



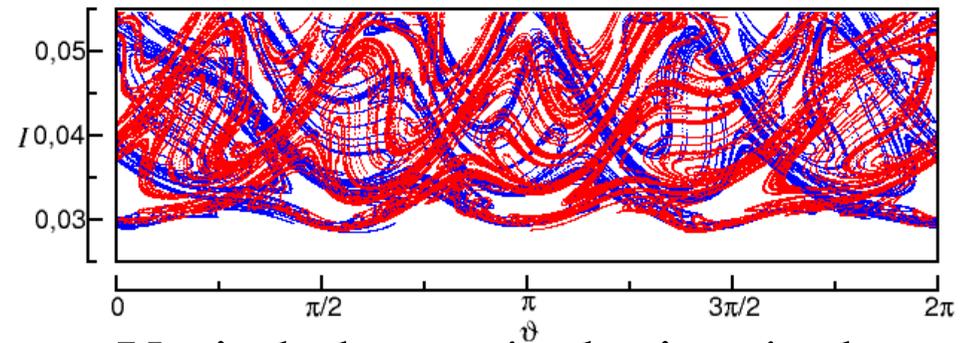
$$5/1, I_h/I_p = 3,5 \times 10^{-2}$$
$$\gamma = 3,25, \beta = 0$$

Escape das Linhas Caóticas

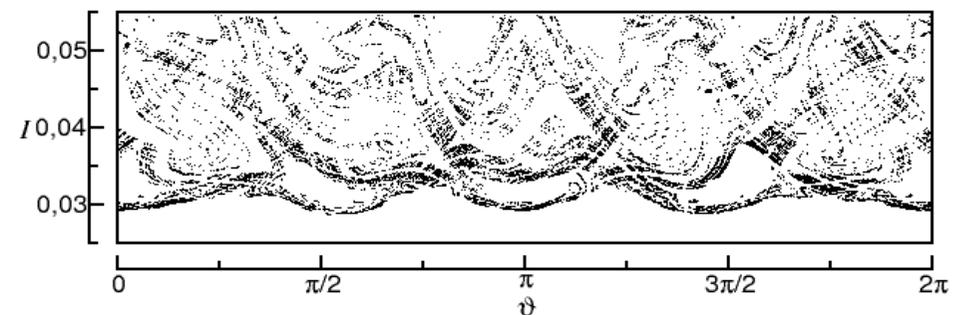
Perturbação 5/1 com $I_h/I_p = 5,5 \times 10^{-2}$
Equilíbrio com $\gamma = 3,25$ $\beta = 0$



Mapa de Poincaré



Variedades estável e instável

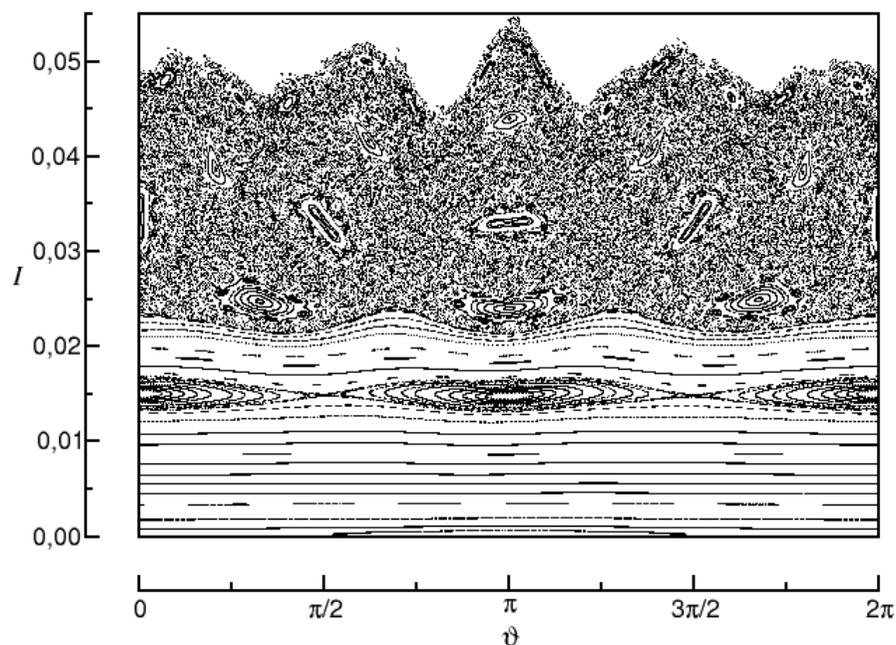


Sela caótica

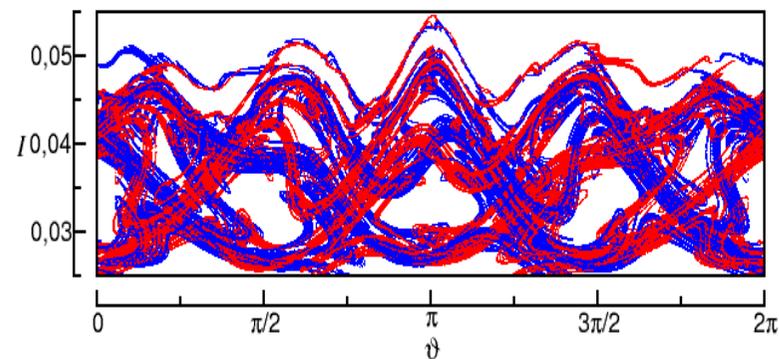
Escape das Linhas Caóticas

Perturbação 4/1, $I_h/I_p = 6,3 \times 10^{-2}$

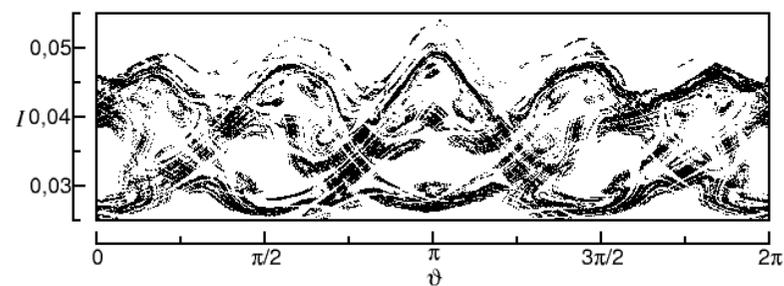
Equilíbrio com $\gamma = 3,25$ $\beta = 0$



Mapa de Poincaré



Variedades estável e instável



Sela Caótica

Parâmetro β

Das equações do equilíbrio,

$$\nabla p = \mu_0^{-1} \nabla \vec{B} \times \vec{B} = \mu_0^{-1} \left[(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \right]$$

ou

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \mu_0^{-1} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

È comum que

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} \approx \text{constante}$$

Parâmetro usado na literatura de fusão :

$$\beta \equiv \frac{\nabla p}{B^2 / \mu_0} = \frac{n \sum_j KT_j}{B^2 / \mu_0} = \frac{\text{Pressão cinética}}{\text{Pressão magnética}}$$

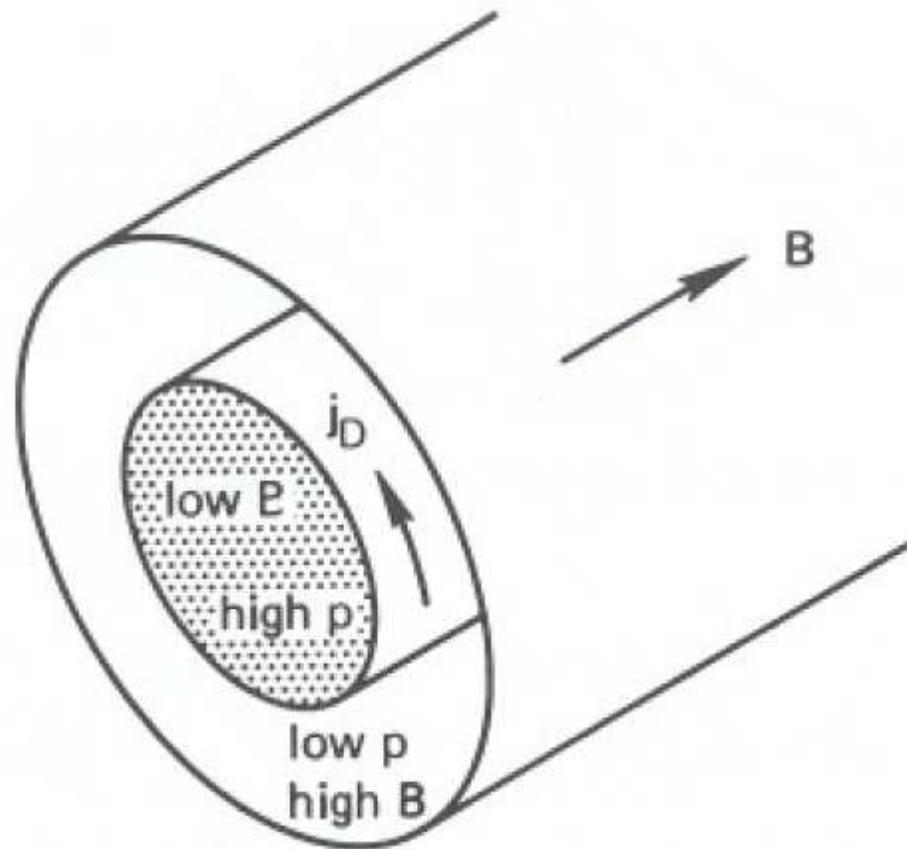


FIGURE 6-5 In a finite- β plasma, the diamagnetic current significantly decreases the magnetic field, keeping the sum of the magnetic and particle pressures a constant.

Difusão do campo magnético

A partir das equações,

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}$$

obtemos, para $\vec{v} = 0$,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \eta \vec{j} = -\frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \vec{B})$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B} \approx \frac{\eta}{\mu_0 L^2} \vec{B}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{\pm t/\tau} \quad , \quad \tau = \frac{\mu_0 L^2}{\eta}$$

$$\text{Energia dissipada } \eta j^2 \tau = \eta \left(\frac{B}{\mu_0 L} \right)^2 \frac{\mu_0 L^2}{\eta} = 2 \left(\frac{B^2}{2 \mu_0} \right)$$

τ é o tempo para a energia magnética ser dissipada pelo efeito Joule

Ondas de deriva resistivas

Equilíbrio: $KT = \text{cte}$ e $\nabla n = \frac{dn}{dr} \hat{x}$

Derivas diamagnéticas $\vec{v}_{Di} = \frac{KT_i}{eB} \frac{n'_0}{n_0} \hat{y}$ $\vec{v}_{De} = -\frac{KT_e}{eB} \frac{n'_0}{n_0} \hat{y}$

Flutuações: com vetor de onda k_z na direção de B

Relação de Boltzmann para elétrons $\frac{n_1}{n_0} = \frac{e\phi_1}{KT_e}$

Flutuação n_1 cria campo elétrico $E_y = -\nabla\phi_1 = -ik_y\phi_1$

Esse campo elétrico cria deriva $v_{1x} = \frac{E_y}{B} = \frac{-ik_y\phi_1}{B}$

Eq. continuidade $\frac{\partial n_1}{\partial t} = -v_{1x} \frac{\partial n_0}{\partial x}$

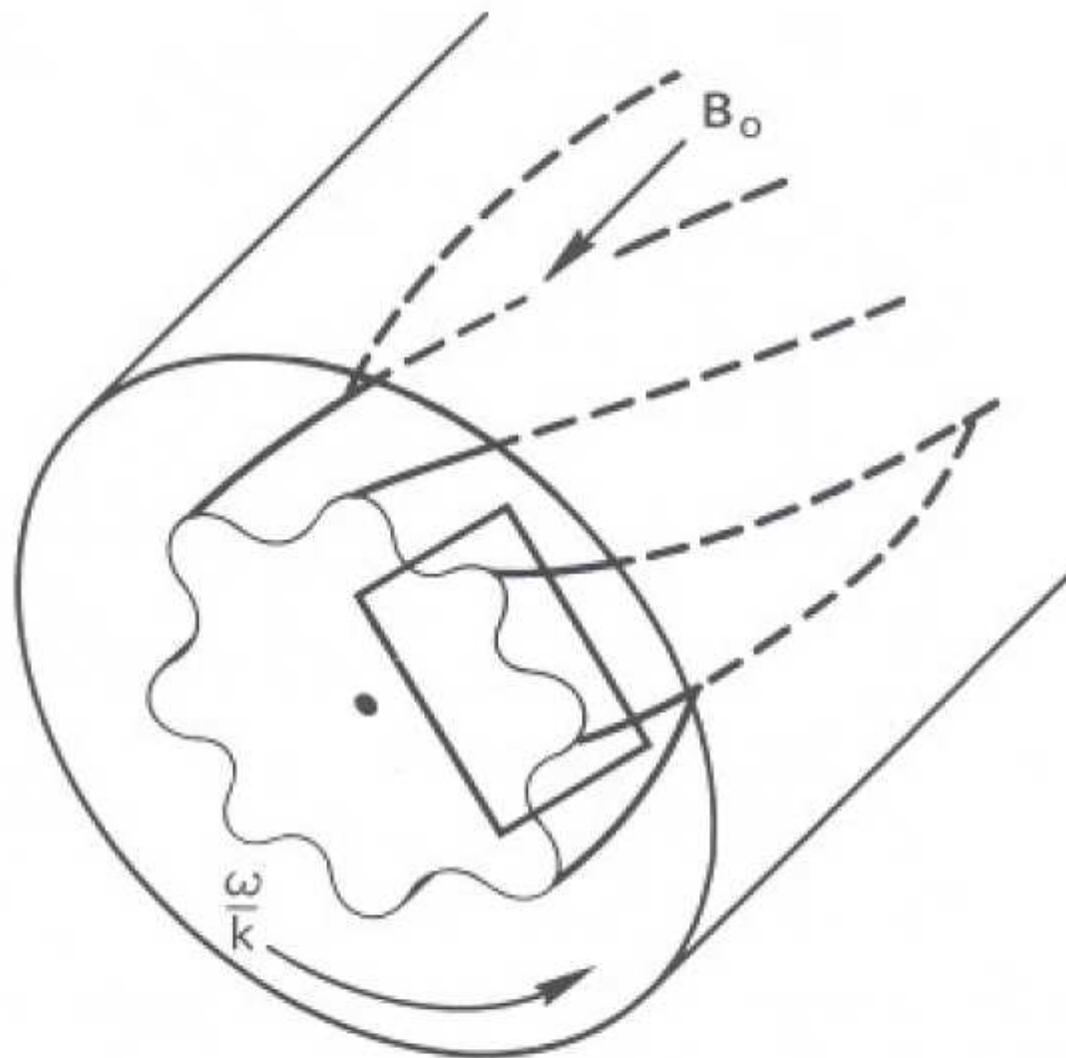
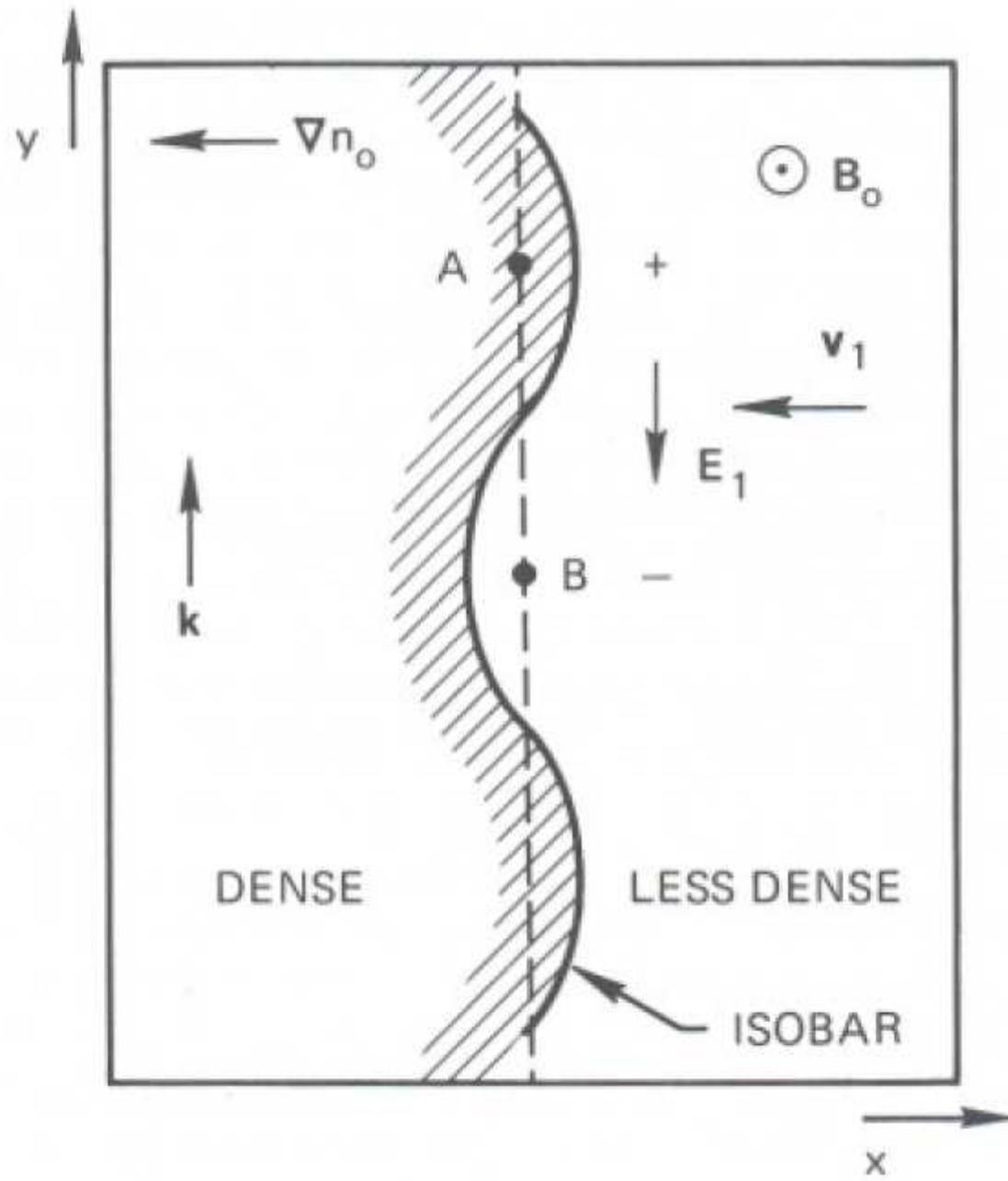


FIGURE 6-13 Geometry of a drift instability in a cylinder. The region in the rectangle is shown in detail in Fig. 6-14.



Physical mechanism of a drift wave.

Relação de dispersão das ondas

3 equações para 3 variáveis: v_{1x} , n_1 , ϕ_1

$$\text{Relação de dispersão: } v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_y} = -\frac{KT_e}{eB} \frac{n'_0}{n_0} = v_{\text{De}}$$

Velocidade de fase = velocidade de deriva diamagnética

(Nas experiências, $k_z \ll k_y$, $v_{\text{thi}} \ll v_{\text{ph}} \ll v_{\text{the}}$)

Instabilidade de deriva: defasagem das flutuações n_1 e ϕ_1

Imag. $\omega > 0$

$$\omega \text{ complexa: } \omega \approx k_y v_{\text{De}} + [i (k_y v_{\text{De}})^2 / \sigma_{//}]$$