

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

Tese de Doutorado

Análise de Mapeamentos Não Lineares e Aplicações

Wilson Luiz da Costa Façanha

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título
de Doutor em Ciências.

São Paulo

2015

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Iberê Luiz Caldas, pela paciência e pelos conselhos objetivos e orientação ponderada, sem a qual não seria possível a realização desse trabalho. Agradeço também ao professor Leon Glass e Bart Oldeman, pelas colaborações na realização do trabalho.

Agradeço à minha família pelo apoio e incentivo sempre presentes em todos os momentos. Agradeço aos meus amigos, principalmente ao Valter Ferreira e ao Eduardo Toshio, pelo companheirismo ao longo dos anos de graduação e pós-graduação. Agradeço aos meus amigos do Grupo de Física de Plasmas e Controle de Caos. Agradeço especialmente a Elisa Ferreira pelo amor incondicional e pela força para que eu seguisse em frente.

Finalmente agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro que possibilitou a realização desse trabalho.

Resumo

Estudamos o comportamento de um oscilador forçado periodicamente que apresenta um ciclo limite. Variamos a relaxação do sistema à esse ciclo e, utilizando métodos numéricos, analisamos as mudanças que ocorrem nas estruturas geométricas formadas em um espaço bidimensional de parâmetros. Determinamos as regiões periódicas e expoentes de Lyapunov para diversos valores de amplitude e frequência do forçamento. Utilizando métodos de continuação para mapas determinamos as fronteiras de estabilidade de janelas periódicas que correspondem a bifurcações no sistema. Esse método facilita a determinação de estruturas complexas onde existe multiestabilidade ou onde as regiões se tornam muito pequenas. Estudamos também o chamado esqueleto da janela periódica, que em uma dimensão é formado por órbitas superestáveis do mapa. Mostramos como o método de continuação numérica pode ser utilizado para determinar curvas equivalentes para mapas bidimensionais, onde o traço da matriz de estabilidade é nulo. Desenvolvemos o método utilizando o mapa de Hénon e o aplicamos para determinar o esqueleto nas janelas periódicas para o oscilador de Poincaré.

Abstract

We study the behavior of a periodically forced oscillator that presents a limit cycle. We vary the relaxation of the system to the cycle and, by using numerical methods, we analyze the changes that occur in the geometrical structures formed in a bi-dimensional parameter space. We determine the periodic regions and Lyapunov coefficients for many different values of the amplitude and frequency of the forcing. Using continuation methods for maps we determine the stability boundaries of the periodic windows that correspond to bifurcations in the system. This method makes it easier to determine the complex structures where multistability exists or where the regions become vanishingly small. We also study the so called skeleton of a periodic window, which in one-dimension is represented by the locus of superstable orbits of the map. We show that numerical continuation methods can be used to determine similar curves for two-dimensional maps, where the trace of the stability matrix is equal to zero. We develop the method using the Hénon map and later apply it to determine the skeleton for the periodic windows of the Poincaré oscillator.

Conteúdo

1	Introdução	9
2	Ferramentas e Métodos de Análise	15
2.1	Condição de Estabilidade de Órbitas	15
2.2	Bifurcações	18
2.2.1	Bifurcação Sela-Nó	19
2.2.2	Duplicação de Período	21
2.2.3	Bifurcação Neimark-Sacker	23
2.3	Expoentes de Lyapunov	24
2.4	Órbitas Superestáveis	27
2.5	Diagrama Bidimensional de Parâmetros	27
2.6	Métodos de Continuação Utilizando AUTO	30
3	Esqueleto de uma Janela Periódica para o Mapa de Hénon	33
3.1	Resultados	37
4	Oscilador de Poincaré Forçado	43
4.1	Límite de Relaxação Infinita	47
5	Mapa Bidimensional para o Oscilador de Poincaré	53
5.1	Fronteiras de Estabilidade da Região de Período-1	59

5.2	Fronteiras de Estabilidade da Região de Período-3	61
5.3	Esqueleto da Janela Periódica de Período-3	68
6	Conclusões	73
	Bibliografia	77

Capítulo 1

Introdução

Um esforço considerável tem sido feito para tentar entender e classificar as propriedades associadas com bifurcações genéricas observadas em modelos matemáticos de fenômenos naturais. Resultados como os de Feigenbaum [1, 2] que mostram que alguns comportamentos observados para mapas quadráticos são propriedades universais de outros sistemas dinâmicos motivou o estudo das propriedades de bifurcações em diversos sistemas, em especial equações diferenciais e mapas.

Mapas dissipativos representam um protótipo de osciladores suaves, isto é, osciladores com um ciclo limite estável e um ponto de equilíbrio instável [3]. Tais osciladores são úteis para modelar a dinâmica de sistemas como osciladores cardíacos, sistemas de neurônios, entre outros modelos que apresentam sincronização de fase [4, 5, 6, 7].

O estudo de uma família de sistemas dinâmicos suaves em tempo discreto começa, em geral, com a análise de pontos fixos. Controlando um parâmetro, pode-se encontrar as chamadas bifurcações de codimensão 1 desse ponto fixo. A continuação [8, 9] desse ponto com respeito a um segundo parâmetro de controle leva, genericamente, à uma curva de bifurcação. Duas curvas de

bifurcação de codimensão 1 podem se intersectar transversalmente ou tangencialmente, dependendo da natureza das bifurcações. Genericamente, para os valores de parâmetros onde ocorre a intersecção uma bifurcação de codimensão 2 ocorre.

Existem três bifurcações de codimensão 1 para pontos fixos em mapas, a saber: bifurcação sela-nó, duplicação de período e bifurcação de Neimark-Sacker. Existem onze outras bifurcações de codimensão 2, que dependem do valor dos coeficientes das chamadas formas normais críticas das bifurcações de codimensão 1, ou ainda podem ser fortes ressonâncias da bifurcação de Neimark-Sacker ou podem ocorrer quando mais de um autovalor atinge o círculo unitário [10].

Uma característica de mapas caóticos unidimensionais dissipativos é o aparecimento de regiões de comportamento regular conforme os parâmetros do sistema atravessam a região caótica. Essas regiões, comumente chamadas de janelas, estão presentes de forma arbitrariamente próximas aos parâmetros que levam ao caos [11]. Órbitas superestáveis que, em uma dimensão, são órbitas que passam por um ou mais pontos extremos do mapa, fornecem um entendimento sobre a organização das regiões periódicas. O “esqueleto” é o *locus* de órbitas superestáveis em um espaço de parâmetros bidimensional de um mapa em uma dimensão. Na década de 80, diversos grupos descreveram uma estrutura auto-similar do esqueleto para diversos mapas de vários graus, tais como mapas cúbicos e quárticos [12, 13, 14, 15, 16].

Estudos relacionados por Kapral e colegas reconheceram a presença de um formato curioso, como um anzol, no estudo de bifurcações no espaço de parâmetros da equação de Rössler [13] e no mapa de Hénon [17]. No entanto, análises sistemáticas de espaços de parâmetros bidimensionais não foram feitas até que uma série de artigos feitos por Gallas e colaboradores descreveram

estruturas em formato de camarão no espaço de parâmetros do mapa de Hénon [18, 19]. Essas estruturas geométricas tem sido amplamente observadas em diversos tipos de sistemas, tais como circuitos elétricos, equações diferenciais com atraso e osciladores químicos [20, 21, 22].

Apesar de órbitas que contenham um ponto extremo sejam sempre estáveis em um mapa unidimensional, em duas dimensões o mesmo não pode ser dito. O entendimento de como as janelas periódicas são modificadas quando existe uma transição de um sistema unidimensional para um bidimensional é de importância para a caracterização das estruturas geométricas no espaço de parâmetros e das bifurcações em sistemas com mais dimensões.

Para o caso dissipativo a motivação foi o estudo de osciladores biológicos forçados periodicamente. Esses são osciladores estáveis não lineares dos quais muitas das características gerais da interação entre um forçamento periódico e a oscilação resultante podem ser previstas sem que se saiba a natureza precisa do oscilador. Modelos simples de sincronização apresentam uma série de fenômenos compartilhados por modelos mais complexos e sistemas reais. Um exemplo de aplicação trata de osciladores cardíacos, cujos resultados experimentais mostram que, em primeira aproximação, podem ser modelados pela iteração de um mapa unidimensional. As considerações essenciais desse modelo são: o oscilador é modelado por um ciclo limite; o intervalo de tempo entre os forçamentos é suficientemente longo, de modo que o oscilador retorna ao ciclo limite entre os pulsos; o forçamento também não altera as propriedades do ciclo limite. A análise matemática da dinâmica desse mapa fornece um bom entendimento da evolução do sistema em função da frequência e da amplitude do forçamento [23].

No entanto, o modelo unidimensional apresenta algumas limitações que são evidenciadas por medidas experimentais. Por exemplo, se os forçamentos

periódicos são feitos muito próximos no tempo a trajetória não retorna ao ciclo limite entre os pulsos e o mapa unidimensional não é mais suficiente para explicar a dinâmica observada. Utilizamos, então, um modelo bidimensional para analisar as estruturas e bifurcações no espaço de parâmetros.

Esse trabalho tem como objetivo o estudo de um modelo para oscilador forçado periodicamente, através de métodos numéricos. Esse modelo, conhecido como oscilador de Poincaré foi amplamente estudado em uma dimensão [5, 24, 25], dando importantes contribuições na organização geométrica de bifurcações e evidenciando a importância de órbitas superestáveis nessa organização. No entanto, a versão unidimensional do mapa nada mais é do que um limite em que a dissipação se torna infinita e o mapa instantaneamente se instala em um ciclo limite.

Queremos entender o que acontece quando a dissipação é finita. Nesse caso o mapa se torna bidimensional e características, tais como a superestabilidade, deixam de existir e as janelas periódicas se deformam. No entanto, estruturas como o esqueleto da janela periódica persistem. Esse trabalho apresenta os métodos e resultados obtidos no estudo do oscilador de Poincaré nas características de seu espaço de parâmetros, bem como a determinação do esqueleto utilizando métodos de continuação no mapa de Hénon.

No Capítulo 2 mostramos brevemente as principais ferramentas e métodos de análise que foram utilizados no trabalho. Introduzimos alguns conceitos de estabilidade de órbitas e bifurcações, discutindo em especial as bifurcações de codimensão 1 e listando as bifurcações de codimensão 2 indicando quais são esperadas com mais frequência neste trabalho. Mostramos também a importância dos expoentes de Lyapunov na determinação das características de uma órbita e a configuração básica de uma janela periódica em um espaço de parâmetros bidimensional, também chamada de camarão [19].

No Capítulo 3, utilizando o mapa de Hénon, apresentamos os resultados para uma aproximação do esqueleto de janelas periódicas, isto é, o equivalente bidimensional das curvas superestáveis em uma dimensão. Aproximamos o esqueleto por curvas onde o traço da matriz que define a estabilidade de uma órbita é nulo. Utilizamos diagramas de parâmetros bidimensionais e comparamos com resultados obtidos através de métodos de continuação de soluções de equações diferenciais e mapas para mostrar que em presença de caos fraco e em janelas extensas no espaço de parâmetros essa curva é uma boa aproximação ao esqueleto.

No Capítulo 4 apresentamos o modelo para o oscilador com ciclo limite e os principais resultados para o caso conhecido como limite de relaxação infinita, que trata do modelo unidimensional.

No Capítulo 5 inicialmente observamos a quebra de simetria existente no modelo unidimensional quando passamos ao caso bidimensional, analisando toda a região considerada no espaço bidimensional de parâmetros. Em seguida, nos focamos na janela de período-3 para mostrar a alteração na geometria das janelas periódicas para diferentes valores de relaxação ao ciclo limite. Aqui, utilizamos novamente as técnicas de continuação para mapas para determinar com grande precisão as curvas de bifurcação de codimensão 1 e a presença dos pontos de bifurcação de codimensão 2. Também analisamos as alterações que ocorrem com o esqueleto das janelas periódicas ao mudarmos para duas dimensões e também mostramos as consequências da presença de autovalores complexos para parâmetros próximos ao esqueleto. No Capítulo 6 mostramos as conclusões do trabalho desenvolvido.

Os resultados numéricos apresentados nesse trabalho foram obtidos em duas formas. As curvas de bifurcação em espaços de parâmetros bidimensionais obtidas pelo método de continuação numérica foram obtidas com o

software AUTO [26]. Os resultados numéricos restantes foram obtidas pelo autor através de programas de autoria própria escritos na linguagem C. Os gráficos que apresentam esses resultados foram confeccionados se utilizando o programa GNUplot e o pacote matplotlib para Python.

Capítulo 2

Ferramentas e Métodos de Análise

Nesse capítulo introduziremos as principais ferramentas utilizadas na nossa análise de sistemas dinâmicos. Introduziremos conceitos tais como, bifurcações, expoentes de Lyapunov e superestabilidade. O intuito do capítulo não é de ser extensivo, mas objetivo de forma a facilitar o entendimento do tratamento feito nos mapas a serem estudados.

2.1 Condição de Estabilidade de Órbitas

O estudo de sistemas dinâmicos discretos normalmente começa com a determinação e análise dos pontos fixos do sistema. Através do controle de um parâmetro do sistema encontramos as chamadas bifurcações de codimensão-1 desses pontos fixos, isto é, valores críticos de parâmetros nos quais a estabilidade de um ponto fixo muda. Ao trabalharmos com um segundo parâmetro essas bifurcações, em geral, levam à uma curva de bifurcação. Sendo assim é natural começarmos determinando a condição que dá a estabilidade de pontos

fixos em mapas.

Seja f um mapa unidimensional, de forma que:

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (2.1)$$

Um ponto x^* é dito ser um ponto fixo de f se satisfazer a condição:

$$f(x^*) = x^*. \quad (2.2)$$

O ponto x^* pode ser uma *fonte*, indicando que pontos próximos se afastam de x^* . Nesse caso o ponto fixo é dito instável. O ponto fixo pode ser também um *sorvedouro*, e pontos próximos são atraídos para o ponto fixo, isso é, o ponto é estável.

De forma similar, uma órbita é dita periódica, de período p , caso satisfaça a condição:

$$f^p(x_0) = x_0. \quad (2.3)$$

O valor p é o menor inteiro para o qual a condição 2.3 é satisfeita. Isso é, o valor x_0 é um ponto fixo do mapa iterado p vezes e como tal, pode também ser estável ou instável.

A estabilidade das órbitas pode ser determinada analisando o valor da derivada do mapa no ponto fixo. Mais especificamente, se $|f'(x^*)| < 1$ o ponto fixo é estável; se $|f'(x^*)| > 1$ o ponto fixo é instável. O caso em que $|f'(x^*)| = 1$ é especial e pode indicar uma bifurcação do sistema, como veremos adiante.

No caso de órbitas periódicas o mesmo é válido, mas agora a derivada do mapa f^p deve satisfazer a condição de estabilidade:

$$|f^{p'}(x_0)| = |f'(x_{p-1})| \dots |f'(x_0)| < 1. \quad (2.4)$$

No caso de um mapa em mais dimensões temos condições semelhantes, mas ao invés de analisarmos as derivadas do mapa devemos trabalhar com os

autovalores da sua matriz Jacobiana. Então seja f um mapa n -dimensional:

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n), \quad (2.5)$$

onde \mathbf{x} é um vetor, de componentes (x^0, x^1, \dots, x^n) .

A matriz Jacobiana, \mathbf{J} , é uma matriz $n \times n$ com elementos $J_{i,j} = \partial f_i / \partial x_j$. Para determinar a estabilidade de uma órbita periódica, calculamos a matriz \mathbf{M} , que é dada pelo produto:

$$\mathbf{M} = \mathbf{J}(\mathbf{x}_{p-1}) \times \dots \times \mathbf{J}(\mathbf{x}_0). \quad (2.6)$$

onde os $\mathbf{J}(\mathbf{x}_n)$ são calculados em cada ponto da órbita periódica considerada.

Os autovalores da matriz \mathbf{M} , λ_k , $k = 1, \dots, n$, determinam a estabilidade da órbita. Caso $|\lambda_k| < 1$ para todos os valores de k , o ciclo é estável. No caso em que os valores são todos maiores do que 1 a órbita é instável. Pode ser que os valores de $|\lambda_k|$ sejam maiores ou menores do que 1 para diferentes valores de k . Nessa situação os pontos próximos são atraídos ou repelidos em diferentes direções. Por exemplo, no caso bidimensional, $n = 2$, podemos ter $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| > 1$, para um certo ponto fixo. Esse ponto é um atrator na direção x , mas repele na direção y , como mostra a figura 2.1. Esse ponto é chamado de ponto de sela.

Com o conhecimento da condição de estabilidade, podemos agora observar as bifurcações que ocorrem no sistema.

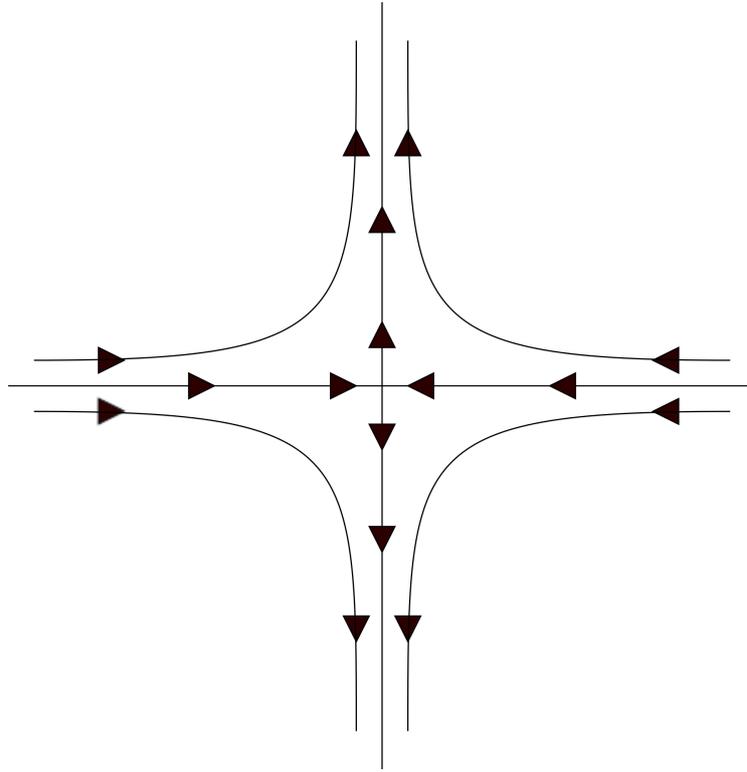


Figura 2.1: Representação do ponto de sela. Em uma das direções os pontos na vizinhança do ponto de sela são atraídos, enquanto na outra direção os pontos são repelidos.

2.2 Bifurcações

Quando variamos os parâmetros de controle do sistema encontramos valores nos quais pontos fixos mudam sua estabilidade. Quando isso acontece ao variarmos um parâmetro temos uma bifurcação de codimensão-1. Variando dois parâmetros simultaneamente podemos obter curvas dessas bifurcações. Duas curvas de bifurcação de codimensão-1 podem se intersectar transversalmente ou tangencialmente, dependendo da natureza das bifurcações. Geralmente, nos valores de parâmetros onde isso ocorre temos as chamadas bifurcações de

codimensão-2.

Existem três tipos de bifurcação de codimensão-1 para pontos fixos de mapas, a saber: bifurcação sela-nó, duplicação de período e bifurcação Neimark-Sacker. Além disso existem onze bifurcações de codimensão-2, que podem ser caracterizadas como casos específicos de bifurcações de codimensão-1, ou mesmo ressonâncias da bifurcação Neimark-Sacker, ou ainda no caso em que mais de um autovalor de um sistema n -dimensional atinge o círculo unitário.

Nessa seção discutiremos brevemente as bifurcações de codimensão-1, que serão de grande utilidade no trabalho a ser apresentado.

2.2.1 Bifurcação Sela-Nó

Na bifurcação do tipo sela-nó (também conhecida como bifurcação tangente), dois pontos fixos (ou duas órbitas periódicas) são criados, um estável e um instável. O termo sela-nó vem do fato de que os pontos criados em um sistema bidimensional consistem em um ponto de sela e um atrator, referido como "nó". Em sistemas unidimensionais é comum o termo bifurcação tangente, pois a derivada do mapa no ponto fixo nesse caso é $+1$, e o gráfico deve ser tangente a reta $y = x$ (figura 2.2).

Então como dito, em termos da derivada do mapa, $f'(x^*)$, a bifurcação sela-nó ocorre quando seu valor é igual a $+1$. De maneira equivalente para o caso n -dimensional, a bifurcação ocorre quando o maior autovalor da matriz \mathbf{M} (em módulo) tem valor $+1$.

A figura 2.3 mostra o surgimento da bifurcação sela-nó da figura 2.2 exemplificada no oscilador de Poincaré (que será introduzido em maiores detalhes no capítulo 4).

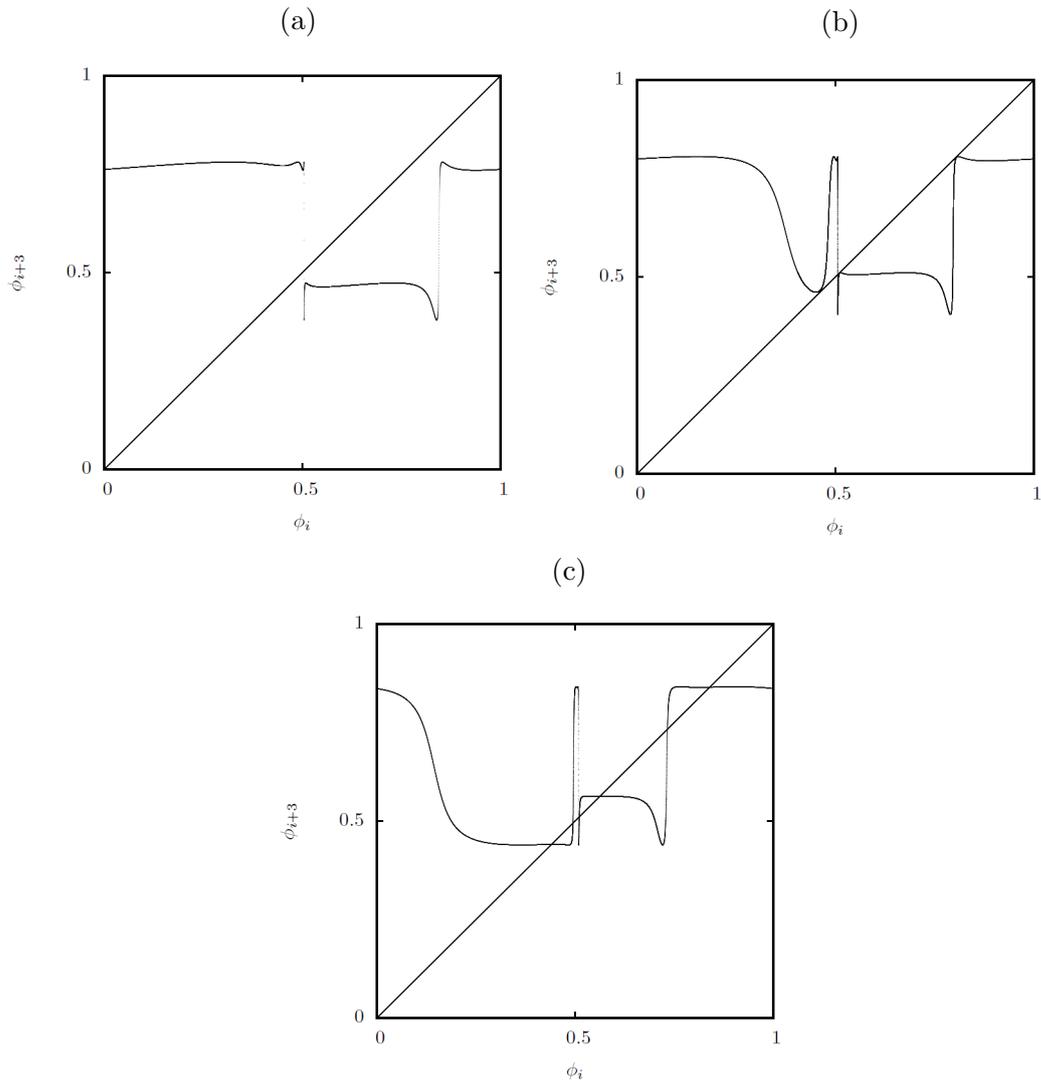


Figura 2.2: Mapa de retorno (f^3) para o oscilador de Poincaré em uma dimensão, para $b = 1.05$. Em (a) temos $\tau = 0.58$ antes da bifurcação. Em (b) $\tau = 0.605$ no momento da bifurcação em que o mapa é tangenciado pela reta $y = x$. No pânlel (c) $\tau = 0.64$ depois do cruzamento com o mapa de retorno uma órbita estável de período 3 é criada.

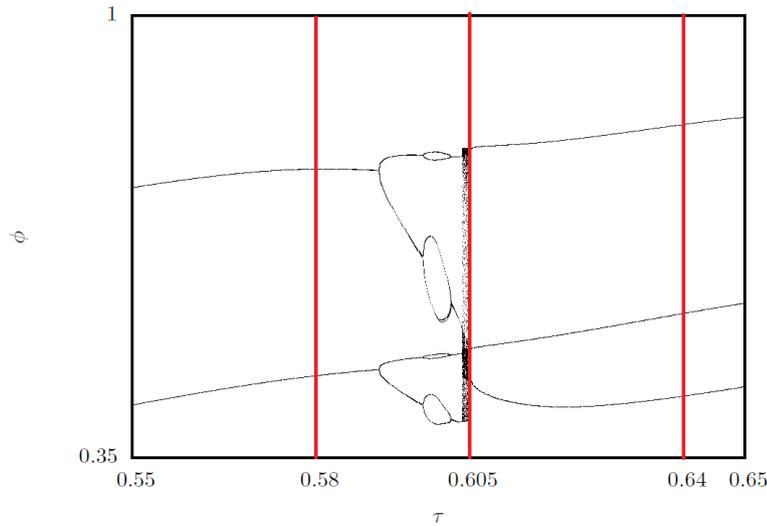


Figura 2.3: Diagrama de bifurcação $\phi^* \times \tau$. No gráfico vemos a bifurcação sela-nó acontecendo conforme variamos o parâmetro de controle. Os valores de τ correspondentes aos valores da figura 2.2 são indicados pelas linhas verticais.

2.2.2 Duplicação de Período

Na duplicação de períodos um ponto fixo estável perde sua estabilidade com a variação de um parâmetro. Em seu lugar surge uma órbita periódica estável com o período dobrado.

Em termos da derivada do mapa, a duplicação de períodos ocorre quando $f'(x^*) = -1$. Do mesmo modo, quando a matriz \mathbf{M} tem um autovalor -1 (e se esse autovalor tiver o maior valor absoluto), essa bifurcação ocorre em sistemas com dimensões maiores.

Como exemplo mostramos na figura 2.5 a duplicação de períodos ocorrendo no oscilador de Poincaré.

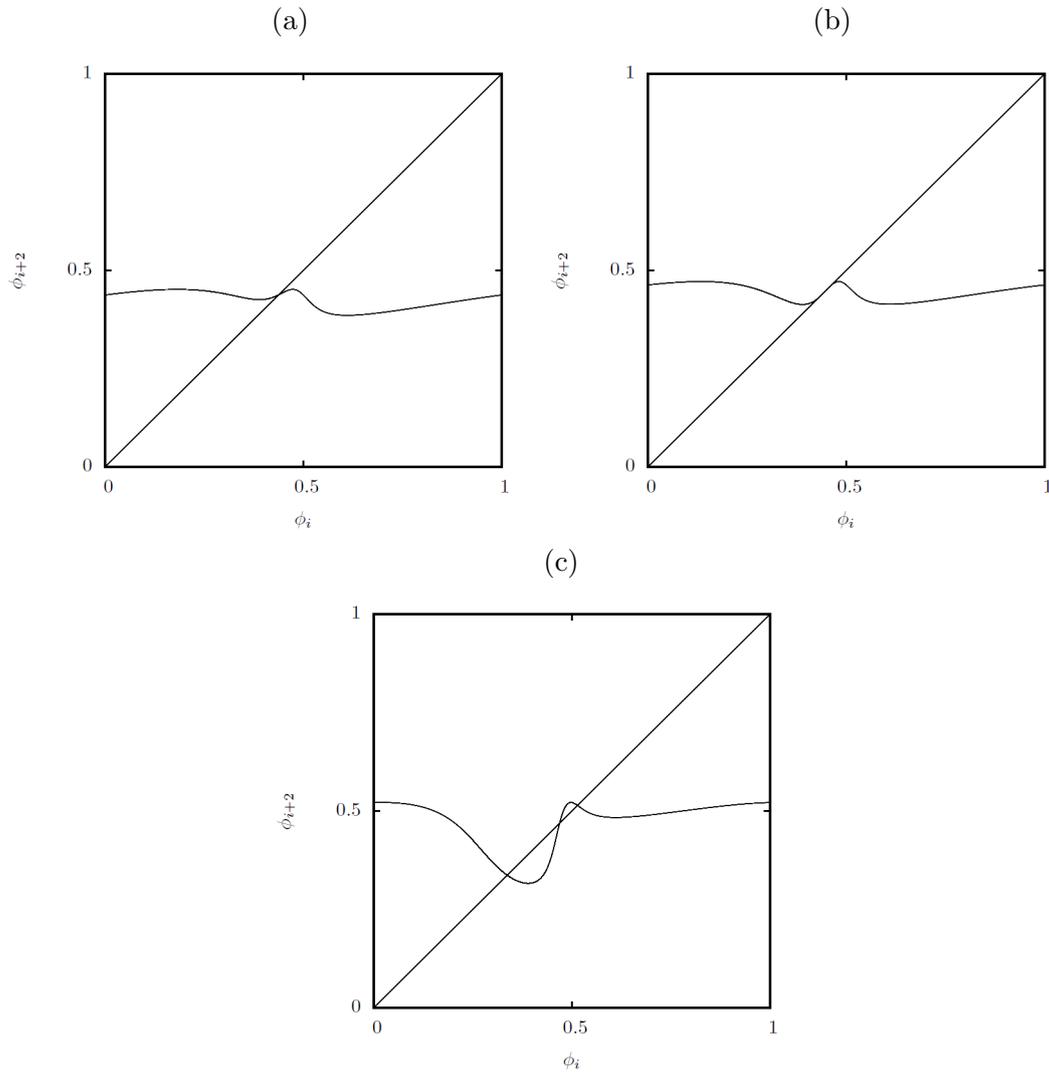


Figura 2.4: Mapa de retorno (f^2) para o oscilador de Poincaré em uma dimensão, para $b = 1.3$. Em (a) temos $\tau = 0.312$ antes da bifurcação, onde temos uma órbita de período 1 (ponto fixo) estável. Em (b) $\tau = 0.330$ no momento da bifurcação. No pânlel (c) $\tau = 0.382$ depois do cruzamento com o mapa de retorno uma órbita estável de período 2 é criada.

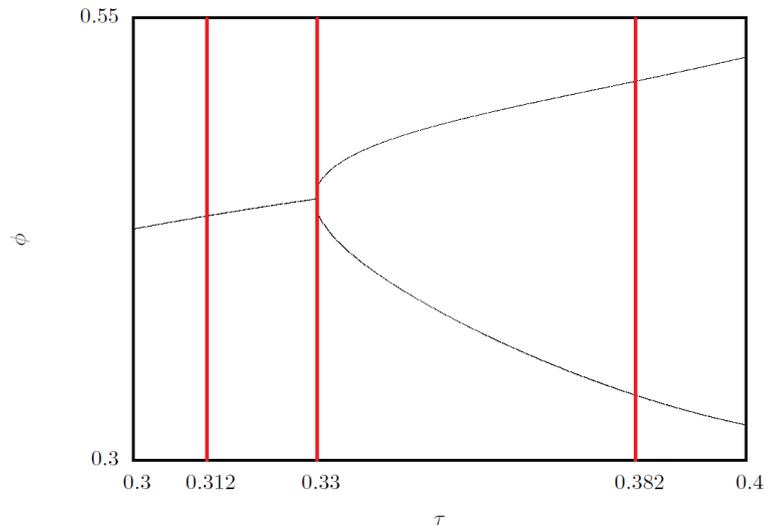


Figura 2.5: Diagrama de bifurcação $\phi^* \times \tau$. No gráfico vemos a duplicação de período acontecendo conforme variamos o parâmetro de controle. Os valores de τ correspondentes aos valores da figura 2.4 são indicados pelas linhas verticais.

2.2.3 Bifurcação Neimark-Sacker

A bifurcação Neimark-Sacker ocorre quando, ao variarmos os parâmetros do sistema, os autovalores da matriz \mathbf{M} são complexos conjugados de módulo 1. Essa bifurcação pode ocorrer de duas maneiras distintas: no caso da forma supercrítica, um ponto fixo estável perde a estabilidade com a variação de um parâmetro e dá origem a uma curva invariante fechada (figura 2.6 (a)); no caso subcrítico temos um ponto fixo estável, cercado por uma curva invariante instável, que perde sua estabilidade, levando ao desaparecimento da curva invariante (figura 2.6 (b)).

Essa bifurcação é equivalente à bifurcação de Hopf, mas para sistemas discretos [27].

Curvas de bifurcação Neimark-Sacker, quando interceptam curvas das outras bifurcações de codimensão-1 apresentam ressonâncias que são consideradas

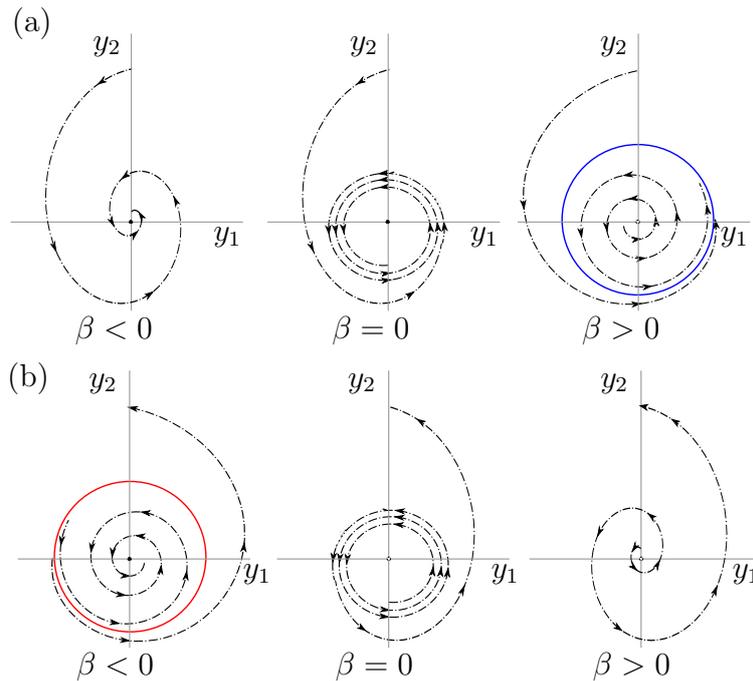


Figura 2.6: Bifurcação de Neimark-Sacker. Em (a) temos a bifurcação supercrítica e em (b) a subcrítica.

bifurcações de codimensão-2. Mais especificamente, em um sistema bidimensional quando ambos os autovalores da matriz de estabilidade, \mathbf{M} , tem valor $+1$ temos a chamada ressonância 1:1 (R1) e ocorre quando a bifurcação Neimark-Sacker cruza com a bifurcação sela-nó. No caso em que os autovalores são ambos iguais a -1 temos a ressonância 1:2 (R2) da bifurcação Neimark-Sacker e ocorre quando ela cruza com a curva de duplicação de período.

2.3 Expoentes de Lyapunov

A sensibilidade às condições iniciais é uma das características de sistemas que apresentam caos. Uma maneira de quantificar essa sensibilidade é através dos expoentes de Lyapunov. Para expoentes positivos, condições iniciais infini-

tamente próximas se afastam exponencialmente conforme iteramos o mapa, levando a soluções completamente diferentes, incluindo órbitas caóticas. Para expoentes negativos, no entanto, condições próximas se aproximam da mesma solução ao iterarmos o mapa, levando a atratores periódicos ou pontos fixos estáveis.

A sensibilidade às condições iniciais deve ser estudada para cada dimensão do sistema e a caoticidade, em geral, é analisada levando-se em conta os maiores expoentes de Lyapunov.

O cálculo do expoente de Lyapunov para mapas suaves, isso é, contínuos em todos os pontos, é bem conhecido e pode ser obtido através dos autovalores, λ_j , da matriz \mathbf{M} :

$$L_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |\lambda_j|. \quad (2.7)$$

No caso de uma órbita de período p , o cálculo do expoente se reduz à expressão:

$$L_j = \frac{1}{p} \ln |\lambda_j|. \quad (2.8)$$

Para sistemas unidimensionais o cálculo é feito utilizando as derivadas ao longo da órbita, da mesma forma que a obtenção da estabilidade do sistema.

A obtenção dos expoentes de Lyapunov numericamente, utilizando as expressões acima, envolve o cálculo do produto de matrizes. No caso de órbitas caóticas ou órbitas com períodos muito longos esse processo pode levar a erros de *overflow*. Apesar de no caso de mapas bidimensionais ser possível evitar esse problema com a utilização de diferentes técnicas [28, 29]. Técnicas para mapas incluem a utilização de uma matriz de rotação para tornar as matrizes triangulares, no entanto essa técnica, apesar de eficiente pode gerar uma perda de informação. Por exemplo, em casos onde a matriz \mathbf{M} apresenta autovalores complexos em uma região periódica, cálculos utilizando a expressão 2.7 e a expressão 2.8 geram resultados diferentes se tornarmos a matriz de estabilidade

triangular. Como regiões com autovalores complexos são importantes para o estudo apresentado aqui, o cálculo do expoente de Lyapunov numérico será feito através do produto das matrizes.

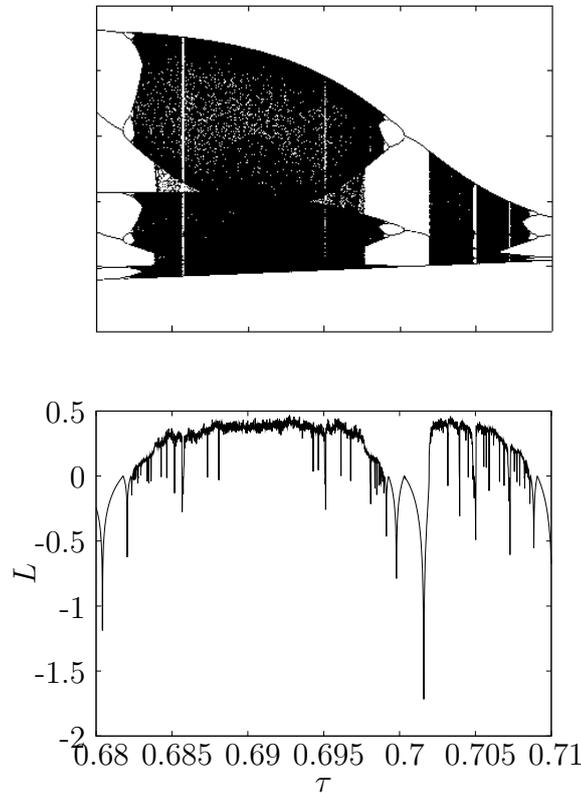


Figura 2.7: Expoentes de Lyapunov para o Oscilador de Poincaré. No pánel superior temos o diagrama de bifurcação e no inferior os expoentes de Lyapunov equivalentes para cada valor de τ . Nas bifurcações o expoente de Lyapunov é zero, o expoente é negativo em regiões periódicas e positivo em regiões onde há caos.

A figura 2.7 mostra a variação do expoente de Lyapunov com um dos parâmetros do oscilador de Poincaré. Nela podemos ver que as janelas periódicas no diagrama de bifurcação são representados pelo valor negativo do expoente. Nas bifurcações do sistema o expoente atinge o valor zero. Soluções caóticas

apresentam valores positivos para o expoente.

2.4 Órbitas Superestáveis

Vimos que as órbitas de um mapa unidimensional são estáveis se o produto das derivadas ao longo dessa órbita tiver valor absoluto menor do que 1. No caso em que esse produto for igual a zero a órbita é dita superestável. Pela definição da condição de estabilidade, vemos que para o produto ser zero, basta que uma das derivadas ao longo da órbita seja nula. Isso ocorre quando a órbita passa por um ponto de máximo ou mínimo do mapa.

Se usarmos a definição do expoente de Lyapunov e calcularmos o seu valor em uma órbita superestável, vemos que o limite (equações 2.7 e 2.8) tende a $-\infty$. Por essa razão ela recebe a denominação especial de superestável.

Veremos na próxima sessão que as órbitas superestáveis representam uma espécie de “esqueleto” das estruturas que podem ser observadas em um diagrama bidimensional de parâmetros. Portanto a determinação dessas órbitas é importante para se ter uma idéia da geometria do espaço dos parâmetros.

2.5 Diagrama Bidimensional de Parâmetros

Diagramas de bifurcação, tais como as figuras (2.5) e (2.3) mostram a variação das variáveis dinâmicas em relação à um dos parâmetros de interesse, nos permitindo identificar a ocorrência de bifurcações no sistema, a presença de janelas periódicas e rotas para o caos, entre outras informações.

No entanto, muitas vezes o modelo depende de mais de uma parâmetro, todos igualmente importantes e que podem levar a diferentes comportamentos dinâmicos. Portanto é importante sermos capazes de observar o que ocorre com

o sistema ao variarmos simultaneamente mais de um parâmetro do modelo. O estudo de diagramas bidimensionais de parâmetros vem sendo realizado desde os anos 80 e tem se mostrado um método muito eficiente de análise do comportamento dinâmico de sistemas não lineares.

Nessa perspectiva, dois parâmetros do sistema representam os eixos de um plano. Uma terceira dimensão pode ser representada através da utilização de cores que podem representar diferentes características do sistema, tais como sua periodicidade ou o valor do expoente de Lyapunov para o par de parâmetros. O resultado obtido é um tipo de *heatmap* que pode ser utilizado para determinar as mesmas características de um diagrama de bifurcação, em todo o espaço dos parâmetros.

De grande interesse é a formação de janelas periódicas no diagrama bidimensional de parâmetros. Estudos do mapa de Hénon revelaram que essas janelas periódicas tem formas bem definidas e suas fronteiras são, em geral, formada por bifurcações sela-nó e duplicação de períodos [18]. Devido ao seu formato, essas estruturas recebem o nome de camarões.

Para mapas unidimensionais com dois parâmetros é importante notar que uma vez que uma das fronteiras da janela periódica é formada por bifurcações sela-nó, isso é, derivada ao longo da órbita igual $+1$ e suas outras fronteiras são formadas por duplicação de período, com derivada ao longo da órbita igual a -1 , se o mapa for suave esperamos que no interior da janela as derivadas variem continuamente de -1 à $+1$, ou seja, a derivada deve cruzar o valor 0 . Isso indica que a janela periódica vai apresentar órbitas superestáveis (Figura 2.8).

As órbitas superestáveis no diagrama bidimensional de parâmetros serão curvas. Essas curvas dependem apenas de uma condição, que a derivada ao longo da órbita seja nula, e por isso são chamadas de curvas de codimensão

1. As curvas superestáveis também recebem o apelido de “esqueleto” ou “espinha” da janela periódica [4], pois elas fornecem informações sobre a geometria da janela que sustentam.

Para mapas bidimensionais as curvas superestáveis deixam de existir, no entanto regiões de maior estabilidade que se aproximam da superestabilidade persistem e um dos objetivos desse trabalho é entender o que elas representam.

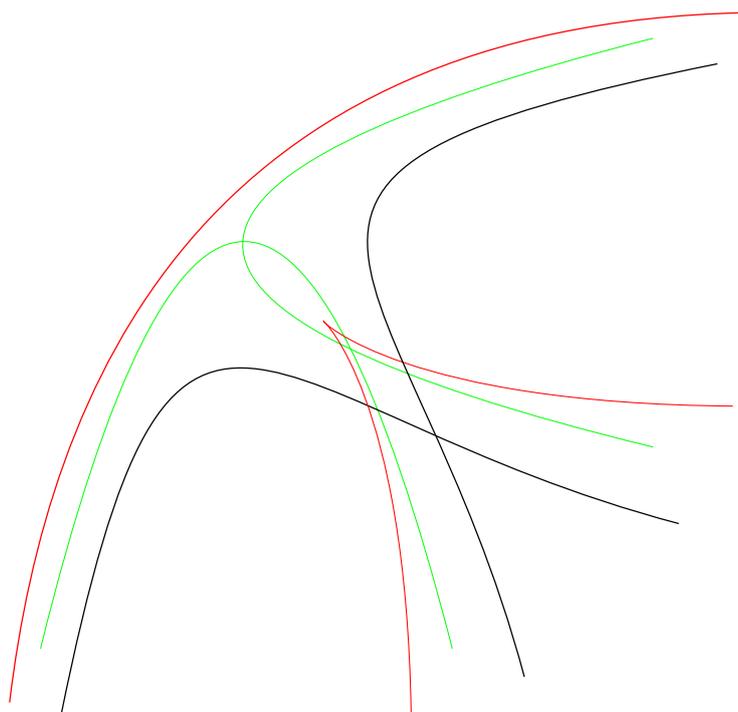


Figura 2.8: Representação de uma janela periódica no diagrama bidimensional de parâmetros. Em verde estão as curvas superestáveis, em preto as curvas de duplicação de período e em vermelho as curvas de bifurcação selá-nó.

2.6 Métodos de Continuação Utilizando AUTO

Continuação numérica é um método para calcular soluções aproximadas para um sistema de equações não lineares da forma:

$$F(\mathbf{u}, \alpha) = 0, \quad (2.9)$$

onde α é um parâmetro escalar e \mathbf{u} pertence a \mathbb{R}^n .

Um ponto fixo de uma família de fluxos ou mapas parametrizados é dessa forma e, discretizando a trajetória ou iterando o mapa órbitas periódicas também podem ser colocadas com soluções de $F = 0$. A continuação numérica utiliza o sistema de equações e uma solução inicial, (\mathbf{u}_0, α_0) , $F(\mathbf{u}_0, \alpha_0) = 0$, e produz a solução $\Gamma(\mathbf{u}_0, \alpha_0)$, que é um conjunto de pontos, (\mathbf{u}, α) , que satisfaz a relação $F(\mathbf{u}, \alpha)$.

Um ponto regular de F é um ponto (\mathbf{u}, α) no qual a Jacobiana de F tem posto completo, n . Próximo a um ponto regular, pelo teorema da função implícita, a solução é uma curva isolada passando pelo ponto regular.

Um ponto singular de F é um ponto (\mathbf{u}, α) onde a Jacobiana de F não tem posto completo. Próximo ao ponto singular a solução não é mais uma curva isolada. Ao invés disso a estrutura local é determinada por derivadas de ordem mais alta de F . Em geral, as soluções Γ são curvas que se ramificam. Os pontos de ramificação (*branch points*) são pontos singulares. Encontrar as curvas deixando os pontos singulares é chamado de mudança de ramo e utilizando métodos para identificar bifurcações essas curvas podem ser traçadas.

Existem diversos algoritmos para realizar a continuação numérica. Nesse trabalho utilizamos o software AUTO [26] para identificar as fronteiras de estabilidade no Oscilador de Poincaré. Para isso fornecemos uma solução periódica e o mapa ao programa, que por sua vez identificou os diferentes pontos de ramificação, que consistem em bifurcações do sistema.

A principal vantagem da utilização do programa AUTO para complementar o estudo é o fato dele fornecer resultados mais precisos, em especial em regiões extremamente pequenas, onde métodos convencionais de *shooting* esbarram em diversos problemas, em especial multiestabilidade.

Capítulo 3

Esqueleto de uma Janela Periódica para o Mapa de Hénon

Dinâmicas complexas são encontradas conforme parâmetros são variados em sistemas dinâmicos. Em mapas unidimensionais com máximos quadráticos e um parâmetro, sequências universais de órbitas periódicas estáveis e duplicações de período levando ao caos ocorrem [30, 1]. Um próximo passo em complexidade envolve mapas unidimensionais com dois parâmetros, tais como o mapa senoidal do círculo, que capturam as características cruciais de osciladores forçados periodicamente [31]. Conforme a amplitude e a frequência do forçamento periódico mudam, geometrias complexas, consistindo de diferentes zonas sobrepostas surgem, como mostra a figura 3.1, [32, 33, 34, 35].

Ciclos superestáveis, que são ciclos passando por um ou mais pontos críticos de uma mapa unidimensional, fornecem informações sobre a organização das zonas periódicas. O "esqueleto" é o conjunto de órbitas superestáveis em um espaço de parâmetros bidimensional de um mapa unidimensional.

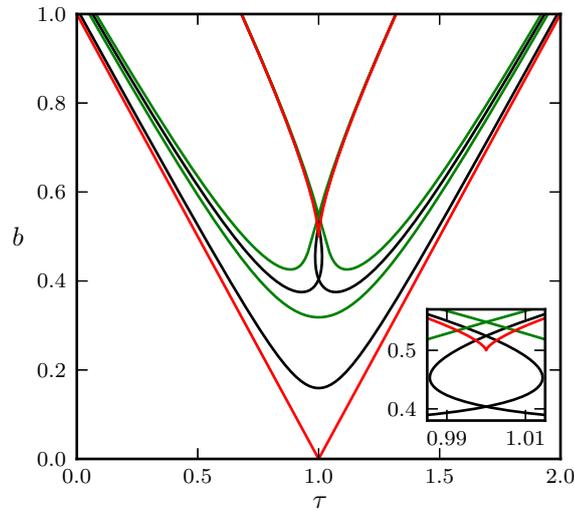


Figura 3.1: Zona de ressonância de período 1 para o mapa senoidal do círculo $x_{t+1} = x_t + \tau + b \sin 2\pi x_t$ mostrando a primeira bifurcação de período e as curvas superestáveis de período 1 e 2.

Apesar de ciclos contendo um máximo ou mínimo serem certamente estáveis em mapas unidimensionais e, portanto, efetivos na definição do esqueleto de estruturas de bifurcação, o mesmo não pode ser dito para mapas bidimensionais. Por essa razão é necessário um novo método para a determinação do esqueleto. Para isso uma combinação de técnicas de continuação [8, 9] com resultados anteriores de estabilidade de ciclos em sistemas com mais de uma dimensão [36] foi utilizada para mostrar como determinar o esqueleto em mapas bidimensionais. Para a demonstração do método utilizamos o mapa de Hénon [37, 17, 18], $x' = a - x^2 + by$, $y' = x$.

Considerando o mapa n -dimensional, onde $n = 1, 2$

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n). \quad (3.1)$$

A Jacobiana, \mathbf{J} , é uma matriz $n \times n$ composta de elementos $J_{i,j} = \partial f_i / \partial x_j$.

Para determinar a estabilidade de um ciclo de período p , calculamos o produto

$$\mathbf{M} = \mathbf{J}(\mathbf{x}^p) \cdot \dots \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}^1), \quad (3.2)$$

onde \mathbf{x}^k , $k = 1, \dots, p$ são os pontos $\mathbf{x}, \dots, f^{(p-1)}(\mathbf{x})$ no ciclo. Os autovalores λ_k , $k = 1, \dots, n$ determinam a estabilidade do ciclo. Se todos os autovalores estão no círculo unitário, o ciclo é estável. O maior expoente de Lyapunov é $(1/p) \ln |\lambda_1|$, onde $|\lambda_1|$ é o valor absoluto (o módulo) do autovalor principal. Portanto, em mapas unidimensionais, para um ciclo contendo um ponto de máximo ou mínimo, temos que $M = 0$, o expoente de Lyapunov é $-\infty$, e é possível determinar diretamente o locus órbitas superestáveis de período- p no espaço bidimensional de parâmetros, tomando o ponto crítico como condição inicial e determinando pontos fixos no mapa de período- p [32]. Uma bifurcação sela-nó ocorre quando o autovalor principal cruza o valor $+1$ e uma duplicação de período ocorre quando o autovalor principal cruza -1 . No espaço de parâmetros bidimensional as fronteiras de bifurcação sela-nó e duplicação de período são, tipicamente, curvas no espaço de parâmetros que contém um conjunto de parâmetros para os quais uma órbita periódica estável existe, para certos valores de condições iniciais. Em mapas unidimensionais, o conjunto de ciclos superestáveis de mesmo período é uma curva entre as fronteiras de bifurcação chamada de esqueleto [32] ou espinha [38].

Para mapas bidimensionais o traço $T = M_{1,1} + M_{2,2} = \lambda_1 + \lambda_2$, e o determinante $D = M_{1,1}M_{2,2} - M_{1,2}M_{2,1} = \lambda_1\lambda_2$, onde também $\lambda_1, \lambda_2 = T/2 \pm \sqrt{T^2 - 4D}/2$, nos ajudam a entender a estrutura de bifurcações no espaço de parâmetros. Para um dado ciclo, o triângulo de estabilidade [38, 36] na figura 3.2(a) determinado por \mathbf{M} na equação (3.2) define os valores de D e T para os quais a órbita periódica é estável e pode ser usada para codificar as regiões do espaço de parâmetros. No caso em que $|D| < 1$, o conjunto de pontos no espaço de parâmetros para os quais $T = 0$ define uma estrutura que

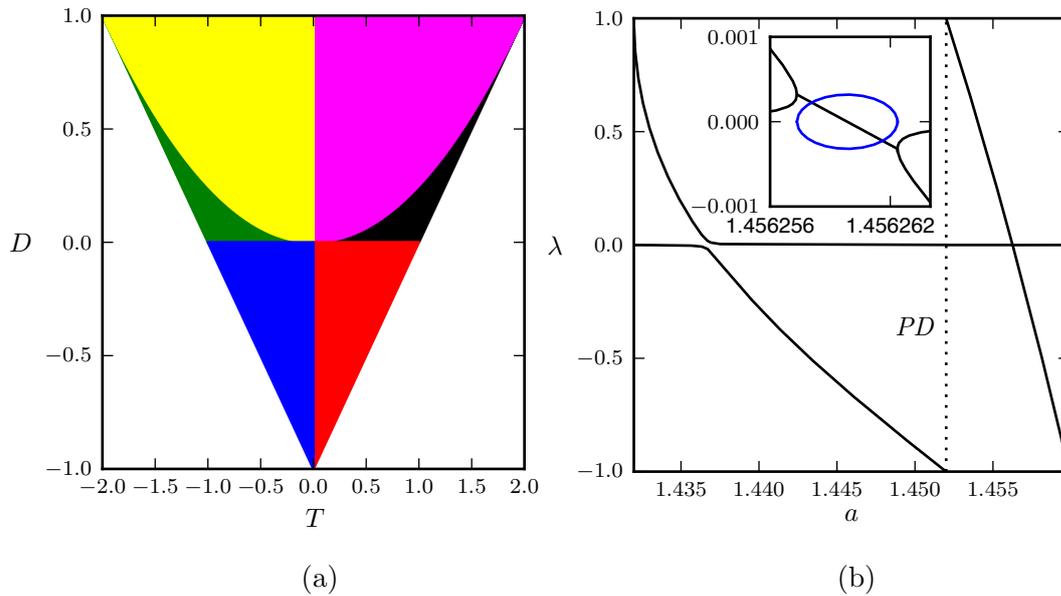


Figura 3.2: (a) O triângulo de estabilidade [38]. Para valores do determinante D e do traço T que caem nas áreas coloridas os autovalores apresentam estabilidade local. Azul, vermelho, verde e preto representam D e T obtidos a partir de autovalores reais, enquanto que magenta e amarelo são obtidos com autovalores complexos. (b) Trajetórias típicas de autovalores para mapas bidimensionais conforme um parâmetro é variado de uma fronteira de bifurcação sela-nó até uma fronteira de duplicação de período. Esse caso é para o mapa de Hénon com $b = 0.2$, mostrando os autovalores dos ciclos de período-5 e período-10. À esquerda da duplicação de período PD , $D < 0$, os autovalores são sempre reais e as trajetórias conforme a aumenta não se cruzam. À direita de PD , $D > 0$ e existe uma pequena região onde os autovalores são complexos (a curva azul no detalhe mostra a parte imaginária dos autovalores).

tem uma função similar ao esqueleto de mapas unidimensionais, uma vez que fica entre as fronteiras de bifurcação sela-nó e duplicação de períodos. Consideramos agora o caso em que D é ou sempre positivo ou sempre negativo. A

figura 3.2(b) mostra trajetórias esquemáticas dos autovalores conforme a variação de um parâmetro. Podemos descrever dois casos: se $-1 < D < 0$ existe necessariamente um ponto onde $T = 0$. Para $1 > D > 0$ existe uma região na qual os autovalores se tornam complexos. Nesse caso existem, tipicamente, dois valores onde os autovalores são reais e iguais.

Métodos de continuação podem ser usados para traçar os conjuntos de pontos onde $T = 0$ ou onde os autovalores são iguais e reais no espaço de parâmetros para uma dada órbita periódica e suas descendentes que surgem por duplicação de períodos. Para isso, após realizar uma continuação em um dos parâmetros para $f^{(p)}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = 0$ detectando os zeros de $T = M_{1,1} + M_{2,2}$, consideramos o seguinte sistema algébrico estendido:

$$\begin{aligned} f^{(p)}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} &= 0 \\ T = M_{1,1} + M_{2,2} &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Um pacote de continuação como o AUTO [8, 9] considera isso um sistema tridimensional com um parâmetro. Sendo assim, um dos dois parâmetros precisa ser o terceiro vetor de estado na continuação do sistema, e o outro parâmetro pode ser o parâmetro de continuação.

De maneira similar, os pontos onde os autovalores são iguais e reais podem ser continuados. Para isso trocamos a segunda condição na (3.3) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f^{(p)}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} &= 0 \\ T^2 - 4D = (M_{1,1} + M_{2,2})^2 - 4(M_{1,1}M_{2,2} - M_{1,2}M_{2,1}) &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.1 Resultados

Agora aplicamos as equações acima para determinar os esqueletos de camarões no mapa de Hénon [37, 17, 18] $x' = a - x^2 + by$, $y' = x$. O mapa de Hénon tem

a propriedade especial de que o determinante de sua matriz de estabilidade é dado por: $D = -b^p$. Dessa maneira, para período-5, $D = -b^5 < 0$ e para todos os ciclos subsequentes por dobramento de período $D > 0$. Se $|b| < 1$, para órbitas com períodos altos o valor de D pode ser bem pequeno.

Agora investigamos a estrutura de período-5 e período-10 para $b \approx 0.18$ em uma região já identificada como possuindo um camarão [18, 19]. Mostramos três diferentes visões da mesma região do espaço de parâmetros: o expoente de Lyapunov; com as cores baseadas nos valores de D e T no triângulo de estabilidade; e o esqueleto determinado usando técnicas de continuação.

Na figura 3.3(a) mostramos o expoente de Lyapunov e na figura 3.3(b) mostramos as cores associadas pelo triângulo de estabilidade. Na figura 3.3(b) $-b^5 \approx -1.9 \times 10^{-4}$, e $b^{10} \approx 3.6 \times 10^{-8}$. Isso significa que para as órbitas de período-5 os autovalores serão sempre reais, com regiões azul e vermelha separadas por curvas onde $T = 0$. Para o ciclo de período-10 os autovalores podem ser complexos, mas para valores tão pequenos do determinante as regiões complexas desaparecem numericamente e, dessa forma, uma fronteira preta e verde pode ser vista. Para tais valores do determinante as fronteiras verde/preta e vermelha/azul representam boas aproximações para o conjunto de pontos que representam o mesmo papel do esqueleto em mapas unidimensionais [36]. Portanto é suficiente calcular somente as curvas de $T = 0$ por continuação. A análise de continuação foi suportada por continuação numérica padrão das curvas de bifurcação sela-nó e duplicação de período. Os resultados são mostrados na Fig. 3.3. Para a órbita de período-5 a região estável é delimitada por uma curva vermelha de bifurcação sela-nó na esquerda, e por uma curva verde de dobramento de período na direita. Uma segunda curva de bifurcação sela-nó em uma configuração de cúspide também pode ser vista, de forma similar as existentes no mapa unidimensional mostrado em Fig. 3.1. Estruturas

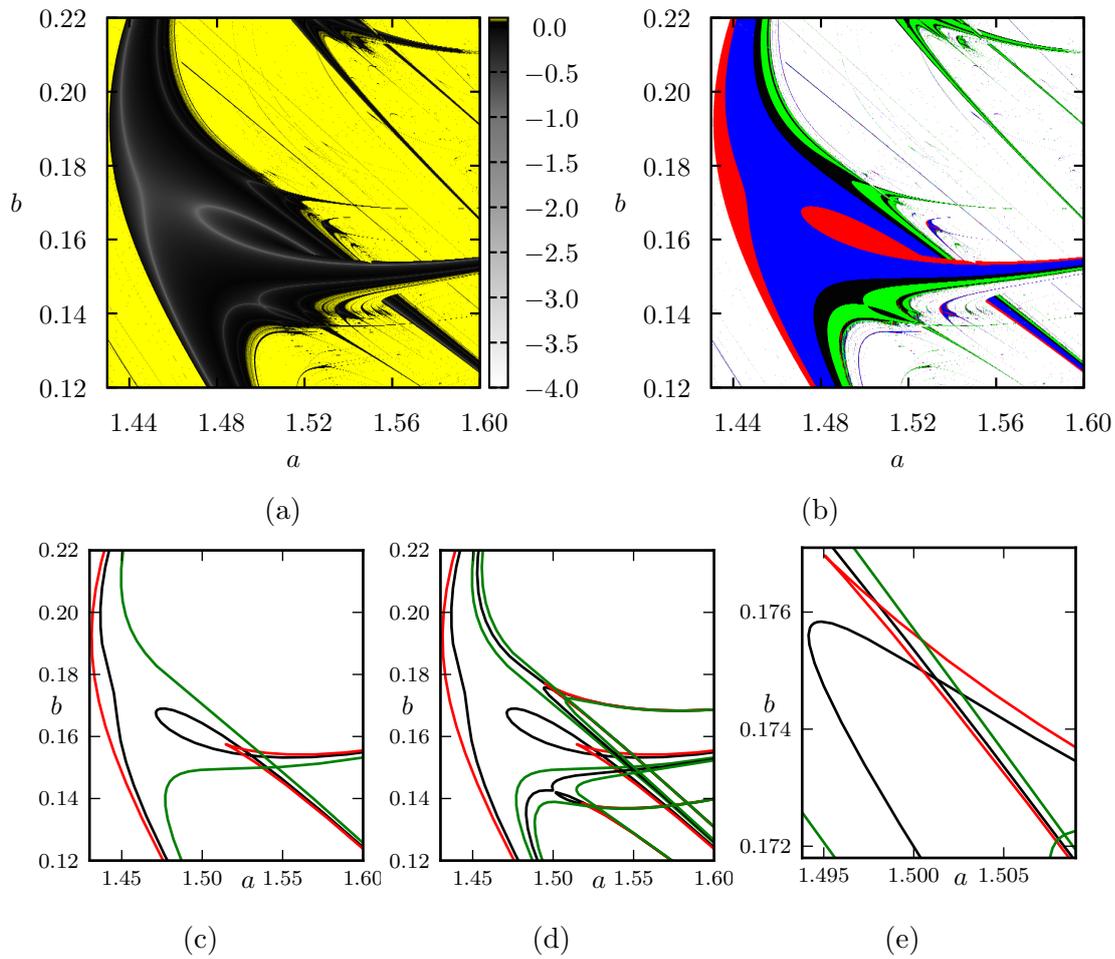


Figura 3.3: Estrutura de bifurcações de um camarão no mapa de Hénon. (a) Expoentes de Lyapunov. Amarelo representa regiões caóticas com valores positivos para o expoente de Lyapunov. (b) Coloração baseada nas regiões de D e T no triângulo de estabilidade. (c) Diagrama de bifurcação para um ciclo de período-5 no mapa de Hénon. (d) Mesmo diagrama de (c) mas com a adição das curvas para o ciclo de período-10. (e) Ampliação de (d) mostrando o desdobramento de tipo-B.

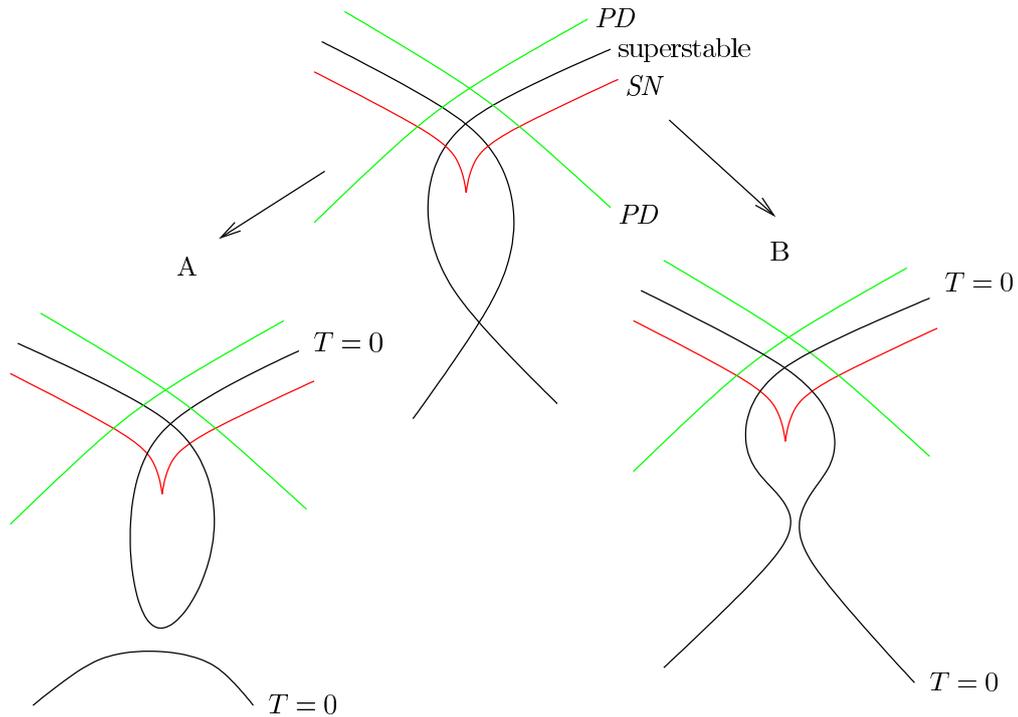


Figura 3.4: Desdobramento do esqueleto. No topo temos a geometria usual existente em janelas periódicas de mapas unidimensionais. Em mapas bidimensionais o esqueleto pode se desdobrar de duas formas: Tipo A com um *loop* ou Tipo B com um cruzamento sem o *loop*.

similares existem para o ciclo de período-10.

Apesar das estruturas em formato de camarão para o mapa de Hénon e para o mapa senoidal do círculo na figura 3.1 parecerem as mesmas, existem diferenças que são reveladas na análise a seguir. Na figura esquemática 3.4, o diagrama no topo representa a estrutura "clássica" que forma o bloco auto similar de estruturas de bifurcação em mapas bimodais [32, 33, 34, 35, 14, 15, 16, 39]. O cruzamento de curvas superestáveis na parte superior do diagrama representa um ponto no espaço de parâmetros onde existe biestabilidade, enquanto que o cruzamento na parte inferior representa uma órbita periódica na qual

duas das iterações são iguais a zero.

Em mapas bidimensionais, o cruzamento na parte inferior representa uma situação que não é genérica e, em geral, não vai existir. A razão para isso é que em um sistema de continuação tal ponto representa um ponto de ramificação que, geralmente, tem codimensão três e pode ser de codimensão dois apenas se satisfizer certas simetrias [40]. Em mapas unidimensionais, o traço da matriz escalar (o próprio valor da matriz) \mathbf{M} na equação (3.2) é o produto dos traços das matrizes $\mathbf{J}(\mathbf{x}^k)$, mas para dimensões mais altas essa simetria é perdida. Ao invés disso a estrutura esquelética se desenvolve em uma de duas maneiras, Tipo A ou Tipo B. No caso do mapa de Hénon, a estrutura de período-5 na figura 3.3(c) reflete a geometria de Tipo A, enquanto que a estrutura de período-10 mostrada na figura 3.3(e) representa a geometria do Tipo B.

Apesar do conceito de línguas de ressonância ser bem estabelecido experimentalmente, a observação da estrutura fina predita teoricamente por análises ainda apresenta um importante desafio.

Conforme parâmetros são alterados em sistemas não lineares, existem bifurcações complexas com a possibilidade de multiestabilidade. Apesar de as estruturas mais delicadas observadas no espaço de parâmetros serem difíceis de serem observadas experimentalmente, é, de toda a forma, de interesse científico possuir métodos que nos permitam dissecar as estruturas de bifurcação. Para mapas unidimensionais bimodais, existem diversas técnicas e teorias que podem ser usadas para analisar as estruturas de ciclos superestáveis [16, 39]. No entanto para equações diferenciais não lineares e para mapas de dimensão 2 a análise de estrutura no espaço de parâmetros se vale amplamente de métodos de "shooting" em que a dinâmica é determinada para uma dada condição inicial ao longo de uma região de parâmetros. Esse trabalho permite a determinação direta de estruturas que são muito difíceis de serem obtidas através

desse método. Apesar do termo camarão captar a essência das geometrias delicadas observadas nesses estudos numéricos, a estrutura topológica detalhada de camarões para mapas bidimensionais e outros tipos de sistemas dinâmicos ainda precisam ser analisados. Por exemplo, para modelos de osciladores não lineares estimulados periodicamente com um tempo de relaxação finito, esperamos que o camarão apresente estruturas que evoluem de maneira complexa ao variarmos a relaxação ao ciclo limite [5].

O trabalho mostra que métodos de continuação podem ser usados para analisar as estruturas mais delicadas em mapas bidimensionais, mais especificamente aplicado ao mapa de Hénon. Uma vez que o conjunto de pontos no qual $T = 0$ tem um papel similar ao dos ciclos superestáveis para um mapa bidimensional, métodos de continuação que identificam esses pontos devem ajudar a elucidar mais detalhes em estruturas de bifurcação e em um número maior de sistemas. Para sistemas com dimensões mais altas existem quantidades adicionais que são importantes, especificamente os coeficientes c_i do polinômio característico, que cobre todos os possíveis combinações de produtos dos autovalores tomados i a cada momento, para $i = 1, 2, \dots, n$ [38]. Essas quantidades podem ser restritas de maneira similar a T e D usando métodos de continuação.

Capítulo 4

Oscilador de Poincaré Forçado

Nesse capítulo introduzimos um modelo de oscilador suave e determinaremos a equação do mapa dissipativo que representa a evolução temporal desse tipo de oscilador quando perturbado por impulsos periódicos no tempo de intensidade constante. Mostramos que no limite de relaxação infinita, onde a dissipação é infinitamente alta, o mapa pode ser tratado como unidimensional.

Os sistemas dinâmicos e suas aplicações tem sido amplamente estudados nos últimos anos, em especial sistemas não-lineares levando ao possível surgimento de comportamento caótico [41, 42, 43]. Entre esses sistemas podemos destacar os osciladores de relaxação submetidos a perturbações externas, sejam elas periódicas ou não. Um oscilador suave é uma classe de sistemas dinâmicos que aparece em diversas áreas e consiste em um sistema bidimensional de equações diferenciais com um ciclo-limite estável contendo um ponto fixo instável [44]. Esse tipo de oscilador aparece, por exemplo, em sistemas como o de Lorenz e o de Rössler e o seu estudo auxilia na compreensão topológica de outros osciladores destes sistemas.

Um modelo simples de oscilador suave, mas que preserve todas as principais características deste tipo de sistema, consiste em um ciclo-limite estável

de raio unitário centrado na origem, onde se localiza o ponto fixo instável. Utilizaremos um oscilador desse tipo para estudar o comportamento dinâmico de mapas dissipativos, a saber, utilizaremos o modelo conhecido como oscilador de Poincaré que, em coordenadas polares, pode ser descrito pelas equações:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= kr(1-r), \\ \frac{d\phi}{dt} &= 1,\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde k é um parâmetro positivo. A coordenada angular, ϕ , é normalizada de forma que o intervalo $[0 : 1)$ corresponda a $[0 : 2\pi]$ radianos.

As equações desse sistema são desacopladas e podemos ver que o sistema é integrável e seu comportamento depende da posição radial inicial no espaço de fase. Ao evoluirmos o sistema a partir da posição inicial podemos notar que todos os pontos do espaço de fase, com exceção de $r = 0$, são atraídos para o ciclo limite em $r = 1$ (Figura 4.1). O parâmetro k indica a taxa de relaxação ao ciclo limite, isto é, representa a dissipação no sistema e quanto maior seu valor mais rapidamente ele tende ao ciclo-limite estável. Já $r = 0$ representa o ponto fixo instável e condições iniciais nesse ponto permanecem nele indefinidamente.

O estudo do comportamento de sistemas dinâmicos na presença de perturbações externas periódicas é um tópico de grande relevância, em especial na importância de controle de caos [45, 46]. Neste trabalho fizemos uso de perturbações impulsivas, ou seja, perturbações que possuem intensidade diferente de zero em escalas de tempo muito menores do que a escala de tempo em que o oscilador passa por mudanças significativas. Sendo assim, o sistema foi perturbado por uma translação horizontal instantânea de amplitude b . Assumindo que imediatamente antes do i -ésimo impulso o sistema se encontre na

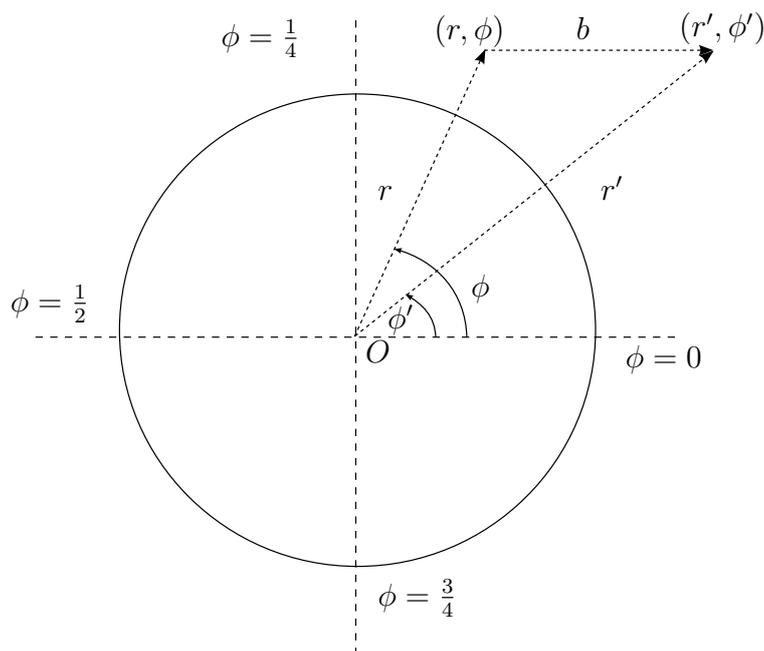


Figura 4.1: O efeito da perturbação aplicada ao Oscilador de Poincaré. O ponto (r_i, ϕ_i) é mandado para (r'_i, ϕ'_i) por uma translação horizontal de amplitude b .

posição (r_i, ϕ_i) , após o estímulo o sistema vai para a posição (r'_i, ϕ'_i) , dada por:

$$\begin{aligned} r'_i &= [r_i^2 + b^2 + 2br_i \cos(2\pi\phi_i)]^{\frac{1}{2}}, \\ \phi'_i &= \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{r_i \cos(2\pi\phi_i) + b}{r'_i}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nota-se que para os cálculos utilizando a equação 4.2 o ramo da função arccos deve ser escolhido de forma a satisfazer: $0 < \phi'_i < 0,5$ para $0 < \phi_i < 0,5$ e $0,5 < \phi'_i < 1$ para $0,5 < \phi_i < 1$. Após o estímulo o sistema passa a obedecer as equações do movimento (equação 4.1). Integrando essas equações, encontramos que, imediatamente antes do impulso $(i + 1)$, aplicado em um instante τ após o anterior, a posição é dada por:

$$\frac{dr}{r(1-r)} = kdt,$$

$$\int_{r'_i}^{r_{i+1}} \frac{dr}{r(1-r)} = \int_0^\tau kdt,$$

$$\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r'_i}\right) + \ln\left(\frac{1-r_{i+1}}{1-r'_i}\right) = k\tau,$$

$$\ln\left[\frac{r_{i+1}(1-r'_i)}{r'_i(1-r_{i+1})}\right] = k\tau,$$

$$r_{i+1} = \frac{r'_i}{(1-r'_i)\exp(-k\tau) + r'_i}.$$

Para a variável ϕ temos:

$$\int_{\phi'_i}^{\phi_{i+1}} d\phi = \int_0^\tau dt,$$

$$\phi_{i+1} = \phi'_i + \tau.$$

O que nos leva a equação para o mapa em duas dimensões:

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= \frac{r'_i}{(1-r'_i)\exp(-k\tau) + r'_i}, \\ \phi_{i+1} &= \phi'_i + \tau \pmod{1}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como também queremos obter os expoentes de Lyapunov para o mapa precisamos calcular a matriz jacobiana do sistema, cujos elementos $J_{i,j}$ são

dados por:

$$\begin{aligned}
J_{1,1} &= \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial \phi_i} = \frac{r_i^2 + br_i \cos(2\pi \phi_i)}{(r_i')^2}, \\
J_{1,2} &= \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial r_i} = \frac{b \sin(2\pi \phi_i)}{2\pi (r_i')^2}, \\
J_{2,1} &= \frac{\partial r_{i+1}}{\partial \phi_i} = \frac{-[2\pi br_i \sin(2\pi \phi_i)]e^{-k\tau}}{r_i'[(1 - r_i')e^{-k\tau} + r_i']}, \\
J_{2,2} &= \frac{\partial r_{i+1}}{\partial r_i} = \frac{[r_i + b \cos(2\pi \phi_i)]e^{-k\tau}}{r_i'[(1 - r_i')e^{-k\tau} + r_i']}. \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Essa seção será dedicada ao estudo das propriedades do Oscilador de Poincaré Forçado, através da iteração das equações 4.3.

O objetivo é analisar a configuração do espaço bidimensional de parâmetros (τ, b) e verificar as mudanças que ocorrem com a variação da relaxação ao ciclo limite.

As simulações numéricas foram feitas em C. Foram utilizados grids de 1000×1000 parâmetros e 2000 iterações do mapa, sendo que as 500 primeiras foram descartadas como transiente. Para a detecção de órbitas periódicas utilizamos as condições: $|\phi_p - \phi_0| < \epsilon$ e $|r_p - r_0| < \epsilon$. Foram testados diferentes valores de ϵ , sendo o escolhido o valor 10^{-6} . Um único valor foi escolhido para a condição inicial, (r_0, ϕ_0) , o que, apesar de dar uma idéia geral da configuração do espaço de parâmetros, pode levar a problemas devido à multiestabilidade, como veremos adiante.

4.1 Limite de Relaxação Infinita

Um regime de grande importância para o mapa bidimensional obtido no item anterior é a região de alta dissipação no espaço de parâmetros ($k \gg 1$). Esse caso foi amplamente estudado [25] e apresenta resultados importantes que serão de utilidade no estudo do mapa bidimensional apresentado no próximo

Capítulo. Portanto, trataremos inicialmente o caso particular em que $k \rightarrow \infty$. Dessa forma o valor de r_i na equação 4.3 fica fixo em 1 e o mapa passa a ser unidimensional.

$$\phi_{i+1} = \phi'_i + \tau \pmod{1}. \quad (4.5)$$

Nesse caso limite, o sistema volta instantaneamente para o ciclo limite após o forçamento. É interessante notar que esse sistema apresenta simetria em relação ao parâmetro $\tau = 0,5$.

O comportamento do mapa também varia dependendo do valor de b e o mapa apresenta comportamentos topológicos distintos para $b < 1$ e $b > 1$.

No caso onde $0 < b < 1$ o mapa é um difeomorfismo invertível do círculo e tem propriedades similares ao mapa do círculo estudado por Arnold em [31]. Isto quer dizer que nesta região de parâmetros há apenas trajetórias periódicas e quase-periódicas. O número de rotação do mapa, ρ , mostra o incremento médio em ϕ por iteração. Definindo $\Delta_{i+1} = \phi'_i + \tau - \phi_i$, o número de rotação pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$\rho = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_i. \quad (4.6)$$

Números de rotação irracionais indicam órbitas quase periódicas, enquanto números de rotação racionais representam órbitas periódicas. Uma língua de Arnold é definida como uma união de valores no espaço dos parâmetros para o qual existe uma solução periódica com número de rotação da forma m/n [31]. Nesse caso a órbita tem período n e perde a estabilidade via bifurcação tangente, como pode ser observado na figura 4.3.

Para $b > 1$ o mapa deixa de ser invertível e além disso passa a apresentar um valores de máximo e um mínimo locais. Para qualquer conjunto de parâmetros não há, necessariamente, um único atrator, sendo possível localizar regiões multiestáveis, ou seja com mais de um atrator para o mesmo conjunto de

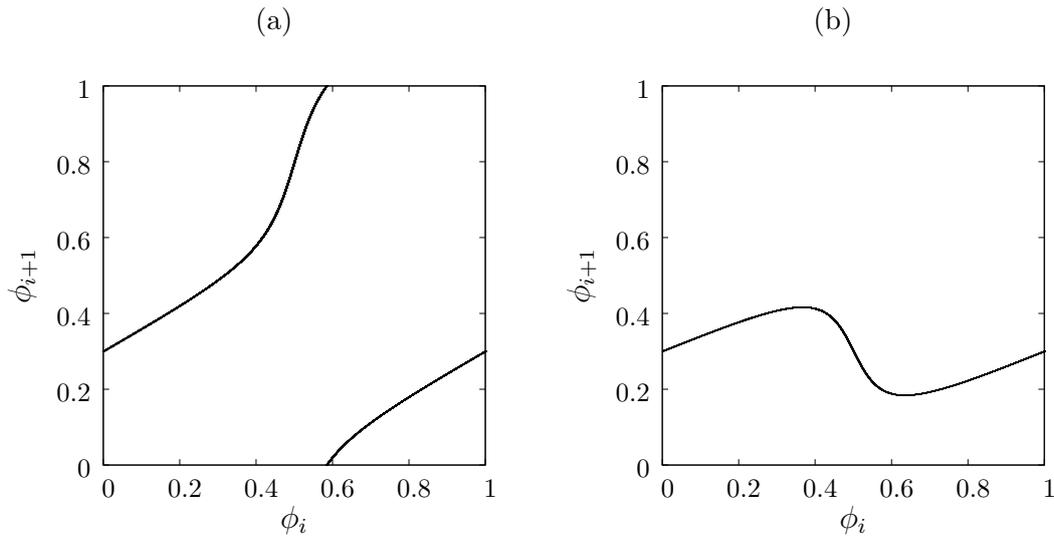


Figura 4.2: Mapas de retorno para diferentes valores de b . Em (a) temos $0 < b < 1$, onde o mapa é monotônico. Em (b) temos $1 < b < 2$, o mapa é não monotônico e temos órbitas superestáveis associadas ao máximo e ao mínimo locais.

parâmetros (dependendo, então, das condições iniciais). Esses atratores podem ser periódicos ou caóticos. Órbitas que passam por um dos extremos locais dão origem, como visto, a órbitas superestáveis. Essas órbitas podem ser consideradas o esqueleto da janela periódica no espaço dos parâmetros e dão uma noção geométrica de como será a estrutura das regiões periódicas. A estabilidade dos atratores periódicos é perdida de duas maneiras diferentes. A fronteira superior das regiões periódicas é formada por bifurcações tangentes, enquanto que na parte interna das asas laterais a estabilidade se perde por duplicação de período (figura 4.3).

A Figura 4.2 mostra exemplos do mapa de retorno para diferentes valores de b , mostrando o comportamento monotônico de $b < 1$ e não monotônico para $b > 1$.

Estudos numéricos mostraram que a intersecção da línguas de Arnol'd com a reta $b = 1$ são pontos de acumulação de órbitas superestáveis. Em particular os pontos $\tau = 0,25$ e $b = 1$ e $\tau = 0,75$ e $b = 1$ são pontos de acumulação de infinitas órbitas superestáveis [4].

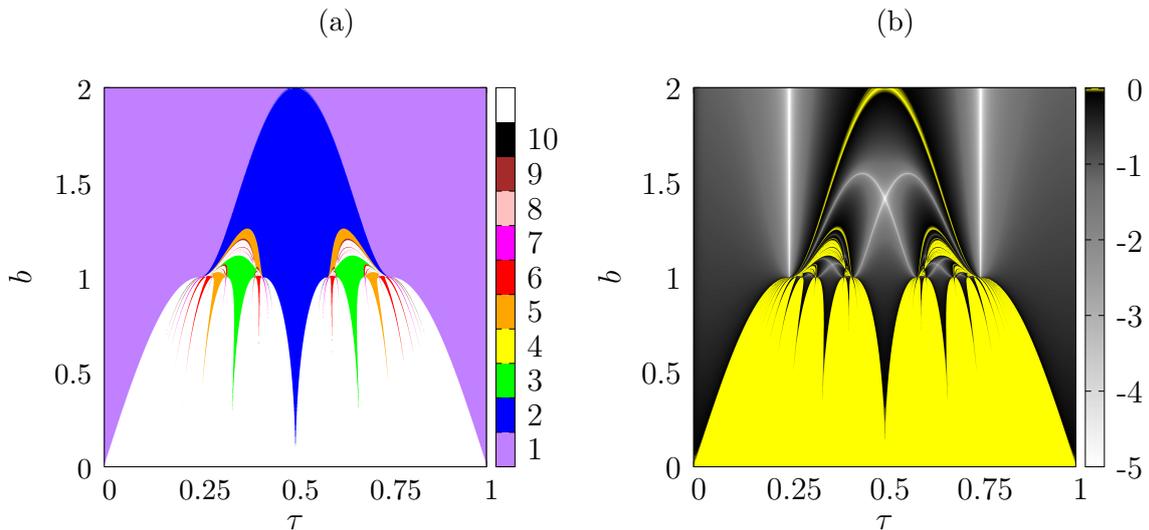


Figura 4.3: Espaço bidimensional de parâmetros para o Oscilador de Poincaré. Em (a) estão representadas com diferentes cores as regiões periódicas até período 10. Representando os períodos de 1 a 10 temos, respectivamente, as cores violeta, azul, verde, amarela, laranja, vermelha, magenta, rosa, marrom e preta. Em (b) está representado o maior expoente de Lyapunov, indo do preto (maior valor) até branco (menor valor) estão as órbitas estáveis. Valores não negativos do expoente são indicados pela cor amarela. Os menores valores do expoente de Lyapunov formam uma curva correspondente as órbitas superestáveis.

A Figura 4.3 mostra o espaço de parâmetros para o caso unidimensional. O esquema de cores utilizado nessa figura será o mesmo utilizado nas figuras subsequentes.

Os diagramas do lado esquerdo da figura, também conhecidos como regiões isoperiódicas, mostram as regiões de comportamento periódico (até período 10). Para $b < 1$ podemos reconhecer as estruturas tradicionais chamadas de línguas de Arnol'd.

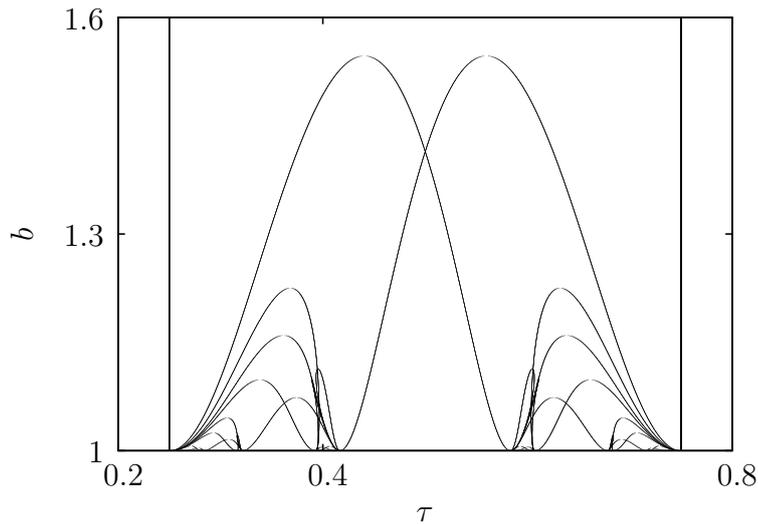


Figura 4.4: Órbitas superestáveis para o mapa unidimensional até o período 5.

Nos diagramas do lado direito temos o maior expoente de Lyapunov, apresentados de forma em que as regiões periódicas são apresentadas em um *heatmap* cujas cores, variando do preto ao branco, demonstram a intensidade dos valores negativos do expoente de Lyapunov. Valores não negativos do expoente de Lyapunov são representados pela cor amarela. Isso inclui então as órbitas quasi-periódicas para $b < 1$ e as órbitas caóticas para $b > 1$. Podemos distinguir nos diagramas com os expoentes de Lyapunov as curvas superestáveis esperadas para o caso unidimensional, representadas pela estreita região branca nos gráficos. O mapa, sendo unidimensional, apresenta de fato curvas superestáveis, isso é, somente em pontos sobre a curva o valor dos au-

tovalores da matriz de estabilidade é nulo (nesse caso a matriz é um valor escalar). As curvas superestáveis podem ser obtidas numericamente utilizando como condição inicial o ponto de máximo ou mínimo e procurando por pontos fixos na n -ésima iteração do mapa como função de τ . A Figura 4.4 mostra as órbitas superestáveis até o período 5 como exemplo.

A estrutura formada pelas duas curvas superestáveis presentes no interior de cada uma das regiões periódicas é conhecida como o esqueleto da janela periódica. Uma das curvas está relacionada a órbitas que passam pelo ponto de máximo, enquanto a outra curva está relacionada a órbitas do ponto de mínimo. Podemos notar a existência de uma intersecção das curvas. Esse cruzamento entre as duas curvas é um ponto duplamente superestável e passa por ambos os pontos, de máximo e de mínimo.

Capítulo 5

Mapa Bidimensional para o Oscilador de Poincaré

Nesse capítulo vamos apresentar uma análise dinâmica mais detalhada do mapa bidimensional dissipativo apresentado no capítulo anterior. Estamos interessados nas diferenças que ocorrem na dinâmica do sistema quando passamos de um sistema unidimensional para um bidimensional. Estamos especialmente interessados nas bifurcações que ocorrem nas transições entre regiões periódicas, quase-periódicas e caóticas. Estudaremos também o esqueleto das janelas periódicas e como as curvas superestáveis se transformam nesse sistema.

Para esse estudo vamos utilizar diagramas bidimensionais de parâmetros para diferentes valores do parâmetro de relaxação ao ciclo limite, k , do sistema. Lembrando que para valores finitos de k o mapa passa a ser bidimensional e as curvas superestáveis de codimensão 1 deixam de existir. Apesar disso esperamos que a estrutura esquelética da janela periódica persista mesmo que ela não possua superestabilidade.

Primeiramente tomamos o espaço de parâmetros (τ, b) e obtivemos diagramas com as regiões isoperiódicas e os expoentes de Lyapunov, assim como para

o caso unidimensional. Utilizamos a mesma configuração de cores para esses diagramas e novamente mostramos as regiões até período-10.

Os resultados para diferentes valores do parâmetro de relaxação pode ser visto nas figuras 5.2 e 5.3.

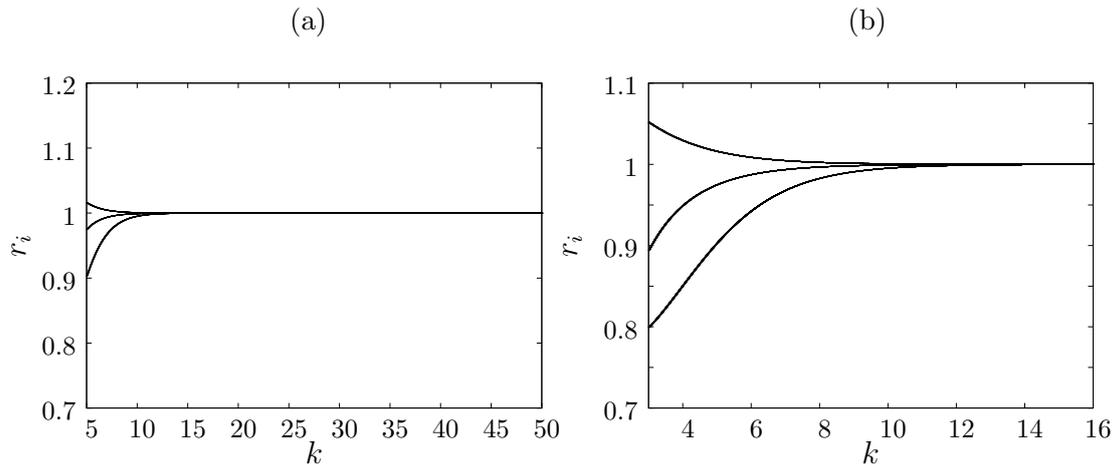


Figura 5.1: Para valores relativamente grandes de k a variável r retorna ao ciclo limite em $r = 1$, como pode ser visto em (a). No entanto se diminuirmos o valor de k ainda mais notamos que a variável r deixa a circunferência unitária e se estabelece em um comportamento periódico.

Para valores de k finitos, mas suficientemente grandes (nesse caso um valor de $k = 100$ ou $k = 50$ pode ser considerado grande o bastante), o sistema tem uma alta dissipação e tem tempo de chegar e se estabelecer no ciclo limite. Dessa forma o que podemos observar é que independente do período da órbita observado para a variável ϕ o valor da variável r fica fixo em 1 (após o transiente), que é o comportamento observado para o mapa unidimensional. Devido a isso o mapa, para esses valores elevados de dissipação, apresenta um comportamento similar ao observado no mapa unidimensional. No entanto o sistema ainda apresenta consequências devido as perdas de simetria como

veremos mais adiante.

Conforme o valor da relaxação diminui e o sistema demora mais para atingir o ciclo limite e, com isso, passa a não ter tempo suficiente de chegar ao ciclo antes do próximo impulso, de modo que os valores para r se estabelecem com o mesmo comportamento periódico observado em ϕ . Tendo isso em mente e observando as figuras podemos notar que para os menores valores de τ temos que essa quebra do ciclo limite ocorre antes, isso é, para maiores valores de k . Esse comportamento é esperado já que quanto menor o valor de τ mais rapidamente os impulsos acontecem. Para entender melhor o que acontece, podemos olhar um diagrama de bifurcação de $r \times k$, fixando valores de (τ, b) . Pela figura podemos notar o comportamento mencionado, em que, se o valor de k é alto o suficiente a coordenada radial se estabelece no ciclo limite. No entanto, se o valor de k diminui podemos ter que o valor de r se torna periódico, o que por sua vez afeta o formato das janelas no espaço de parâmetros bidimensional.

Nos concentrando agora nas regiões periódicas mostradas nas figuras 5.2 e 5.3 podemos ver que o comportamento geral observado no espaço de parâmetros é o encolhimento das janelas periódicas conforme k diminui, com exceção da região de período-1.

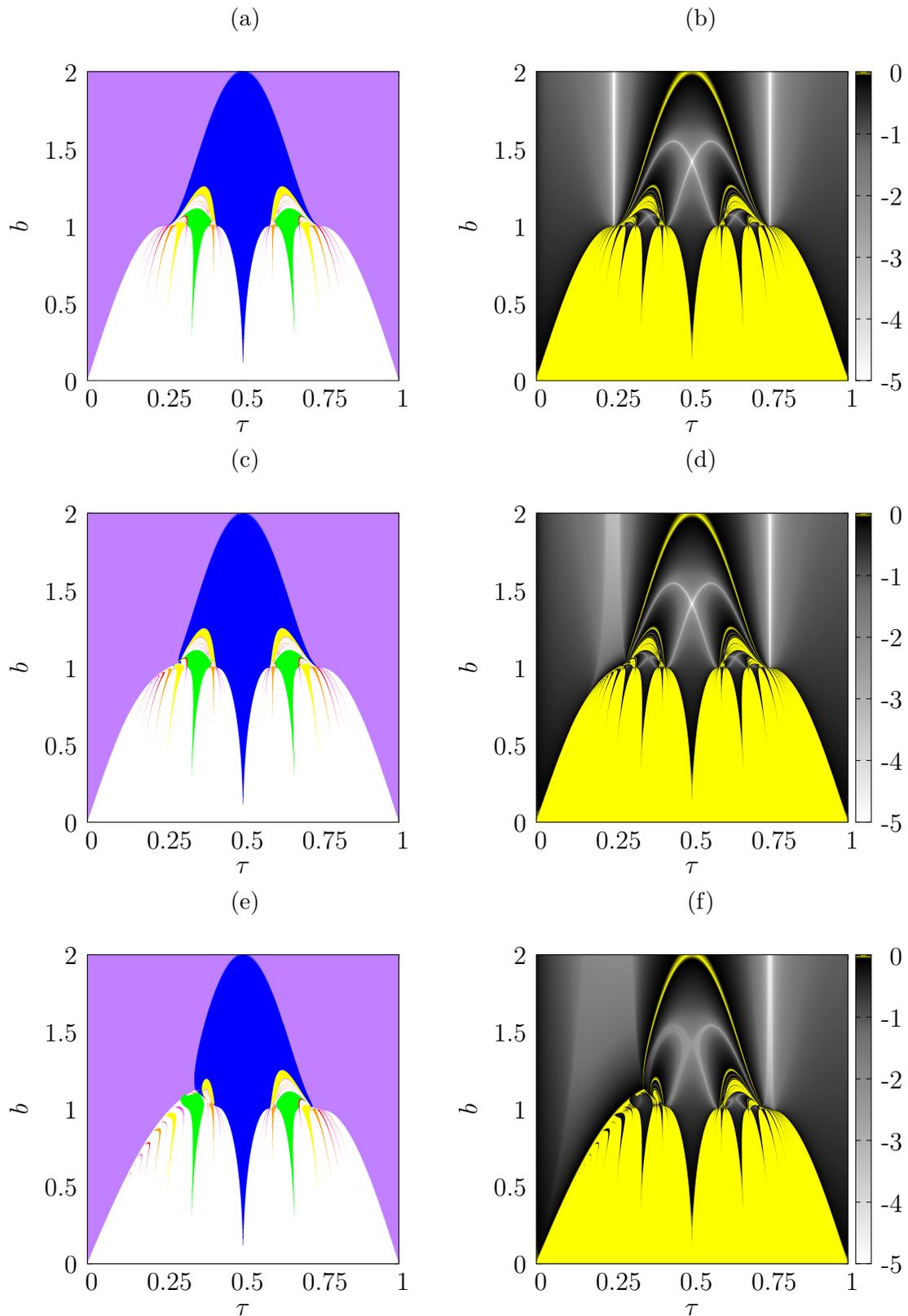


Figura 5.2: Espaço de parâmetros para o Oscilador de Poincaré bidimensional. Em (a) e (b) temos $k = 50$, onde é difícil notar diferenças com o caso unidimensional; em (c) e (d) temos $k = 20$, em (e) e (f) temos $k = 10$, onde percebemos a quebra da simetria existente em uma dimensão.

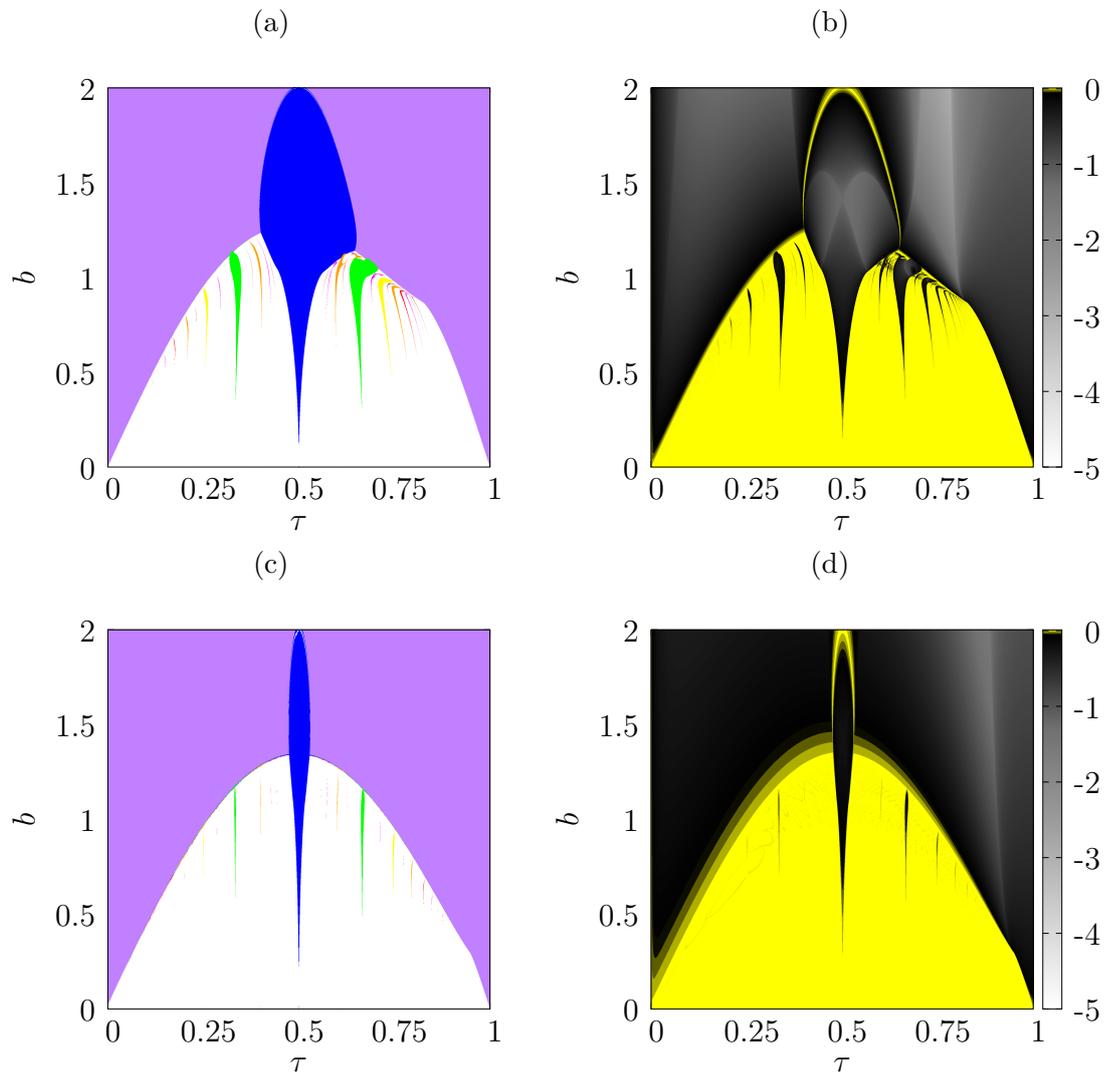


Figura 5.3: Espaço de parâmetros para o Oscilador de Poincaré bidimensional (cont.). Em (a) e (b) temos $k = 5$, em (c) e (d) temos $k = 1$.

Podemos observar também que, conforme as janelas periódicas se deformam, as fronteiras de certas regiões envolvem outras regiões periódicas. Mais especificamente, regiões geradas por duplicação de período (como veremos a seguir) são envolvidas pelas janelas que a originaram conforme diminuimos o valor de k . Posteriormente a região que foi envolvida desaparece, devido ao

encolhimento das janelas periódicas.

Finalmente podemos notar que para diferentes valores de k novas janelas periódicas surgem, em especial na região de parâmetros para $b > 1$, e essas janelas tem formato mais parecido com o tradicional formato de camarão discutido anteriormente.

Em seguida temos os diagramas com os expoentes de Lyapunov, que indicam a estabilidade das regiões observadas. O principal interesse nesse tipo de diagrama para esse estudo está na evolução do esqueleto das janelas periódicas. Para valores de k altos o suficiente, dentro de uma certa precisão, é difícil notar diferenças com relação ao mapa unidimensional. No entanto o esqueleto agora não pode mais ser representado pelas curvas de codimensão-1 que representam órbitas superestáveis do sistema. Isso porque a própria definição de superestabilidade não pode ser usada para dimensões maiores do que 1. Ainda assim podemos notar, como no caso unidimensional, a presença de uma estreita região onde o expoente de Lyapunov atinge valores muito negativos. De fato essas regiões podem ser usadas como boas aproximações para a estrutura que representa o esqueleto de uma janela periódica. No entanto essa estrutura não pode ser definida como uma curva no espaço de parâmetros da maneira como as curvas de órbitas superestáveis funcionam para o caso unidimensional.

Conforme o valor da relaxação diminui podemos notar que as regiões onde o expoente de Lyapunov atinge os menores valores sofre um alargamento e o que costumava ser uma curva no espaço de parâmetros para o mapa unidimensional se torna uma faixa.

Para realizar a análise dinâmica do mapa bidimensional vamos nos focar em janelas periódicas particulares. Vamos analisar a perda de estabilidade dessas regiões específicas estudando as fronteiras da janela periódica. Primeiramente estudaremos as fronteira de período-1 e em seguida as de período-3.

5.1 Fronteiras de Estabilidade da Região de Período-1

Começamos a análise dinâmica do oscilador pelas fronteiras de estabilidade da janela de período-1. Escolhemos essa janela em especial pelo fato de ela apresentar um comportamento singular em relação às outras janelas existentes no mapa unidimensional. As fronteiras de uma região periódica são curvas de codimensão-1 que representam bifurcações no sistema. Para a região de período-1, no caso em que o valor de $k \rightarrow \infty$, se o valor de b for menor do que 1 as fronteiras serão formadas por bifurcações sela-nó. Isso é, o valor da derivada do mapa calculado no ponto da órbita tem valor $+1$. Se tivermos $b > 1$, as fronteiras são formadas por duplicação de períodos, onde o valor da derivada do mapa será igual a -1 . Os pontos $b = 1, \tau = 0.25$ e $b = 1, \tau = 0.75$ são pontos especiais, pois eles são pontos de acumulação de um número infinito de órbitas superestáveis no limite unidimensional, conforme discutido em [4, 5].

Utilizando o pacote de continuação numérica AUTO para obtivemos as fronteiras de estabilidade no espaço de parâmetros da janela de período-1 para valores finitos de k . A continuação numérica nos permite obter as curvas de bifurcação da janela periódica mesmo em regiões muito delicadas onde, por exemplo, os atratores possuem bacias de atração especialmente pequenas.

A figura 5.4 mostra as fronteiras de período-1 para diferentes valores da taxa de relaxação. Para k finito, mas grande o bastante, o comportamento esperado é similar ao caso infinito. Temos a presença de bifurcações sela-nó para valores de $b < 1$, representadas pelas curvas em vermelho nos diagramas de parâmetros. As curvas em verde para $b > 1$ representam as bifurcações de período. No entanto para $k = 50$, podemos distinguir um trecho azul entre as curvas de bifurcação sela-nó e de duplicação de período. Essa curva representa

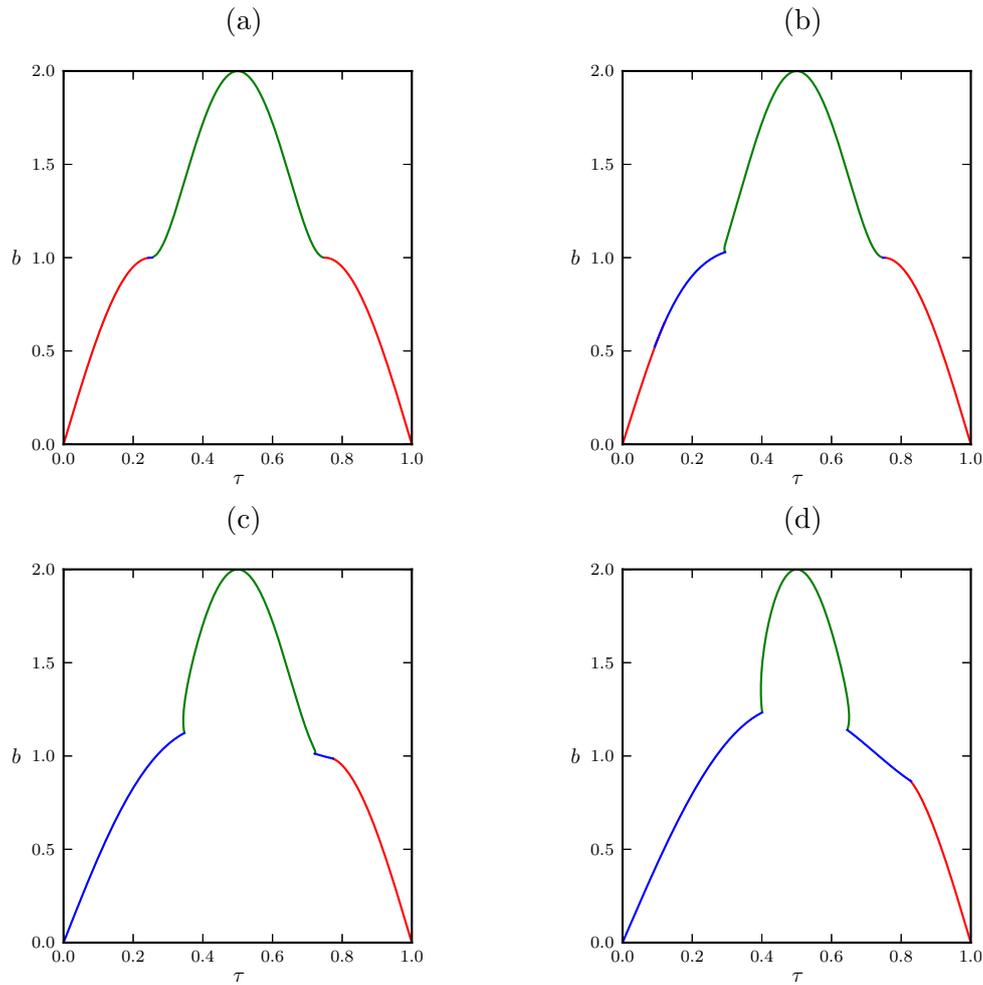


Figura 5.4: Fronteiras de período-1 para o oscilador de Poincaré. Curvas vermelhas representam bifurcações sela-nó, curvas verdes representam duplicações de período e curvas azuis representam bifurcação de Neimark-Sacker. Em (a) temos $k = 50$, em (b) $k = 20$, em (c) $k = 10$ e em (d) $k = 5$.

um trecho onde temos a ocorrência da bifurcação Neimark-Sacker, que é uma bifurcação complexa onde os valores dos autovalores da matriz de estabilidade do mapa são complexos conjugados com módulo 1. Podemos notar que essa bifurcação se origina próxima ao ponto de acumulação mencionado acima.

A continuação também mostra que o mesmo ocorre para o lado direito

da fronteira, mesmo para $k = 50$. Apesar de não ser possível ver a curva da bifurcação Neimark-Sacker na fronteira do lado direito, pudemos detectar ressonâncias fortes em ambas as curvas de bifurcação sela-nó e na de duplicação de período, que correspondem a bifurcações de codimensão-2 que ocorrem em pontos onde duas curvas se encontram. No ponto de encontro da curva de bifurcação sela-nó com a curva de bifurcação Neimark-Sacker os autovalores da matriz de estabilidade são ambos iguais a $+1$, enquanto o ponto onde as curvas de duplicação de período e Neimark-Sacker se encontram ambos autovalores são iguais a -1 . A partir desses pontos os autovalores sobre a curva da bifurcação Neimark-Sacker percorrem o círculo unitário complexo.

Isso indica que a bifurcação Neimark-Sacker deve estar acontecendo em uma região muito pequena entre essas duas curvas, próximas ao ponto de acumulação. A presença da curva de bifurcação Neimark-Sacker se torna mais aparente conforme diminuimos o valor de k . Para valores de $k = 10$ e menores, podemos notar que a bifurcação sela-nó é totalmente substituída pela bifurcação complexa.

Fica evidente também a perda de simetria do espaço de parâmetros e o fato de que a janela de período-1 ocupa um espaço maior quanto menor o valor de k . Isso faz com que a região de período-1 "invada" o espaço antes pertencente as outras regiões periódicas. A consequência disso é o fato de que na vizinhança dos pontos de acumulação temos agora regiões multiestáveis.

5.2 Fronteiras de Estabilidade da Região de Período-3

Após analisar as bifurcações da janela de período-1, estudamos o comportamento das fronteiras de estabilidade da região de período-3. Essa janela foi

escolhida por ser uma das maiores línguas de Arnol'd e também por apresentar características comum aos camarões no espaço de parâmetros.

A Figura 5.5 mostra uma região expandida do espaço de parâmetros contendo no detalhe a janela de período 3 (verde), onde vemos como a janela diminui de tamanho.

Para $k = 20$ a janela sofre, aparentemente, poucas alterações em relação ao caso unidimensional. No entanto, ao contrário do que ocorre com as fronteiras de estabilidade em uma dimensão, essas fronteiras não terminam no ponto de acumulação $\tau = 0,75$ e $b = 1$. Apesar de terminar muito próximo a esse ponto para certos valores de k , na verdade as fronteiras de estabilidade começam a se deformar, curvando-se e terminando em um uma região anterior ao ponto de acumulação.

Para $k = 10$ podemos ver mais claramente o fim da janela de período-3. Podemos notar também o efeito da multiestabilidade na janela na forma de uma aparente quebra na asa direita. O que ocorre é que para as condições iniciais utilizadas alguns dos parâmetros não levam ao atrator correto.

Para $k = 5$ podemos notar que a janela não apresenta mais as "asas" que costumavam se estender até o ponto de acumulação. Mais do que isso pela figura vemos que a região de período-6, que se originava por duplicação de período, desaparece completamente devido ao encolhimento da janela de período-3. Para $k = 1$ a janela vemos que a janela diminui drasticamente em tamanho.

Apresentamos também os valores dos expoentes de Lyapunov para essa região, em que podemos notar duas características mais importantes. A primeira é a separação que ocorre da fina região branca que definimos como o esqueleto da janela periódica. A segunda é o alargamento dessa mesma região conforme diminuimos o valor de k . Por hora nos concentraremos nas fronteiras de estabilidade, mas retornaremos ao esqueleto dessa janela na próxima seção.

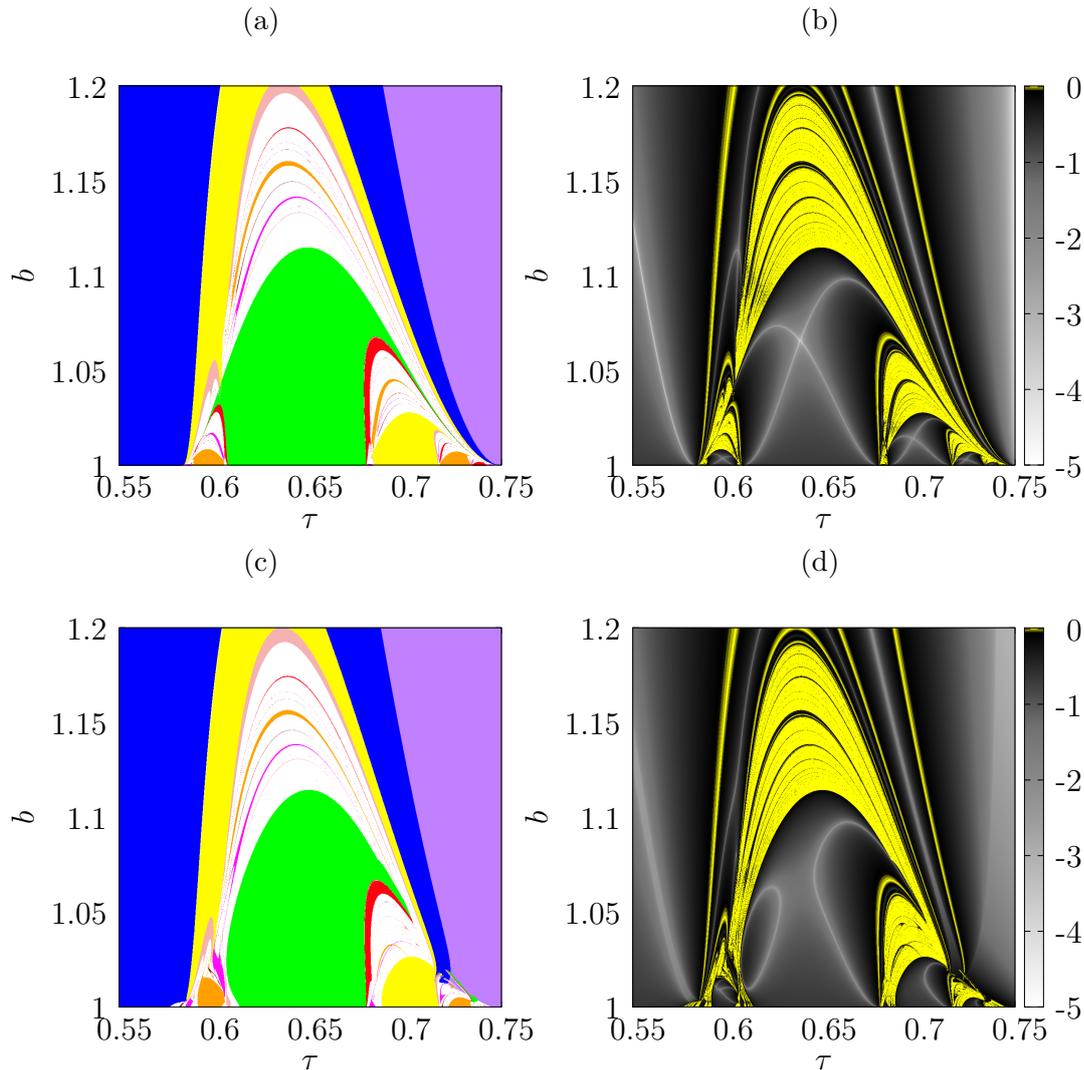


Figura 5.5: Espaço de parâmetros, destacando a região de período 3 (verde). Em (a) e (b) temos $k = 20$, em (c) e (d) $k = 10$.

Um detalhe interessante com relação às fronteiras de estabilidade é o fato delas se unirem e se curvarem. No entanto, como esperamos que os autovalores variem continuamente dentro da janela, o fato da curva de duplicação de período encontrar com a curva de bifurcação sela-nó é curioso. Os autovalores da matriz de estabilidade devem variar entre -1 e 1 de uma forma contínua

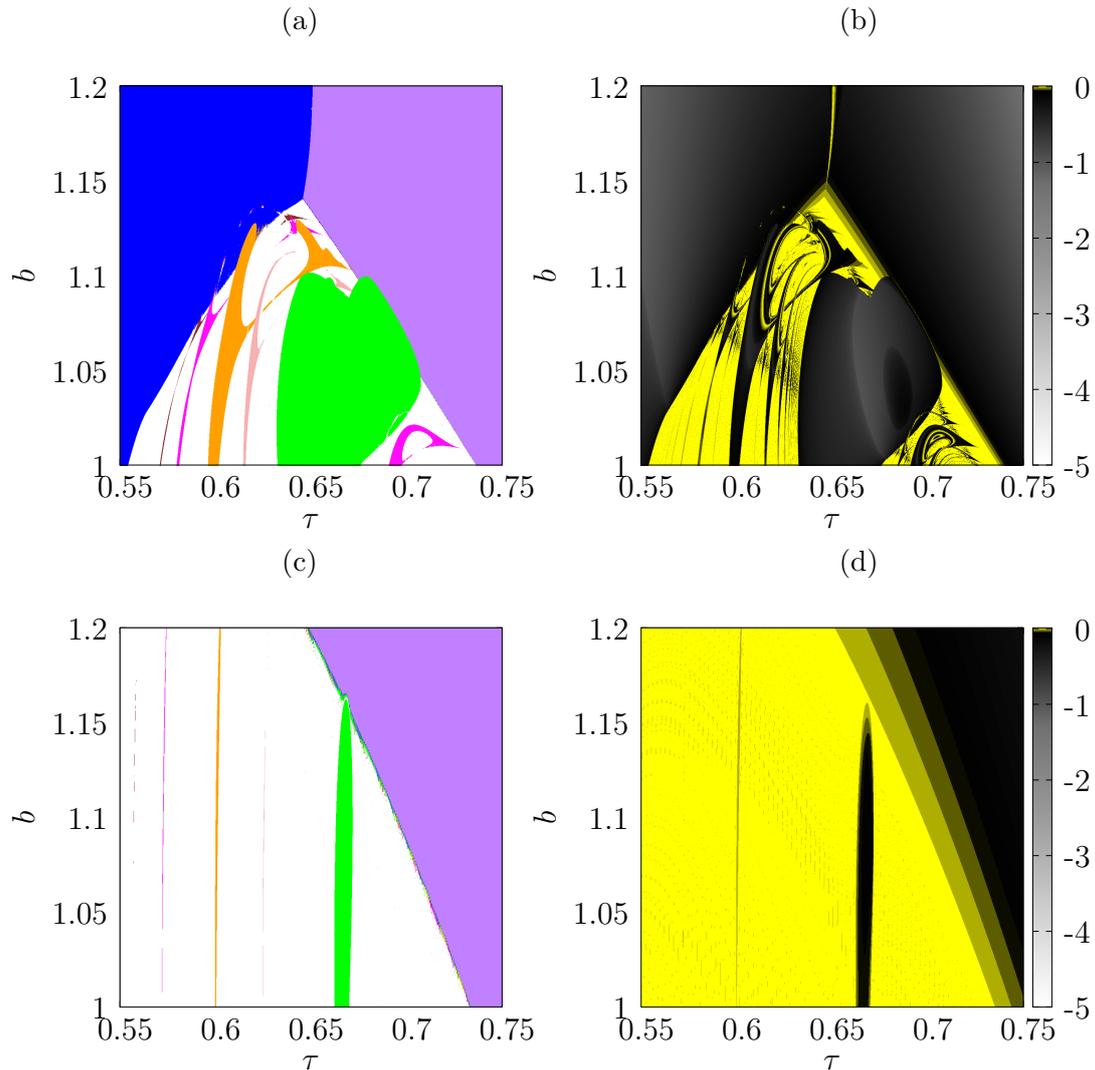


Figura 5.6: Espaço de parâmetros, destacando a região de período 3 (verde). Em (a) e (b) temos $k = 5$, em (c) e (d) $k = 1$.

ao invés de variarem bruscamente. Para entender o que acontece precisamos analisar com mais cuidado as fronteiras de estabilidade dessa janela periódica. Para isso utilizaremos novamente os métodos de continuação de soluções para mapas, pois dessa forma garantimos que estamos no mesmo atrator sem nos preocuparmos com a condição inicial para cada par de parâmetros diferente,

evitando problemas na detecção do atrator correto, devido à multiestabilidade. Utilizamos, como anteriormente, o pacote AUTO para identificar as curvas de bifurcação que compõem as fronteiras da janela de período-3.

A Figura 5.7 detalha as fronteiras da região de período-3. As cores usadas para essas curvas são as mesmas para o caso da janela de período-1. Para o valor de $k = 50$, as diferenças com relação ao caso unidimensional são quase imperceptíveis. No entanto a análise dos autovalores para esse caso nos mostra a existência de pontos onde existem as ressonâncias observadas no caso da existência de bifurcação Neimark-Sacker. Seguindo a curva de bifurcação sela-nó com o pacote AUTO, constatamos que ela termina em um ponto onde ambos os autovalores da matriz de estabilidade apresentam valor $+1$. No entanto seguindo a curva de duplicação de período identificamos em um ponto muito próximo os autovalores são ambos iguais a -1 . Os pontos onde pudemos detectar essas ressonâncias correspondem aos antigos pontos de acumulação do mapa unidimensional. Isso é um indicativo de que a maneira como os pontos de acumulação se comportam com a transição de uma para duas dimensões é dando origem a uma região complexa de forma que as curvas de bifurcação sela-nó e de duplicação de período possam se unir de forma contínua.

Para $k < 20$ podemos ver mais claramente o comportamento das fronteiras de período=3. Podemos ver que elas fazem um retorno do lado direito e também que elas se conectam. A presença da curva de bifurcação Neimark-Sacker pode ser vista pela ampliação da região ao redor de onde as curvas de duplicação de período e bifurcação sela-nó se encontram. Notamos também que as curvas de duplicação de período são, em primeiro momento, envoltas pelas curvas de bifurcação sela-nó. Conforme o valor da dissipação diminui as curvas de duplicação de período desaparecem por completo e a fronteira da região de período-3 fica sendo inteiramente composta por bifurcações sela-nó.

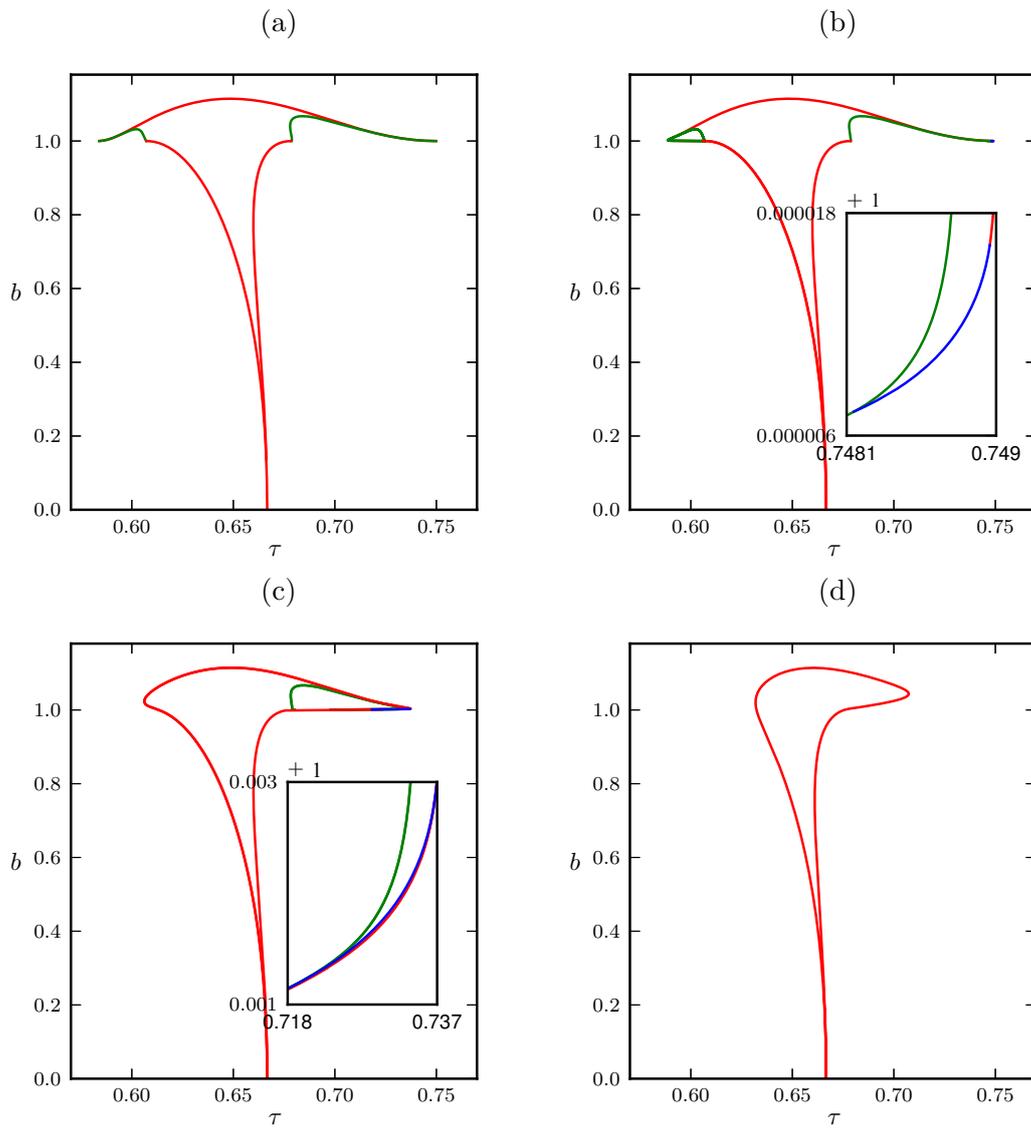


Figura 5.7: Fronteiras de estabilidade obtidas com o programa AUTO. As cores são as mesmas para o caso das fronteiras de período-1. No diagrama interno nos painéis (b) e (c) temos a ampliação da região próxima da bifurcação Neimark-Sacker. Em (a) temos $k = 50$, em (b) $k = 20$, em (c) $k = 10$ e em (d) $k = 5$.

De maneira similar, outras janelas relacionadas as línguas de Arnol'd do mapa unidimensional passam por transições parecidas. A figura 5.8 nos ajuda a visualizar como é o comportamento de várias janelas nas proximidades do ponto de acumulação em $b = 1$ e $\tau = 0.75$. Vemos que o o ponto de acumulação se quebra e para manter a continuidade entre as diferentes bifurcações que lá chegavam os autovalores da matriz de estabilidade se tornam complexos, dando origem a bifurcação Neimark-Sacker. No entanto para certos valores de k e dependendo da janela periódica analisada, detectar esses autovalores se torna muito difícil devido ao tamanho da região.

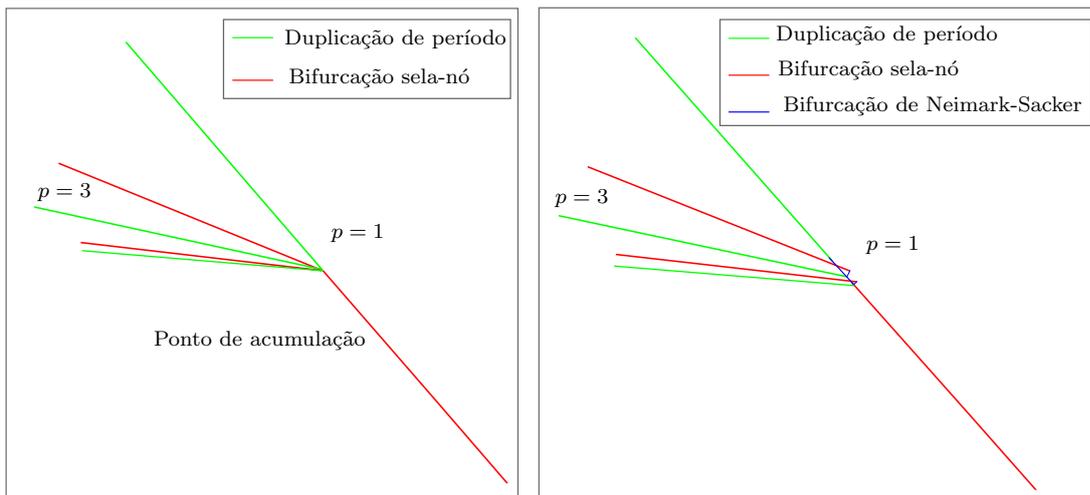


Figura 5.8: Figura esquemática do comportamento próximo ao ponto de acumulação. No painel da esquerda temos o limite de relaxação infinita, onde o mapa é unidimensional e as fronteiras terminam no ponto de acumulação. No painel da direita temos o caso bidimensional, onde as fronteiras se afastam do ponto de acumulação e dão origem a bifurcações complexas.

5.3 Esqueleto da Janela Periódica de Período-3

Como foi visto, para mapas unidimensionais contendo um ponto extremo temos uma órbita superestável. Ao longo dessa órbita o expoente de Lyapunov tende a $-\infty$. No espaço bidimensional de parâmetros as fronteiras formadas pelas bifurcações sela-nó e duplicação de período são curvas que delimitam uma região de parâmetros que apresentam órbitas periódicas estáveis, para um dado conjunto de condições iniciais. Para mapas unidimensionais, o conjunto de órbitas superestáveis de um dado período é uma curva entre as fronteiras de estabilidade, chamada de "esqueleto" ou "espinha" [4].

Apresentamos anteriormente o estudo do esqueleto de janelas periódicas realizados no mapa de Hénon. Aplicaremos alguns dos conceitos e métodos descritos no Capítulo 3 com o intuito de analisar o comportamento do esqueleto nesse caso.

Em uma dimensão, uma característica importante das curvas superestáveis no espaço de parâmetros são os cruzamentos entre as duas curvas. Em um desses pontos o cruzamento é uma intersecção real, isso é, representa um ponto duplamente superestável e uma única órbita. O outro cruzamento, no entanto, apresenta biestabilidade e o par de parâmetros apresenta duas órbitas superestáveis diferentes com o mesmo período.

Para mapas em duas dimensões estruturas semelhantes aos esqueletos podem ser vistas no diagrama de expoentes de Lyapunov. No entanto não podemos mais definir uma curva superestável pois a condição para a derivada nula não é suficiente em duas dimensões. Além disso, conforme alteramos a relaxação ao ciclo limite, podemos ver que os esqueletos sofrem uma separação formando duas regiões isoladas.

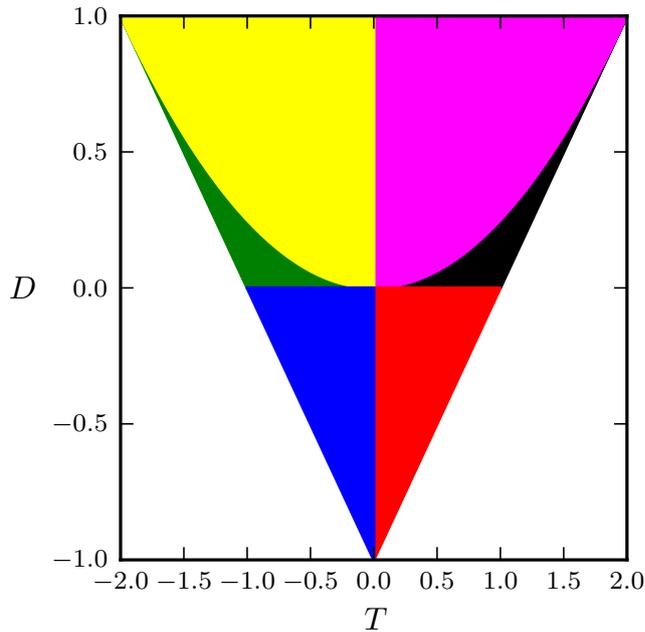


Figura 5.9: O triângulo de estabilidade. Valores de D e T que levam à órbitas estáveis se encontram na região triangular. As cores vermelha, azul preta e verde representam valores de D e T obtidos por autovalores reais. As cores amarela e magenta representam D e T obtidos por autovalores complexos.

Para nos ajudar a entender a estrutura de bifurcações no espaço de parâmetros usaremos novamente o conceito de triângulo de estabilidade [38, 36]. Calculando os valores do traço, $T = M_{1,1} + M_{2,2} = \lambda_1 + \lambda_2$, e do determinante $D = M_{1,1}M_{2,2} - M_{1,2}M_{2,1} = \lambda_1\lambda_2$, da matriz de estabilidade \mathbf{M} podemos determinar valores para os quais as órbitas são estáveis. Como visto no estudo do esqueleto para o mapa de Hénon, no espaço $T \times D$ a estabilidade fica limitada à uma região triangular, que pode ser subdividida em diversas outras regiões dependendo dos valores de D e T , conforme mostra a figura 5.9.

Podemos, então, traçar os valores do triângulo de estabilidade de volta ao espaço de parâmetros, obtendo os valores de D e T nas janelas periódicas. A figura 5.10 mostra a região de período-3 codificada pelo triângulo de estabili-

dade.

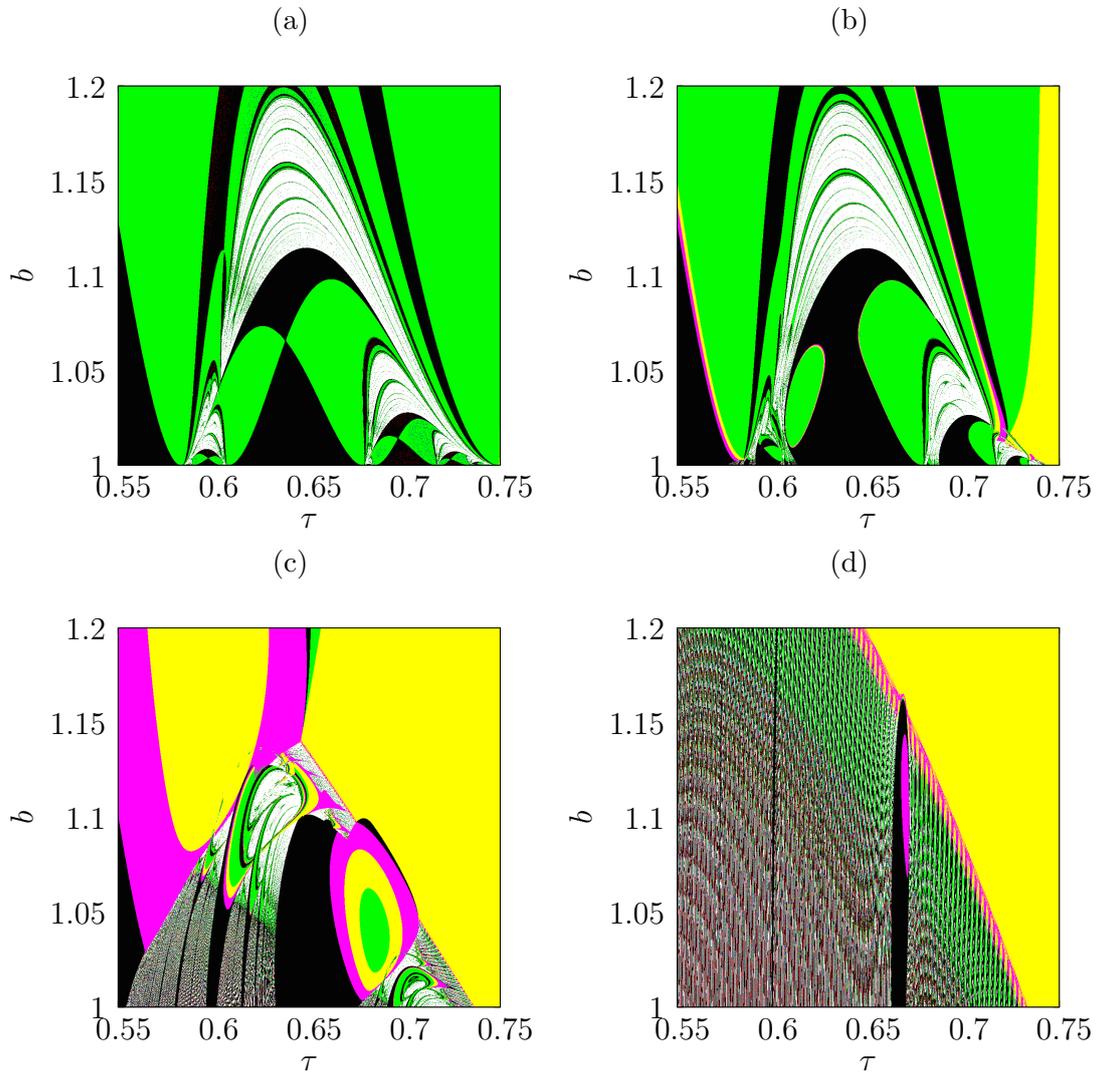


Figura 5.10: Espaço de parâmetros mostrando a região de período 3. As cores se referem ao triângulo de estabilidade. Em (a) $k = 20$, em (b) $k = 10$, em (c) $k = 5$ e em (d) $k = 1$.

Vemos pelas figuras que as regiões equivalentes ao valor mínimo do expoente de Lyapunov são os lugares onde duas as diferentes cores se encontram. Conforme vimos no estudo realizado no mapa de Hénon isso ocorre onde o

valor do traço, T , é igual a zero. No entanto vemos que as cores adjacentes são preto e verde, isso é, determinante positivo. Mas deveríamos esperar que entre essas cores houvesse regiões de amarelo e magenta, ou seja, regiões complexas. A razão pela qual não vemos essas cores se deve à precisão numérica. Uma vez que determinamos se um auto valor é complexo ou não usando a condição $T^2 - 4D > 0$, no caso dos valores serem muito próximos a zero o programa vai entender como igual a zero levando a uma conclusão errada de que um auto valor complexo pode ser real. Nesse caso, temos o determinante muito próximo de zero, mas positivo e podemos considerar a curva $T = 0$ como a equivalente ao esqueleto.

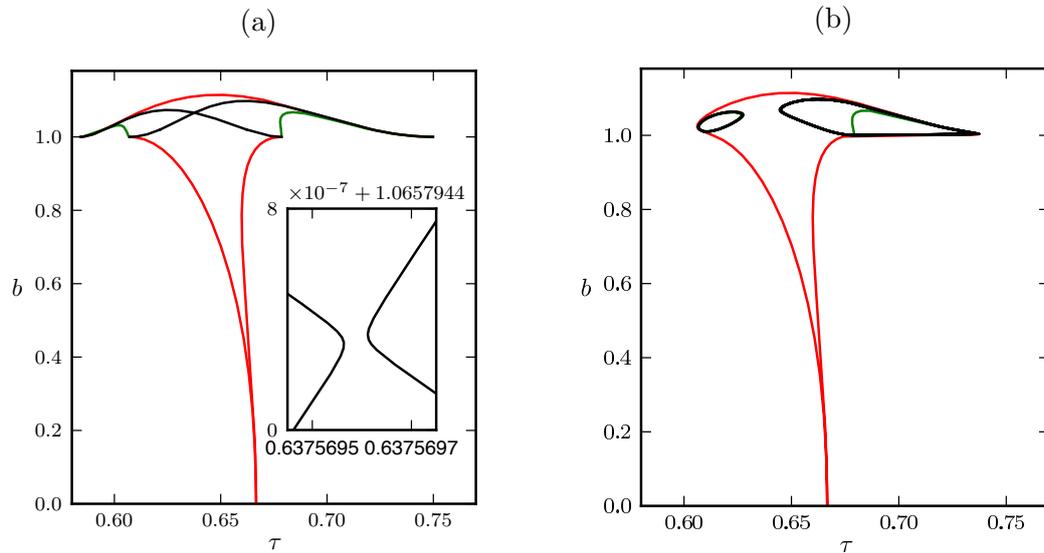


Figura 5.11: Em preto temos as curvas de traço nulo para a janela de período-3. Em (a) temos $k = 50$ e em (b) temos $k = 10$. O diagrama interno no painel (a) mostra uma ampliação na aparente intersecção entre as curvas.

Então para valores elevados de k a curva $T = 0$ é semelhante as curvas superestáveis de uma dimensão. No entanto uma diferença importante está no cruzamento real das curvas. De fato, no oscilador de Poincaré esse cruzamento

não existe em duas dimensões, mesmo para valores altos de k (figura 5.11).

É possível que esse cruzamento ocorra nos chamados pontos nilpotentes [38, 36], onde $D = 0$ e $T = 0$ (isso, é $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). No entanto, no caso do oscilador de Poincaré o determinante é sempre positivo, e mesmo quando é muito próximo a zero (dentro da precisão numérica) o cruzamento não vai existir. Ao invés disso a estrutura pode se modificar de duas formas diferentes, como ilustra a figura 3.4.

Podemos observar também que conforme o valor de k diminui, uma região complexa começa a parecer em volta do esqueleto. Essa região complexa é responsável pelas características observadas nos diagramas com os expoentes de Lyapunov, onde pudemos observar que a região com o menor valor para o expoente desenvolveu uma espessura. Essa região espessa representa os valores complexos observados aqui. Se fizermos um corte fixando um valor de b e variando na direção τ e calcularmos o expoente de Lyapunov nessa linha veremos que na região espessa teremos um valor quase constante para o expoente.

Capítulo 6

Conclusões

Apresentamos nesse trabalho o uso de técnicas de continuação para a determinação do esqueleto de janelas periódicas em mapas bidimensionais, utilizando o mapa de Hénon. O esqueleto de uma janela periódica é de grande importância, pois em uma dimensão ele corresponde a órbitas superestáveis do sistema e também devido ao fato de que essas estruturas funcionam como suporte para uma janela e portanto fornecem informações sobre sua geometria. Além disso apresentamos o estudo de um modelo de oscilador suave, com um ciclo limite que é dado por uma circunferência de raio unitário no plano de fase. Estudamos os efeitos de um forçamento impulsivo periódico no sistema, que leva à um mapa não linear dissipativo.

No estudo a cerca da obtenção do esqueleto para o mapa de Hénon vimos que uma curva de traço nulo pode ser considerada uma aproximação para essa estrutura. Vimos também que métodos de continuação numérica, usualmente utilizados na determinação de curvas de bifurcação em espaços de parâmetros bidimensionais, podem ser utilizados efetivamente na obtenção dessas curvas de traço nulo, fazendo uso de algumas condições extras ao sistema. Observamos que a intersecção de curvas superestáveis não pode ser necessariamente

expandida para duas dimensões, mas que em alguns casos podemos ter os chamados pontos nilpotentes [38, 36], onde tanto o determinante quanto o traço da matriz de estabilidade são nulos. De maneira geral o esqueleto vai apresentar uma separação entre as curvas de traço nulo e vimos que essa separação é garantida no caso em que o determinante não muda de sinal. Para o estudo de mapas com dimensões maiores do que dois elementos adicionais que entram em questão, em especial os valores dos coeficientes, c_i , do polinômio característico que compreendem todos os produtos distintos entre autovalores tomados i por vez, para $i = 1, 2, \dots, n$ [38]. Esses valores podem todos ser restringidos de forma similar usando métodos de continuação.

Quanto ao oscilador de Poincaré, dependendo do valor da dissipação o mapa pode ser considerado unidimensional, onde temos características que foram bem estudadas, tais como a presença de curvas superestáveis e também pontos de acumulação, onde infinitas curvas superestáveis terminam [5].

Nosso estudo se focou nas alterações que ocorrem quando passamos de um mapa unidimensional para um bidimensional. Isso foi feito variando o parâmetro de relaxação ao ciclo limite do sistema. Analisamos o espaço bidimensional de parâmetros, obtendo curvas de bifurcação que correspondem a fronteiras de janelas periódicas. Observamos que ao diminuirmos o valor da dissipação as curvas que correspondem a bifurcação sela-nó e duplicação de período se deformam e se conectam através da curva de bifurcação Neimark-Sacker. Observamos também que o tamanho das janelas periódicas, com exceção da janela de período-1, diminuem de tamanho e que eventualmente elas perdem uma característica comum as encontradas em camarões, que é a cascata de duplicação de períodos que leva ao caos. Ao invés disso a fronteira dessas janelas periódicas são compostas somente de bifurcações sela nó.

No mapa unidimensional infinitas fronteiras das línguas de Arnol'd, bem

como infinitas órbitas superestáveis chegavam em pontos específicos no espaço de parâmetros. No entanto esses pontos de acumulação deixam de existir em duas dimensões. Pudemos constatar que a maneira como isso ocorre é através da bifurcação Neimark-Sacker, que cria uma região onde os autovalores para a matriz Jacobiana do mapa são complexos. Essa região complexa possibilita uma mudança contínua dos autovalores entre diferentes curvas de bifurcação. Com isso pudemos constatar também a maneira como as diferentes regiões periódicas se comportam nas proximidades desses pontos. Em geral, as janelas periódicas vão apresentar uma região que intersecta a região de período-1 criando novas regiões de multiestabilidade.

Outra parte do estudo do oscilador de Poincaré se focou na determinação do esqueleto de uma janela periódica. Aplicamos a mesma técnica utilizado para o estudo do mapa de Hénon, com resultados similares. A janela analisada apresentava valor do determinante sempre positivo, o que nos permitiu constatar que o cruzamento entre as curvas de traço não é possível. Vimos que mesmo para valores muito grandes de k embora as figuras possam nos levar ao engano de assumir que exista um cruzamento, pudemos mostrar que ele é somente aparente devido a escala da figura. Mostramos que ao diminuir muito o valor da dissipação, o esqueleto é cercado por uma camada de autovalores complexos. Ao compararmos com o diagrama com os expoentes de Lyapunov, pudemos ver que essa região complexa corresponde a valores de expoente muito próximos.

Bibliografia

- [1] M. Feigenbaum, *Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations*, J. Stat. Phys. **19**, 25 (1978).
- [2] M. Feigenbaum, *The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations*, J. Stat. Phys. **21**, 669 (1979);
- [3] G. A. Cecchi *et al.*, *Periodically Kicked Hard Oscillators*, Chaos, **3**, 51 (1993).
- [4] J. Keener, L. Glass, *Global bifurcations of a periodically forced nonlinear oscillator*, J. of Math. Biology **21**, 175 (1984).
- [5] L. Glass, J. Sun, *Periodic forcing of a limit cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations*, Phys. Rev. E **50**, 5077 (1994).
- [6] G. Bub, L. Glass, *Bifurcations in a discontinuous circle map: A theory for a chaotic cardiac arrhythmia*, Int. J. Bifurcat. Chaos **5**, 359 (1995).
- [7] F. A. C. Pereira, M. S. Baptista, J. C. Sartorelli, *Sound synchronization of bubble trains in a viscous fluid: Experiment and modeling*, Phys. Rev. E **90**, 042902 (2014).
- [8] E. J. Doedel, Congr. Numer. **30**, 12191 (2011).

-
- [9] E. J. Doedel, R. C. Paffenroth, A. R. Champneys, T. F. Fairgrieve, Y. A. Kuznetsov, B. E. Oldeman, B. Sandstede, X. J. Wang, URL <<http://indy.cs.concordia.ca/auto/>> (2007).
- [10] Y. A. Kuznetsov, H. G. E. Meijer, *Numerical Normal Forms for Codim 2 Bifurcations of Fixed Points with at Most Two Critical Eigenvalues*, SIAM J. Sci. Comput., **26**, 1932 (2005).
- [11] Grzegorz Swiatek, [arXiv:math/9207219v1].
- [12] S. J. Chang, M. Wortis, J. A. Wright, *Iterative properties of a one-dimensional quartic map: Critical lines and tricritical behavior*, Phys. Rev. A **24** 2669 (1981).
- [13] S. Fraser, R. Kapral, *Analysis of flow hysteresis by a one-dimensional map*, Phys. Rev. A **25**, 3223 (1982).
- [14] J. Bélair, L. Glass, *Self similarity in periodically forced oscillators*, Phys. Lett. A **96**, 113 (1983).
- [15] P. Mandel, R. Kapral, *Subharmonic and chaotic bifurcation structure in optical bistability*, Opt. Comm. **47**, 151 (1983).
- [16] R. S. Mackay, C. Tresser, *Some flesh on the skeleton: The bifurcation structure of bimodal maps*, Physica D **27**, 412 (1987).
- [17] P. Gaspard, R. Kapral, G. Nicolis, *Bifurcation phenomena near homoclinic systems: a two-parameter analysis*, J. Stat. Phys. **35** 697 (1984).
- [18] J. A. C. Gallas, *Structure of the parameter space of the Hénon map*, Phys. Rev. Letters, **70**, 2714 (1993).

- [19] J. A. C. Gallas, *Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical systems*, *Physica A* **202**, 196 (1994).
- [20] R. Vitolo, P. Glendinning, J. A. C. Gallas, *Global structure of periodicity hubs in Lyapunov phase diagrams of dissipative flows*, *Phys. Rev. E* **84**, 016216 (2011).
- [21] R. Stoop, P. Benner, Y. Uwate, *Real-World Existence and Origins of the Spiral Organization of Shrimp-Shaped Domains*, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 74102 (2010).
- [22] J. G. Freire, J. A. C. Gallas, *Stern–Brocot trees in the periodicity of mixed mode oscillations*, *Phys. Chem. Chem. Phys* **13**, 12191 (2011).
- [23] L. Glass, M. R. Guevara, A. Shrier, R. Perez, *Bifurcation and chaos in a periodically stimulated cardiac oscillator*, *Phys. Rev. A*, **89**, 1348 (1983).
- [24] K. Ullmann, *Métodos de Análise de Mapeamentos Não-Lineares com Aplicação à Física de Plasmas*, Tese de Doutorado (1998).
- [25] K. Ullmann, I.L. Caldas, *Transitions in the Parameter Space of a Periodically Forced Dissipative System*, *Chaos, Solitons & Fractals* **7**, 1913 (1996).
- [26] *AUTO* (1996, January), University of Concordia, Acesso em julho 2011. <<http://indy.cs.concordia.ca/auto/>>.
- [27] Y. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer (2004).
- [28] J. P. Eckmann, D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617 (1985).

-
- [29] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, *Determining Lyapunov exponents from a time series*, Physica D **16**, 285 (1985).
- [30] N. Metropolis, M. L. Stein, P. R. Stein, *On finite limit sets for transformations on the unit interval*, J. Comb. Theor. A **15**, 25 (1973).
- [31] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer (1988).
- [32] L. Glass, R. Perez, *Fine structure of phase locking*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1772 (1982).
- [33] R. Perez, L. Glass, *Bistability, period doubling bifurcations and chaos in a periodically forced oscillator*, Phys. Lett. A **90**, 441 (1982).
- [34] M. Schell, S. Fraser, R. Kapral, *Subharmonic bifurcation in the sine map: An infinite hierarchy of cusp bistabilities*, Phys. Rev. A **28**, 373 (1983).
- [35] S. Fraser, R. Kapral, *Analysis of flow hysteresis by a one-dimensional map*, Phys. Rev. A **25**, 3223 (1982).
- [36] M. S. Baptista, C. Grebogi, E. Barreto, *Topology of windows in the high-dimensional parameter space of chaotic maps*, Int. J. Bifurcat. Chaos **13**, 2681 (2003).
- [37] M. Hénon, Comm. Math. Phys. **50**, 69 (1976).
- [38] E. Barreto, B. R. Hunt, C. Grebogi, J. A. Yorke, *From high dimensional chaos to stable periodic orbits: the structure of parameter space*, Phys. Rev. Lett. **78**, 4561 (1997).
- [39] W. Z. Zeng, L. Glass, *Symbolic dynamics and skeletons of circle maps*, Physica D **40**, 218 (1989).

-
- [40] F. Dercole, *BPcont: An Auto driver for the continuation of branch points of algebraic and boundary-value problems*, SIAM J. Sci. Comput **30**, 2405 (2008).
- [41] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos*, Physik Verlag, Berlin (1984).
- [42] I. Percival, D. Richards, *Introduction to Dynamics*, Cambridge University Press (1982).
- [43] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press (1993).
- [44] E. J. Ding, *Analytic treatment of periodic orbit systematics for a nonlinear driven oscillator*, Phys. Rev. A, **34**, 3547 (1986).
- [45] E. C. Silva, I. L. Caldas, R. L. Viana, *Magnetic Field Line Diffusion in a Tokamak with Ergodic Limiter*, Phys. Plasmas **8**, 2855 (2001).
- [46] K. Ullmann, I. L. Caldas, *A Symplectic Mapping for the Ergodic Magnetic Limiter and its Dynamical Analysis*, Chaos, Solitons & Fractals **11**, 2129 (2000).
- [47] W. Façanha, B. Oldeman, L. Glass, *Bifurcation structures in two-dimensional maps: The endoskeletons of shrimps*, Phys. Lett. A **377**, 1264 (2013).
- [48] W. Façanha, B. Oldeman, L. Glass, em preparação.