Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Difusão e Mistura em Fluidos Caóticos

SBI-IFUSP
305M810T2926

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Iberê Luiz Caldas

Banca Examinadora :

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (IFUSP - Orientador)

Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato (UFRGS)

Profa. Dra. Maria Virgínia Alves (INPE)

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex 2
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2926
INSTITUTO DE FÍSICA

Fábio Henrique Palladino

Dezembro de 1998

Prof. Sylvio Canuto
Sylvio Roberto Accioly Canuto
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

530.155352
P164d
M
ex 2

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Palladino, Fábio Henrique

Difusão e Mistura em Fluídos Caóticos.
São Paulo, 1998.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas
Área de Concentração: Física de Fluídos

Unitermos: 1. Fluídos Caóticos; 2. Difusão;
3. Mistura; 4. Caos.

USP/IF/SBI-003/99

À minha família : Cida, Agenor, Flávio e Ana.

Juntos lutamos, juntos sofremos, juntos vencemos.

Resumo

Este trabalho visa estudar a difusão e mistura de campos escalares passivos num fluido caótico, incompressível e bidimensional. Para tanto consideramos um campo de velocidades com dependência complexa no tempo e variação suave no espaço e dele derivamos um mapa de Poincaré, que corresponde ao mapa padrão perturbado por uma fase aleatória. Calculamos numericamente a dispersão e o coeficiente de difusão das trajetórias e avaliamos a ação dos modos aceleradores do mapa no modelo. Caracterizamos a mistura e outros fenômenos associados à convecção no fluxo definindo diversos parâmetros numericamente calculados.

Abstract

This work aims to study diffusion and mixing of passive scalar fields in a bidimensional incompressible chaotic fluid flow. We consider a spatially smooth, complex time-depending velocity field that allows an analytical derivation of a Poincaré map. This map corresponds to a randomized standard mapping. We calculate numerically dispersion and diffusion coefficients of trajectories and study the action of map accelerator modes in the model. We caracterize mixing and other phenomena related to fluid flow by defining and computing relevant numerical parameters.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Iberê L. Caldas pela orientação acadêmica, abnegado apoio pessoal e pela amizade.

Ao Gilberto Corso pela extensa e valiosa ajuda que concedeu para a realização deste trabalho.

À FAPESP, pelo apoio financeiro.

Ao Kai Ullmann pela ajuda nos problemas computacionais, pelas dicas ao trabalho e pelo socorro num momento de necessidade.

Ao Wanderley P. de Sá pela paciência na solução dos problemas junto aos computadores.

Aos professores José C. Sartorelli e Maria Vittoria A. P. Heller pelo apoio e orientação oportunos.

Às secretárias Eleonora V. D. Lo Duca, M. Mavilia Vara (Lia) e Sylvia R. F. da Silva.

Aos amigos Anselmo Rodrigues, Antônio M. Batista, Elisangela F. Manffra e Silvio L. T. de Souza pelo coleguismo, pela ajuda no estudo e pelos bons momentos que passamos juntos.

Aos amigos e colegas André A. Ferreira, Antônio M. M. Fonseca, Edson M. Ozono, Elinei P. dos Santos, Elton C. da Silva, Ernesto A. Lerche, Gisele A. Oda, Gesil S. Amarante II, Ibrahim El Chamaa Neto, Ismael F. dos Santos, José A. S. da Matta, J. de Moraes Pereira, Juan I. Elizondo, Kenya A. de Oliveira, Marcos V. Travaglia, Murilo da S. Baptista, Paulo E. F. Côrtes, Renata C. Favalli e Valdemar Bellintani Jr. pelo companheirismo.

Às demais pessoas, entre amigos, colegas e professores que, direta ou indiretamente me apoiaram e contribuiram para a conclusão deste trabalho.

E, sobretudo, à minha família, sem cujo carinho, incentivo e compreensão eu não teria completado mais esta jornada.

Conteúdo

Resumo 5

Abstract 7

Agradecimentos 9

1 Introdução 3

2 Um Modelo de Fluido Caótico 7

2.1 Introdução 7

2.2 Fluidos Caóticos 8

2.3 Imagens do Campo Escalar 10

3 O Mapa Padrão 17

3.1 Seções e Mapas de Poincaré 17

3.2 Modos Aceleradores do Mapa Padrão 21

3.3 A Ação de Ruído no Mapa Padrão 22

4 Difusão 25

4.1 Dispersão e Coeficiente de Difusão 25

4.2 Difusão no Mapa Padrão 28

4.3 Ilhas de Aceleração 30

4.4 Difusão no Modelo 32

5 Convecção e Mistura **37**

5.1 Distribuições de Probabilidade 37

5.2 *Estiramento* e *Dobramento* 42

5.3 Padrões de Mistura 47

6 Conclusão **53**

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos o estudo de modelos de fluido com linhas de fluxo caóticas tem sido objeto de muito interesse [1, 2]. A grande motivação abrange o problema da *mistura eficiente*, já que uma variedade enorme de fenômenos na natureza estão a ele associados, da circulação atmosférica e convecção do magma no interior da Terra à evolução estelar. Tais fenômenos nos afetam diretamente no cotidiano e sua compreensão tornou-se uma necessidade para a resolução de muitos problemas tecnológicos, donde sua grande relevância.

Durante muito tempo o estudo de processo tão complexo ficou limitado devido a dificuldade de se promover uma descrição adequada em Mecânica de Fluidos. Com o advento do computador e, paralelamente, da Teoria de Caos [3], ficou evidente que o Caos poderia ser uma nova forma de descrever o que ocorre nos fluidos [1].

Foi mostrado que as propriedades intrínsecas de dispersão em fluxos caóticos promovem um método eficiente de mistura de campos escalares (contaminantes num fluido), mesmo usando campos de velocidades simples – como os fluxos laminares, por exemplo [4]. Em particular, fluxos de estruturas espaciais com variação suave e de larga escala podem levar a movimentos de partículas em convecção complexos. Também foi mostrado que a densidade (gradiente dos campos escalares) de partículas ou contaminante conveccionados se

concentram em um fractal [5].

Na maior parte dos estudos realizados [6] foram considerados fluxos cujos campos de velocidades são estacionários no tempo e tridimensionais [7] ou periódicos no tempo e bidimensionais. Neste trabalho consideramos um fluxo que representa o segundo caso e a partir do qual derivamos analiticamente um mapa de Poincaré. Um campo escalar (contaminante ou traçador) é passivamente conveccionado. Este modelo é correntemente pesquisado e foi estudado por F. Városi num trabalho publicado em 1991 [8].

Városi concentrou seu trabalho no gradiente do campo e suas propriedades fractais, que tem sido o objeto de maior interesse nessa área [9, 5]. Em nosso trabalho, contudo, nos propusemos a estudar as propriedades convectivas e de difusão do campo escalar em si. Por meio do cálculo de parâmetros, como o coeficiente de difusão [10], investigamos a difusão global de trajetórias e características peculiares presentes no mapa obtido, como os modos aceleradores [11, 12], e, em especial, propusemos a definição e o cálculo de parâmetros para caracterizar a mistura e a convecção no fluido.

A seguir, uma descrição do conteúdo dos capítulos deste trabalho :

No capítulo 2 apresentamos um modelo de fluido caótico bidimensional e incompressível com uma dependência complexa no tempo, no qual um contaminante passivo é conveccionado [8]. A partir de um campo de velocidades proposto para o fluxo, derivamos analiticamente um mapa de Poincaré, que corresponde a um Mapa de Chirikov ou mapa padrão (standard mapping) [12] perturbado por uma fase aleatória, por meio do qual propriedades de difusão e mistura serão investigadas.

No capítulo 3 introduzimos os conceitos de seção de Poincaré e mapa de Poincaré. Apresentamos as propriedades e características básicas do mapa padrão no contexto da teoria de sistemas dinâmicos – incluindo os chamados modos aceleradores – e seu comportamento frente à introdução de uma fase perturbativa aleatória, com a proposição de um mapa alternativo em que regimes intermediários entre o mapa padrão e o mapa derivado do modelo se verifiquem.

No capítulo 4 é investigada a difusão de trajetórias de traçadores passivos por meio do cálculo de parâmetros propostos, como dispersão e coeficiente de difusão global de órbitas no mapa padrão e no mapa derivado do modelo. São ainda estudadas a influência dos modos aceleradores na difusão e as propriedades difusivas do mapa alternativo.

No capítulo 5 estudamos distribuições de probabilidades da concentração de contaminantes, no tempo e no espaco, e propomos diversos parâmetros calculados numericamente a fim caracterizar convecção e mistura de contaminantes no fluxo.

No capítulo 6 estão as conclusões gerais e as propostas para continuidade da pesquisa e trabalhos futuros.

Todas os dados de simulações numéricas foram obtidas a partir de programas computacionais elaborados em linguagem FORTRAN e executados em estações de trabalho com plataforma UNIX. Erros numéricos são irrelevantes, salvo menção em contrário. Todos os gráficos e figuras foram elaborados nos programas "XMGR", desenvolvido por Paul J. Turner, e "PGPLOT GRAPHICS SUBROUTINE LIBRARY Version 5.0", desenvolvido por T. J. Pearson. Por razões técnicas as escalas dos gráficos apresentam números decimais com ponto "." e não com vírgula ",".

Este trabalho foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP

Capítulo 2

Um Modelo de Fluido Caótico

2.1 Introdução

Vamos supor um fluido no qual é injetado uma pequena quantidade de um contaminante, um corante, por exemplo. Tal contaminante estará sujeito a convecção pelo movimento do fluido sem influenciá-lo, de modo que agirá como um traçador passivo do fluxo do fluido. Chamaremos de $\Phi(\mathbf{r}, t)$ a concentração do contaminante passivo do fluido na posição $\mathbf{r}$ e no tempo t. Advinda da teoria da mecânica dos fluidos, a equação que descreve a concentração do contaminante é [13]

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla\Phi = \xi\nabla^2\Phi \tag{2.1}$$

onde $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ é o campo de velocidades do fluido e ξ é um coeficiente de difusão. Estamos supondo que o fluido em questão é incompressível, isto é, que $\nabla.\mathbf{v} = 0$ [13]. Assim, a taxa de variação da concentração do contaminante num elemento de fluido, ao seguir o fluxo, é igual à difusão do contaminante através do elemento de fluido.

Consideraremos o campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ como dado, com variação suave no espaço e possuindo estruturas espaciais apenas em grandes escalas. Na prática $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ seria determinado por efeitos como *stirring* ou convecção térmica [1]. Embora $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ varie somente em grandes escalas, nós veremos que o campo escalar Φ terá variações em escalas de espaço

muito pequenas.

Inicialmente o termo de difusão da equação (2.1) é desprezível para ξ suficientemente pequeno. À medida que o tempo evolui, Φ desenvolverá estruturas em escalas cada vez menores até que, para um determinado tempo de evolução, a difusão através do elemento de fluido terá o efeito de uniformizá-lo espacialmente. Num sistema físico real tal efeito equivaleria à difusão molecular entre duas espécies diferentes, tal qual soluto e solvente, um fenômeno associado ao movimento Browniano.

No entanto, estamos interessados em tempos de convecção relativamente curtos e para esses casos a difusão pode ser desprezada ($\xi \approx 0$). O efeito dessa difusão sobre o problema é discutida em mais detalhes em [9, 5]. Assim, para $\xi = 0$ a equação (2.1) se reduz a

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \tag{2.2}$$

o que, por (2.1), correponde a uma equação de conservação para Φ. Ou seja, a concentração do contaminante passivo em qualquer elemento de fluido infinitesimal é constante à medida que este mesmo elemento de fluido é levado pelo fluxo.

Agora, seja $\mathbf{r}(t)$, a posição de um elemento de fluido, uma função do tempo. A trajetória de um elemento é uma solução da equação

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \tag{2.3}$$

O modelo em questão, por se tratar de um fluido incompressível, tem a propriedade de conservação de volume [13]. Dado um volume inicial $V_0 = V(t_0)$ do fluido, após um tempo $t > t_0$ a mesma porção do fluido, sujeita à convecção, terá a sua topologia alterada, mas o volume terá permanecido o mesmo, isto é, $V_0 = V(t_0) = V(t)$.

2.2 Fluidos Caóticos

Para uma variação linear infinitesimal $\delta\mathbf{r}$ ao longo de uma trajetória $\mathbf{r}(t)$, vemos que, em primeira ordem, $\delta\mathbf{r}(t)$ satisfaz

$$\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \delta\mathbf{r}.\nabla\mathbf{v} \tag{2.4}$$

Em fluidos caóticos as trajetórias típicas têm soluções variacionais $\delta\mathbf{r}(t)$ cujos valores, em média, aumentam exponencialmente. Quando dois elementos de fluido, inicialmente muito próximos no espaço, divergem exponencialmente no tempo, diz-se que que o fluido é caótico [8]. A divergência exponencial de trajetórias caracteriza os sistemas ditos caóticos; a evolução de tais sistemas apresentam extrema sensibilidade às condições iniciais.

Da equação (2.2) deduzimos que o campo escalar passivo, isto é, a concentração de contaminante, tem valores constantes Φ_1 e Φ_2 para dois elementos de fluido adjacentes. Assim, $\delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ também é uma constante seguindo o fluxo. Considerando a separação $\delta\mathbf{r}$ entre as duas trajetórias como sendo infinitesimal, nós temos $\delta\Phi = \delta\mathbf{r}.\nabla\Phi$; logo, de (2.2) temos

$$\frac{d}{dt}(\delta\mathbf{r}.\nabla\Phi) = 0 \tag{2.5}$$

ao longo de qualquer trajetória. Sabemos que num fluxo caótico há soluções $\delta\mathbf{r}(t)$ que crescem exponencialmente, correspondendo ao alongamento de um elemento de fluido numa direção. No entanto, sendo o fluido incompressível, em oposição ao alongamento existe um estrangulamento do elemento de fluido em alguma outra direção. Tal fenômeno é conhecido como *stretching* [9]. Desse modo, há, também, soluções $\delta\mathbf{r}(t)$ da equação (2.4) que decrescem exponencialmente no tempo.

Uma maneira mais clara de compreender tal fenômeno é considerar um fluxo incompressível bidimensional. Imaginemos um bloco de fluido retangular de lados adjacentes $\mathbf{l_1}$ e $\mathbf{l_2}$. Como o fluido é incompressível em duas dimensões, a área da caixa não muda no tempo. Logo, se $\mathbf{l_1}$ e seu lado oposto se apartarem exponencialmente no tempo, então simultaneamente $\mathbf{l_2}$ e seu lado oposto devem se aproximar exponencialmente.

Portanto, da expressão (2.5) concluímos que, para soluções exponencialmente decrescentes de $\delta\mathbf{r}(t)$, o gradiente do campo escalar, $\nabla\Phi$, cresce exponencialmente de modo a manter $\delta\mathbf{r}.\nabla\Phi$ constante. Além disso, devido à sensível dependência de $\mathbf{l_1}$ e $\mathbf{l_2}$ às condições iniciais, haverá grandes variações do gradiente do campo escalar passivo em escalas de espaço muito pequenas [8].

É sabido que, para tempos de evolução suficientemente grandes, $\nabla\Phi$ concentra-se num conjunto fractal [9], muito embora o próprio campo escalar passivo Φ não o seja devido à sua propriedade de conservação de volume. Muitos estudos foram realizados tendo como interesse primário o gradiente do campo escalar [8]. Neste trabalho, no entanto, nos concentramos no campo escalar passivo em si ao estudar as propriedades convectivas de fluidos bidimensionais caóticos.

2.3 Imagens do Campo Escalar

Para o desenvolvimento dos nossos estudos numéricos, resolvemos a equação (2.3) para uma escolha particular de $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, integrando-a em intervalos discretos de tempo e obtendo um *mapa* para as equações das trajetórias. Esse mapa consiste em uma relação de iteração que fornece, em tempos discretos, as posições de uma trajetória do fluido, também chamada de *órbita*. Isto é, dado um campo de velocidades de fluxo $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, integrando a equação (2.3) sobre um intervalo de tempo T, de nT a $(n+1)T$, com $n = 0, 1, 2, ...$, obtém-se um mapa estroboscópico

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{r}_n, n) \tag{2.6}$$

que fornecerá as posições discretas $\mathbf{r}_n$ ao longo de uma trajetória do fluido. O mapa dependerá explicitamente do passo n, diga-se, do tempo, se o fluxo não for periódico com período T, e, em particular, se o campo de velocidades for não periódico no tempo.

Especificamente consideramos o seguinte campo de velocidades bidimensional $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ com variação espacial suave, com $\mathbf{r} = (x, y)$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = v_1 y\hat{\mathbf{x}} + v_2 sen[\theta(t) + x]\delta_T(t)\hat{\mathbf{y}} \tag{2.7}$$

onde

$$\delta_T(t) = T\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{2.8}$$

é uma função de impulso periódica e $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ são vetores unitários nas direções x e y, respectivamente; v_1 e v_2 são constantes. A dependência temporal da fase $\theta(t)$ não é periódica em

nosso modelo, de modo que o mapa $\mathbf{M}$ dependerá de n. Por exemplo, se $\theta(nT)$ fosse uma constante, o campo de velocidades daria então um fluxo exatamente periódico.

O primeiro termo em (2.7) representa uma variação uniforme linear na componente x da velocidade do fluido; e o segundo uma perturbação espaço-temporal na componente y, um impulso aplicado periodicamente. Notamos que o campo (2.7) corresponde ao fluxo de um fluido incompressível, isto é, $\nabla.\mathbf{v} = 0$, salvo nos instantes infinitesimais nos quais a perturbação em y é aplicada. No entanto, neste caso, a duração do impulso, idealmente, é instantânea.

A principal razão pela qual o campo (2.7) foi escolhido é que ele permite a derivação analítica de um mapa. A dependência do tipo função delta não se encontra em fluxos reais, mas esperamos que ela simule, pelo menos em alguns aspectos, o comportamento de fluidos físicos típicos [8].

Escolhendo $T = 2\pi$, a partir de (2.7) integramos a equação (2.3) como a seguir :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{nT+\epsilon}^{(n+1)T+\epsilon} d\mathbf{r} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{nT+\epsilon}^{(n+1)T+\epsilon} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)dt \tag{2.9}$$

o que nos leva ao mapa

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - Ksen(2\pi x_n + \theta_n) \\ x_{n+1} &= x_n + y_{n+1} \end{aligned} \tag{2.10}$$

com $K = \frac{v_1 v_2 T}{2\pi}$ e onde θ_n, $\mathbf{r}_n$ e $\mathbf{r}_{n+1}$ são os valores discretos de $\theta(t = nT)$, $\mathbf{r}(t = nT)$ e $\mathbf{r}(t = [n+1]T)$, respectivamente. Os limites em (2.9) foram tomados para a integração de funções delta. O mapa (2.10) obtido foi convenientemente normalizado, de modo que, podemos notar, é espacialmente periódico em x e em y. Logo, a distribuição inicial do escalar passivo $\Phi(\mathbf{r}, 0)$ é também espacialmente periódica com período 1, permanecendo assim para qualquer tempo $t > 0$; os pontos (x, y) e $(x \pm 2k\pi, y \pm 2k\pi)$, com k inteiro, são equivalentes. Podemos, portanto, tomar *mod* 1 do mapa (2.10) para ambas as expressões de iteração.

Com $\theta_n \equiv 0$ o mapa (2.10) se reduz ao familiar *mapa padrão* [14]. No capítulo seguinte falaremos sobre o mapa padrão, suas características e seu comportamento ante a introdução de uma fase perturbadora, como no modelo. Em nossos estudos consideraremos que $\theta(t)$

terá uma dependência temporal complexa do tempo; esperamos assim que os resultados obtidos através dessa escolha sejam uma boa indicação qualitativa do comportamento de fluxos que têm campos de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ com dependência complexa do tempo. Dessa forma faremos θ_n assumir valores aleatórios no mapa (2.10).

Por convenção, consideraremos uma distribuição uniforme da fase no intervalo $(0, 2\pi)$. Devemos ainda enfatizar mais uma vez que, embora o mapa (2.10) e a nossa definição para a fase estejam baseadas em um campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ específico, esperamos que o comportamento do modelo seja representativo de uma larga classe de fluxos.

O algorítmo computacional para obtenção das imagens do campo escalar é como segue. Uma sequência de números aleatórios θ_n uniformemente distribuída no intervalo $0 \leq \theta_n \leq 2\pi$ é gerada. Consideramos uma rede de pontos sobre os quais os valores de Φ, o campo escalar passivo ou concentração de contaminante, são medidos a cada iteração do mapa. A área de medida cobre o quadrado $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$. Suponhamos que o valor de Φ é requerido sobre um ponto $\mathbf{r}' = (x', y')$ da rede de medida na iteração N. A trajetória que termina em $\mathbf{r}'$ é obtida aplicando-se o inverso do mapa (2.10) sobre o ponto $\mathbf{r}_N = \mathbf{r}'$ e iterando-o N vezes. Isto é, estamos considerando o ponto da rede, cuja posição é dada, como sendo o de uma trajetória que foi iterada N vezes. Iterando-o inversamente chegamos ao ponto $\mathbf{r}_0$ que deu origem à sua trajetória. E como Φ é constante ao longo de qualquer trajetória [equação (2.2)], nós temos simplesmente que

$$\Phi(\mathbf{r}', NT) = \Phi_0(\mathbf{r}_0, 0) \tag{2.11}$$

onde Φ_0 é a distribuição inicial do campo escalar passivo. Em suma, basta iterar inversamente N vezes um ponto $\mathbf{r}'$ da rede de medida para obter o ponto $\mathbf{r}_0$ que deu origem a sua trajetória, e então tomar Φ por (2.11).

O campo escalar inicial usado em nossas simulações é definido por

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = sen(2\pi x) \tag{2.12}$$

onde $\mathbf{r} = (x, y)$.

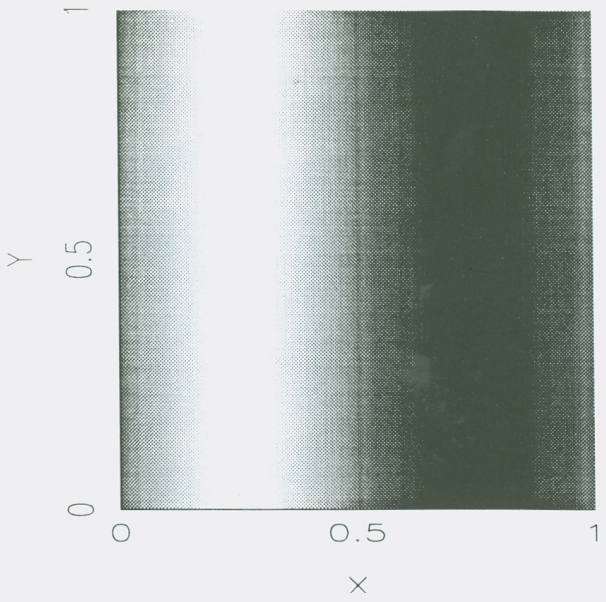

Figura 2.1: Perfil inicial de concentração de contaminante no fluxo ($N = 0$).

A rede de medida compõe 600×600 pontos ou pixels de imagem. Uma escala linear de intensidade de cores em tons de cinza foi atribuída aos valores de Φ para a visualização do fluxo. Como (2.12) é limitado no intervalo $(-1, +1)$, essa escala é tal que para $\Phi = -1$ os pixels apresentam cor preta, e para $\Phi = +1$, cor branca, apresentando matizes de cinza para valores intermediários.

Na figura (2.1) temos o exemplo do fluxo para a iteração $N = 0$, conforme definido em (2.12). Nas figuras (2.2) e (2.3), a evolução do fluxo para o valor $K = 0,1$ do mapa e diversas iterações : $N = 4$, 8, 12 e 16. Vemos como, à medida que o número de iterações aumenta, o fluido sofre convecção e promove a mistura das cores, ocasionando padrões cada vez mais complexos e em escalas cada vez menores. No entanto, como já dito, os padrões (isto é, o escalar passivo) não se concentrarão sobre um fractal já que, para qualquer valor Φ_C, a área total das regiões em que $\Phi > \Phi_C$ permanece constante para qualquer iteração.

Devemos notar ainda que, para cada iteração, é utilizada a mesma sequência de números aleatórios para a fase, e que os padrões convectivos formados dependem da sequência em si. Antes da implementação dos programas computacionais para as simulacoes numericas extraimos um espectro de Fourier de uma sequência grande de números aleatórios para a

fase θ_n (cerca de $1,6 \times 10^3$ valores); verificamos uma distribuição uniforme de frequências, de modo que validamos para nossos propósitos a subrotina utilizada para a geração desses números em computador [15].

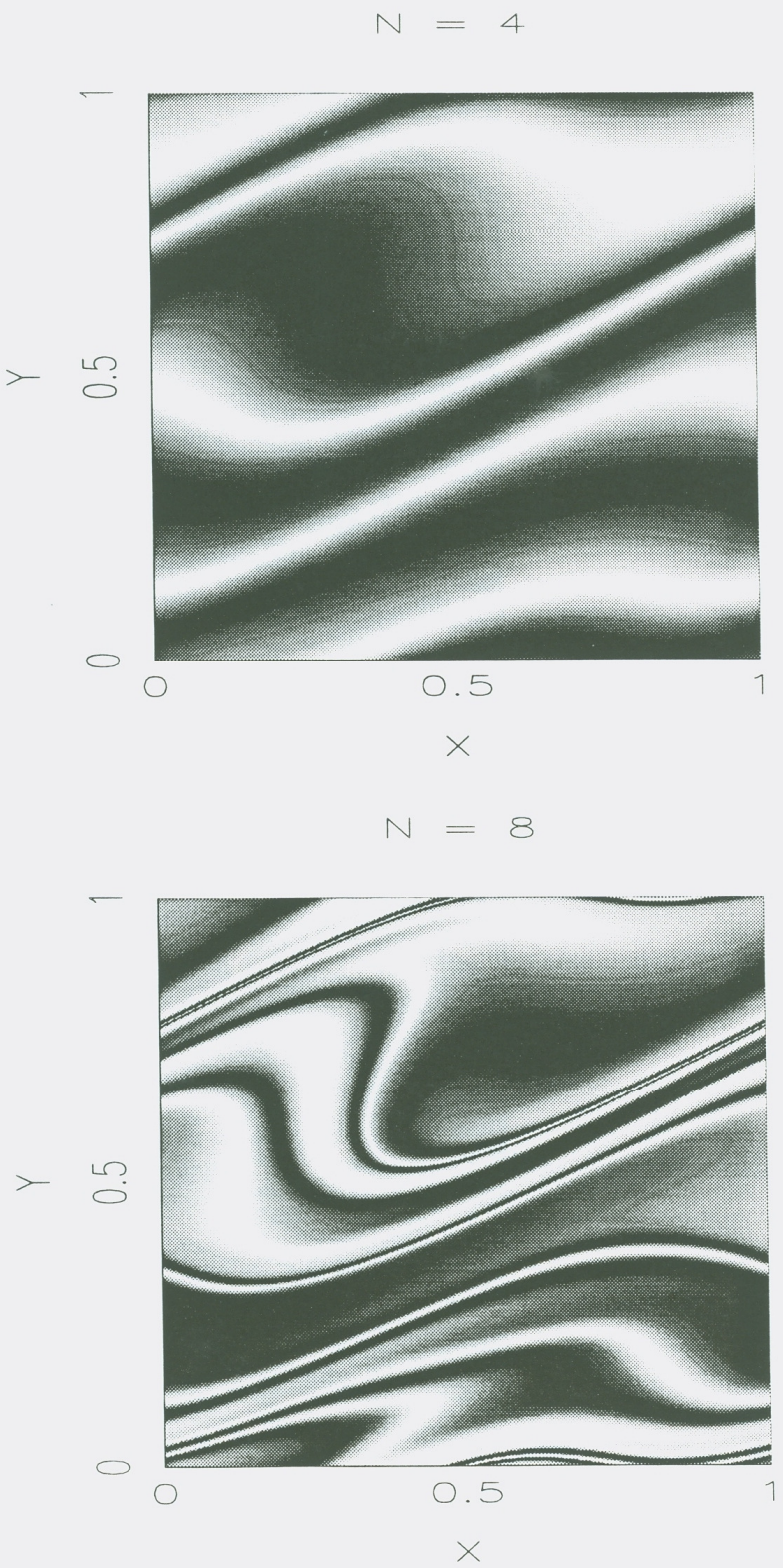

Figura 2.2: Perfil do fluxo para 4 e 8 iterações, com configuração inicial conforme figura (2.1); $K = 0,1$.

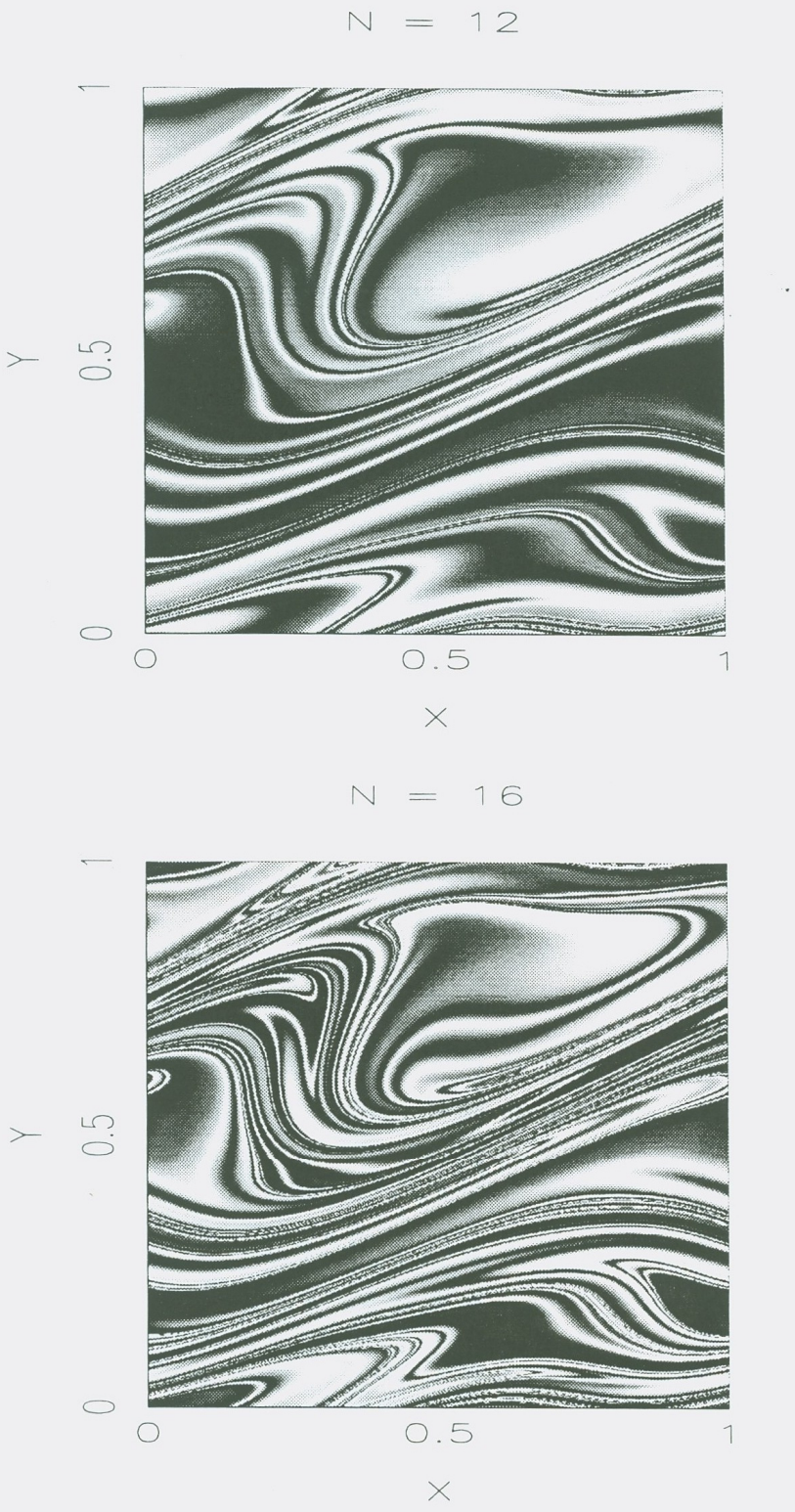

Figura 2.3: Perfil do fluxo para 12 e 16 iterações, com configuração inicial conforme figura (2.1); $K = 0,1$.

Capítulo 3

O Mapa Padrão

Uma vez que o modelo proposto para estudo representa uma versão do *mapa padrão* ou *standard*, também conhecido como *mapa de Chirikov*, convém-nos estudar suas características e propriedades e compará-las às do modelo. Proporemos adiante uma modificação no modelo que nos permitirá compreendê-lo melhor a partir da transição de regimes de comportamento entre o mapa padrão e o mapa do modelo.

3.1 Seções e Mapas de Poincaré

Consideremos o movimento em um toro descrito pelas equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde ω_1 e ω_2 são *constantes de movimento*; θ_1 e θ_2 são as coordenadas que descrevem o movimento no sistema.

A solução das equações (3.1) é :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \omega_1 t + \theta_{10} \\ \theta_2 &= \omega_2 t + \theta_{20} \end{aligned} \tag{3.2}$$

com θ_{10} e θ_{20} constantes no tempo.

Para estudar as trajetórias do sistema no espaço de fases convém utilizar uma *seção de Poincaré* [3, 11]. Em geral, por meio da seção de Poincaré reduzimos o estudo do movimento no espaço de fases de um sistema de k dimensões para o que chamamos de *mapa de Poincaré*, num espaço de fases de $(k-1)$ dimensões. No caso em questão, a seção de Poincaré é um plano fixo que intercepta as trajetórias de (3.2). Os pontos de intersecção de uma trajetória sobre a seção perfazem uma *órbita* e seu conjunto representa o *mapa de Poincaré*.

Uma boa escolha de seção é dada por $\theta_2 = constante$. Assim, as sucessivas intersecções de uma trajetória com a seção de Poincaré estão separadas por um intervalo de tempo $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_2}$. Durante esse intervalo de tempo θ_1 varia de

$$\Delta\theta_1 = \omega_1 \Delta t = 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2} = 2\pi w \tag{3.3}$$

onde w é chamado *número de rotação* (*winding number*) [11, 12]. Se w for um número irracional o movimento em (3.2) será quase-periódico e as trajetórias preencherão todo o toro. Se for um número racional, satisfazendo assim a uma condição de ressonância, a trajetória será fechada e o movimento será periódico.

As equações que descrevem o movimento da intersecção n à intersecção $(n+1)$ são

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\alpha \end{aligned} \tag{3.4}$$

em que I representa a variável de *ação* do sistema, isto é, I é uma contante do movimento. O mapa (3.4) é chamado *mapa twist* [3, 11], sua importância reside no fato de nos permitir estudar de uma maneira simples sistemas não lineares perturbados. Nesse caso podemos generalizar, a partir de (3.4),

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + \epsilon f(I_n, \theta_n) \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\alpha + \epsilon g(I_n, \theta_n) \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde ϵ regula a intensidade da perturbação no sistema. Linearizando este mapa nas proximidades de um ponto fixo para o qual α é um inteiro obtém-se o *mapa de Chirikov* ou *mapa*

padrão [12]

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= F(I_n, \theta_n) = I_n + K sen\theta_n \\ \theta_{n+1} &= G(I_n, \theta_n) = \theta_n + I_{n+1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

K é o parâmetro que mede a intensidade da perturbação ou não linearidade. Os pontos fixos de período 1 de (3.6) são aqueles para os quais

$$\begin{aligned} I^* &= F(I^*, \theta^*) \\ \theta^* &= G(I^*, \theta^*) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Para o mapa (3.6) são os pontos [3, 11, 12]

$$\begin{aligned} I^* &= 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \\ \theta^* &= 0, \pi \end{aligned} \tag{3.8}$$

Existem portanto dois pontos fixos para cada inteiro m. No intervalo em que $0 \leq I \leq 2\pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, os pontos fixos são $(0,0)$ e $(2\pi, 0)$.

A matriz Jacobiana do mapa padrão é [3, 11, 12]

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial I} & \frac{\partial F}{\partial \theta} \\ \frac{\partial G}{\partial I} & \frac{\partial G}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K cos\theta \\ 1 & 1 + K cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

e o seu determinante é igual a 1, sendo o sistema conservativo. A estabilidade dos pontos (3.8) depende dos autovalores de J obtidos sobre (I^*, θ^*). O ponto $(\pi, 0)$, para qualquer valor de K, é sempre *instável* (ao que chamamos de *ponto hiperbólico*), e o ponto $(0,0)$ é *estável* (ou *elíptico*) para $K < 4$ e *instável* para $K > 4$ [12].

O mapa padrão é comumente utilizado no estudo da transição do movimento regular ao caótico em sistemas conservativos, daí sua importância. Na figura (3.1) apresentamos o mapa de Poincaré, relações (3.6), para valores distintos do parâmetro K. Tomamos 10^2 posições iniciais distribuidas uniformemente ao longo do eixo I, com $\theta_0 = 0$, e para cada uma iteramos 10^3 vezes o mapa (3.6). O que se vê é o que definimos por *retrato de fase* (*phase portrait*). Por conveniência normalisamos o mapa de modo que as coordenadas situam-se no domínio $[0, 1]$.

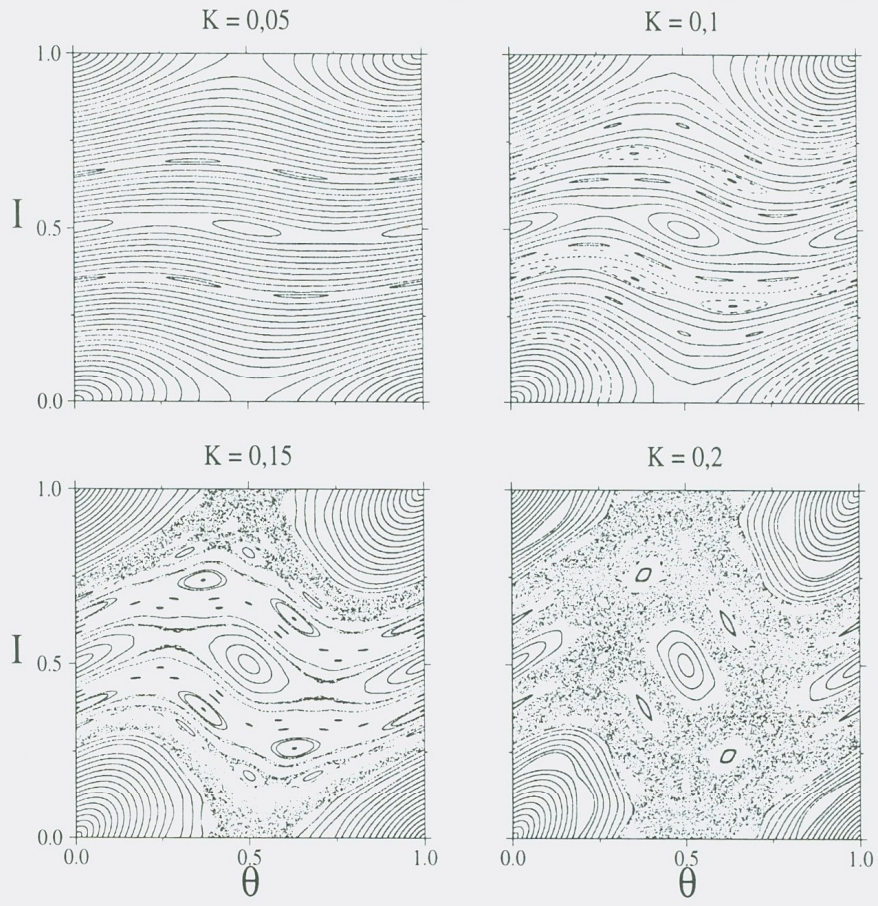

Figura 3.1: Retratos de fase do mapa padrão (normalisado) para $K = 0,05$; $K = 0,1$; $K = 0,15$ e $K = 0,2$. Em cada mapa há 100 posições iniciais uniformemente distribuidas em $y = 0$ e iteradas 1000 vezes.

Vemos nos mapas que, para valores menores de K, o sistema apresenta órbitas regulares, periódicas e quase-periódicas. À medida que a perturbação aumenta presenciamos o efeito de ressonâncias com o surgimento de *ilhas* secundárias em torno de pontos elípticos estáveis [11, 12]. Gradualmente surgem bifurcações e regiões em torno dos pontos hiperbólicos e separatrizes nas quais as órbitas são irregulares. Ocorre aqui o fenômeno da superposição de estruturas ressonantes que dá origem ao caos [11, 12].

O modelo estudado poderia ser representado pelo mapa padrão no caso em que a fase θ_n em (2.10) for nula, estacionária ou periódica. Nesse caso a mistura e difusão de contaminantes no fluido ficam a cargo da dinâmica caótica do sistema exclusivamente. Na figura (3.2)

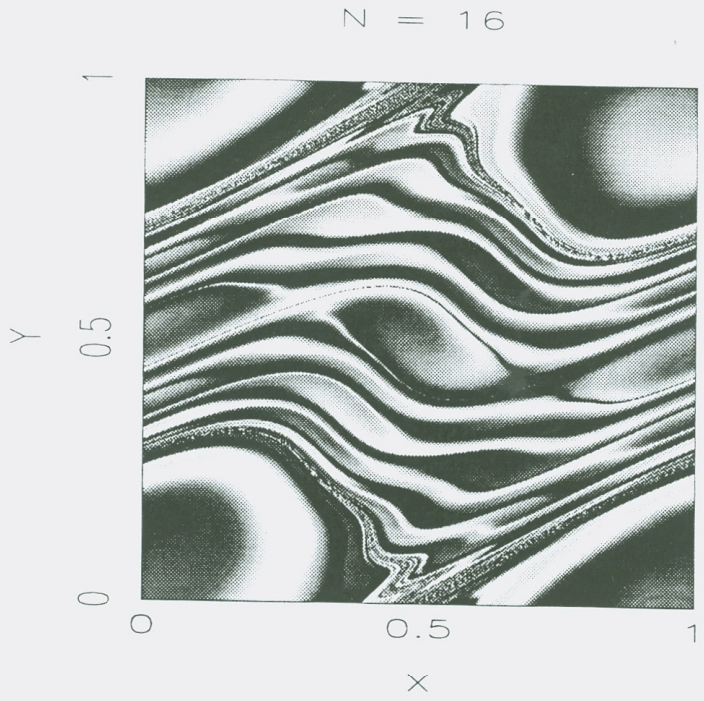

Figura 3.2: Fluxo para mapa padrão (fase nula), com $K = 0,15$ e $N = 16$ iterações.

temos um fluxo, como definido no capítulo anterior, regido pelo mapa (2.10) com fase nula, para $K = 0,15$ e $N = 16$ iterações. Vemos que nas regiões em torno do ponto elíptico principal o contaminate pouco se difunde, mas há estruturas mais misturadas em regiões que se apresentam caóticas, como em torno do ponto hiperbólico principal.

3.2 Modos Aceleradores do Mapa Padrão

Os modos aceleradores do mapa padrão caracterizam-se por regimes de difusão *anômala* de órbitas, isto é, a *dispersão* global de órbitas, que definiremos completamente no próximo capítulo, apresenta uma variação não linear no tempo [10]. Tais regimes têm origem numa característica muito peculiar do mapa padrão.

Para um mapa em geral, θ é sempre *mod* 2π (ou *mod* 1 para o mapa normalisado), mas I não. No entanto, para o mapa padrão, a segunda relação de iteração de (3.6) implica que I pode também ser considerada *mod* 2π. Esta peculiaridade dá origem a um segundo tipo de pontos fixos de período 1. Se considerarmos que o ângulo e a ação (ambos *mod* 2π) são

estacionários, então de (3.8) passamos a ter :

$$\begin{aligned} I^* &= 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \\ K sen\theta^* &= 2\pi l \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Para $l \neq 0$ nós temos os chamados *modos aceleradores* do mapa padrão [14], assim chamados pois a ação em tal ponto fixo aumenta de $2\pi l$ em cada iteração do mapa, o que ocasiona uma difusão de órbita acentuada. A condição de estabilidade desses pontos é dada por [12] :

$$|2 \pm K cos\theta^*| < 2 \tag{3.11}$$

o que implica que as janelas de estabilidade para os pontos de período 1 existem para valores sucessivamente mais altos de K à medida que l aumenta, ao contrário do limite de estabilidade $K < 4$ para $l = 0$. Fenômeno semelhante ocorre com pontos aceleradores de periodicidades maiores [12]. As janelas de estabilidade, como veremos, surgem a intervalos regulares no espaço de parâmetro do mapa. Sobre o modo acelerador surgem estruturas estáveis ou *ilhas de aceleração* no mapa de Poincaré do mapa padrão [12].

É muito importante observar que tais propriedades são uma particularidade do mapa padrão, e portanto *é inadequado considerar modos aceleradores para mapeamentos que se aproximam apenas localmente do mapa padrão* [12]. Veremos no próximo capítulo a ação dos modos aceleradores nos regimes de difusão de trajetórias do mapa padrão.

3.3 A Ação de Ruído no Mapa Padrão

Como visto na apresentação do modelo no capítulo anterior, estaremos lidando com um mapa padrão que apresenta uma perturbação aleatória no argumento do seno. Para nós será conveniente, especialmente no capítulo seguinte em que estaremos estudando as propriedades de difusão de trajetórias no mapa, adaptarmos (2.10) introduzindo um parâmetro de controle na fase aleatória. Lembramos que as coordenadas I e θ (ângulo-ação) de (3.6) são substituidas pelas coordenadas espaciais y e x no modelo, de modo que θ ou θ_n designará tão somente a fase aleatória em (2.10).

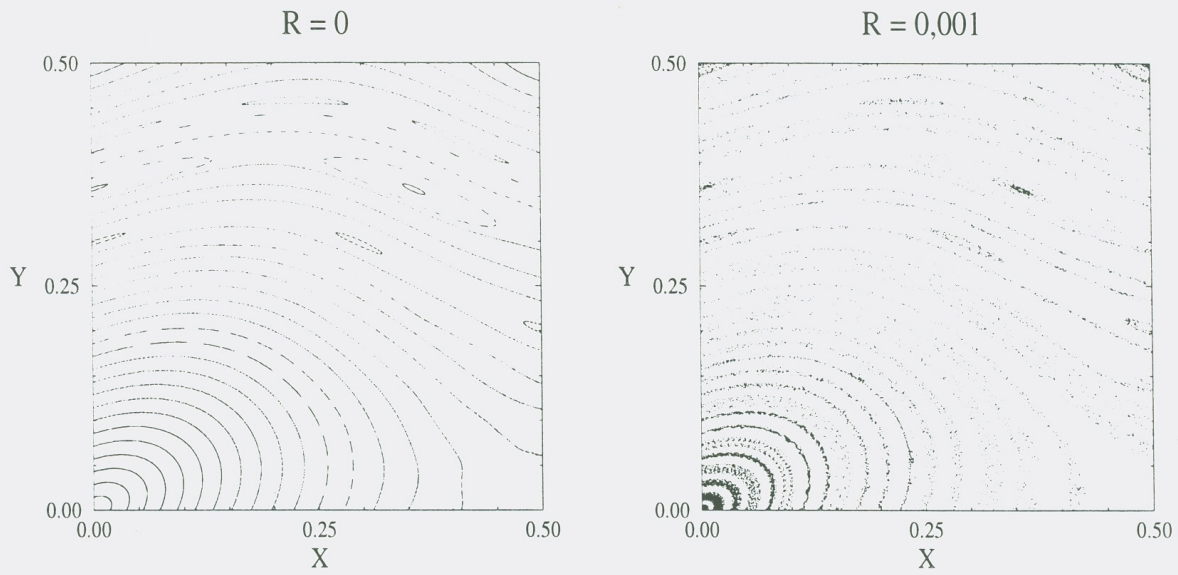

Figura 3.3: Ampliações do mapa padrão (normalisado) perturbado por fase aleatória, com $R = 0$ e $R = 0,001$, $K = 0,1$.

Assim daremos à fase a seguinte forma :

$$\theta_n = R\delta_n \tag{3.12}$$

onde δ_n é um número aleatório no intervalo $[0, 2\pi]$ e diferente a cada iteração n, e R é o parâmetro de controle introduzido, definido no intervalo $[0, 1]$. O objetivo do parâmetro R é observar regimes de comportamento intermediários entre o mapa padrão e o mapa (2.10), o que será útil na compreensão de fenômenos associados à difusão de trajetórias e aos modos aceleradores.

A ação mais evidente do ruído sobre o mapa padrão é vista nas figura (3.3), a partir das relações (2.10). Temos duas ampliações do mapa (2.10) (normalisado) para os casos $R = 0$ e $R = 0,001$, segundo (3.12), para $K = 0,1$. Vemos que o ruído, ainda que de pequena intensidade, incorpora um *random walk* às órbitas do mapa padrão, tornando-as erráticas e promovendo a destruição das superfícies regulares. É de se esperar que isso favoreça o escape de órbitas pelo espaço de fase (ou de contaminante de fluido pelo espaço no caso do modelo), mas veremos que os modos aceleradores desempenham um papel importante

ao lado desse fenômeno nos regimes de difusão do mapa padrão perturbado por (3.12). No próximo capítulo veremos esse fenômeno com mais detalhes.

Capítulo 4

Difusão

Neste capítulo caracterizaremos o modelo no que se refere às suas propriedades globais de difusão de trajetórias. Isto é, nos interessa aqui determinar como, em média, as trajetórias de traçadores passivos no fluido se difundem. Como estratégia para compreensão de fenômenos ligados à difusão, veremos algumas propriedades do fluido não perturbado aperiodicamente no tempo e então analisaremos seu comportamento na transição em que passa a ser perturbado por uma fase aleatória dada por (3.12).

4.1 Dispersão e Coeficiente de Difusão

Estudar as propriedades de difusão de trajetórias de traçadores passivos no fluido equivale, no contexto deste estudo, a estudar a difusão de órbitas no mapa padrão. Definiremos então duas grandezas de interesse para serem obtidas numericamente [10].

Seja $< y_n^2 >$ o deslocamento quadrático médio de órbitas, ou *dispersão*, na direção y e iteradas até a n-ésima iteração do mapa (2.10) :

$$< y_n^2 >= \lim_{n_P \to \infty} \frac{1}{n_P} \sum_{i=1}^{n_P} (y_n^{(i)} - y_0^{(i)})^2 \tag{4.1}$$

onde y_0 e y_n são, respectivamente, a posição inicial e final de uma órbita em y , n_P é o número de órbitas da média e o índice i denota a i-ésima trajetória. E ainda D_y, o *coeficiente de*

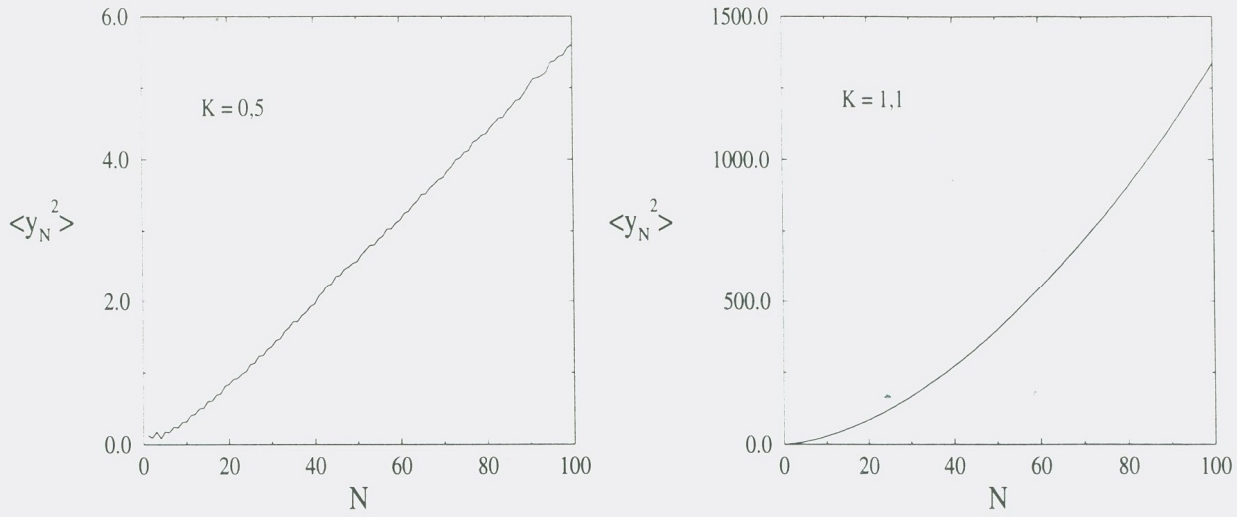

Figura 4.1: Dispersão em y para mapa padrão ($R = 0$), média sobre 4×10^3 órbitas, $y_0 = 0$, com (a) $K = 0,5$, e (b) $K = 1,1$.

difusão de órbitas na direção y :

$$D_y = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} < y_n^2 > \tag{4.2}$$

Ambas as grandezas são definidas no limite em que o número de órbitas vai ao infinito; o coeficiente de difusão é ainda definido para tempos infinitos [10, 12]. Para o cálculo, portanto, tomamos valores de n_P e n finitos, que denotaremos por N_P e N respectivamente. Assim as médias calculadas numericamente são $< y_N^2 >= \frac{1}{N_P} \sum_{i=1}^{N_P} (y_N^{(i)} - y_0^{(i)})^2$ e $D_y = \frac{1}{2N} < y_N^2 >$.

Na figura (4.1) vemos a dispersão em função de N para dois valores do parâmetro do mapa K. Para a média foram tomadas 4×10^3 órbitas com posições iniciais uniformemente distribuidas sobre a reta $y = 0$, de modo que $y_0^{(i)} = 0$. Para $K = 0,5$ a dispersão de órbitas é linear, mas é notável que para $K = 1,1$ a dispersão não só é não linear como a difusão é intensa comparada à do parâmetro anterior.

Na figura (4.2) apresentamos o perfil do coeficiente de difusão no espaço de parâmetros do mapa padrão, para $N = 100$ iterações (linha cheia). Vemos que há valores de K para

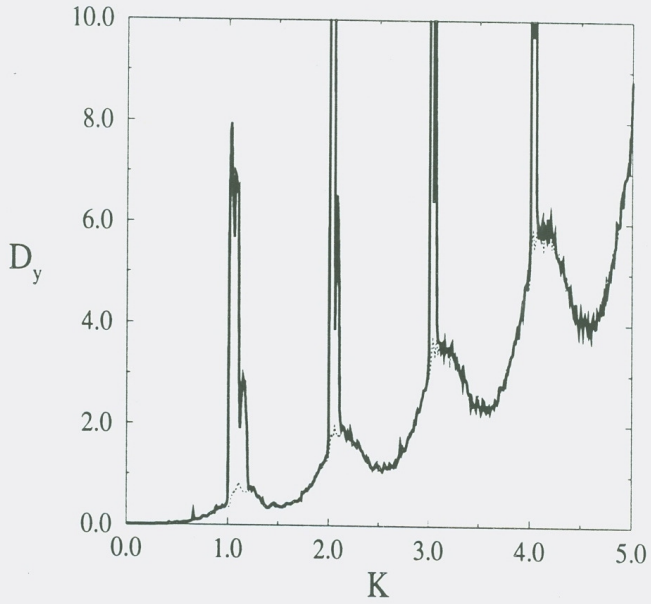

Figura 4.2: Coeficiente de difusão em y em função de K para o mapa padrão ($R = 0$, $N = 100$ iterações); média sobre 4×10^3 órbitas com posições iniciais em $y_0 = 0$ (linha cheia) e $y_0 = 0,5$ (linha pontilhada).

os quais a difusão é extremamente acentuada. O primeiro pico corresponde à dispersão apresentada na figura (4.1) para $K = 1,1$. Nessas regiões a dispersão não se apresenta linear [10]; de fato, correspondem aos modos aceleradores do mapa padrão [12]. A linha pontilhada representa o coeficiente de difusão, mantidos os mesmos parâmetros de cálculo, porém com posições iniciais sobre a reta $y = 0,5$. Nesse caso, não distinguimos os regimes de difusão acentuada; a dispersão, de fato, é linear mesmo para os valores de K para os quais antes se verificavam modos aceleradores.

Tal fenômeno é um indicativo de que há estruturas localizadas no espaço de fase do mapa responsáveis pela difusão acentuada e não linear de trajetórias, isto é, estruturas *aceleradoras*. Como visto na capítulo anterior, tais estruturas correspondem a pontos fixos peculiares do mapa padrão e que dão origem aos modos aceleradores [12].

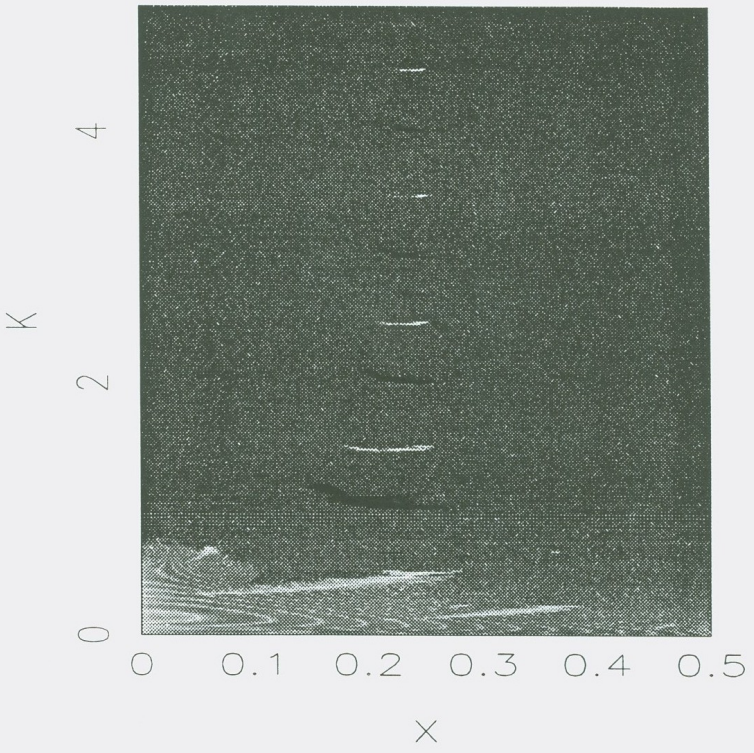

Figura 4.3: Padrão de difusão com varredura em K para órbitas do mapa padrão com posições iniciais sobre a linha $y = 0$. Tons escuros indicam posições iniciais cujas órbitas difundem-se mais.

4.2 Difusão no Mapa Padrão

Por meio das figuras (4.3) e (4.4) apresentamos uma maneira de localizar estruturas difusivas no mapa padrão e identificar possíveis padrões de difusão. Assim como foi feito para o cálculo do coeficiente de difusão, escolhemos um conjunto de posições iniciais uniformemente distribuidas sobre a reta $y = 0$ (eixo horizontal do mapa). Iteramos o mapa (com $R = 0$ em (3.12)) para cada uma delas e calculamos o deslocamento quadratico médio em y (4.1) de todas as trajetórias em 10^2 iterações. Atribuimos então uma escala de tons de cinza às posições iniciais, dependendo do quanto a trajetória se difundiu. Nas figuras os cálculos foram baseados em 6×10^2 posições iniciais e obtidos no espaço de parâmetros; sua resolução é a mesma das figuras do capítulo 2, 600×600 pixels.

A escala de cinzas não é proporcional a $< y_N^2 >$, foi ajustada para garantir um contraste

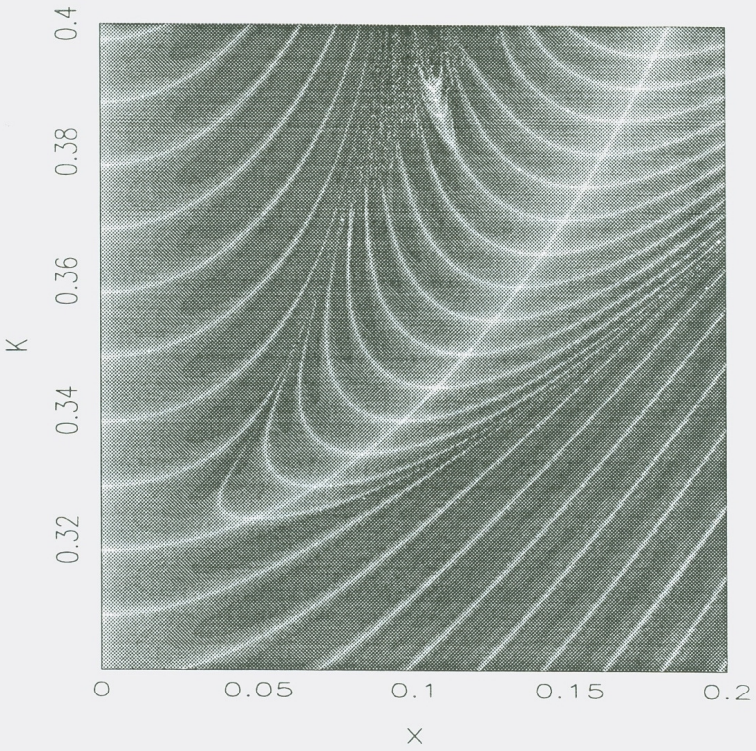

Figura 4.4: Padrão de difusão com varredura em K para órbitas do mapa padrão com posições iniciais sobre a linha $y = 0$. Ampliação da figura (4.3).

de tons adequado à visualização, mas tons escuros sempre indicam órbitas que se difundem mais. Vemos na figura (4.3) que para valores menores de K as trajetórias se difundem menos devido às estruturas regulares ainda presentes no mapa. À medida que o caos se intensifica a quebra de barreiras permite que as órbitas escapem pelo espaço de fase, o que fica evidente pelo aspecto desordenado do padrão difusivo das trajetórias. Notamos então que, para valores de K onde se verificam os modos aceleradores, surgem estruturas intensamente difusivas (em $y = 0$). O surgimento dessas estruturas é intermitente em K.

Notamos também que, entre dois modos aceleradores, surgem estruturas que, inversamente às dos modos aceleradores, aprisionam trajetórias, mas que são intermitentes como aquelas. Isso indica que a queda da difusão global denotada pelo coeficiente de difusão entre dois picos aceleradores é causada, ainda que em menor parte, não só pela ausência de estruturas de aceleração, mas também pela presença de estruturas aprisionadoras.

Como observação extra, o padrão de difusão do mapa obtido desta forma nos dá uma informação adicional. Na figura (4.4) temos uma ampliação do figura anterior. Neste intervalo de K há muitas estruturas regulares no mapa convivendo com estruturas caóticas. Destacam-se regiões de claros e escuros alternando-se. À medida que K aumenta, regiões claras, pouco difusivas, bifurcam-se e dão origem a outros ramos também claros, até um ponto em que o padrão de tons de cinza torna-se desordenado. Os ramos claros, de fato, concentram pontos elípticos, estáveis, e portanto tendem a aprisionar trajetórias. O surgimento de novos ramos claros denotam novos pontos estáveis. Tal fenômeno caracteriza o aparecimento de ilhas secundárias no mapa, isto é, de ressonâncias devido à perturbação que o parâmetro K representa para o mapa padrão. Assim, a figura (4.4) assemelha-se a um *diagrama de bifurcações* do mapa (sobre a reta $y = 0$).

4.3 Ilhas de Aceleração

Semelhantemente ao procedimento tomado na seção anterior, nesta seção identificamos as estruturas responsáveis pelos modos aceleradores do mapa padrão. No entanto, as posições iniciais serão tomadas sobre o plano do espaço de fase para um valor de K, e não sobre uma linha específica, com varredura em K.

Na figura (4.5) apresentamos o padrão de difusão para uma porção de área do espaço de fase do mapa padrão, fixado o valor $K = 1,1$, isto é, sobre o modo acelerador. A intersecção da estrutura vista com a reta $y = 0$ corresponde àquela da figura (4.3), enegrecida, próxima ao mesmo valor de K. Lembramos que é sobre tal reta que os padrões daquela figura foram calculados.

Em (4.5), no entanto, vemos em detalhes toda a estrutura difusiva. Os tons enegrecidos indicam que é altamente difusiva comparada às regiões vizinhas. Uma outra estrutura pode ser encontrada em posição simétrica à linha $x = 0,5$, o que se deve às propriedades de simetria do mapa. É a intensa difusividade destas regiões que atribuimos ao alto valor do coeficiente de difusão D_y para esse valor de K.

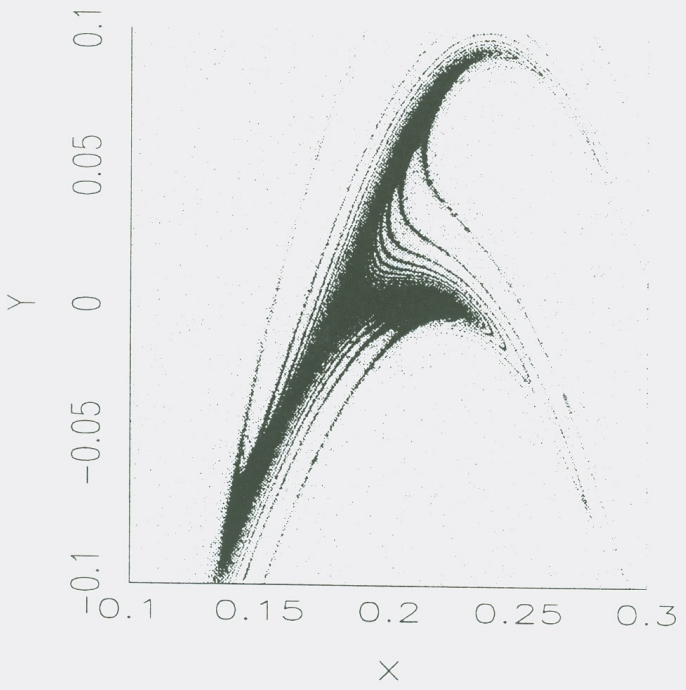

Figura 4.5: Padrão de difusão (em y) para órbitas do mapa padrão, com ilha aceleradora em evidência, $K = 1,1$. Tons escuros indicam posições iniciais cujas órbitas difundem-se mais.

O mapa de Poincaré da região em questão, figura (4.6.a), apresenta um conjunto de ilhas estáveis inseridas em regiões largamente caóticas, cujo aspecto é semelhante à da estrutura da figura (4.5). Tais ilhas, como observado no capítulo anterior, são aceleradoras pois, embora estáveis, constituem-se de pontos fixos especiais que difundem-se de um intervalo da ordem da própria extensão do espaço de fase do mapa a cada iteração.

O retrato de fase na figura (4.6.a), por si só, não permite determinar se tais ilhas são aceleradoras, o que só foi possível com a elaboração da figura (4.5). Para $K = 1,4918$, figura (4.6.b), por exemplo, temos o caso de um conjunto de ilhas com estrutura muito semelhante às das ilhas aceleradoras em $K = 1,1$. No entanto, como observamos na figura (4.4), trata-se de uma região estável comum, que aprisiona trajetórias; fato este que, aliado à ausência de quaisquer estruturas regulares significativas para valores de K menores (porém maiores que $K \sim 1,1$), inibem o crescimento de D_y.

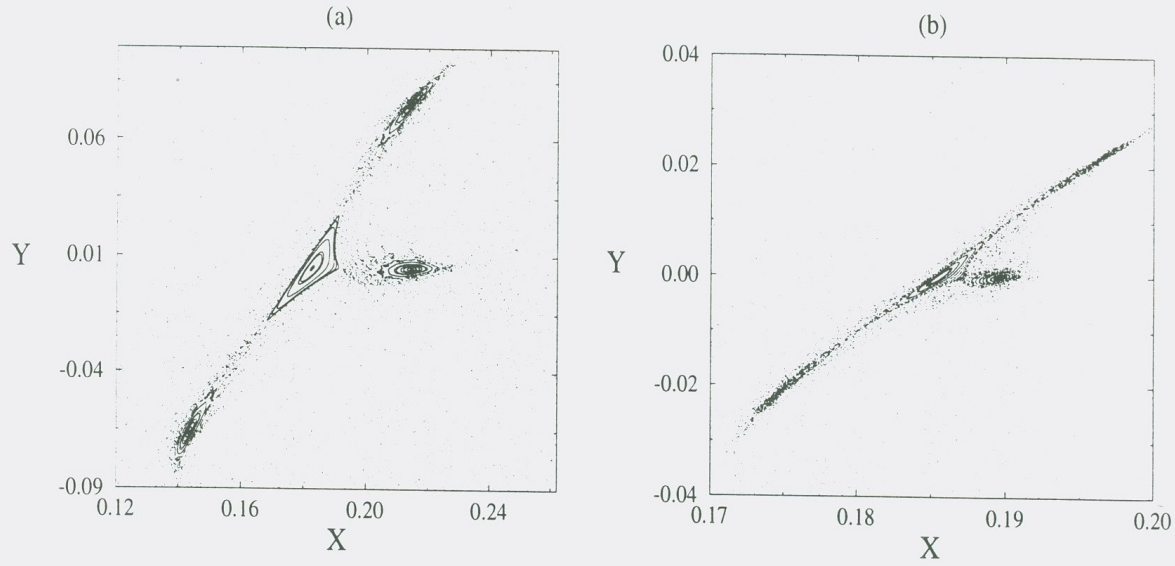

Figura 4.6: Mapas de Poincaré do mapa padrão ($R = 0$) para (a) $K = 1,1000$, com presença de ilha aceleradora, e (b) $K = 1,4918$, com presença de ilha não aceleradora.

4.4 Difusão no Modelo

Veremos agora como são as propriedades de transporte e difusão no modelo observando como a presença de uma fase aleatória afeta a difusão no mapa padrão. Considerando $R = 1$ em (3.12), obtivemos o coeficiente de difusão D_y a partir das mesmas condições iniciais de cálculo empregadas para o mapa padrão. Na figura (4.7), a linha cheia representa D_y em função de K para o mapa (2.10) com $R = 1$, isto é, amplitude máxima de ruído na fase, e a linha pontilhada representa a mesma curva obtida na figura (4.2), para o mapa padrão.

O coeficiente D_y, nesse caso, apresenta-se suave em relação às variações do coeficiente para o mapa padrão e cresce, em média, quadraticamente. Há duas observações importantes a fazer.

Define-se o *coeficiente de difusão quase-linear* para o mapa padrão [12] a partir do limite

$$\lim_{K\to\infty} D_y \sim K^2 \tag{4.3}$$

Tal parâmetro representa o valor do coeficiente (4.2) no limite em que o sistema torna-se totalmente ergódico, já que K mede a intensidade de sua não linearidade. Assim sendo,

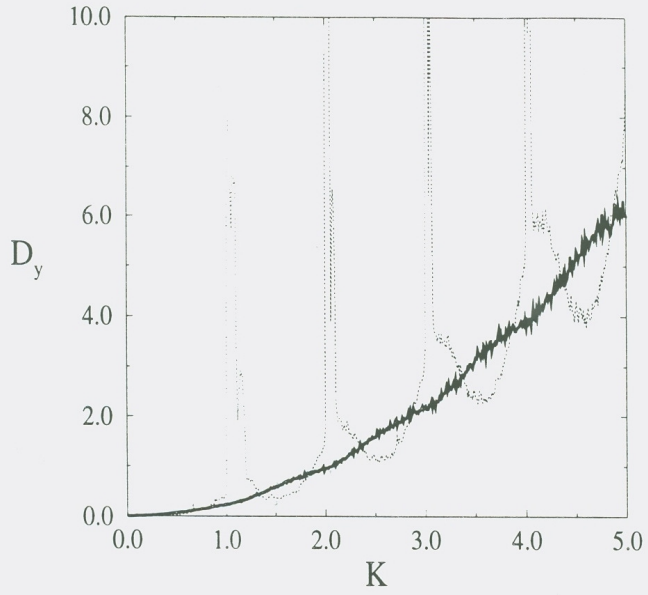

Figura 4.7: Coeficiente de difusão em função de K para $R = 1$ (linha cheia) e $R = 0$ (linha pontilhada).

concluimos que a fase aleatória no mapa padrão induz o sistema a um comportamento ergódico, a presença de ruído tem o efeito que o caos largamente instalado teria. De fato, a dispersão nesse caso é linear no tempo – figura (4.8) – onde antes era, em média, quadrático, mesmo sobre os modos aceleradores, o que pode ser constatado comparando-se as figuras (4.8) e (4.1) [10, 16]. Efetivamente, o transporte no sistema passa a ser do tipo Browniano. Presenciaremos novamente este fenômeno ao estudarmos propriedades estatísticas do modelo no próximo capítulo.

Uma outra observação refere-se à distinção de regimes de difusão no mapa. A diferença entre as curvas na figura (4.7) é ora negativa, ora positiva. Notadamente, a fase aleatória destrói os picos aceleradores, isto é, inibe a ação dos modos aceleradores; em outros pontos, entretanto, especificamente entre os picos aceleradores, o ruído intensifica a difusão de trajetórias, como se poderia intuitivamente esperar. Constatamos assim a presença de dois regimes de difusão distintos no mapa padrão perturbado por fase aleatória, um no qual o

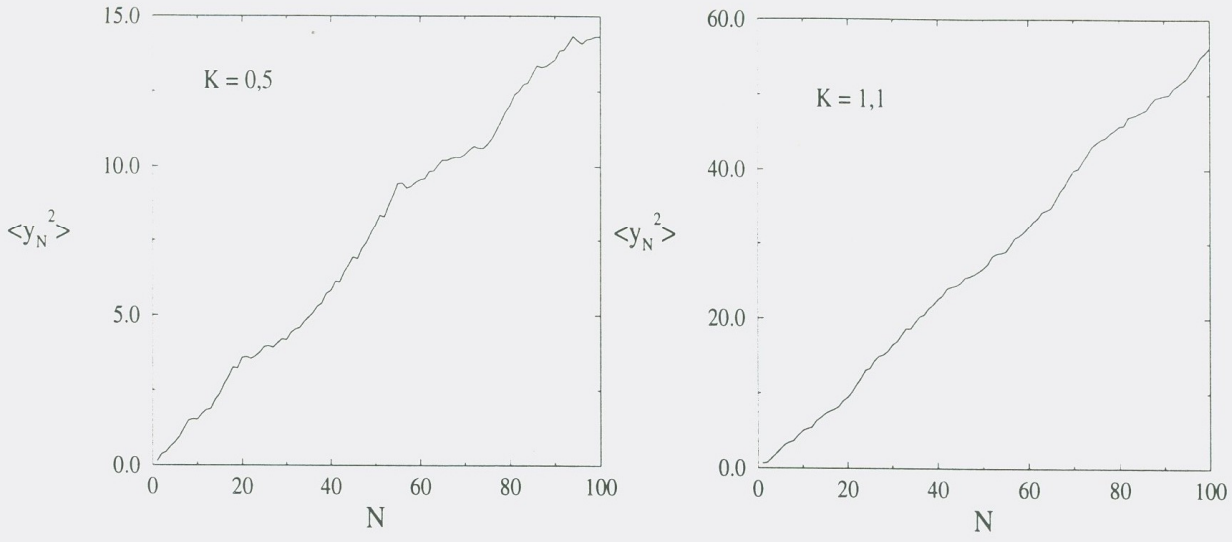

Figura 4.8: Dispersão em y para $R = 1$), média sobre 4000 órbitas, $y_0 = 0$, com (a) $K = 0,5$, e (b) $K = 1,1$.

ruído intensifica a difusão de trajetórias e outro no qual a inibe.

Na figura (4.9) podemos visualizar o fenômeno de outro modo. Temos o coeficiente de difusão D_y em função da intensidade do ruído, mantendo-se fixo o parâmetro K. Na figura (4.9.a) estão representadas as variações para dois valores de K sobre modos aceleradores, e na figura (4.9.b) para dois valores *entre* picos aceleradores. No primeiro caso a difusão cai drasticamente com o ruído, e no segundo, acentua-se.

Sobre o modo acelerador, parte das órbitas que compõem o coeficiente de difusão (relação (4.2), com $y_0^{(i)} = 0$) corresponde a pontos fixos aceleradores no mapa padrão, e são eles responsáveis pelo transporte anômalo nesse caso. Com a perturbação (3.12), tais órbitas são levadas a regiões não aceleradoras. Eventualmente, órbitas são levadas a regiões aceleradoras, mas a presença do ruido impede-as de permanecerem lá. Como resultado, o ruído inibe os picos de difusão global no mapa [17].

Para valores de K entre modos aceleradores, o fenômeno inverso acontece. Nesse caso o mapa padrão apresenta-se largamente caótico, sem a presença de regiões aceleradoras. Isto é, o caos, e não os modos aceleradores, são o fenômeno dominante no cômputo da difusão.

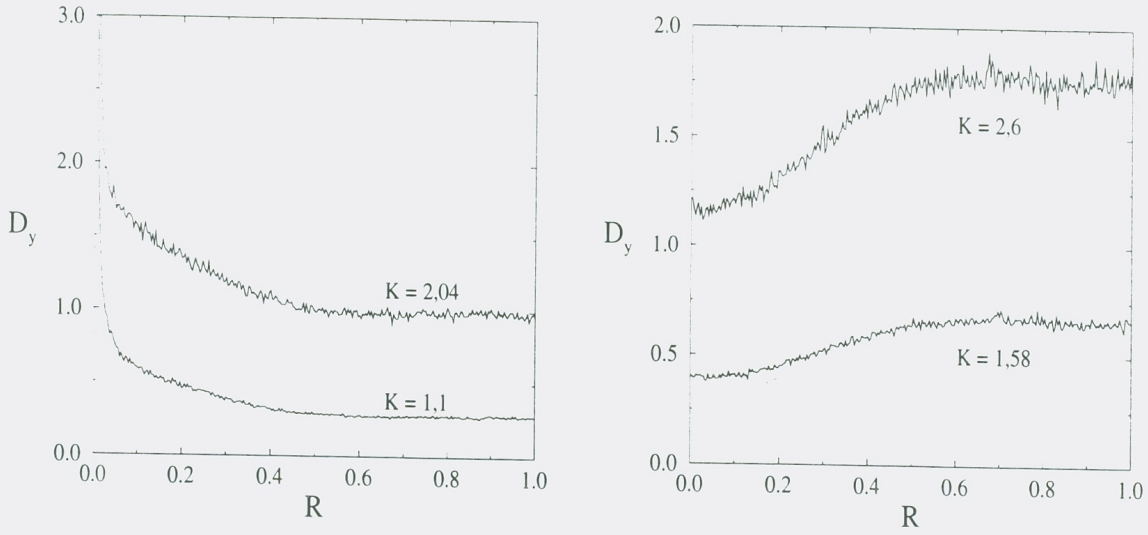

Figura 4.9: Coeficiente de difusão em função de amplitude de ruído para valores distintos de K.

Apesar disso, nem todas as órbitas do mapa são caóticas, algumas apresentam-se regulares. Há, como já vimos, a presença de ilhas estáveis não aceleradoras para certos valores de K. O efeito da fase aleatória torna, contudo, *todas* as órbitas caóticas [8], e consequentemente o mapa ergódico. A difusão global aumenta, portanto.

Capítulo 5

Convecção e Mistura

5.1 Distribuições de Probabilidade

Uma maneira conveniente de identificarmos padrões no comportamento convectivo do fluido é obtendo distribuições de probabilidades de grandezas mensuráveis que variam, seja no tempo, no espaço ou no espaço de parâmetros do sitema.

Em alguns experimentos reais [18] tem-se tomado, por exemplo, uma série temporal de uma variável como a temperatura flutuante, medida num ponto específico de um fluido em convecção e sob a ação de um gradiente de temperaturas entre as paredes do recipiente que o contém. Faz-se então uma distribuição de probabilidades ou histograma da flutuação dos valores obtidos em torno de uma média. Deste modo, tem-se associado à curva de distribuição de probabilidades, que ora apresenta-se Gaussiana, ora não, ao número de Reynolds do fluido, que por sua vez caracteriza seu regime de escoamento, seja ele laminar ou turbulento.

Inspirados nos resultados experimentais descritos acima, investigamos os histogramas das flutuações que observamos, com o objetivo de caracterizar os padrões identificados no modelo.

Assim, vamos obter as distribuições de probabilidade de séries temporais e espaciais. Primeiramente definimos uma escala de cores para a concentração do contaminante no fluido

no instante inicial, por convenção na iteração $N = 0$, a exemplo do que foi feito para a visualização da convecção do fluido (capítulo 2). Estudamos dois casos, um no qual a configuração inicial da concentração do contaminante varia linearmente,

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = 2x - 1 \tag{5.1}$$

e outro no qual varia senoidalmente (2.12),

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = sen(2\pi x) \tag{5.2}$$

Para ambas $-1 < \Phi < 1$, já que $0 < x_N < 1$.

Para obter uma série temporal, tomamos um ponto de referência na N-ésima iteração, e a partir dele iteramos o mapa (2.10) inversamente N vezes, de modo a podermos determinar o valor de Φ em $N = 0$. Para uma série espacial, definimos uma iteração de interesse (ou seja, um valor fixo de N) e tomamos uma sequência de pontos ao longo de uma linha do espaço, sobre os quais as concentrações são calculadas.

A partir das séries tomadas faremos um histograma da flutuação dos valores em torno de uma média. A flutuação é definida por :

$$\delta\Phi_i \equiv \Phi_i - < \Phi > \tag{5.3}$$

onde a média $< \Phi >$ é tomada sobre todos os valores Φ_i da série. O índice i denota o i-ésimo valor da série. As distribuições de probabilidade nos fornecem a frequência com que os valores de $\delta\Phi$ ocorrem.

Como primeira análise, apresentamos o comportamento dos histogramas sob a ação da intensidade de ruído (parâmetro R no mapa), isto é, na transição em que o fluido passa de um regime em que a fase θ_n não depende do tempo para outro com variação não periódica no tempo. Na figura (5.1) temos as distribuições de probabilidade de uma série *espacial* (10^5 pontos iniciais sobre a linha $y = 0,5$) obtida para $K = 0,2$, $N = 50$ iterações e perfil inicial linear de concentração do contaminante – eq. (5.1). Os histogramas, com valores da flutuação distribuidos em 5×10^2 células, foram normalizados de modo que $\int_{-1}^{+1} P_\Phi(\Phi) d\Phi = 1$.

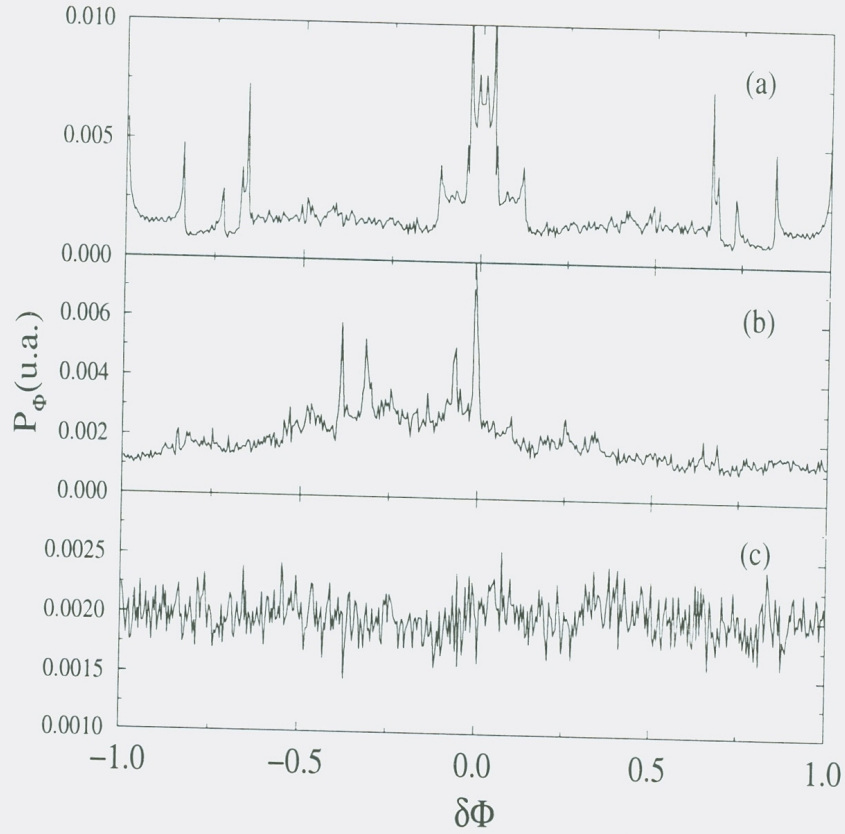

Figura 5.1: Distribuição de probabilidades sobre série espacial ($y = 0$), após $N = 50$ iterações, para configuração inicial linear de contaminante, com níveis diferentes de ruído : (a) $R = 0,0$; (b) $R = 0,08$ e (c) $R = 1,0$; $K = 0,2$.

Na figura (5.1a) temos o caso do mapa padrão, para o qual não há ruído. Podemos ver que alguns valores são mais frequentes que outros, mesmo após um longo tempo de convecção, já que com o valor de K escolhido o mapa ainda apresente estruturas regulares e consequentemente regiões pouco misturadas no fluido – vide figura (3.1). Na figura (5.1b) adicionamos ruído ao mapa ($R = 0,08$), e podemos verificar que a ocorrência de valores tende a se uniformizar. Para ruído completo ($R = 1,0$), figura (5.1c), vemos uma distribuição uniforme, o que seria de se esperar, já que a perturbação devido à fase aleatória tende a misturar o fluido.

Devemos observar que, devido ao perfil da expressão (5.1), a média $< \Phi >$ é virtualmente nula, especialmente para tempos de convecção maiores, e sendo assim, $\delta\Phi \approx \Phi$. Na

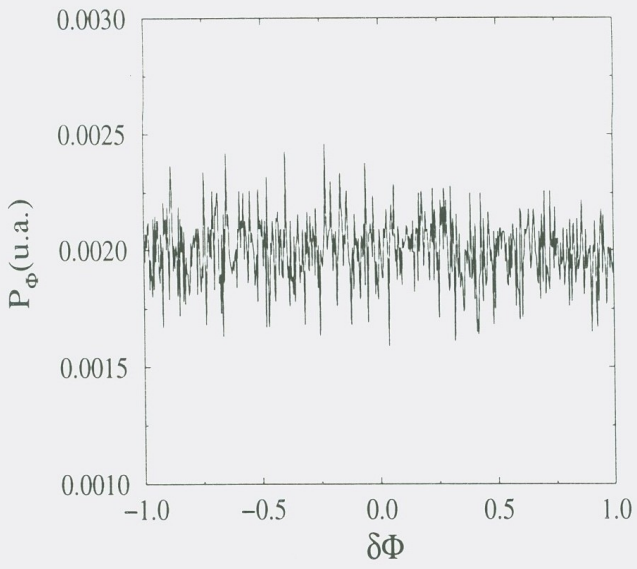

Figura 5.2: Distribuição de probabilidades sobre série espacial ($y = 0$) para configuração inicial linear de contaminante. $R = 0,08$, $K = 0,2$ e $N = 10^3$ iterações.

figura (5.2) temos o histograma para o caso $K = 0,2$, $R = 0,08$ e $N = 10^3$. Vemos uma uniformização da distribuição, como na figura (5.1c). Comparando com a figura (5.1b), que tem os mesmos parâmetros a exceção do número de iterações, podemos notar que a intensidade do ruído parece atribuir uma escala temporal à convecção do fluido. Isto é, o efeito de uma pequena intensidade de ruído para um longo tempo de convecção não se distingue do efeito de intensidades maiores para um tempo de convecção mais curto.

Outra questão importante diz respeito à forma da distribuição final para longos tempos de convecção ($N \to \infty$). Na figura (5.3) temos o histograma para duas séries *temporais* de Φ, tomadas no ponto $(x, y) = (0,45; 0)$, com $K = 0,2$, $R = 1,0$ e $N = 10^5$ iterações. Usamos o perfil linear (5.1) na figura (5.3a) e o perfil senoidal (5.2) na figura (5.3b). Notamos que as distribuições tendem a formas diferentes, uma correspondendo a uma flutuação em torno de um valor constante e a outra tendo crescimento assintótico para $\delta\Phi \to -1$ e $\delta\Phi \to +1$. A figura (5.3a) não difere significativamente da figura (5.1c), mas outras simulações mostram que o resultado se pareceria mais com a curva (5.3b) se o perfil adotado fosse o senoidal.

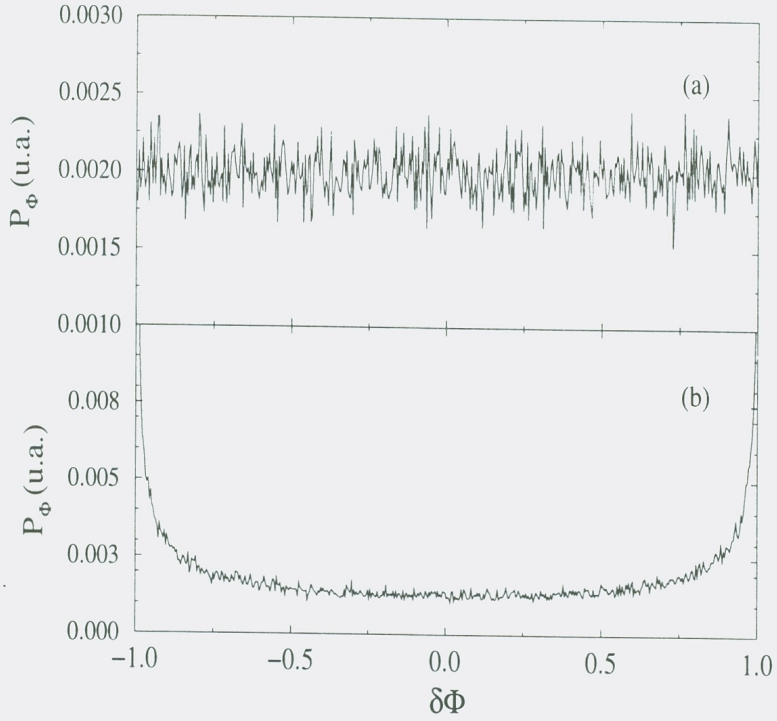

Figura 5.3: Distribuição de probabilidades sobre série temporal para (a) perfil inicial de concentração linear e (b) perfil senoidal; $R = 1,0$, $K = 0,2$ e $N = 10^5$ iterações.

De fato, os perfis finais dos histogramas dependem essencialmente da forma como configuramos inicialmente a concentração do contaminante. Essa propriedade do modelo decorre do fato de que o mapa que o descreve é conservativo, isto é, qualquer porção do espaço de fase do mapa preserva sua área ao longo do tempo, e portanto a distribuição inicial espacial dos valores da concentração Φ não se altera. Lembramos que no modelo o espaço de fase do mapa corresponde ao próprio espaço físico. Se tomarmos uma série temporal para um longo tempo de convecção, o ruído tenderá a misturar o fluido de tal forma que, estatisticamente, todos os valores de Φ ocorrerão na posição de medida.

Postas as considerações, para uma distribuição inicial de Φ em termos de uma variável x, $\Phi = \Phi(x)$, a probabilidade de ocorrência de um valor Φ', tomando-se ao acaso um valor x', é inversamente proporcional à derivada de $\Phi(x)$. Assim, para a expressão (5.1) temos :

$$P_\Phi \sim \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^{-1} = \frac{1}{2} \tag{5.4}$$

e para a expressão (5.2) :

$$P_\Phi \sim \frac{1}{2\pi cos(2\pi x)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\Phi^2}} \tag{5.5}$$

Notamos que, a menos de um fator constante de normalização , as distribuições na figura (5.3) tendem, para tempos longos, às curvas previstas nas expressões (5.4) e (5.5). Em suma, as distribuições de probabilidade neste modelo são facilmente explicadas pois o mapa que o descreve é conservativo, isto é, preserva sua área.

5.2 *Estiramento* e *Dobramento*

Outra questão de interesse no modelo refere-se aos possíveis padrões de convecção do fluido. Tentaremos estabelecer uma lei de crescimento para alguma grandeza mensurável do sistema relacionada ao modo como a sua convecção ocorre.

Para tanto definimos uma linha de contaminante no fluxo que será usada como base para o cálculo de uma grandeza associada à convecção. Por conveniência tomamos a linha em $y_0 = 0$. Para cálculos numéricos lidamos com valores discretos, de modo que a linha traçadora é composta por N_p pontos ou posições iniciais definidos por $(x_0^{(i)}, y_0^{(i)}) = (i/N_p, 0)$, com $i = 1, 2, 3, ..., N_p$ ($i = 0$ é equivalente a $i = N_p$, assim como $i = 1$ e $i = N_p + 1$). Definimos então o seguinte parâmetro, que denotaremos por β :

$$\beta = \frac{1}{\Delta l} \lim_{N_p \to \infty} \sum_{i=1}^{N_p} |r_{i+1} - r_i| \tag{5.6}$$

onde

$$\Delta l = \lim_{N_p \to \infty} \sum_{i=1}^{N_p} |\mathbf{r_{i+1}} - \mathbf{r_i}| = \lim_{N_p \to \infty} \sum_{i=1}^{N_p} \left[(x_N^{(i+1)} - x_N^{(i)})^2 + (y_N^{(i+1)} - y_N^{(i)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.7}$$

e

$$r_i = |\mathbf{r_i}| = \left[(x_N^{(i)})^2 + (y_N^{(i)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.8}$$

r_i representa o módulo do vetor posição do i-ésimo ponto da linha (estamos adotando o ponto $(x, y) = (0, 0)$ como referencial) e Δl é o comprimento total da mesma linha ($y_0 = 0$).

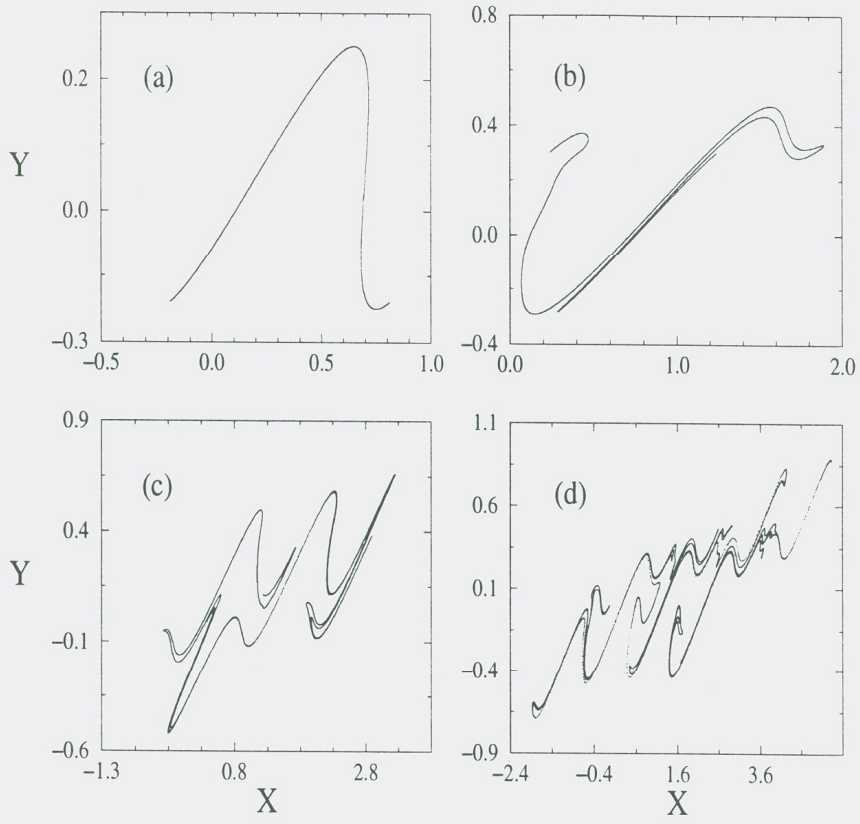

Figura 5.4: Linha de contaminante para diversas iterações do mapa : (a) $N = 1$, (b) $N = 4$, (c) $N = 7$ e (d) $N = 10$ iterações; $K = 0,2$, $R = 1,0$.

O ponto $(x_N^{(i)}, y_N^{(i)})$ representa a N-ésima iteração do ponto $(x_0^{(i)}, y_0^{(i)}) = (\frac{i}{N_p}, 0)$ pelo mapa (2.10). No limite definido acima, β equivale à média obtida com a integral

$$\beta = \frac{1}{\Delta l} \int_0^{\Delta l} \left| \frac{dr}{dl}(l) \right| dl \tag{5.9}$$

onde l é a coordenada ao longo da linha. Adiante discutimos sobre a continuidade da linha e a existência da derivada em (5.9) no limite.

O parâmetro β representa a média do módulo da derivada de $r(l)$ (5.8) em relação a l, a coordenada da linha traçadora que tomamos como referência iterada N vezes. À medida que iteramos o mapa o fluxo convecciona e a linha se deforma; esperamos assim que o parâmetro β, que quantifica a intensidade das deformações da linha no espaço, possa caracterizar a convecção no fluido.

Na figura (5.4) apresentamos várias simulações de uma linha de contaminante com $N_p = 3 \times 10^4$ pontos, inicialmente posicionada conforme definido acima. Para tempos (N) crescentes observamos que a linha de teste se deforma, altera seu comprimento e dobra sobre si mesma. Identificamos aqui o comportamento caracterísitco de *dobramento* e *estiramento* (*stretching* e *folding*) [1], típico de fluidos caóticos.

Nas simulações notamos também que, para uma pequena porção da linha de contaminate inicial, a maneira como as deformações evoluem no tempo não diferem qualitativamente da deformação da linha toda, atribuindo ao padrão de deformação um caráter aparentemente fractal. No entanto, esse padrão não é de fato fractal pois a dimensão da linha não se altera com a convecção do fluxo, permanecendo sempre igual a 1. Como já observamos no capítulo 2, o mapa que descreve o modelo é conservativo, e por isso a linha traçadora, conforme assegura a equação (2.2), será sempre contínua, não há problemas de fronteira no modelo. Asseguramos assim a continuidade da linha para qualquer iteração do mapa e a existência da derivada em (5.9) em qualquer ponto de sua extensão.

Também observamos no capítulo 2 que, num fluido caótico, Δl, o comprimento total da linha traçadora, deve variar exponencialmente no tempo. É esse fenômeno que denominamos de *estiramento* (*stretching*), e não apresenta dificuldades para ser quantificado. Mais difícil, porém, é quantificar o efeito da deformação espacial de dobra (*folding*) da linha teste no fluido. Para tanto suprimimos a normalisação em (5.9) definindo :

$$\alpha = \beta.\Delta l \tag{5.10}$$

Na figura (5.5) vemos que α e Δl são crescentes no tempo ($K = 0,2$, fixo). O comprimento da linha traçadora, com 10^5 pontos, varia exponencialmente, como esperado. A linha pontilhada é o resultado de uma regressão exponencial (*fitting*) sobre os valores calculados. Também é de se esperar que α cresça (no caso, seu crescimento também é exponencial), em parte porque o intervalo de integração é exatamente Δl, e em parte porque a dinâmica do sistema intensifica as dobras sobre a linha. O aumento da rugosidade pode ser explicado como se segue. O mapa (2.10) é periódico no espaço, de modo que a linha traçadora aumenta

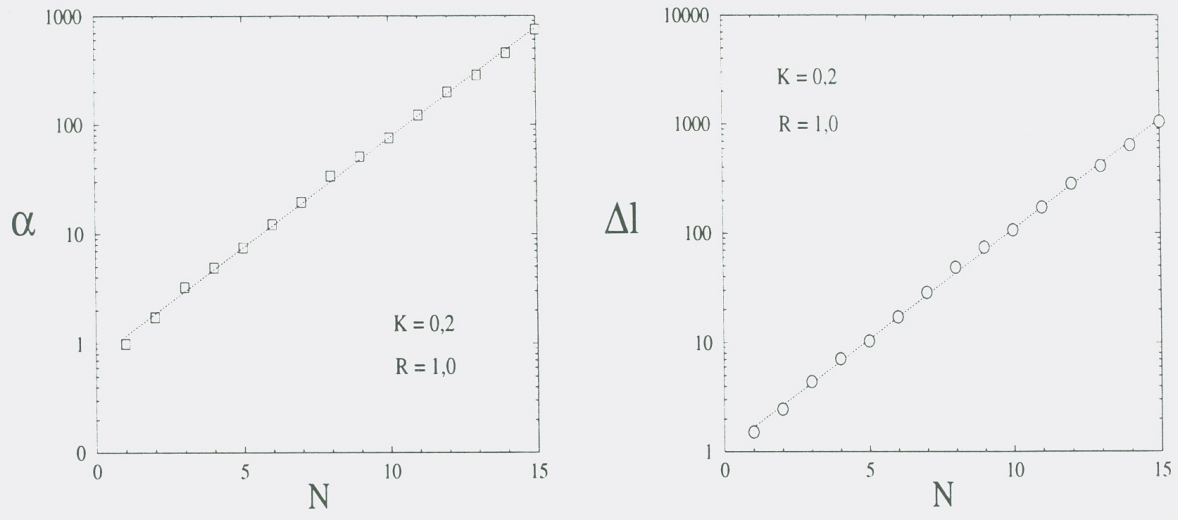

Figura 5.5: Parâmetro α e comprimento da linha de contaminante Δl em função de N; $K = 0,2$, $R = 1,0$. A linha pontilhada representa uma regressão exponencial sobre os dados.

seu comprimento total num espaço limitado. É obrigada, portanto, a se dobrar.

Um resultado importante que verificamos é que as taxas de crescimento de α e Δl são em média iguais :

$$\beta = \frac{\alpha}{\Delta l} \approx constante \tag{5.11}$$

o que nos leva à seguinte conclusão : *a densidade linear do número de dobras na linha traçadora é, em média, constante no tempo e ao longo de toda a sua extensão*, mesmo que Δl varie, caso contrário a rugosidade não permitiria que a integral de α compensasse o comprimento para manter β constante. Podemos verificar o mesmo fenômeno para a dependência dos mesmos parâmetros em relação a K, com N fixo. Na figura (5.6), ambos α e Δl escalam exponencialmente em K. Desta vez o crescimento está associado à difusão caótica do sistema provocado por sua não linearidade, que acentua a divergência de trajetórias.

À diferença das curvas na figura (5.5), as da figura (5.6) apresentam uma transição em torno de $K \approx 0,5$ em que a taxa de crescimento muda, embora o crescimento em si continue exponencial. As duas linhas pontilhadas em ambos os gráficos referem-se a duas regressões

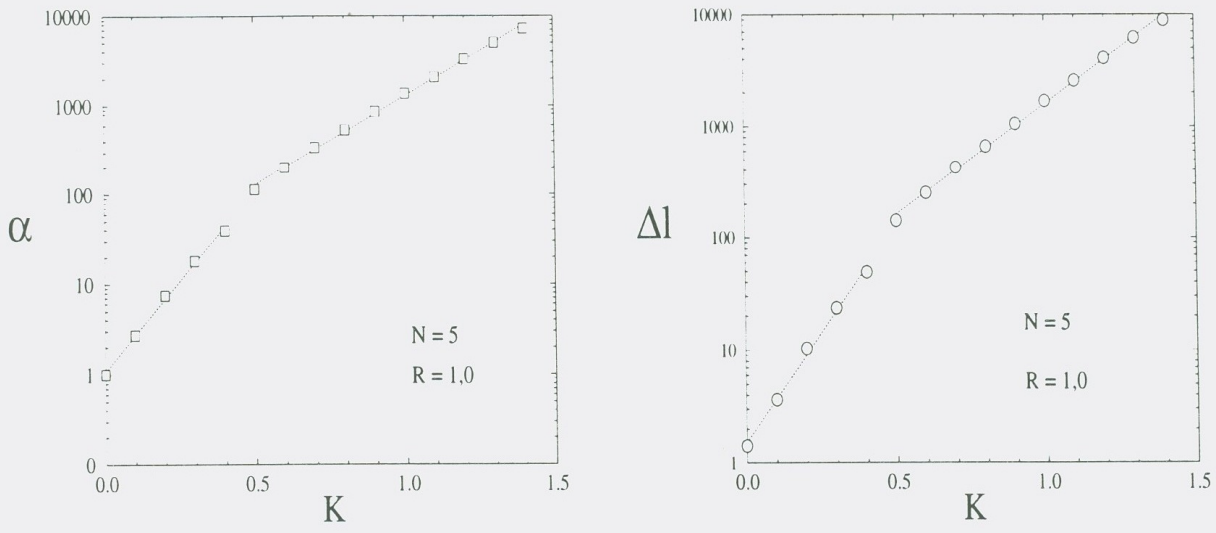

Figura 5.6: Parâmetro α e comprimento da linha de contaminante Δl em função de K; $N = 5$ iterações e $R = 1,0$. As linhas pontilhadas representam regressões exponenciais sobre dois conjuntos de pontos.

exponenciais distintas, uma antes e outra depois da transição. Creditamos a esse fenômeno uma mudança no regime de difusão no qual o mapa padrão quebra barreiras devido ao caos, à semelhança do que observamos no capítulo anterior para a difusão de trajetórias [11].

Na figura (5.7), por fim, quantificamos o efeito da perturbação devido à fase aleatória no sistema. Fixamos o parâmetro K e o número de iterações e variamos a intensidade do ruído na fase, expressa pelo parâmetro R, entre seus dois valores extremos. Podemos notar que os parâmetros apresentam, também, um comportamento semelhante à difusão de trajetórias. Aqueles se relacionam a esta, embora essa relação seja menos evidente para α, que envolve derivadas no espaço, do que para Δl, um tamanho (basta lembrar que a distância entre dois pontos na linha traçadora divergem conforme a dinâmica caótica, o que é mais facilmente compreendido em termos da difusão global de trajetórias; mas as curvas da linha já são um um fenômeno mais difícil de prever). O valor de K escolhido corresponde ao modo acelerador e, novamente, a introdução de ruído no mapa padrão ocasiona sua destruição e consequente inibição da difusão anômala. Para valores menores de K observamos comportamento idêntico

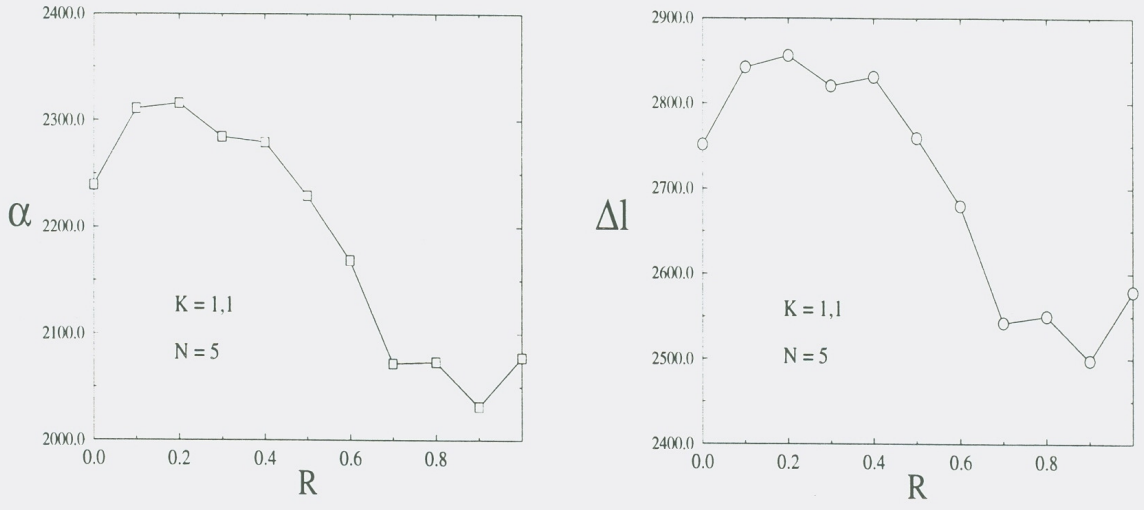

Figura 5.7: Parâmetro α e comprimento da linha de contaminante Δl em função de R; $K = 1,1$ e $N = 5$ iterações.

ao do encontrado para a difusão de trajetórias.

5.3 Padrões de Mistura

Nesta seção discutiremos um outro aspecto relacionado a convecção do fluido e aos resultados da seção anterior. Consideraremos especificamente a questão da *mistura* de contaminantes no fluxo em função do tempo e de parâmetros. Cumpre notar que, como observado no capítulo 2, o fluido é incompressível e idealmente não há a difusão que num fluido real seria caracterizada como intermolecular (movimento Browniano), isto é, a equação (2.2) não seria nula, de modo que a mistura a ser caracterizada no modelo diz respeito somente a convecção devido ao campo de velocidades (2.7). Dito de outra forma, dois contaminantes ou traçadores distintos mantêm sempre suas concentrações, são imiscíveis, à semelhança do que fariam água e óleo num exemplo real [13]. A *mistura*, neste caso, é representada pela formação de padrões no espaço em que dois traçadores distintos entranham-se um no outro, sem contudo difundir-se num nível microscópico. É nesse sentido em que falaremos de

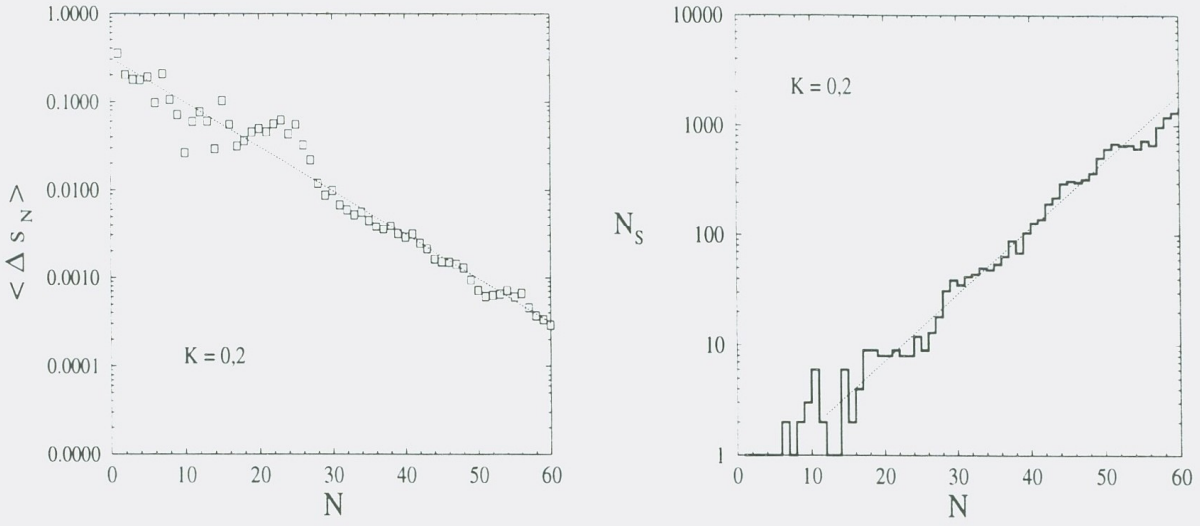

Figura 5.8: Parâmetros $< \Delta s_N >$ e N_S em função de N; $K = 0,2$, $R = 1$. A linha pontilhada representa uma regressão exponencial.

mistura aqui.

Assim, para caracterizar de forma conveniente a mistura neste modelo, consideraremos um fluido que, inicialmente ($N = 0$), apresenta um perfil de biconcentração :

$$\Phi_0 = \begin{cases} \Phi_C & \text{para } 0 \leq y < 0,5 \\ 0 & \text{para } 0,5 \leq y < 1 \end{cases} \tag{5.12}$$

onde Φ_C é um valor constante. Isto é, distintamente dos perfis (5.1) e (5.2) que tinham valores de concentração de contaminante com variação espacial contínua, o perfil (5.12) apresenta apenas dois valores. Como realizado para os outros perfis, adotamos uma escala de cores : *preto* para $\Phi_0 = \Phi_C$ e *branco* para $\Phi_0 = 0$.

Definiremos agora alguns parâmetros que comporão nossa análise. Interessa-nos aqui determinar como as duas "cores", isto é, como os dois traçadores passivos com Φ distintos misturam-se entre si. Para isso tomaremos como base de medida a região do espaço sobre a reta $y = 0$ no fluxo, à semelhança do que fizemos na seção anterior. No entanto, desta vez não seguiremos a evolução de uma linha de contaminante inicialmente naquela posição, mas tão somente observaremos a evolução do fluxo sobre ela.

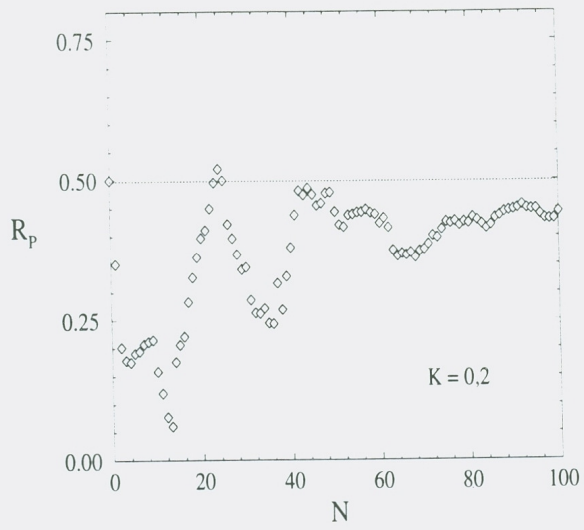

Figura 5.9: Razão R_P en função de N; $K = 0,2$, $R = 1$.

Denotaremos por $\Delta s_N^{(i)}$ o tamanho do segmento correspondente à intersecção de um dos traçadores, digamos o *preto*, com a reta em $y = 0$. À medida que o tempo evolui o fluxo desenvolve estruturas espaciais cada vez mais complexas, assim esperamos que o número de segmentos como definidos acima aumente com N. Em $N = 0$, por exemplo, há apenas uma intersecção, dada pela própria definição em (5.12) e cujo tamanho é exatamente $\Delta s_{N=0}^{(1)} = 0,5$. O índice i denota o i-ésimo segmento sobre a reta $y = 0$ numa dada iteração N do mapa (2.10) (estaremos considerando ruído máximo). N_S será o número de segmentos do mesmo traçador sobre a reta $y = 0$. Definimos o tamanho médio dos segmentos do traçador em uma dada iteração N por

$$< \Delta s_N >= \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} \Delta s_N^{(i)} \tag{5.13}$$

e R_P é a razão entre a soma total dos comprimentos dos segmentos desse mesmo traçador e o comprimento da reta $y = 0$. Lembramos que no mapa (2.10) o domínio das coordenadas x e y compreende o intervalo $[0, 1]$, de modo que a reta $y = 0$ tem comprimento 1. Assim,

$$R_P = \sum_{i=1}^{N_S} \Delta s_N^{(i)} \tag{5.14}$$

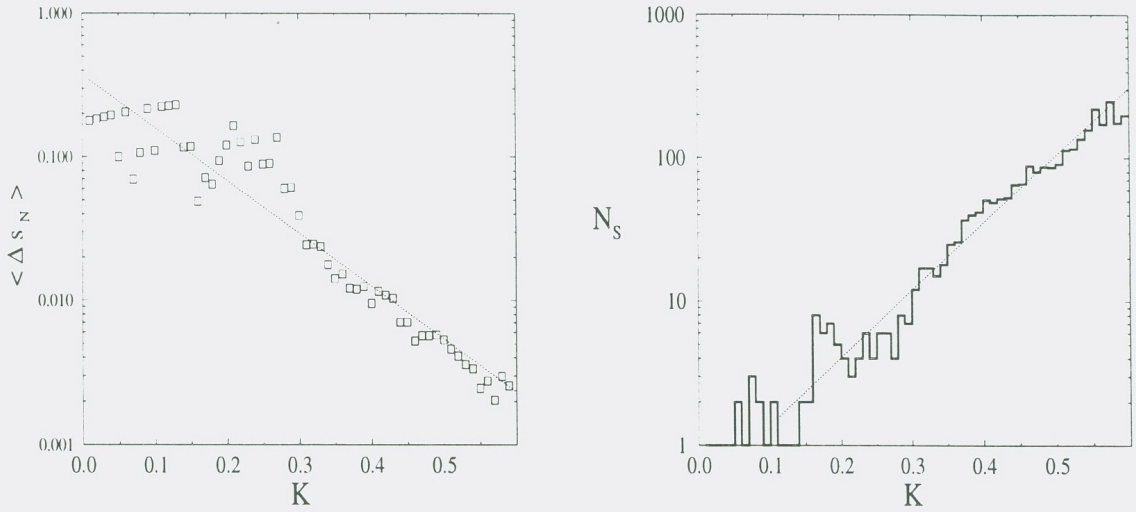

Figura 5.10: $< \Delta s_N >$ e N_S em função de K, $R = 1$, escala linear-logarítmica. $N = 5$ iterações. A linha pontilhada representa uma regressão exponencial.

isto é, é numericamente igual a soma dos comprimentos dos segmentos do traçador preto, tão somente.

Temos então três parâmetros, $< \Delta s_N >$, R_P e N_S, que quantificam propriedades estatísticas e por meio dos quais pretendemos caracterizar a mistura no fluxo. Em todos os cálculos nos baseamos em 10^6 pontos de medida sobre a reta $y = 0$, com $0 \leq x \leq 1$, o que, para os valores de N e K escolhidos, mantiveram os erros numéricos devido à imprecisão dentro de limites que não alteram qualitativamente os resultados.

Na figura (5.8) apresentamos $< \Delta s_N >$ e N_S em função do número de iterações do mapa, tendo K fixo. O tamanho médio das intersecções diminue com o tempo, enquanto o número delas, como esperado, aumenta; mas ambos variam *exponencialmente* (há uma flutuação considerável para valores menores de N que dependem explicitamente da sequência aleatória da fase θ_n em (2.10), mas para tempos maiores a média (5.13) apresenta desvios menores). A propriedade do mapa que o faz conservar sua área, mais uma vez, fornece a base para a compreensão desse comportamento. Vimos no capítulo 2 que as soluções da equação (2.4) são exponencialmente crescentes ou decrescentes. Para um bloco de fluido qualquer sendo

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex. 2
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

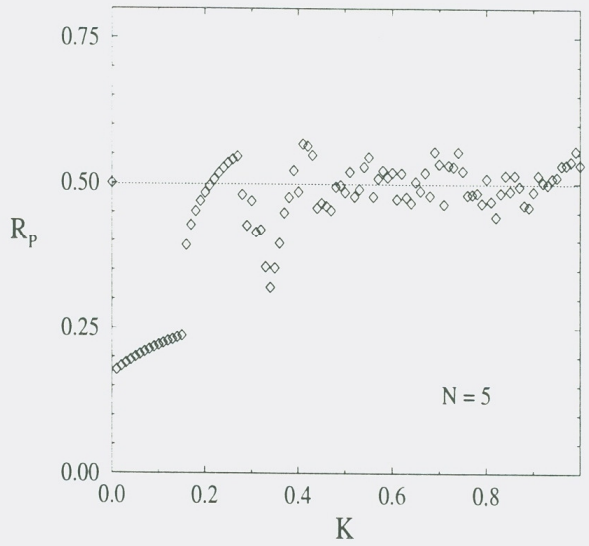

Figura 5.11: Razão R_P en função de K, $R = 1$; $N = 5$ iterações.

conveccionado, é de se esperar que o fenômeno de estiramento e dobramento o alongue e assim observemos que, sobre uma dada linha ou reta de observação fixa, o tamanho da intersecção com o bloco (ou seja, um $\Delta s_N^{(i)}$) seja, em média, exponencialmente decrescente. Isso explica a diminuição do parâmetro $< \Delta s_N >$ com N.

Devido à incompressibilidade do fluido (ou preservação de área do mapa), ao mesmo tempo em que o tamanho médio dos segmentos de intersecção decrescem, o bloco negro inicial de fluido invade outras regiões do espaço, sem contudo aumentar sua área total inicial, mas mantendo-a constante. Desse modo N_S aumenta; o fato de o crescimento de N_S ser exponencial representa uma compensação ao decréscimo, também exponecial, de $< \Delta s_N >$. Se a área não fosse conservada sua lei de variação poderia ser diferente.

Na figura (5.9) a razão R_P tende a se aproximar de $0,5$ para um longo tempo. Notamos que seu valor inicial em $N = 0$ é, por convenção (5.12), $0,5$, mas tende a manter essa cifra. Isto é, a distribuição de traçadores distintos sobre a reta de observação tende a um equilíbrio, a diferença entre o instante inicial e um tempo longo é que o bloco negro inicial apresenta-se muito mais desordenado no espaço. Devido à isotropia do sistema (no que a fase aleatória em

(2.10) contribui em peso, pelo menos no que se refere a propriedades estatísticas), podemos esperar observar, em média, a mesma tendência de equilíbrio em quaisquer outras retas de observação. Isso denota a formação de estruturas em escalas cada vez menores.

Frente ao parâmetro K (com N fixo), as grandezas calculadas apresentam comportamento semelhante, figuras (5.10) e (5.11), o que sugere que a maior divergência de trajetórias devido ao caos é responsável por ele. Aqui a tendência de R_P ao valor $0,5$ é mais evidente, mas apenas porque a desordem do sistema é mais sensível a não linearidade (parâmetro K) do que ao tempo. Mas aumentar o caos no sistema tem efeito equivalente ao do tempo com K fixo. De fato, há duas maneiras de se processar a mistura de estruturas no fluido : esperar um tempo de convecção longo o suficiente ou aumentar a difusão caótica do fluxo, esta representada por K. Sobre o porquê de as leis de crescimento em K serem exatamente *exponenciais*, ainda não há nada conclusivo.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho consideramos um campo escalar passivo (contaminante) num fluido incompressível, cujo campo de velocidades tem dependência complexa no tempo – eq. (2.7) – com variação suave e de larga escala no espaço. Integramos este campo em intervalos discretos de tempo e obtivemos um mapa de Poincaré, que corresponde a um mapa padrão com uma fase aleatória no argumento do seno.

Este modelo foi empregado por Városi [8] num estudo em que o gradiente do campo escalar era de interesse primário. Nesta dissertação, no entanto, concentramos-nos em caracterizar de maneira original alguns fenômenos associados à difusão e convecção do campo escalar em si.

O mapa padrão representa um sistema conservativo (preserva sua área) perturbado, onde o parâmetro relevante, K, regula a não linearidade e cuja intensidade determina a transição do movimento regular ao caótico. [11]. A fase aleatória não altera a propriedade de conservação de área do mapa, mas destrói por completo qualquer estrutura regular, seja qual for o valor do parâmetro do mapa ($K \neq 0$), e, consequentemente, o movimento de um elemento de fluido se torna errático. Como procedimento de análise, introduzimos neste trabalho um parâmetro de controle do ruído, R, representado pela fase θ_n do mapa.

Para estudar a difusão de trajetórias no fluido, calculamos numericamente no espaço de

parâmetro a dispersão e o coeficiente de difusão global na direção y para o mapa padrão e para o mapa com a fase aleatória – relações (2.10). O mapa padrão, devido a suas muitas correlações [12], produz regimes de intensa difusão para certos valores de K graças ao surgimento de estruturas com pontos fixos especiais – as ilhas de aceleração – enquanto que em outros valores produz ilhas regulares não aceleradores embebidas em regiões largamente caóticas [11]. A fase aleatória neutraliza essas correlações, destruindo modos aceleradores e quaisquer estruturas regulares, de modo que a difusão de trajetórias aproxima-se daquela esperada para o caso ideal em que todas as órbitas do mapa são aleatoriamente erráticas (difusão quase-linear).

Neste trabalho observamos distribuições de probabilidades da flutuação do campo escalar (concentração de contaminante) no tempo e no espaço a fim de caracterizar regimes de convecção no fluido. Foi observado que histogramas assim obtidos têm sua forma completamente determinada pela configuração inicial do campo escalar, fato este devido univocamente à incompressibilidade do fluido, atestada pela propriedade de preservação de área do mapa (2.10) que o descreve.

Ao caracterizar estiramento e dobramento (stretching e folding) de uma linha de traçador, verificamos que a extensão da linha e o número médio de dobras computado pelo parâmetro que definimos por α – expressão (5.6) – crescem exponencialmente no tempo com a mesma taxa, de modo que o número médio de dobras por extensão de linha é constante neste modelo.

Para caracterizar o fenômeno da mistura no modelo pressupomos um perfil de campo escalar (contaminante) de biconcentração, isto é, dois fluidos de propriedades idênticas e imiscíveis. Definimos e calculamos os parâmetros $< \Delta s_N >$ e N_S em função de K e do número de iterações (tempo) do mapa (2.10) e verificamos que ambos variam exponencialmente. O tempo e a não linearidade promovem mistura no fluido, com a consequente formação de estruturas espaciais do campo escalar em escalas cada vez menores. Contudo, as características topológicas dessas estruturas não são alteradas (embora cada vez mais complexas, não se concentram sobre um fractal, por exemplo), fato este devido, mais uma

vez, à propriedade de preservação de área do mapa.

Para continuidade deste trabalho e pesquisas futuras sugerimos :

(i) Investigar possível fractalidade na curva do coeficiente de difusão em função de K – $D_y \times K$, figura (4.2) [19]

(ii) Analisar o mapa (2.10) introduzindo-se outras formas de ruído que não o branco (Gaussiano, quadrático, fractal etc) [17]

(iii) Embora não tenham sido empregados neste trabalho, o cálculo de *coeficientes de Lyapunov* [3] podem ser efetuados para o mapa (2.10). De particular interesse pode ser a distribuição de coeficientes de Lyapunov em função da intensidade de ruído e de K

(iv) Concepção de um modelo para um fluido incompressível do qual possamos, também, derivar uma mapa com uma componente aleatória, mas que, no entanto, não preserve sua área. A maior motivação para estudar tal modelo é que, nesse caso, podemos considerar situações em que o movimento das partículas de um traçador não sigam o próprio movimento do fluido [20]

(v) Simulação da turbulência eletrostática observada na periferia de plasmas confinados magneticamente em tokamaks [21]. O formalismo Hamiltoniano [22] pode ser empregado na elaboração de um modelo que descreva a trajetória de linhas de campo magnético no interior de um tokamak perturbadas por campos ressonantes criados por um limitador ergódico [23]. Um mapa bidimensional pode ser obtido e a introdução de uma componente aleatória poderá simular a turbulência eletrostática sobre as linhas.

Bibliografia

[1] J.M. Ottino. *The Kinematics of Mixing : Stretching, Chaos and Transport.* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[2] A. Crisanti, M. Falconi, A. Vulpiani e G. Paladin. " Lagrangian Chaos : Transport, Mixing and Diffusion in Fluids ". *Riv. Nuovo Cimento*, 14:1–80, 1991.

[3] N. Fiedler-Ferrara e C.P.C. do Prado. *Caos, uma Introdução.* Editora Edgar Blucher Ltda., São Paulo, 1994.

[4] H. Aref. " Stirring by Chaotic Advection ". *J. Fluid Mech.*, 143:1–21, 1984.

[5] E. Ott e T.M. Antonsen Jr. "Fractal Measures of Passively Convected Vector Fields and Scalar Gradients in Chaotic Fluid Flows". *Phys. Rev. A*, 38:3660–3671, 1989.

[6] F. Romeiras, C. Grebogi e E. Ott. "Multifractal Properties of Snapshot Attractors of Random Maps". *Phys. Rev. A*, 41:784–799, 1990.

[7] T. Dombre, U. Frisch, J.M. Greene, M. Hénon, A. Mehr e A.M. Soward. " Chaotic Streamlines in the ABC Flow ". *J. Fluid Mech.*, 167:353, 1986.

[8] F. Városi, T.M. Antonsen Jr. e E. Ott. " The Spectrum of Fractal Dimensions of Passively Convected Scalar Gradients in Chaotic Fluid Flows ". *Phys. Fluids*, A3:1017–1028, 1991.

[9] E. Ott e T.M. Antonsen Jr. "Chaotic Fluid Convection and the Fractal Nature of Passive Scalar Gradients". *Phys. Rev. Lett.*, 61:2839, 1988.

[10] Y.H. Ichikawa, T. Kamimura e T. Hatori. *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas.* John Wiley and Sons, New York, 1984.

[11] L. Reichl. *The Transition to Chaos.* Springer-Verlag, New York, 1992.

[12] A.L. Lichtemberg e M.A. Lieberman. *Regular and Stochastic Motion.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[13] M. Cattani. *Introdução à Teoria de Fluidos.* Editora Edgar Blucher Ltda., São Paulo, 1990.

[14] B.V. Chirikov. " A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems ". *Phys. Reports*, 52:265–379, 1979.

[15] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling e B.P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran.* Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[16] J. Klafter, M.P. Shlesinger e G. Zumofen. "Beyond Brownian Motion". *Physics Today*, 49(2):33–39, Febr. 1996.

[17] C.F.F. Karney, A.B. Rechester e R.B. White. "Effect of Noise on the Standard Mapping". *Physica*, 4D:425–438, 1982.

[18] J.P. Gollub, J. Clarke, M. Gharib, B. Lane, e O.N. Mesquita. " Fluctuations and Transport in a Stirred Fluid with a Mean Gradient ". *Phys. Rev. Lett.*, 67:3507–3510, 1991.

[19] R. Klages e J.R. Dorfman. " Simple Maps with Fractal Diffusion Coefficientes ". *Phys. Rev. Lett.*, 74(3):387–390, 1995.

[20] L. Yu, E. Ott e Q. Chen. "Transition to Chaos for Random Dynamical Systems". *Phys. Rev. Lett.*, 65(24):2935–2938, 1990.

[21] A.J. Wootton, B.A. Carreras, H. Matsumoto, K. McGuire, W.A. Peebles, Ch. P. Ritz, P.W. Terry e S.J. Zweben. " Fluctuations and Anomalous Transport in Tokamaks ". *Phys. Fluids*, B2:2879–2903, 1990.

[22] I. Percival e D. Richards. *Introduction to Dynamics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[23] I.L. Caldas, J.L. Pereira, K. Ullmann e R.L. Viana. "Magnetic Field Line Mappings for a Tokamak with Ergodic Limiters". *Chaos, Solitons and Fractals*, 7:991–1010, 1996.