

III – Sistemas Não Lineares

Referência Principal:

Caos

N. Fidler-Ferrra, C. P. Cintra do Prado

Editora Edgar Blücher (1994)

III – B/C

Ciclos Limites

Dimensão do espaço de fase limita as formas do comportamento assintótico das soluções dos sistemas autônomos.

Na linha, soluções limitadas convergem para um ponto de equilíbrio.
No plano, elas convergem a ciclos limites.

No plano não há soluções caóticas.

Teorema de Poincaré - Bendixson \Rightarrow

Não há caos no espaço bidimensional.

No espaço tridimensional pode haver caos.

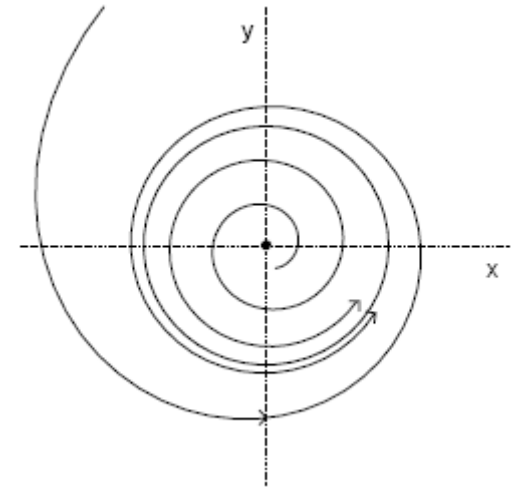
Tipos de Soluções no Plano

- Pontos Fixos
- Ciclos limites
- Ciclos (órbitas) homo e heteroclínicas

Exemplo:

- $\dot{r} = r(1 - r)$

- $\dot{\theta} = 8$



Ponto de equilíbrio instável: $(0, 0)$

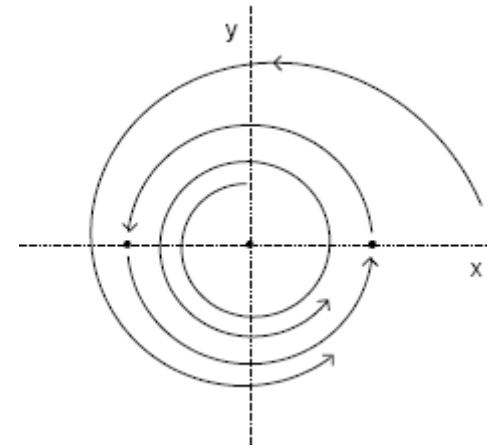
$r = 1$ órbita periódica \rightarrow ciclo limite estável

$$r = \frac{c e^t}{c e^t - 1} \quad \theta = 8 t + d$$

Exemplo :

- $\dot{r} = -r(1 - r)$

- $\dot{\theta} = 8$



Ponto de equilíbrio estável: $(0,0)$

$r=1$ órbita periódica instável \rightarrow ciclo limite instável

Conjuntos Limites no Plano

$$\dot{\vec{v}} = \vec{f}(\vec{v}); \vec{f} \text{ mapa contínuo e diferenciável em } \mathbb{R}^n$$

Definição: Um ponto \vec{z} está no conjunto limite ω , $\vec{\omega}(\vec{v}_0)$ da solução $F(t, \vec{v}_0)$, se houver uma sequência de pontos que converge para \vec{z} quando $t \rightarrow +\infty$.

$\vec{z} \in \vec{\omega}(\vec{v}_0)$ se existir uma sequência crescente não limitada $\{t_n\}$ de números reais ($t_n \rightarrow \infty$) com $\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n, \vec{v}_0) = \vec{z}$.

\vec{z} está no conjunto limite $\vec{\alpha}(\vec{v}_0)$ se existir uma sequência decrescente não limitada $\{t_n\}$ de números reais ($t_n \rightarrow -\infty$) com $\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n, \vec{v}_0) = \vec{z}$.

$$\vec{v}_0 \text{ ponto de equilíbrio} \rightarrow \vec{\omega}(\vec{v}_0) = \vec{\alpha}(\vec{v}_0) = \{\vec{v}_0\}$$

$\vec{\alpha}(\vec{v}_0)$ da equação $\dot{\vec{v}} = \vec{f}(\vec{v})$ é $\vec{\omega}(\vec{v}_0)$ de $\dot{\vec{v}} = -\vec{f}(\vec{v})$

Exemplo

•
 $\dot{x} = x(a - x)$, $a > 0$

Pontos de equilíbrio: $x = 0$ e $x = a$

Para $x_0 > 0$, $\omega(x_0) = \{a\}$

Para $x_0 = 0$, $\omega(x_0) = \{0\}$

Para $x_0 < 0$, $\omega(x_0) = \{\}$: conjunto vazio

Exemplo

$$\dot{r} = r(a - r)$$

$$\dot{\theta} = b$$

Origem é ponto de equilíbrio estável

$$\omega(0) = \{0\}$$

$$\omega(r_0, \theta_0) = \{r = a\} ; r_0 \neq 0$$

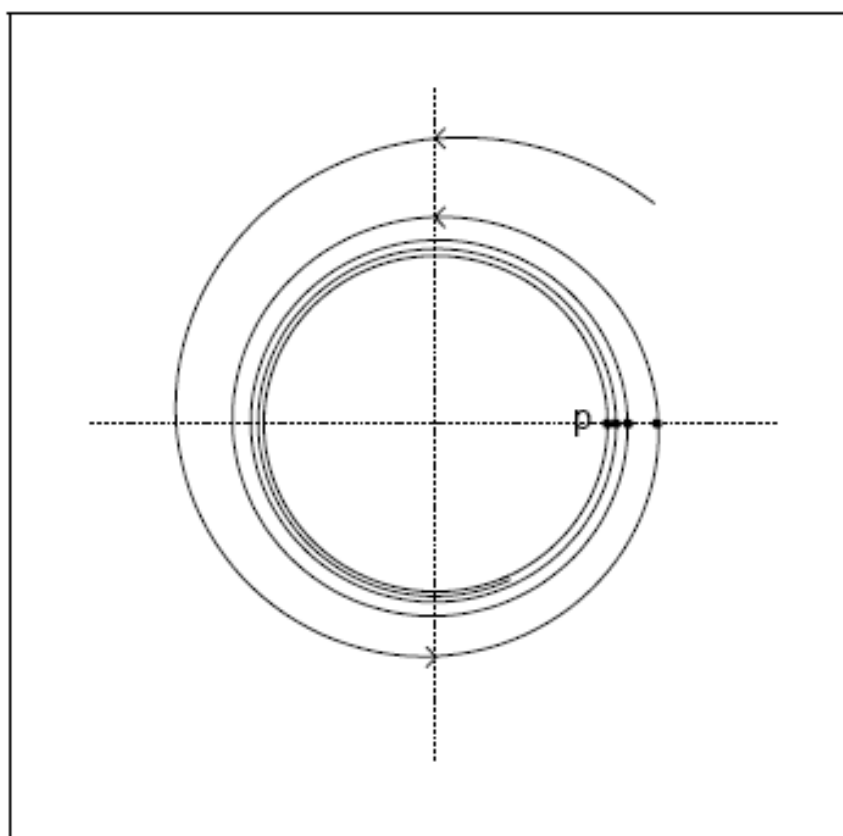


Figure 8.1 The definition of an ω -limit set.

The point p is in the ω -limit set of the spiraling trajectory because there are points $\mathbf{F}(t_1, \mathbf{v}_0)$, $\mathbf{F}(t_2, \mathbf{v}_0)$, $\mathbf{F}(t_3, \mathbf{v}_0) \dots$ of the trajectory, indicated by dots, that converge to p . The same argument can be made for any point in the entire limiting circle of the spiral solution, so the circle is the ω -limit set.

Exemplo

$$\dot{r} = r(a - r)$$

$$\dot{\theta} = \sin^2 \theta + (r - a)^2$$

$$\text{Pontos de equilíbrio: } \begin{cases} (a, 0) \\ (a, \pi) \\ (0, 0) \end{cases}$$

$$\omega(0) = \{0\}$$

$$\omega(r_0, \theta_0) = \{r = a\} ; \quad \forall r_0 \neq 0$$

$$\omega(a, \theta_0) = (a, \theta = 0, \pi)$$

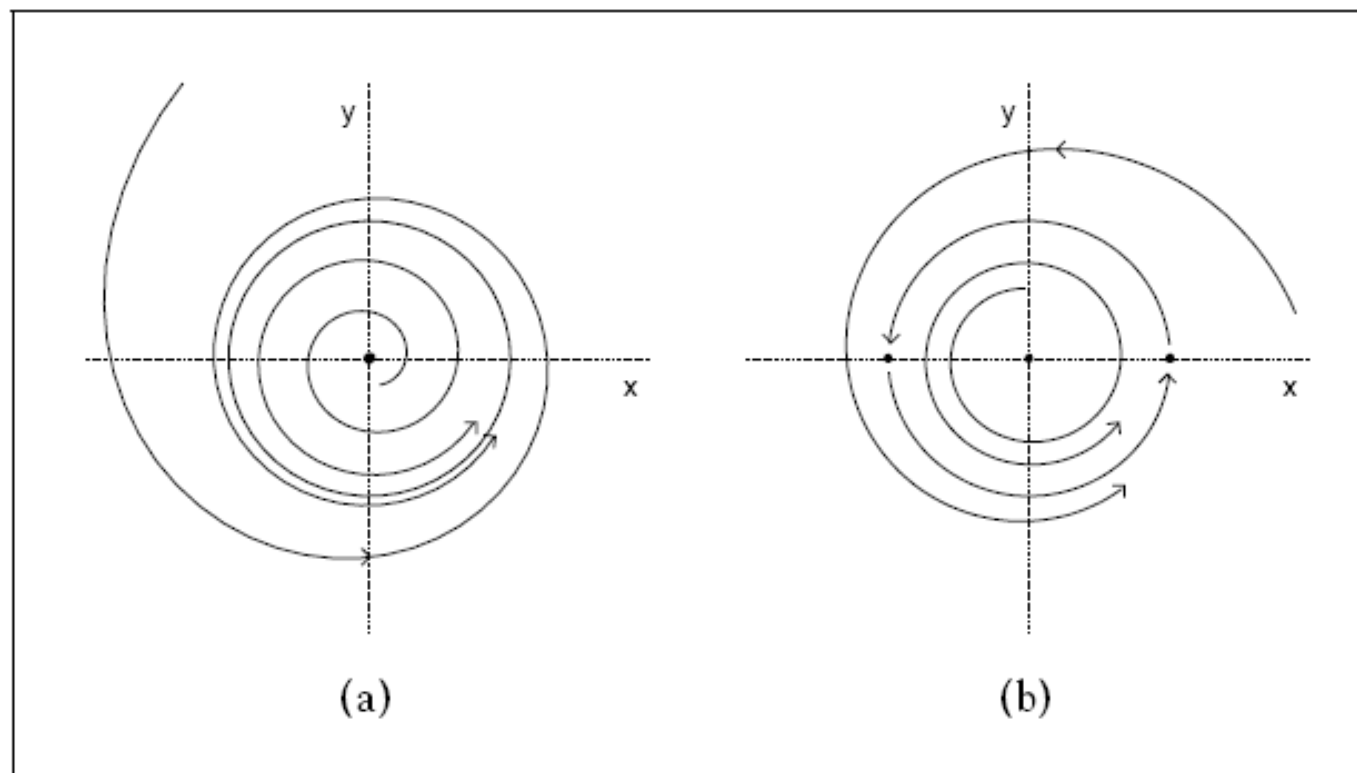


Figure 8.3 Examples of ω -limit sets for planar flows.

(a) The phase plane for Example 8.5 shows the circle $r = a$ as an attracting periodic orbit of system (8.3). The origin is an unstable equilibrium. The ω -limit set of every trajectory except the equilibrium is the periodic orbit. (b) The phase plane for Example 8.6 looks very similar to the phase plane in (a), except that in this example there are no periodic orbits. There are three equilibria: the origin and the points $(a, 0)$ and (a, π) . Every other point on the circle $r = a$ is on a solution called a connecting arc, whose α - and ω -limit sets are the equilibria. The ω -limit set of each nonequilibrium solution not on the circle is the circle $r = a$.

Teorema de Poincaré - Bendixson

$\dot{\vec{v}} = f(\vec{v})$, f suave em \mathbb{R}^2 , com pontos de equilíbrio isolados.

Se a órbita $(t \rightarrow \infty) F(t, \vec{v}_0)$ for limitada \Rightarrow

a - $\omega(\vec{v}_0)$ é um ponto de equilíbrio ou

b - $\omega(\vec{v}_0)$ é uma órbita periódica ou

c - Para cada \vec{u} em $\omega(\vec{v}_0)$, os conjuntos limites $\alpha(\vec{u})$ e $\omega(\vec{u})$ são pontos de equilíbrio.

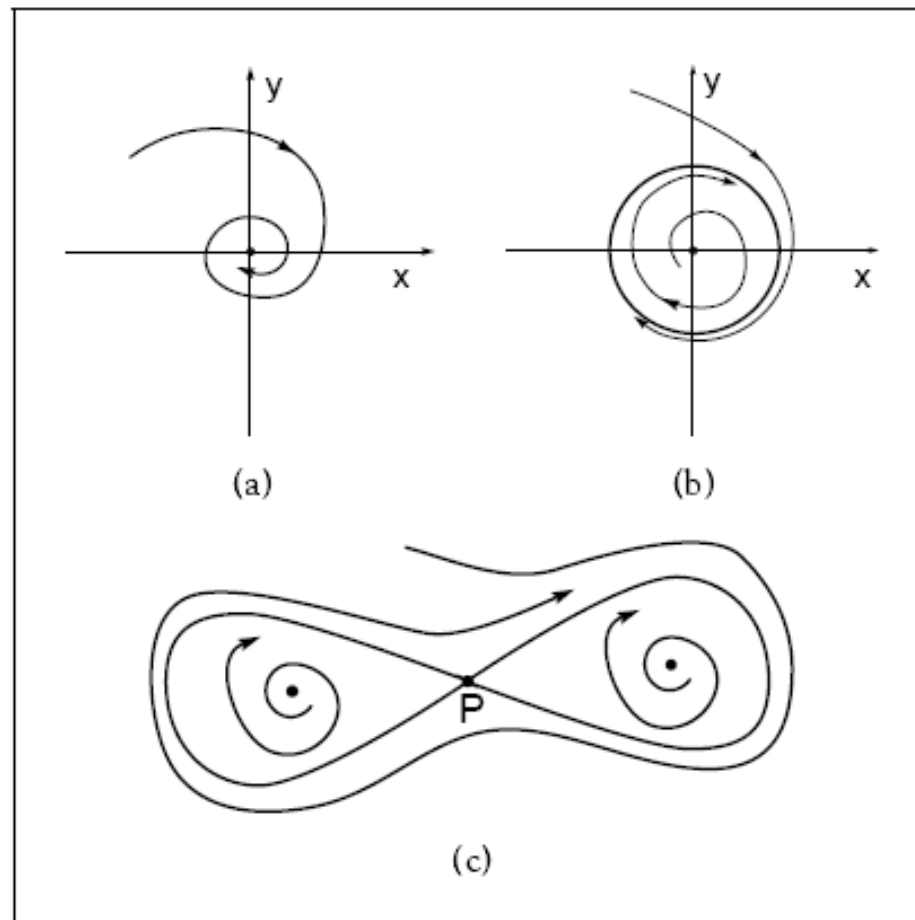


Figure 8.4 Planar limit sets.

The three pictures illustrate the three cases of the Poincaré-Bendixson Theorem. (a) The limit set is one point, the origin. (b) The limit set of each spiraling trajectory is a circle, which is a periodic orbit. (c) The limit set of the outermost trajectory is a figure eight. This limit set must have an equilibrium point P at the vertex of the "eight". It consists of two connecting arcs plus the equilibrium. Trajectories on the connecting arcs tend to P as $t \rightarrow \infty$ and as $t \rightarrow -\infty$.

Propriedades dos Conjuntos Limites

Um ponto $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto limite de um conjunto A se cada vizinhança $N_\varepsilon(\vec{v})$ contém pontos de A distintos de \vec{v} .
(Há uma sequência de pontos em A que convergem para \vec{v})
O ponto limite \vec{v} pode estar em A ou não.

1- Existência

O conjunto limite ω de uma órbita limite não é um conjunto vazio.

2- Fechamento

Um conjunto limite ω é fechado.

3- Invariança

Se \vec{y} está em $\omega(\vec{v}_0)$, então a órbita toda $F(t, \vec{y})$ está em $\omega(\vec{v}_0)$.

4- Conexão

O conjunto limite ω limitado de uma órbita é conectado.

5- Transitiva

Se $\vec{z} \in \omega(\vec{y})$ e $\vec{y} \in \omega(\vec{v}_0) \Rightarrow \vec{z} \in \omega(\vec{v}_0)$

Duas freqüências incomensuráveis formam um torus T^2

Movimento preenche uma superfície toroidal em um volume tridimensional.

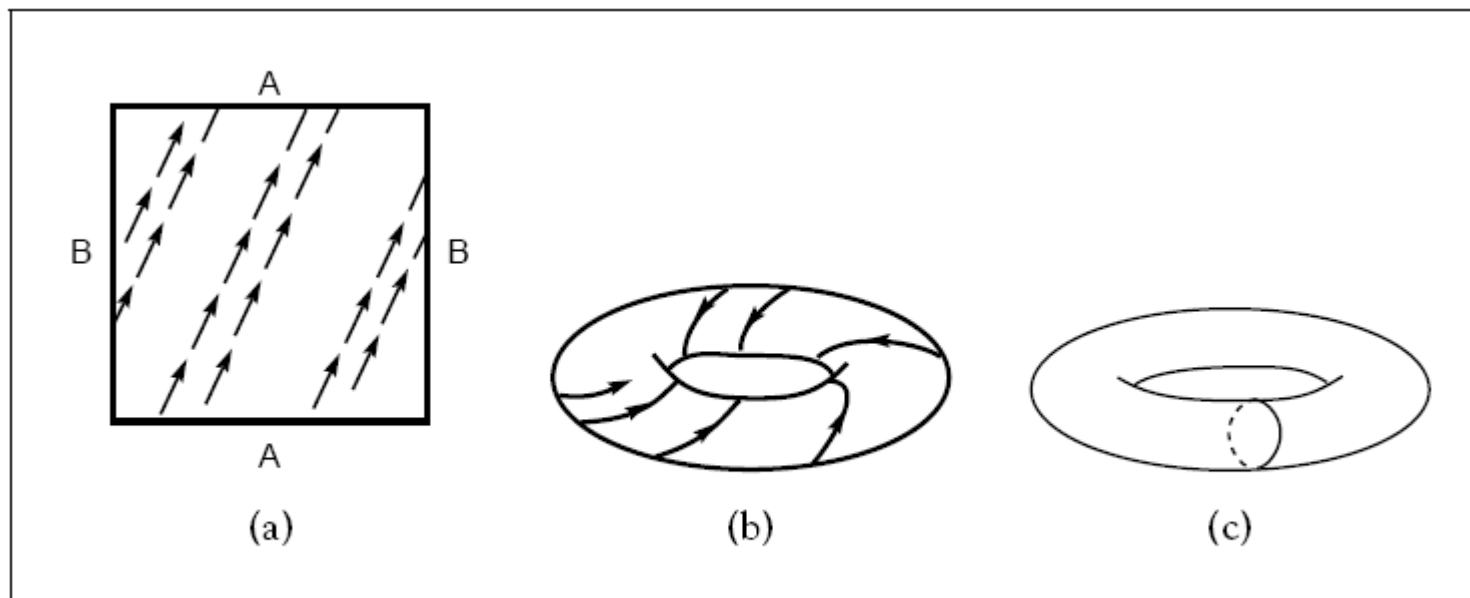


Figure 8.9 A dense orbit on the torus.

III – D

Bifurcações de Ciclos Limites

Sistemas bidimensionais

Para equações diferenciais $\dot{\vec{v}} = f(\vec{v})$ em \mathbb{R}^3

analisaremos o mapa de Poincaré em \mathbb{R}^2

Órbita periódica em $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ órbita periódica em \mathbb{R}^2

Estabilidade Estrutural

- Estabilidade da solução depende dos parâmetros de controle.
- Mudança qualitativa na solução, com a alteração de um parâmetro, caracteriza uma bifurcação.

Mapa de Poincaré

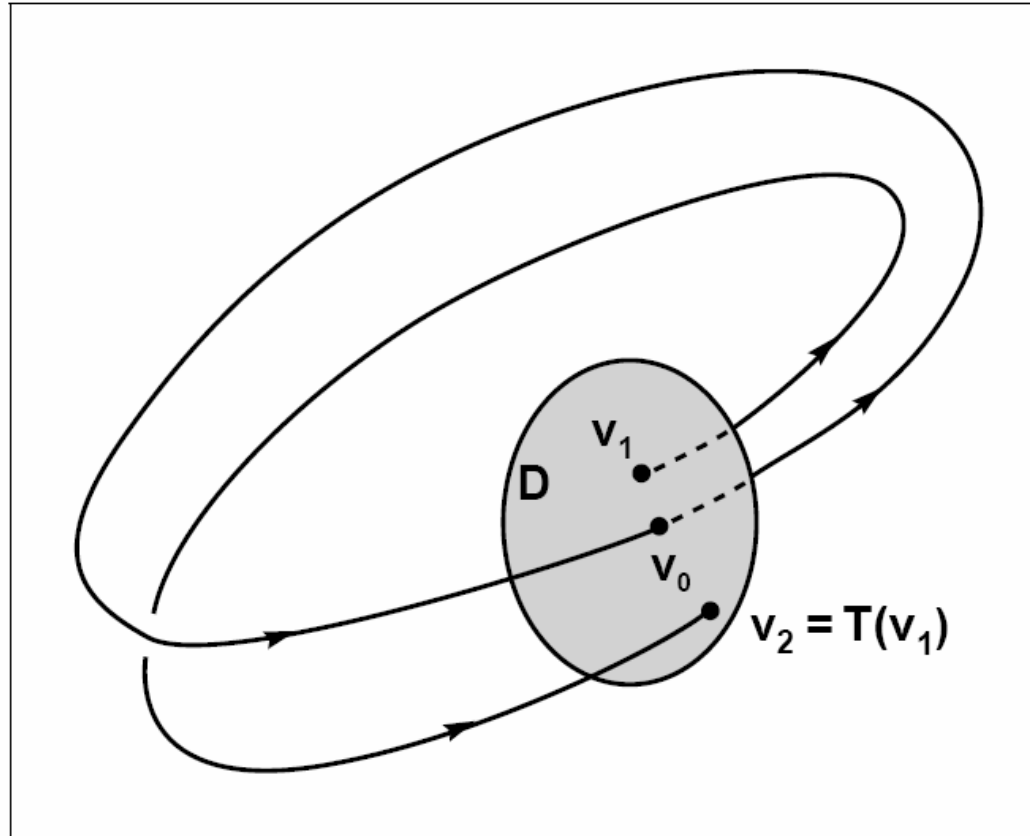


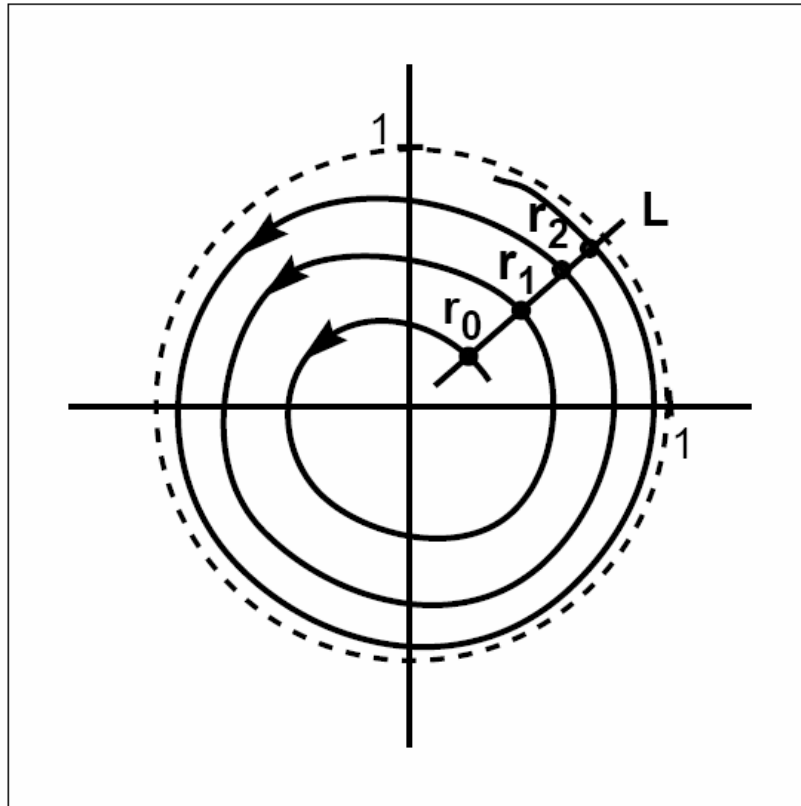
Figure 11.19 A Poincaré map.

The Poincaré map, called T here, is defined on a surface D which is transverse to the flow direction on a periodic orbit. The point v_0 on the periodic orbit maps to itself under the Poincaré map, while v_1 maps to v_2 .

Exemplo de Mapa de Poincaré

$$\dot{r} = br(1 - r)$$

$$\dot{\theta} = 1$$



Mapa de Poincaré:

$$\{r_0, r_1, r_2, \dots\}$$

Atrator:

ciclo limite com $r = 1$

Figure 11.20 Poincaré map for a limit cycle of a planar system.

The system $\frac{dr}{dt} = 0.2r(1 - r)$, $\frac{d\theta}{dt} = 1$, has a limit cycle $r = 1$. The line segment L is approximately perpendicular to this orbit. Successive images r_1, r_2, \dots , of initial point r_0 under the Poincaré map converge to $r = 1$.

Bifurcação Sela-Nó

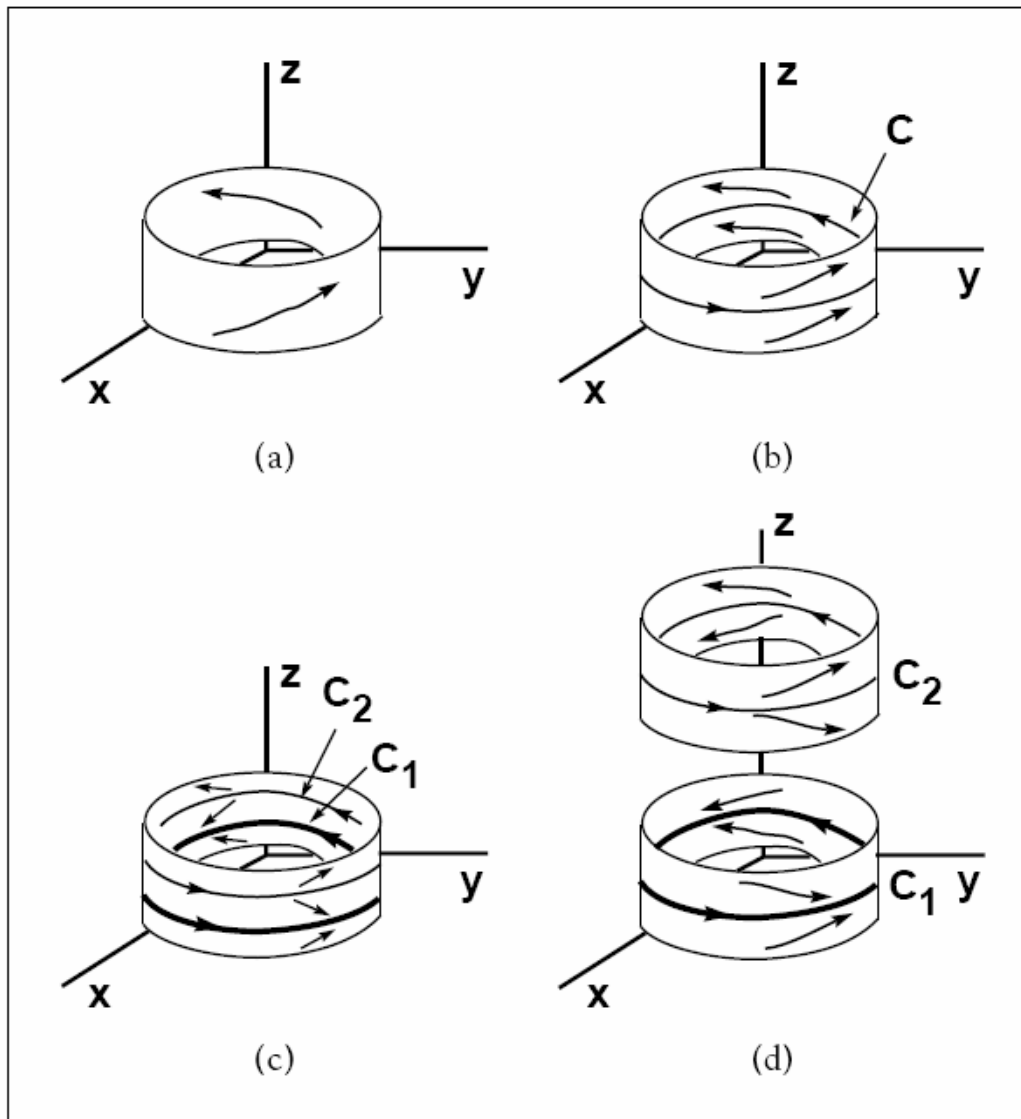


Figure 11.21 A saddle-node bifurcation for a three-dimensional flow.

(a) The system begins with no periodic orbits. (b) The parameter is increased, and a saddle-node periodic orbit C appears. (c) The saddle-node orbit splits into two periodic orbits C_1 and C_2 , which then move apart, as shown in (d).

Dobramento de Período

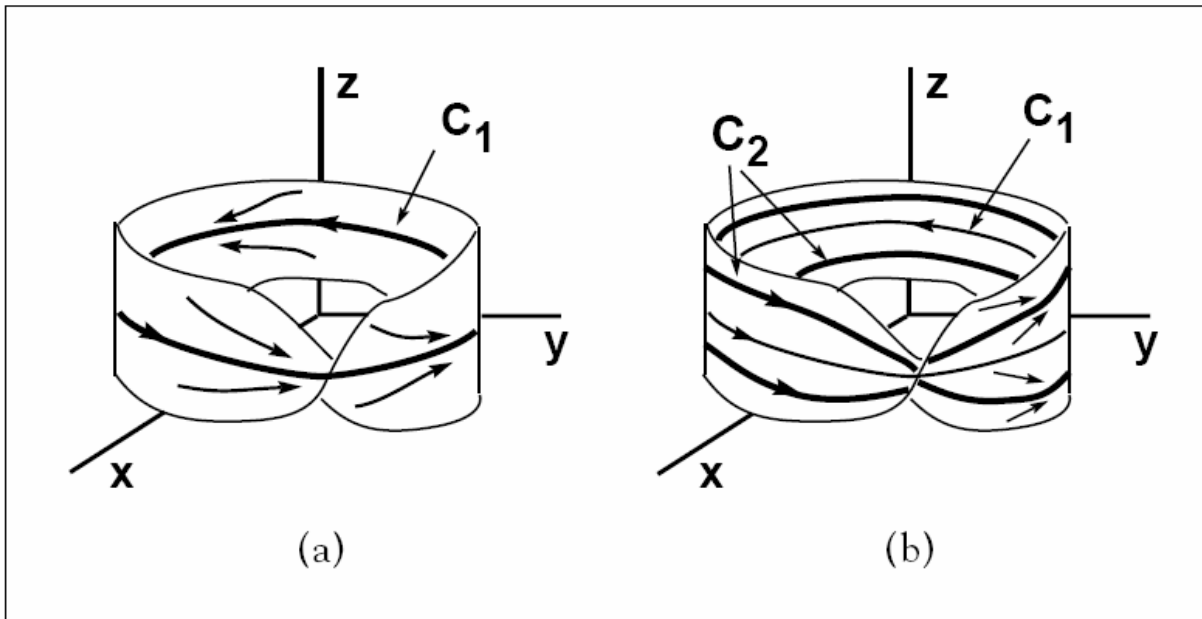


Figure 11.22 A period-doubling bifurcation for a three-dimensional flow.

The system begins with a periodic orbit C_1 , which has one multiplier between 0 and -1 , as shown in (a). As the parameter is increased, this multiplier crosses -1 , and a second orbit C_2 of roughly twice the period of C_1 bifurcates. This orbit wraps twice around the Möbius strip shown in (b).

Bifurcação de Hopf

Exemplo

$$\dot{x} = -y + x(a - x^2 - y^2)$$

$$\dot{y} = x + y(a - x^2 - y^2)$$

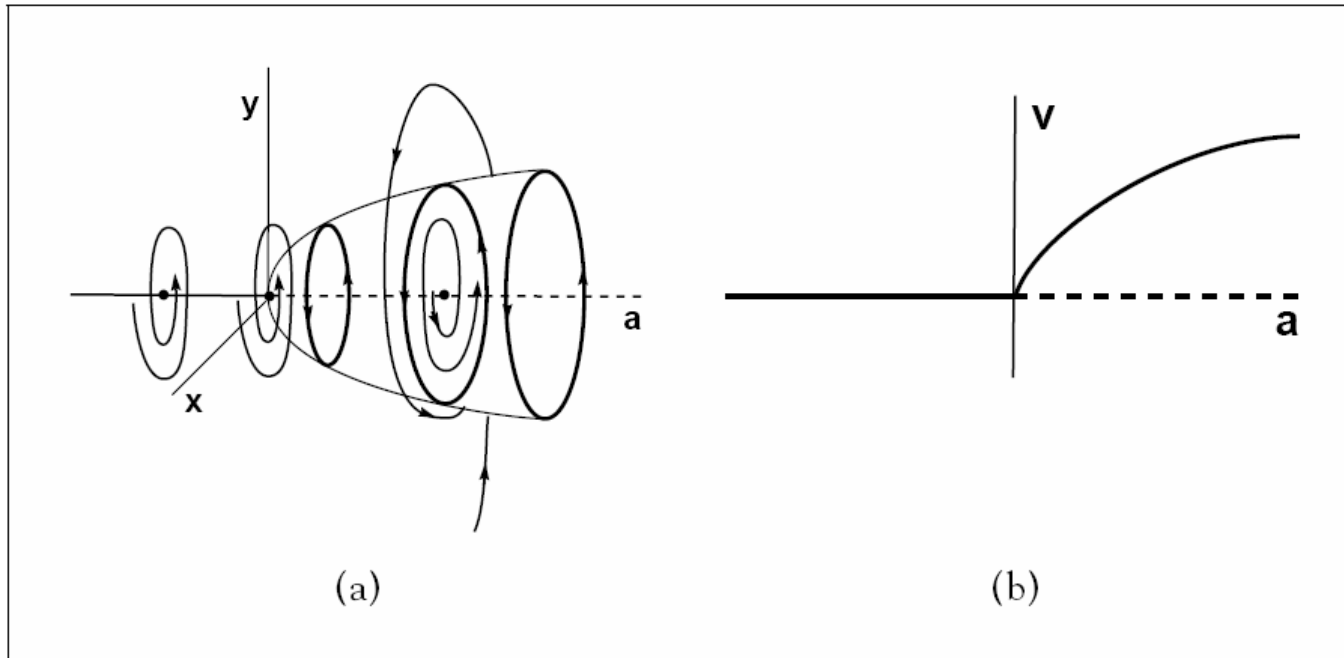


Figure 11.23 Supercritical Hopf bifurcation.

(a) The path $\{(a, 0, 0)\}$ of equilibria changes stability at $a = 0$. A stable equilibrium for $a < 0$ is replaced by a stable periodic orbit for $a > 0$. (b) Schematic path diagram of the bifurcation. Solid curves are stable orbits, dashed curves are unstable.

Ilustração da Bifurcação de Hopf

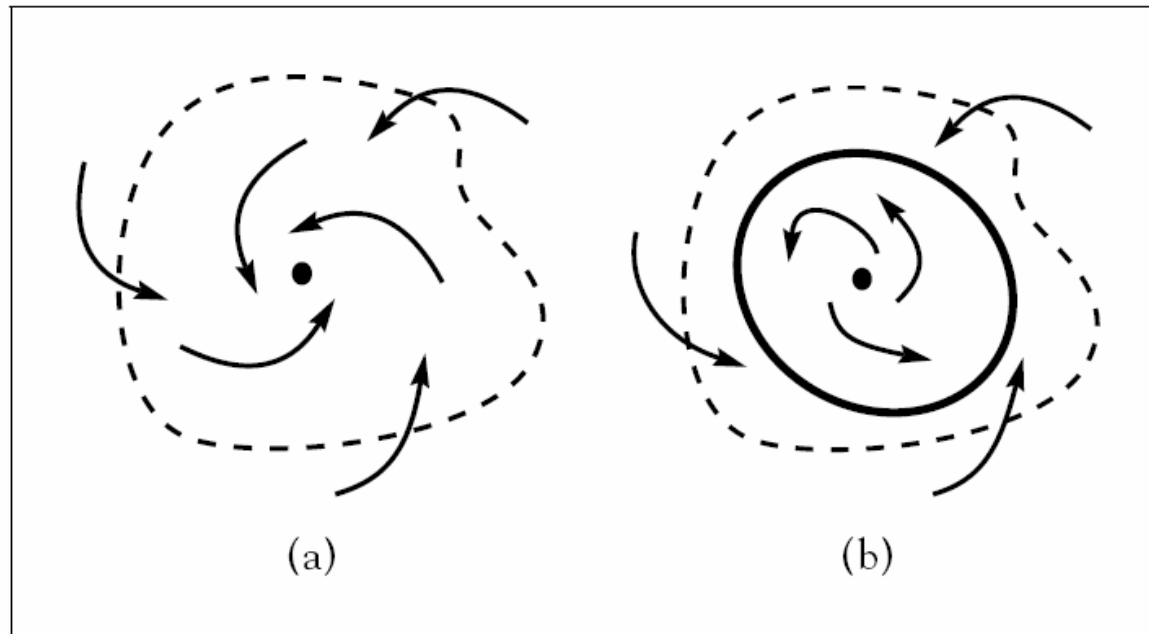


Figure 11.24 A periodic orbit bifurcates from an equilibrium in the plane. As the equilibrium goes from attracting (a) to repelling (b), a periodic orbit appears.

Bifurcação de Hopf Sub-Crítica

$$\dot{r} = ar + 2r^3 - r^5$$

$$\dot{\theta} = 1$$

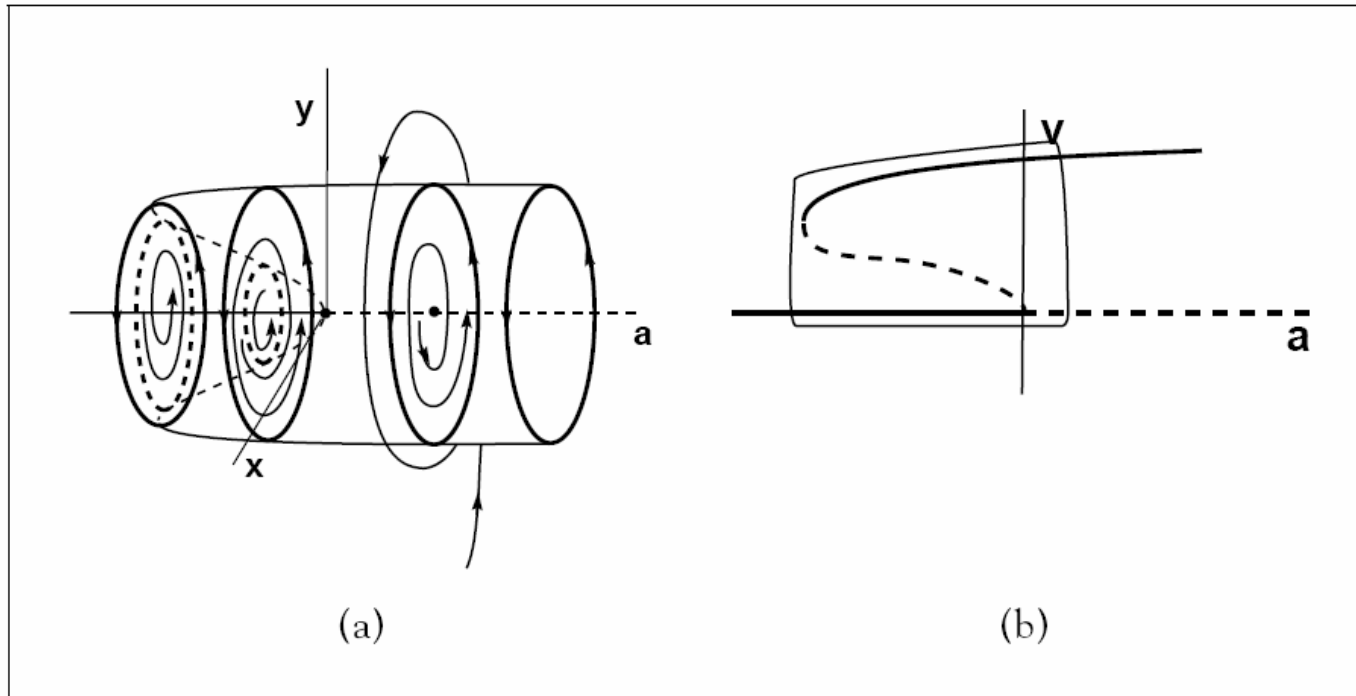


Figure 11.25 A subcritical Hopf bifurcation with hysteresis.

(a) There is a bifurcation at $a = 0$ from the path $r = 0$ of equilibria. At this point the equilibria go from stable to unstable, and a path of unstable periodic orbits bifurcates. The periodic orbits are unstable and extend back through negative parameter values, ending in saddle node at $a = -1$. An additional path of attracting periodic orbits emanates from the saddle node. (b) Schematic diagram of bifurcation

Bifurcação de Hopf Sub-Crítica nas Equações de Lorenz

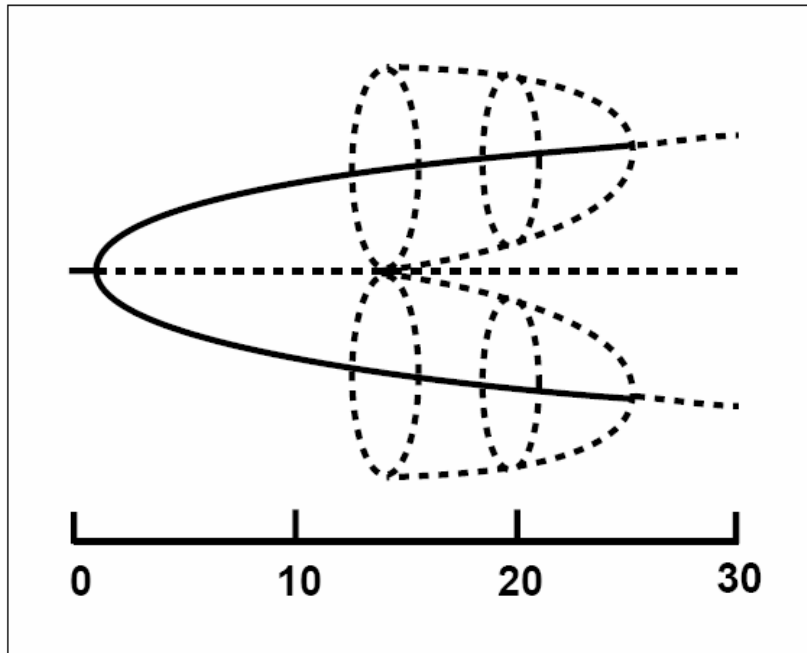


Figure 11.26 A Hopf bifurcation in the Lorenz equations.

A bifurcation diagram of the Lorenz equations for $\sigma = 10$, $b = 8/3$, and $0 \leq r \leq 30$, is shown. At $r = 1$, the origin goes from stable to unstable, as two attracting equilibria bifurcate. Paths of stable orbits are indicated by solid curves, while paths of unstable orbits are represented by dashed curves and circles. A subcritical Hopf bifurcation occurs at $r = 24.74$, at which point two families of unstable orbits bifurcate simultaneously as the two attracting equilibria lose their stability. Typical trajectories in computer simulations then move toward the chaotic attractor, first observed to occur at the crisis value $r = 24.06$.