PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prof. Iberê L. Caldas

Segundo Estudo Dirigido

2º semestre de 2020

Os estudos dirigidos podem ser realizados em duplas.
Apenas os exercícios marcados com asteriscos precisam ser entregues para avaliação.
As resoluções dos exercícios devem ser entregues ao monitor em um único arquivo pdf.
A resolução de cada exercício deve seguir a numeração indicada em seu enunciado.
Exercícios entregues em desacordo com estas regras serão desconsiderados na correção.

1. Pêndulo Simples

O pêndulo simples consiste em uma massa m presa a um ponto fixo por uma haste de comprimento l sob ação da aceleração da gravidade $\vec{g} = -g\hat{y}$. A variável que usaremos para estudar o movimento deste pêndulo é o ângulo ϕ entre a direção da aceleração da gravidade e o segmento de reta formado pela haste do pêndulo. Consideraremos que o ângulo ϕ é medido no sentido anti-horário ($\phi > 0$ para a massa à direita da posição de equilíbrio) e também que todo o movimento ocorre em um plano vertical.

1.1 Mostre que o pêndulo descrito acima possui energias cinética e potencial representadas, respectivamente, por

$$K = \frac{ml^2}{2}\dot{\phi}^2 \tag{1}$$

e

$$U = -mgl\cos\phi. \tag{2}$$

Em seguida, mostre também que a Lagrangiana do pêndulo simples é dada por

$$L(\phi, \dot{\phi}) = ml^2\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + \omega_0^2\cos\phi\right) \tag{3}$$

onde definimos $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

1.2 Mostre que o momento generalizado associado à variável ϕ é dado por $p_\phi = ml^2\dot{\phi}$. Então, com o auxílio deste resultado, mostre que a Hamiltoniana do pêndulo simples é dada por

$$H(p_\phi, \phi) = \frac{p_\phi^2}{2ml^2} - ml^2\omega_0^2\cos\phi. \tag{4}$$

Utilize a equação anterior, juntamente com as equações de movimento de Hamilton, para mostrar que

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2\sin\phi = 0. \tag{5}$$

***1.3** Determine os pontos de equilíbrio do pêndulo simples. Em seguida, realize a análise de estabilidade linear destes pontos fixos. Calcule também a energia do sistema em cada ponto de equilíbrio. Dentre os valores de energia calculados, indique a energia da separatriz, a qual será denotada por E_s. Neste exercício, devido ao caráter periódico da variável angular, considere que $-\pi < \phi \leq \pi$.

***1.4** Neste exercício, iniciaremos a análise numérica do pêndulo simples. Para esta finalidade, considere os seguintes valores de parâmetros: $m = 0.1\,\text{kg}$, $l = 1\,\text{m}$ e $g = 10\,\text{m/s}^2$. Construa uma representação gráfica do plano de fase do pêndulo simples. Com este objetivo, realize a evolução temporal de aproximadamente 20 condições iniciais, as quais devem produzir trajetórias dentro e fora da separatriz. Todas as trajetórias resultantes devem ser colocadas em um mesmo gráfico. Anexe a figura obtida ao seu trabalho.

1.5 Usando a expressão da energia do pêndulo simples, demonstre a validade da relação

$$\dot{\phi}^2 = \frac{2E}{ml^2} + 2\omega_0^2 \cos\phi. \tag{6}$$

Considere agora um movimento do pêndulo no qual ele parte da posição $\phi = 0$ no instante t_0 e se desloca até o seu ângulo máximo $\phi = \alpha$, no qual $p_\phi = \dot{\phi} = 0$. O tempo necessário para percorrer este trecho é um quarto do período do seu movimento ($t_f = T/4$). Mostre que a energia do pêndulo neste movimento é dada por

$$E = -ml^2\omega_0^2 \cos\alpha. \tag{7}$$

Então, utilizando os resultados anteriores e a relação $\cos\phi - \cos\alpha = 2(\sin^2\alpha/2 - \sin^2\phi/2)$, mostre que

$$\frac{d\phi}{dt} = 2\omega_0\sqrt{\sin^2\alpha/2 - \sin^2\phi/2}, \tag{8}$$

para um movimento pendular de amplitude α.

Ao contrário do oscilador harmônico, que possui o mesmo período para todas as amplitudes, o período do pêndulo simples depende da amplitude do movimento. Utilizando as equações obtidas anteriormente neste exercício, mostre que o período do movimento do pêndulo resulta da seguinte expressão:

$$T = \left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha/2} \frac{d(\phi/2)}{\sqrt{\sin^2\alpha/2 - \sin^2\phi/2}}\right] T_0, \tag{9}$$

onde $T_0 = 2\pi/\omega_0$ é o período de pequenas oscilações. Como $\alpha = \alpha(E)$, temos então uma equação que nos permite calcular o período em função da energia.

1.6 Calcule $T(\alpha)$ para $\alpha \approx 0$ e $\alpha \approx \pi$. Interprete estes resultados fisicamente. Não utilize cálculos numéricos.

***1.7** Empregando os parâmetros do exercício **1.4**, construa numericamente a curva $T/T_0 \times E$, para $T_0 = 2\pi/\omega_0$. A figura obtida deverá ser anexada ao seu trabalho.

***1.8** Calcule numericamente a trajetória $\phi(t)$ do pêndulo simples utilizando os parâmetros do exercício **1.4** e os valores iniciais $\phi(t=0) = 0$ e $p_\phi(t=0) = 0.3\ \mathrm{kg\,m^2/s}$. O gráfico obtido deverá ser anexado ao seu trabalho. Utilize a figura para estimar o período da trajetória. Esta estimativa é coerente com o resultado do item **1.7**?

2. Pêndulo Elástico

O pêndulo elástico consiste em um pêndulo simples no qual a haste é substituída por uma mola com constante k e comprimento de repouso l_0. Trata-se de um sistema conservativo com dois graus de liberdade, considerando que o pêndulo se move em um plano vertical, cujo rico comportamento dinâmico será explorado ao longo do curso.

***2.1** Mostre que, adotando um sistema de coordenadas cartesianas com origem no ponto em que a mola está fixada e eixo y tal que $\vec{g} = -g\hat{y}$, as energias cinética e potencial do pêndulo elástico são dadas, respectivamente, por

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{10}$$

e

$$U = mgy + \frac{k}{2}(\sqrt{x^2+y^2} - l_0)^2. \tag{11}$$

Em seguida, mostre que o ponto de equilíbrio estável deste pêndulo ocorre para $x = 0$, $y = -l$ e momentos conjugados nulos, com $l = l_0 + \frac{mg}{k}$.

2.2 Agora, reformularemos nosso sistema dinâmico em coordenadas e parâmetros adimensionais, o que simplificará substancialmente nossos cálculos subsequentes. Mostre que, normalizando a energia total para $\varepsilon = \frac{E}{kl^2}$ e o tempo para $\tau = t\sqrt{k/m}$, definindo o parâmetro $f = \frac{mg}{kl}$ e introduzindo as coordenadas normalizadas $q_1 = \frac{x}{l}$ e $q_2 = \frac{y+l}{l}$, as quais estão centradas no ponto de equilíbrio estável, as energias do exercício **2.1** podem ser reescritas como

$$K = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \tag{12}$$

e

$$U = fq_2 + \frac{1}{2}\left[1 - f - \sqrt{q_1^2 + (1-q_2)^2}\right]^2. \tag{13}$$

Note que, em nossa nova definição para a energia cinética, estabelecemos a notação $\dot{q}_j = \mathrm{d}q_j/\mathrm{d}\tau$, para $j = 1, 2$. Observe também que, de maneira complementar ao processo de adimensionalização, o "nível zero" da energia potencial foi redefinido.

2.3 Escreva a Lagrangiana do pêndulo elástico nas coordenadas q_1 e q_2. Em seguida, mostre que a Hamiltoniana do sistema é dada por

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + fq_2 + \frac{1}{2}\left[1 - f - \sqrt{q_1^2 + (1-q_2)^2}\right]^2, \tag{14}$$

na qual p_1 e p_2 representam os momentos conjugados às variáveis q_1 e q_2, respectivamente.

***2.4** Mostre que para $f = 1$ a Hamiltoniana é separável, ou seja, pode ser escrita como

$$H(p_1, q_1, p_2, q_2) = H_1(p_1, q_1) + H_2(p_2, q_2). \tag{15}$$

Ainda considerando o caso $f = 1$, determine $q_1(\tau)$ e $q_2(\tau)$ em termos de condições iniciais arbitrárias.

2.5 Muitas vezes é interessante saber o que acontece com o pêndulo elástico fisicamente, isto é, qual é a parte do movimento que corresponde a um deslocamento da mola de seu comprimento natural e qual corresponde a um distanciamento do pêndulo da posição vertical. Para tanto, vamos introduzir as coordenadas físicas adimensionais ρ e θ, as quais representam, respectivamente, o deslocamento da mola de seu comprimento natural e o ângulo formado pelo pêndulo com a vertical. Mostre que ρ e θ podem ser escritos em função de q_1 e q_2 como

$$\rho = f - 1 + \sqrt{q_1^2 + (1-q_2)^2} \tag{16}$$

e

$$\tan\theta = \left(\frac{q_1}{1-q_2}\right). \tag{17}$$

Em seguida, mostre também que a transformação inversa de (ρ, θ) para (q_1, q_2) é dada por

$$q_1 = (\rho + 1 - f)\sin\theta \tag{18}$$

e

$$q_2 = 1 - (\rho + 1 - f)\cos\theta. \tag{19}$$

2.6 Mostre que a Lagrangiana obtida no exercício **2.3**, em termos das variáveis ρ e θ, possui o seguinte formato:

$$L = \frac{1}{2}[\dot{\rho}^2 + \dot{\theta}^2(\rho + 1 - f)^2] - f + f(\rho + 1 - f)\cos\theta - \frac{\rho^2}{2}. \tag{20}$$

Utilizando o resultado anterior, mostre também que os momentos conjugados às novas coordenadas são

$$p_\rho = \dot{\rho} \tag{21}$$

e

$$p_\theta = (\rho + 1 - f)^2\dot{\theta}. \tag{22}$$

Com o auxílio das expressões para os momentos generalizados, escreva a Hamiltoniana do pêndulo elástico em função das coordenadas $(\rho, \theta, p_\rho, p_\theta)$.

***2.7** Estamos interessados agora em estudar a energia associada a cada um dos movimentos (pendular e da mola). Com este intuito, definimos a energia total para $\theta = p_\theta = 0$ como a energia parcial do pêndulo elástico associada à mola, designada por E_ρ. De maneira análoga, definimos a energia total para $\rho = p_\rho = 0$ como a energia parcial associada ao movimento pendular, designada por E_θ. Mostre que as expressões para as energias parciais possuem a seguinte forma:

$$E_\rho = \frac{1}{2}(p_\rho^2 + \rho^2) - f\rho + f^2. \tag{23}$$

e

$$E_\theta = \frac{p_\theta^2}{2(1-f)^2} - f(1-f)\cos\theta + f. \tag{24}$$

Com o objetivo de calcular as variações temporais das energias parciais, podemos utilizar a seguinte relação:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}, \tag{25}$$

na qual os parênteses de Poisson são definidos como

$$\{F, H\} = \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right). \tag{26}$$

Utilizando a expressão (25), mostre que as derivadas temporais das energias parciais do pêndulo elástico são dadas por

$$\frac{dE_\rho}{d\tau} = p_\rho \left[\frac{p_\theta^2}{(\rho+1-f)^3} - f(1-cos\theta) \right] \tag{27}$$

e

$$\frac{dE_\theta}{d\tau} = f p_\theta \sin\theta \left[\frac{1-f}{(\rho+1-f)^2} - \frac{\rho+1-f}{(1-f)^2} \right]. \tag{28}$$