PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prof. Iberê L. Caldas

Terceiro Estudo Dirigido

2º semestre de 2020

Os estudos dirigidos podem ser realizados em duplas.
Apenas os exercícios marcados com asteriscos precisam ser entregues para avaliação.
As resoluções dos exercícios devem ser entregues ao monitor em um único arquivo pdf.
A resolução de cada exercício deve seguir a numeração indicada em seu enunciado.
Exercícios entregues em desacordo com estas regras serão desconsiderados na correção.

1. Pêndulo Simples: Movimento de Libração

O movimento do pêndulo simples é descrito pela Hamiltoniana

$$H(p_\phi, \phi) = \frac{p_\phi^2}{2ml^2} - ml^2\omega_0^2 \cos\phi, \tag{1}$$

na qual ϕ é o ângulo formado pela haste do pêndulo com a vertical e p_ϕ é o momento generalizado conjugado a este ângulo.

No presente estudo dirigido, utilizaremos a teoria de perturbação de primeira ordem para calcular as trajetórias aproximadas da Hamiltoniana (1) e comparar estas trajetórias com resultados obtidos por integração numérica. Desta maneira, pretendemos verificar a validade e a precisão da teoria de perturbação.

A teoria de perturbação não funciona adequadamente na vizinhança da separatriz e, portanto, vamos investigar separadamente dois casos: baixas energias, que correspondem a um movimento de libração dentro da separatriz, e altas energias, que correspondem a um movimento de rotação fora da separatriz.

Esta parte do estudo está estruturada da seguinte forma: nos itens **1.1** a **1.5** aproximaremos o pêndulo simples em ordem zero por um oscilador harmônico e resolveremos este sistema dinâmico com a determinação da relação entre as variáveis canônicas originais e suas variáveis de ângulo e ação. Nos itens **1.6** e **1.7** aplicaremos a teoria de perturbação propriamente dita, considerando um termo de perturbação não-linear e obtendo as trajetórias perturbadas no plano de fase das coordenadas ϕ e p_ϕ. Finalmente, nos itens **1.8** a **1.10**, analisaremos numericamente os resultados obtidos.

1.1 Faça uma expansão do cosseno da Hamiltoniana do pêndulo simples em série de potências e mostre que, para ângulos pequenos ($\phi \ll 1$), podemos escrever a seguinte aproximação:

$$H(p_\phi, \phi) \approx H_0(p_\phi, \phi) + H_1(\phi), \tag{2}$$

na qual definimos

$$H_0 = \frac{p_\phi^2}{2ml^2} + \frac{ml^2\omega_0^2}{2}\phi^2 \quad \text{e} \quad H_1 = -\frac{ml^2\omega_0^2}{24}\phi^4. \tag{3}$$

Para a obtenção da expressão (2), os termos da ordem de ϕ^6 e superiores foram desprezados, pois a função Hamiltoniana aproximada será utilizada no estudo de trajetórias caracterizadas por pequenas amplitudes de libração. Observe também que descartamos um termo constante decorrente da expansão da Hamiltoniana do pêndulo simples.

Mostre que, para uma dada energia E, os ângulos mínimo e máximo do movimento descrito pela Hamiltoniana H_0 são dados, respectivamente, por

$$\phi_- = -\sqrt{\frac{2E}{ml^2\omega_0^2}} \quad \text{e} \quad \phi_+ = \sqrt{\frac{2E}{ml^2\omega_0^2}}. \tag{4}$$

1.2 Mostre que a variável de ação associada à Hamiltoniana H_0, definida como

$$J = \frac{1}{\pi}\int_{\phi_-}^{\phi_+} p_\phi(E,\phi)d\phi, \tag{5}$$

é igual a $J = E/\omega_0$.

1.3 De acordo com o item anterior, a Hamiltoniana H_0 pode ser reescrita em função da ação J da seguinte forma:

$$H_0(J) = \omega_0 J. \tag{6}$$

Utilize as equações de movimento canônicas de Hamilton para mostrar que as evoluções temporais da ação J e de sua coordenada de ângulo conjugada ψ são dadas por

$$J(t) = J_0 \quad \text{e} \quad \psi(t) = \omega_0 t + \psi_0, \tag{7}$$

onde J_0 e ψ_0 são, respectivamente, os valores das coordenadas de ângulo e ação no instante inicial $t = 0$.

1.4 Mostre que a função geratriz associada à Hamiltoniana H_0, definida como

$$S_2(J,\phi) = \int_0^\phi p_\phi(J,\phi')d\phi', \tag{8}$$

é igual a

$$S_2(J,\phi) = J\arcsin\left(\phi\sqrt{\frac{ml^2\omega_0}{2J}}\right) + \frac{\phi}{2}\sqrt{2Jml^2\omega_0 - m^2l^4\omega_0^2\phi^2}. \tag{9}$$

1.5 Utilize as relações

$$p_\phi = \frac{\partial S_2}{\partial \phi} \quad \text{e} \quad \psi = \frac{\partial S_2}{\partial J} \tag{10}$$

para mostrar que

$$\phi(J,\psi) = \sqrt{\frac{2J}{ml^2\omega_0}}\sin\psi \quad \text{e} \quad p_\phi(J,\psi) = \sqrt{2Jml^2\omega_0}\cos\psi. \tag{11}$$

Então, utilizando as identidades anteriores, mostre que podemos escrever a parte da Hamiltoniana correspondente à perturbação como

$$H_1(J,\psi) = -\frac{J^2}{6ml^2}\sin^4\psi. \tag{12}$$

1.6 Agora, devemos procurar expressões aproximadas para as novas coordenadas de ângulo e ação (I,θ), associadas à Hamiltoniana total $H = H_0 + H_1$. Utilizando que $I = J$ e $\theta = \psi$, em aproximação de ordem zero, e empregando as expressões

$$K_0(I) = H_0(I) \quad \text{e} \quad K_1(I) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1(I,\theta)d\theta, \tag{13}$$

mostre que

$$K_0(I) = \omega_0 I \quad \text{e} \quad K_1(I) = -\frac{I^2}{16ml^2}. \tag{14}$$

Os resultados anteriores nos permitem escrever a seguinte Hamiltoniana total para o sistema perturbado:

$$K(I) = \omega_0 I - \frac{I^2}{16ml^2}. \tag{15}$$

Então, considerando que

$$\omega(I) = \frac{\partial K(I)}{\partial I}, \tag{16}$$

mostre que a frequência do movimento perturbado é dada por

$$\omega(I) = \omega_0 - \frac{I}{8ml^2}. \tag{17}$$

Em seguida, utilize as equações de movimento de Hamilton, aplicadas à Hamiltoniana $K(I)$, para mostrar que

$$I(t) = I_0 \quad \text{e} \quad \theta(t) = \omega(I_0)t + \theta_0, \tag{18}$$

onde θ_0 e I_0 são, respectivamente, os valores das variáveis de ângulo e ação no instante inicial $t = 0$.

1.7 Com o objetivo de utilizar os resultados do exercício anterior para descrever o movimento do pêndulo simples, precisamos determinar a relação entre as variáveis (I, θ) e (J, ψ). Empregando as identidades

$$J^{(1)} = \frac{K_1(I) - H_1(I, \theta)}{\omega_0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta} = -\frac{\partial J^{(1)}}{\partial I}, \tag{19}$$

mostre que, em primeira ordem de perturbação, temos que

$$J^{(1)} = \frac{I^2}{12ml^2\omega_0}\left[\frac{1}{4}\cos(4\theta) - \cos(2\theta)\right] \quad \text{e} \quad \psi^{(1)} = \frac{I}{12ml^2\omega_0}\left[\sin(2\theta) - \frac{1}{8}\sin(4\theta)\right]. \tag{20}$$

Em seguida, considerando que, em primeira ordem de aproximação,

$$J(I, \theta) = I + J^{(1)}(I, \theta) \quad \text{e} \quad \psi(I, \theta) = \theta + \psi^{(1)}(I, \theta), \tag{21}$$

e utilizando as evoluções temporais obtidas no exercício **1.6**, mostre que

$$J(t) = I_0 + \frac{I_0^2}{12ml^2\omega_0}\left[\frac{1}{4}\cos(4\omega t + 4\theta_0) - \cos(2\omega t + 2\theta_0)\right] \tag{22}$$

e

$$\psi(t) = \omega t + \theta_0 + \frac{I_0}{12ml^2\omega_0}\left[\sin(2\omega t + 2\theta_0) - \frac{1}{8}\sin(4\omega t + 4\theta_0)\right]. \tag{23}$$

Com isto resolvemos o problema da libração do pêndulo simples com o auxílio da teoria de perturbação de primeira ordem. Para um dado conjunto de condições iniciais (I_0, θ_0), podemos obter os valores de $(J(t), \psi(t))$ e, finalmente, empregando as relações obtidas no item **1.5**, podemos também obter a evolução temporal das variáveis originais (p_ϕ, ϕ).

Com o intuito de realizar comparações diretas entre os resultados da teoria de perturbação e os resultados de simulações numéricas, devemos lembrar que, na passagem da Hamiltoniana original H do pêndulo simples para a Hamiltoniana aproximada $(H_0 + H_1)$, descartamos um termo constante. Esta diferença na energia total deve ser compensada para comparações.

Nas simulações a seguir, utilizaremos os seguintes valores de parâmetros: $m = 0.1\text{Kg}$, $l = 1\text{m}$ e $g = 10\text{m/s}^2$.

***1.8** O valor mínimo da energia do pêndulo simples é igual a $E_0 = -ml^2\omega_0^2$, na qual $\omega_0^2 = g/l$. Considerando um movimento sobre a separatriz, a energia do pêndulo possui valor $E_s = ml^2\omega_0^2$. Portanto, para o estudo do movimento de libração, devemos utilizar energias no intervalo

$$E_0 < E < E_s. \tag{24}$$

Ou seja, para os parâmetros numéricos escolhidos acima, o intervalo válido para a energia total do sistema no estudo do movimento de libração é dado por

$$-1\text{J} < E < 1\text{J}. \tag{25}$$

Agora, vamos comparar as trajetórias obtidas por teoria de perturbação com as trajetórias obtidas numericamente. Primeiramente, escolha quatro valores distintos para o par de coordenas θ_0 e I_0. Em seguida, utilize os resultados dos exercícios **1.5** e **1.7** para calcular os valores perturbativos de $\phi(t)$ e $p_\phi(t)$, considerando pelo menos um período de libração. Então, empregando os mesmos valores iniciais $\phi(0)$ e $p_\phi(0)$ do cálculo perturbativo, obtenha numericamente os valores não-perturbativos para $\phi(t)$ e $p_\phi(t)$. Para cada escolha de θ_0 e I_0, construa um gráfico comparativo para a evolução temporal do ângulo ϕ, exibindo simultaneamente as curvas perturbativa e numérica. Indique o valor da Hamiltoniana $H(p_\phi, \phi)$ em cada gráfico, considerando o instante inicial de tempo. Anexe os gráficos ao seu trabalho. A teoria de perturbação apresenta bons resultados? Para quais energias?

*1.9 Repita o procedimento do item anterior para trajetórias no espaço de fase, ou seja, construa curvas para $p_\phi(t) \times \phi(t)$. Anexe os gráficos ao seu trabalho. Realize comentários comparativos entre os resultados numéricos e da teoria de perturbação.

*1.10 Empregando os resultados do segundo estudo dirigido, faça um gráfico comparativo para o período de libração do pêndulo, em função da energia, obtido numericamente e perturbativamente. Anexe os gráficos resultantes ao seu trabalho. Comente a qualidade dos resultados perturbativos.

2. Pêndulo Simples: Movimento de Rotação

Nesta parte do estudo dirigido vamos estudar o movimento do pêndulo simples para altas energias. Neste caso, o pêndulo tem energia suficiente para passar pela posição de equilíbrio instável $\phi = \pm\pi$ e, portanto, o movimento resultante é de rotação. No espaço de fase, estamos na região externa à separatriz e temos duas possibilidades: ou o movimento de rotação tem momento generalizado p_ϕ sempre positivo (rotações no sentido anti-horário), ou o movimento possui p_ϕ sempre negativo (rotação no sentido horário). Como os dois tipos de movimento são simétricos, podemos restringir nosso estudo ao caso $p_\phi > 0$, sem perda de generalidade. Lembramos que a teoria de pertubação apresenta bons resultados apenas para movimentos distantes da separatriz, ou seja, para energias bastante superiores a E_s.

No caso do movimento de rotação podemos escrever a Hamiltoniana do pêndulo simples como

$$H(p_\phi, \phi) = H_0(p_\phi) + H_1(\phi) \tag{26}$$

na qual definimos

$$H_0(p_\phi) = \frac{p_\phi^2}{2ml^2} \quad \text{e} \quad H_1(\phi) = -ml^2\omega_0^2 \cos\phi. \tag{27}$$

Uma vez que o valor do momento p_ϕ é grande para energias elevadas, temos que $|H_0| \gg |H_1|$.

2.1 Neste item, vamos calcular a variável de ação J da Hamiltoniana não perturbada H_0. Como as curvas do espaço de fase não são fechadas no movimento de rotação, não podemos utilizar a mesma definição do movimento de libração para o cálculo da ação. Então, empregaremos a seguinte definição para a ação:

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\phi(\phi, E) d\phi. \tag{28}$$

Mostre que, para esta última definição, temos

$$J(E) = \sqrt{2ml^2 E} \tag{29}$$

e, portanto, podemos escrever a Hamiltoniana não perturbada como

$$H_0(J) = \frac{J^2}{2ml^2}. \tag{30}$$

Em seguida, mostre também que a frequência do movimento não perturbado é dada por

$$\omega'(J) = \frac{J}{ml^2}. \tag{31}$$

Com o auxílio dos resultados anteriores, utilize as equações de Hamilton para mostrar que, no movimento não perturbado, temos

$$J(t) = J_0 \quad \text{e} \quad \psi(t) = \omega'(J_0)t + \psi_0, \tag{32}$$

onde ψ_0 e J_0 são, respectivamente, os valores das variáveis de ângulo e ação no instante inicial $t = 0$.

2.2 Compare as expressões para $H_0(p_\phi)$ e $H_0(J)$. Desta maneira, note que é razoável afirmarmos que $(p_\phi, \phi) = (J, \psi)$ e, consequentemente,

$$p_\phi(t) = J_0 \quad \text{e} \quad \phi(t) = \omega'(J_0)t + \psi_0. \tag{33}$$

Faça um esboço do espaço de fase do movimento não perturbado e discuta a situação física que ele representa.

2.3 Passamos agora à teoria de perturbação. Para tanto, devemos determinar os valores aproximados para as variáveis de ação e ângulo (I, θ), associadas à Hamiltoniana total. Considere que $I = J$ e $\theta = \psi$, em ordem zero de aproximação, para mostrar que[1]

$$K_0(I) = \frac{I^2}{2ml^2} \quad \text{e} \quad K_1(I) = 0. \tag{34}$$

Em seguida, aplique as equações de movimento de Hamilton à função Hamiltoniana $K(I) = K_0(I) + K_1(I)$ para mostrar que

$$I(t) = I_0 \quad \text{e} \quad \theta(t) = \omega'(I_0)t + \theta_0, \tag{35}$$

onde θ_0 e I_0 são, respectivamente, os valores das variáveis de ângulo e ação no instante inicial $t = 0$.

2.4 Agora, vamos determinar a relação, em primeira ordem de aproximação, entre as variáveis de ângulo e ação do movimento não perturbado (J, ψ) e as variáveis do movimento perturbado (I, θ). Utilize a expressão

$$J^{(1)} = \frac{K_1(I) - H_1(I, \theta)}{\omega'(I)} \tag{36}$$

para mostrar que

$$J^{(1)} = \frac{m^2 l^4 \omega_0^2 \cos\theta}{I}. \tag{37}$$

Então, empregue a relação

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta} = -\frac{\partial J^{(1)}}{\partial I} \tag{38}$$

para mostrar que

$$\psi^{(1)} = \frac{m^2 l^4 \omega_0^2 \sin\theta}{I^2}. \tag{39}$$

Em seguida, utilize os resultados anteriores, juntamente com as expressões obtidas nos exercícios **2.2** e **2.3**, para mostrar que a teoria de perturbação para movimento de rotação do pêndulo simples, em primeira ordem, resulta em trajetórias descritas por

$$\phi(t) = \theta_0 + \frac{I_0 t}{ml^2} + \frac{m^2 l^4 \omega_0^2}{I_0^2} \sin\left(\theta_0 + \frac{I_0 t}{ml^2}\right) \tag{40}$$

e

$$p_\phi(t) = I_0 + \frac{m^2 l^4 \omega_0^2}{I_0} \cos\left(\theta_0 + \frac{I_0 t}{ml^2}\right). \tag{41}$$

***2.5** Para as integrações numéricas, utilize os mesmos parâmetros do pêndulo simples indicados na primeira parte deste estudo dirigido. Uma vez que o movimento de rotação está restrito às trajetórias externas à separatriz, cuja energia é $E_s = ml^2\omega_0^2$, devemos notar que os valores válidos para a energia total dos cálculos numéricos estão no intervalo $E > 1\text{J}$.

Escolha quatro valores distintos para as condições iniciais θ_0 e I_0. Em seguida, construa gráficos com a evolução temporal do ângulo ϕ, comparando os resultados perturbativos do exercício **2.4** com uma simulação numérica para a Hamiltoniana exata. Indique o valor da Hamiltoniana $H(p_\phi, \phi)$ em cada gráfico, considerando somente o instante inicial de tempo. Anexe as figuras resultantes ao seu trabalho.

***2.6** Repita a análise do item anterior no plano de fase $p_\phi \times \phi$. Anexe os gráficos obtidos ao seu trabalho.

3. Pêndulo elástico e seções de Poincaré

No primeiro estudo dirigido, vimos que o pêndulo elástico pode ser descrito pela Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + f q_2 + \frac{1}{2}\left[1 - f - \sqrt{q_1^2 + (1 - q_2)^2}\right]^2. \tag{42}$$

Como este sistema possui dois graus de liberdade e, portanto, quatro variáveis dinâmicas, não somos capazes de construir uma representação gráfica do espaço de fase completo. Por esta razão, o sistema será representado com a utilização de seções de Poincaré.

[1] As definições de $K_0(I)$ e $K_1(I)$ são as mesmas do exercício **1.6**.

3.1 Inicialmente, vamos considerar um caso no qual é possível o cálculo analítico da seção de Poincaré. Para tanto, escolhemos o valor de parâmetro $f = 1$, para o qual a Hamiltoniana do pêndulo elástico é separável e possui a seguinte expressão:

$$H(q_1, p_1, q_2, p_2) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2 + 1\right). \tag{43}$$

Observe que a energia mínima do sistema é $E_0 = 1/2$. Então, vamos fixar a energia total do sistema em $E = 1$. Para construir a seção de Poincaré no plano $p_1 \times q_1$, vamos escolher sempre condições iniciais com $q_2(0) = 0$ e $p_2(0) \geq 0$. Mostre que, para o valor de energia escolhido, as condições iniciais no plano de Poincaré devem obedecer à restrição

$$p_1^2(0) + q_1^2(0) \leq 1. \tag{44}$$

3.2 Agora, considere a trajetória específica com condições iniciais $q_1(0) = p_1(0) = 1/2$. Mostre que, para estas condições iniciais, a trajetória do pêndulo elástico é dada por

$$q_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \tag{45}$$

$$p_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \tag{46}$$

$$q_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t), \tag{47}$$

$$p_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t). \tag{48}$$

Em seguida, mostre que as condições $q_2(t_n) = 0$ e $p_2(t_n) \geq 0$ implicam em $t_n = 2\pi n$. Então, substitua t_n em $q_1(t)$ e $p_1(t)$ para mostrar que

$$q_1^n = q_1(t_n) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad p_1^n = p_1(t_n) = \frac{1}{2}. \tag{49}$$

Portanto, a trajetória escolhida é representada na seção de Poincaré por um único ponto sobre a condição inicial.

3.3 Repita os cálculos anteriores para uma outra condição inicial a sua escolha para as variáveis q_1 e p_1. Verifique que esta nova trajetória também será representada por um único ponto sobre a seção de Poincaré. De fato, todas as trajetórias do pêndulo elástico sobre a seção de Poincaré são pontos para $f = 1$. Isto ocorre porque, para $f = 1$, estamos sobre a ressonância $1 : 1$ do pêndulo elástico, ou seja, todas as trajetórias possuem mesma frequência em ambos os graus de liberdade ($\omega_1 = \omega_2$). No caso de uma trajetória regular com $\omega_1 = j\omega_2$ (ressonância $1 : j$), a projeção desta trajetória sobre a seção de Poincaré terá j pontos. Finalmente, no caso de uma trajetória regular com frequências irracionais entre si, teremos infinitos pontos sobre a seção de Poincaré, formando uma curva fechada.

***3.4** Agora, passaremos à análise de um caso mais geral, no qual o sistema não é mais separável e não estamos sobre uma ressonância. Para tanto, vamos escolher o parâmetro $f = 0.2$. Começaremos a análise por um valor baixo de energia: $E = 0.03$.

Construa numericamente a seção de Poincaré do pêndulo elástico para os parâmetros escolhidos. Anexe o gráfico resultante ao seu trabalho. Comente os resultados.

***3.5** Repita o procedimento do exercício anterior para $E = 0.035$. Anexe a figura obtida ao seu trabalho.

***3.6** Repita o procedimento do exercício **3.4** para $E = 0.04$. Anexe o gráfico resultante ao seu trabalho. À medida que o valor da energia é elevado, o ponto de equilíbrio na origem, inicialmente estável, torna-se instável e surgem dois novos pontos de equilíbrio estável. Este fenômeno é conhecido como bifurcação e será analisado novamente no quinto estudo dirigido, no qual consideraremos um sistema dinâmico mais simples, o mapa logístico.