PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prof. Iberê L. Caldas

Segundo Estudo Dirigido

2º semestre de 2022

Atenção!

- Os estudos dirigidos **podem** ser realizados em **duplas**.
- Apenas os exercícios marcados com **asteriscos** precisam ser **entregues** para avaliação.
- A **resolução** de cada exercício deve **seguir a numeração** indicada em seu enunciado.
- As **resoluções** dos exercícios devem ser **entregues** ao monitor em um **único** arquivo **PDF**.
- Exercícios entregues em **desacordo** com estas regras serão **desconsiderados** na correção.

1. Pêndulo Simples

O pêndulo simples consiste em uma massa m presa a um ponto fixo por uma haste de comprimento l sob ação da aceleração da gravidade $\vec{g} = -g\hat{y}$. A variável que usaremos para estudar o movimento deste pêndulo é o ângulo ϕ entre a direção da aceleração da gravidade e o segmento de reta formado pela haste do pêndulo. Consideraremos que o ângulo ϕ é medido no sentido anti-horário ($\phi > 0$ para a massa à direita da posição de equilíbrio) e também que todo o movimento ocorre em um plano vertical.

1.1 Mostre que o pêndulo descrito acima possui energias cinética e potencial representadas, respectivamente, por

$$K = \frac{ml^2}{2}\dot{\phi}^2 \tag{1}$$

e

$$U = -mgl\cos\phi. \tag{2}$$

Em seguida, mostre também que a Lagrangiana do pêndulo simples é dada por

$$L(\phi, \dot{\phi}) = ml^2\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + \omega_0^2\cos\phi\right) \tag{3}$$

onde definimos $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

1.2 Mostre que o momento generalizado associado à variável ϕ é dado por $p_\phi = ml^2\dot{\phi}$. Então, com o auxílio deste resultado, mostre que a Hamiltoniana do pêndulo simples é dada por

$$H(p_\phi, \phi) = \frac{p_\phi^2}{2ml^2} - ml^2\omega_0^2\cos\phi. \tag{4}$$

Utilize a equação anterior, juntamente com as equações de movimento de Hamilton, para mostrar que

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2\sin\phi = 0. \tag{5}$$

*__1.3__ Determine os pontos de equilíbrio do pêndulo simples. Em seguida, realize a análise de estabilidade linear destes pontos fixos. Calcule também a energia do sistema em cada ponto de equilíbrio. Dentre os valores de energia calculados, indique a energia da separatriz, a qual será denotada por E_s. Neste exercício, devido ao caráter periódico da variável angular, considere que $-\pi < \phi \leq \pi$.

*__1.4__ Neste exercício, iniciaremos a análise numérica do pêndulo simples. Para esta finalidade, considere os seguintes valores de parâmetros: $m = 0.1\,\text{kg}$, $l = 1\,\text{m}$ e $g = 10\,\text{m/s}^2$. Construa uma representação gráfica do plano de fase do pêndulo simples. Com este objetivo, realize a evolução temporal de aproximadamente 20 condições iniciais, as quais devem produzir trajetórias dentro e fora da separatriz. Todas as trajetórias resultantes devem ser colocadas em um mesmo gráfico. Anexe a figura obtida ao seu trabalho.

1.5 Usando a expressão da energia do pêndulo simples, demonstre a validade da relação

$$\dot{\phi}^2 = \frac{2E}{ml^2} + 2\omega_0^2 \cos\phi. \tag{6}$$

Considere agora um movimento do pêndulo no qual ele parte da posição $\phi = 0$ no instante t_0 e se desloca até o seu ângulo máximo $\phi = \alpha$, no qual $p_\phi = \dot{\phi} = 0$. O tempo necessário para percorrer este trecho é um quarto do período do seu movimento ($t_f = T/4$). Mostre que a energia do pêndulo neste movimento é dada por

$$E = -ml^2\omega_0^2 \cos\alpha. \tag{7}$$

Então, utilizando os resultados anteriores e a relação $\cos\phi - \cos\alpha = 2(\sin^2\alpha/2 - \sin^2\phi/2)$, mostre que

$$\frac{d\phi}{dt} = 2\omega_0\sqrt{\sin^2\alpha/2 - \sin^2\phi/2}, \tag{8}$$

para um movimento pendular de amplitude α.

Ao contrário do oscilador harmônico, que possui o mesmo período para todas as amplitudes, o período do pêndulo simples depende da amplitude do movimento. Utilizando as equações obtidas anteriormente neste exercício, mostre que o período do movimento do pêndulo resulta da seguinte expressão:

$$T = \left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha/2} \frac{d(\phi/2)}{\sqrt{\sin^2\alpha/2 - \sin^2\phi/2}}\right] T_0, \tag{9}$$

onde $T_0 = 2\pi/\omega_0$ é o período de pequenas oscilações. Como $\alpha = \alpha(E)$, temos então uma equação que nos permite calcular o período em função da energia.

1.6 Calcule $T(\alpha)$ para $\alpha \approx 0$ e $\alpha \approx \pi$. Interprete estes resultados fisicamente. Não utilize cálculos numéricos.

*__1.7__ Empregando os parâmetros do exercício **1.4**, construa numericamente a curva $T/T_0 \times E$, para $T_0 = 2\pi/\omega_0$. A figura obtida deverá ser anexada ao seu trabalho.

*__1.8__ Calcule numericamente a trajetória $\phi(t)$ do pêndulo simples utilizando os parâmetros do exercício **1.4** e os valores iniciais $\phi(t = 0) = 0$ e $p_\phi(t = 0) = 0.3\,\text{kg}\,\text{m}^2/\text{s}$. O gráfico obtido deverá ser anexado ao seu trabalho. Utilize a figura para estimar o período da trajetória. Esta estimativa é coerente com o resultado do item **1.7**?

2. Pêndulo Elástico

O pêndulo elástico consiste em um pêndulo simples no qual a haste é substituída por uma mola com constante k e comprimento de repouso l_0. Trata-se de um sistema conservativo com dois graus de liberdade, considerando que o pêndulo se move em um plano vertical, cujo rico comportamento dinâmico será explorado ao longo do curso.

*2.1 Mostre que, adotando um sistema de coordenadas cartesianas com origem no ponto em que a mola está fixada e eixo y tal que $\vec{g} = -g\hat{y}$, as energias cinética e potencial do pêndulo elástico são dadas, respectivamente, por

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{10}$$

e

$$U = mgy + \frac{k}{2}(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0)^2. \tag{11}$$

Em seguida, mostre que o ponto de equilíbrio estável deste pêndulo ocorre para $x = 0$, $y = -l$ e momentos conjugados nulos, com $l = l_0 + \frac{mg}{k}$.

2.2 Agora, reformularemos nosso sistema dinâmico em coordenadas e parâmetros adimensionais, o que simplificará substancialmente nossos cálculos subsequentes. Mostre que, normalizando a energia total para $\varepsilon = \frac{E}{kl^2}$ e o tempo para $\tau = t\sqrt{k/m}$, definindo o parâmetro $f = \frac{mg}{kl}$ e introduzindo as coordenadas normalizadas $q_1 = \frac{x}{l}$ e $q_2 = \frac{y+l}{l}$, as quais estão centradas no ponto de equilíbrio estável, as energias do exercício **2.1** podem ser reescritas como

$$K = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \tag{12}$$

e

$$U = fq_2 + \frac{1}{2}\left[1 - f - \sqrt{q_1^2 + (1-q_2)^2}\right]^2. \tag{13}$$

Note que, em nossa nova definição para a energia cinética, estabelecemos a notação $\dot{q}_j = \mathrm{d}q_j/\mathrm{d}\tau$, para $j = 1, 2$. Observe também que, de maneira complementar ao processo de adimensionalização, o "nível zero" da energia potencial foi redefinido.

2.3 Escreva a Lagrangiana do pêndulo elástico nas coordenadas q_1 e q_2. Em seguida, mostre que a Hamiltoniana do sistema é dada por

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + fq_2 + \frac{1}{2}\left[1 - f - \sqrt{q_1^2 + (1-q_2)^2}\right]^2, \tag{14}$$

na qual p_1 e p_2 representam os momentos conjugados às variáveis q_1 e q_2, respectivamente.

*2.4 Mostre que para $f = 1$ a Hamiltoniana é separável, ou seja, pode ser escrita como

$$H(p_1, q_1, p_2, q_2) = H_1(p_1, q_1) + H_2(p_2, q_2). \tag{15}$$

Ainda considerando o caso $f = 1$, determine $q_1(\tau)$ e $q_2(\tau)$ em termos de condições iniciais arbitrárias.

2.5 Muitas vezes é interessante saber o que acontece com o pêndulo elástico fisicamente, isto é, qual é a parte do movimento que corresponde a um deslocamento da mola de seu comprimento natural e qual corresponde a um distanciamento do pêndulo da posição vertical. Para tanto, vamos introduzir as coordenadas fésicas adimensionais ρ e θ, as quais representam, respectivamente, o deslocamento da mola de seu comprimento natural e o ângulo formado pelo pêndulo com a vertical. Mostre que ρ e θ podem ser escritos em função de q_1 e q_2 como

$$\rho = f - 1 + \sqrt{q_1^2 + (1-q_2)^2} \tag{16}$$

e

$$\tan\theta = \left(\frac{q_1}{1-q_2}\right). \tag{17}$$

Em seguida, mostre também que a transformação inversa de (ρ, θ) para (q_1, q_2) é dada por

$$q_1 = (\rho + 1 - f)\sin\theta \tag{18}$$

e

$$q_2 = 1 - (\rho + 1 - f)\cos\theta. \tag{19}$$

2.6 Mostre que a Lagrangiana obtida no exercício **2.3**, em termos das variáveis ρ e θ, possui o seguinte formato:

$$L = \frac{1}{2}[\dot{\rho}^2 + \dot{\theta}^2(\rho + 1 - f)^2] - f + f(\rho + 1 - f)\cos\theta - \frac{\rho^2}{2}. \tag{20}$$

Utilizando o resultado anterior, mostre também que os momentos conjugados às novas coordenadas são

$$p_\rho = \dot{\rho} \tag{21}$$

e

$$p_\theta = (\rho + 1 - f)^2\dot{\theta}. \tag{22}$$

Com o auxílio das expressões para os momentos generalizados, escreva a Hamiltoniana do pêndulo elástico em função das coordenadas $(\rho, \theta, p_\rho, p_\theta)$.

***2.7** Estamos interessados agora em estudar a energia associada a cada um dos movimentos (pendular e da mola). Com este intuito, definimos a energia total para $\theta = p_\theta = 0$ como a energia parcial do pêndulo elástico associada à mola, designada por E_ρ. De maneira análoga, definimos a energia total para $\rho = p_\rho = 0$ como a energia parcial associada ao movimento pendular, designada por E_θ. Mostre que as expressões para as energias parciais possuem a seguinte forma:

$$E_\rho = \frac{1}{2}(p_\rho^2 + \rho^2) - f\rho + f^2. \tag{23}$$

e

$$E_\theta = \frac{p_\theta^2}{2(1-f)^2} - f(1-f)\cos\theta + f. \tag{24}$$

Com o objetivo de calcular as variações temporais das energias parciais, podemos utilizar a seguinte relação:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}, \tag{25}$$

na qual os parânteses de Poisson são definidos como

$$\{F, H\} = \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right). \tag{26}$$

Utilizando a expressão (25), mostre que as derivadas temporais das energias parciais do pêndulo elástico são dadas por

$$\frac{dE_\rho}{d\tau} = p_\rho\left[\frac{p_\theta^2}{(\rho + 1 - f)^3} - f(1 - cos\theta)\right] \tag{27}$$

e

$$\frac{dE_\theta}{d\tau} = fp_\theta\sin\theta\left[\frac{1-f}{(\rho + 1 - f)^2} - \frac{\rho + 1 - f}{(1-f)^2}\right]. \tag{28}$$