4300417 Fenômenos Não-Lineares: Introducção ao Caos Determinístico

3° Lista Exercício Problema 2012

1- Considere o mapa circular

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega + (K/2\pi)\,\mathrm{sen}(2\pi\theta_n) \quad , \quad (\mathrm{mod}\ 1) \quad , \qquad -1 < \theta_n < 1$$

onde Ω e K são os parâmetros de controle.
Considere três trajetórias com o parâmetro $\Omega = 0{,}4$ e um ângulo inicial θ_0 a ser escolhido (informe esse ângulo).

a) Para K = 0,8 as trajetórias são periódicas. Inicialmente, faça o gráfico de θ_n em função de n (de n = 0 até n = 1000). A seguir, determine o período da órbita e o número de rotação W (isto é, o valor médio de $< \theta_{n+1} - \theta_n >$). Finalmente, obtenha o expoente de Lyapunov λ da órbita considerada; para obter esse resultado faça o gráfico de λ em função do número de iterações N, desde N = 1000 até N = 5000. **(1.0)**

b) Idem para uma trajetória quase-periódica com K = 0,65. **(1.0)**

c) Idem para uma trajetória caótica com K = 2,8. Verifique que o número de rotação não converge quando N aumenta. **(1.0)**

d) Discuta os valores do Lyapunov encontrado nos itens anteriores. **(0.75)**

e) Se caso o sistema anterior fosse bi-dimensional teríamos dois expoentes de Lyapunov λ_1 e λ_2. A partir deles como poderíamos caracterizar as órbitas periódicas, quase-periódicas ou caóticas? **(0.75)**

Dica:

Para calcular os expoentes de Lyapunov de mapas unidimensionais, podemos utilizar o seguinte algorítmo:

Considere o mapa unidimensional $F(X_i)$.

Os expoentes de Lyapunov são:

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln\left|F'(x_i)\right|$$

Na experiência numérica só podemos trabalhar com N finito, então utilizamos:

$$\lambda_N = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln\left|F'(x_i)\right|$$

À medida que N cresce, λ converge para um valor médio oscilando em torno deste valor. Esse valor é o expoente de Lyapunov obtido numericamente.

Para calcular os expoentes no mesmo intervalo de parâmetros dos diagramas de bifurcação basta repetir o algoritmo acima para cada parâmetro.

2- Considere o mapa de Ikeda

$$f_r(z) = r + 0.9z \exp\left[i\left(0.4 - \frac{6.0}{1 + |z|^2}\right)\right] \qquad z = x + i\,y$$

onde r é um parâmetro de controle.

Esta questão diz respeito a uma crise observada nesse mapa, com a destruição do atrator caótico para o parâmetro crítico $r_c \cong 1{,}00$. Como conseqüência dessa crise, para $r > r_c$, há órbitas com transientes caóticos muito longos que são atraídas para o ponto fixo estável remanescente.

a) Para $r = 0{,}997 < r_c$, obtenha numericamente o atrator caótico e o ponto fixo estável desse mapa no espaço de fase (**y** vs. **x**). **(0.5)**

b) Faça a bacia de atração para o atrator caótico e o ponto fixo. Na mesma figura da bacia de atração marque como P_1 o ponto fixo estável e plote também o atrator caótico. Use o espaço **x** e **y** ϵ [-10;10]. **(1.5)**

c) Para $r = 1{,}005 > r_c$, obtenha numericamente o ponto fixo estável desse mapa no espaço de fase (**y** vs. **x**). (Não há atrator caótico para esse parâmetro r). **(0.5)**

d) Para os seguintes valores: r = 1,001; r = 1,003; r = 1,005 e r = 1,007, considere uma órbita iniciada em ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$), na região do antigo atrator caótico, e obtenha numericamente a duração do transiente caótico (número de iterações para essa órbita sair da região do antigo atrator caótico rumo ao ponto fixo estável). Discuta o procedimento numérico adotado e os valores obtidos. **(1.0)**

e) Faça o mesmo procedimento do item d) considerando uma órbita iniciada em ($x_0 = 0$, $y_0 = 1$), fora da região do antigo atrator caótico. **(1.0)**

f) A partir das informações dadas em sala de aula e dos itens obtidos anteriormente, discuta a crise e conseqüentemente a destruição do atrator caótico, que acontece quando $r > r_{c..}$ **(1.0)**

(Para aprofundar a sua compreensão sobre o transiente caótico observado, veja informações adicionais no artigo *Critical Exponent of Chaotic Transients in Nonlinear Dynamical Systems*, de C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, publicado em Physical Review Letters, *57*, 1284 (1986)).