

## IV - Fractais

Referência Principal: *Chaos*

K. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke

Springer (1997)

# Geometria Fractal

Geometria euclideana descreve órbitas regulares (periódicas e quase-periódicas)

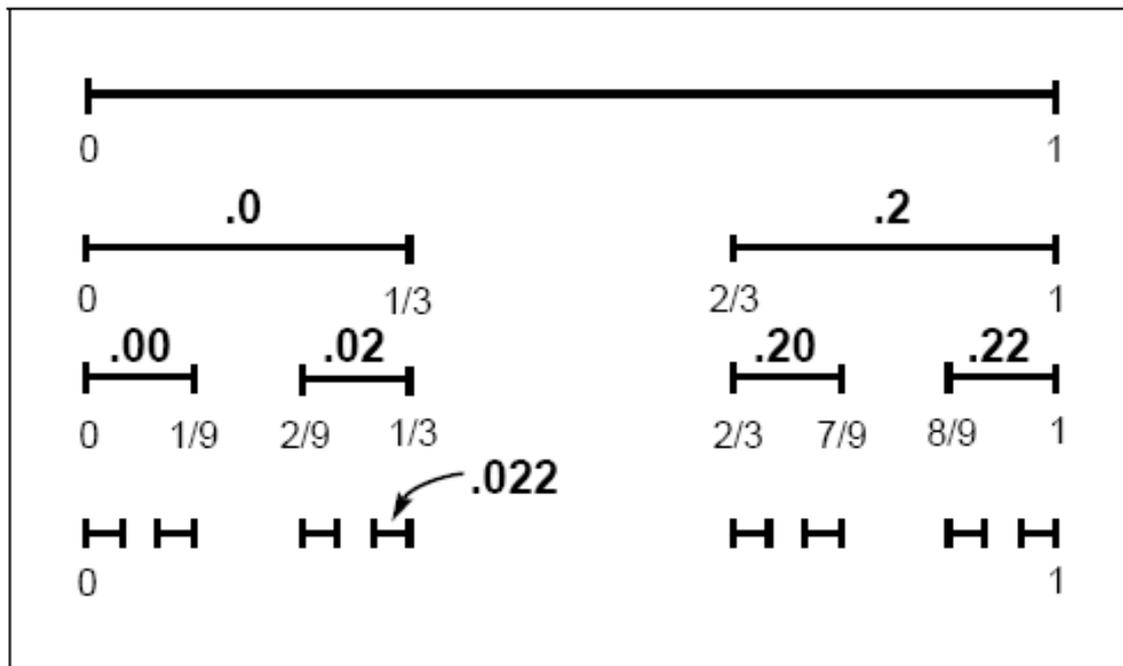
Geometria fractal descreve órbitas caóticas

Características dos fractais:

- Estrutura complexa em várias escalas
- Repetição da estrutura em escalas diferentes
- Dimensão fractal (não inteira)

# 1- Conjuntos de Cantor

# Conjunto de Cantor



Extremos de cada intervalo pertencem ao conjunto de Cantor K. Outros pontos também, como  $1/4$ .

**Figure 4.1 Construction of the middle-third Cantor set.**

In step 1, the middle third of the unit interval is removed. In further steps, the middle third of every remaining subinterval is removed. Here three steps are shown. The points that are never removed make up the Cantor middle-third set. The set marked  $.02$  consists of all numbers in the unit interval whose ternary expansion begins with  $.02$ .

# Conjunto de Cantor

$K_1$  : 2 intervalos de comprimento  $1/3$

$K_2$  :  $2^2$  intervalos de comprimento  $(1/3)^2$

$K_3$  :  $2^3$  intervalos de comprimento  $(1/3)^3$

$K_n$  :  $2^n$  intervalos de comprimento  $(1/3)^n$

O comprimento do intervalo  $K_n$  é  $(2/3)^n$

O conjunto de Cantor  $K$  é o conjunto dos pontos que restam no

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n \rightarrow K$$

O comprimento de  $K$  é nulo :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2/3)^n \rightarrow 0$

Para os números entre 0 e 1, na base 3

$$r = a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + a_3 3^{-3} + \dots + a_n 3^{-n} + \dots$$

$a_k = 0$  ou 1 ou 2      $a_k$  : dígito ternário de  $r$

$$r = 0. a_1 a_1 a_1 \dots a_n$$

(Ponto fora de  $\mathbb{K}$ )      $1/3 \Rightarrow r = 0.100\dots$

$$a_1 = [1/3 \times 3] = 1 \qquad a_2 = [0 \times 3] = 0 \qquad a_3 = [0 \times 3] = 0$$

(Ponto fora de  $\mathbb{K}$ )      $1/2 \Rightarrow r = 0.1111\dots = 0.\bar{1}$

$$a_1 = [1/2 \times 3] = [1,5] = 1 \qquad a_2 = [0.5 \times 3] = 1$$

$$a_3 = [0.5 \times 3] = [1.5] = 1$$

Pontos em  $K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$

possuem  $a_1 = 0$  ou  $2$

Pontos em  $K_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9]$

$\cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$

possuem  $a_1 = 0$  ou  $2$  e  $a_2 = 0$  ou  $2$

Teorema: O conjunto de Cantor,  $K$ , consiste dos números em  $[0, 1]$  que podem ser representados, na base 3, apenas pelos dígitos 0 e 2.

Exemplo:  $r = 0.\overline{02} \in \mathbb{K}$

$$r = 0 \times 3^{-1} + 2 \times 3^{-2} + 0 \times 3^{-3} + 2 \times 3^{-4} + \dots =$$

$$\frac{2}{9} (1 + 3^{-2} + 3^{-4} + \dots) = \frac{2}{9} \frac{1}{1 - 1/9} = 1/4$$

( *Soma* =  $a / (1 - q)$  )

Conjunto infinitamente contável: seus elementos podem ser colocados em correspondência com os números naturais.

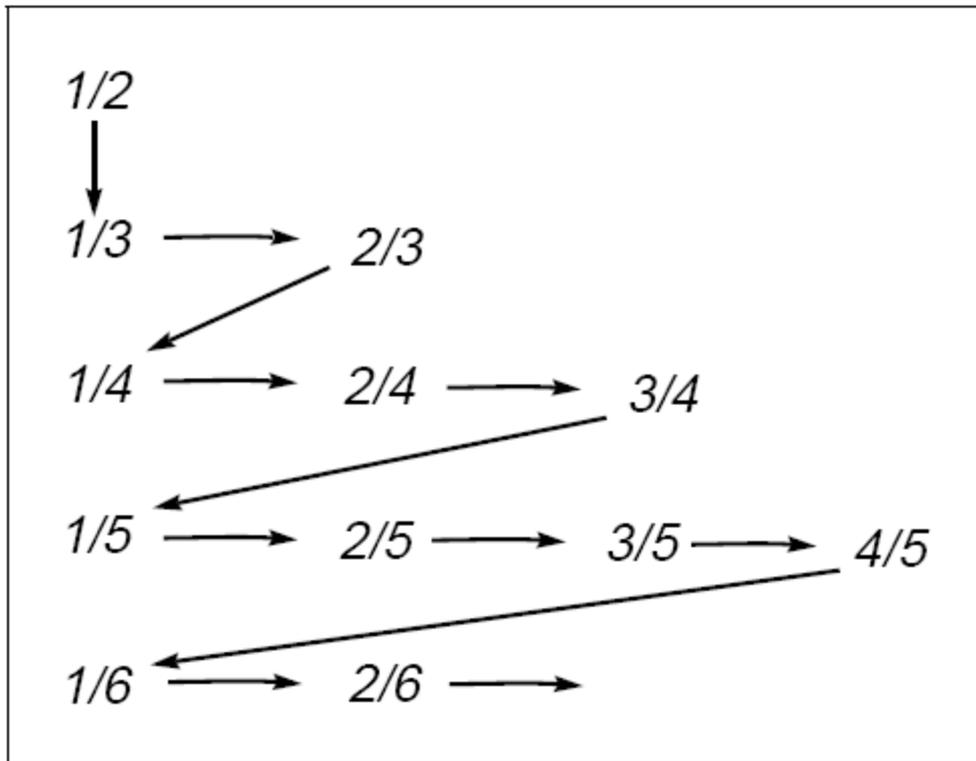
Conjunto contável: conjunto finito ou conjunto infinitamente contável.

Conjunto incontável: não contável.

Subconjunto de um conjunto contável é um conjunto contável.

União de dois conjuntos contáveis é um conjunto contável.

Conjunto dos racionais  $0 < m/n < 1$  ( $m, n$  inteiros) é contável



O conjunto de pontos da figura é contável (ele está ordenado).

O conjunto dos racionais é um subconjunto do conjunto da figura  $\rightarrow$  esse conjunto é ordenado.

**Figure 4.2** A scheme for counting the rationals.

The set of rational numbers is called countable because they can be put into a single (infinite) list.

Conjunto dos números do conjunto de Cantor  $K$ , com um número finito numa base 3, é contável.

Natural number	Number in $K$
1	.2
2	.02
3	.22
4	.002
5	.022
6	.202
7	.222
⋮	⋮

Números correspondentes à extrema direita dos intervalos retirados.

$2/3$

$2/9$

$8/9$

Lista de números no conjunto de cantor  $K$   
 Esse conjunto é incontável

$$a_{ij} = 0 \text{ ou } 2$$

Integer	Number in $K_\infty$
1	$r_1 = .a_{11}a_{12}a_{13} \dots$
2	$r_2 = .a_{21}a_{22}a_{23} \dots$
3	$r_3 = .a_{31}a_{32}a_{33} \dots$
$\vdots$	$\vdots$
$n$	$r_n = .a_{n1}a_{n2}a_{n3} \dots$
$\vdots$	$\vdots$

Número  $r \in K$ ,  $r = 0.b_1 b_2 b_3 \dots b_j \dots$

$b_1 = 0$  ou  $2$  (contrário de  $a_{11}$ )

$b_2 = 0$  ou  $2$  (contrário de  $a_{22}$ )

$b_n = 0$  ou  $2$  (contrário de  $a_{nn}$ )

$r$  não está na lista ao lado.

Portanto,  $K_\infty$ , é um conjunto incontável

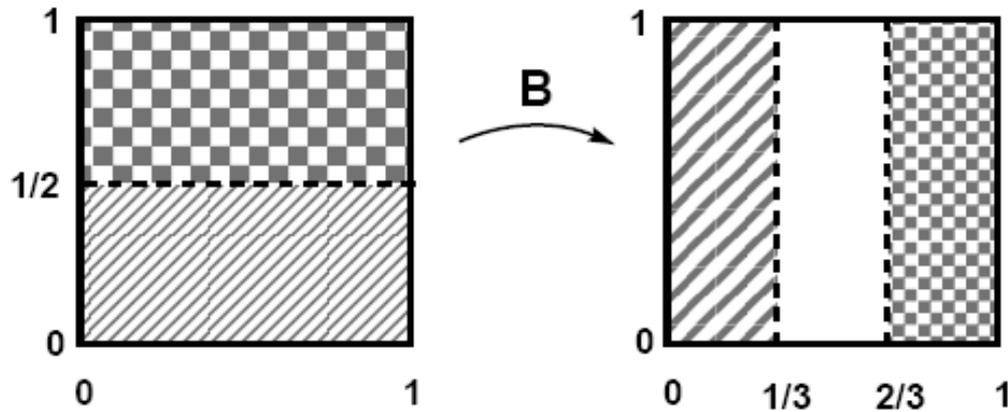
## 2- Fractais em Sistemas Determinísticos

# Mapa do Padeiro

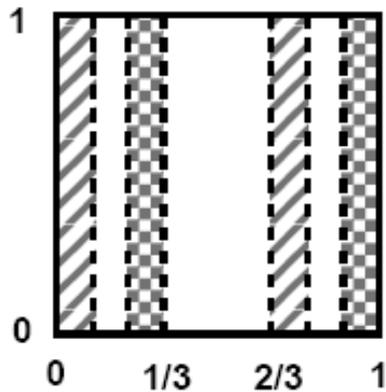
$$B(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{3}, 2y\right) & \text{para } 0 \leq y \leq 1/2 \\ \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, 2y - 1\right) & \text{para } 1/2 < y \leq 1 \end{cases}$$

Mapa descontínuo. Dois pontos próximos,  $y_1 < 1/2$  e  $y_2 > 1/2$ , após a iteração se afastam bastante!

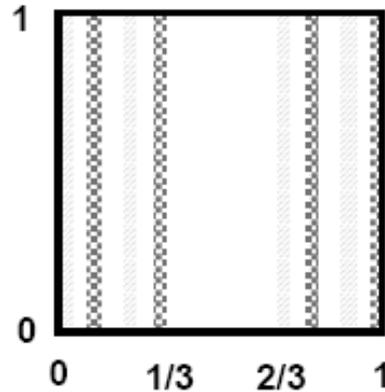
Atrator: conjunto de Cantor (subtraído o terço do meio, i.e. a região branca)



(a)



(b)



(c)

Atrator fractal:  
conjunto de Cantor  
( $n \rightarrow \infty$ )

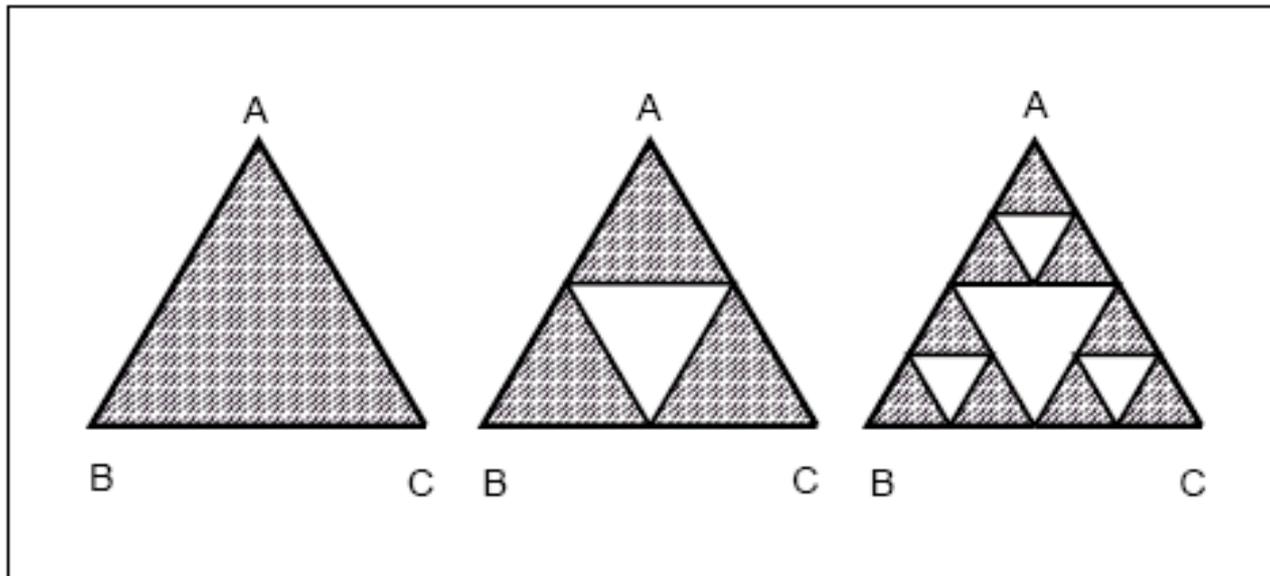
Contração em x  
Expansão em y

**Figure 4.3** Definition of the skinny baker map.

(a) The top half maps to the right strip. The bottom half maps to the left strip.  
(b) The second and (c) third iterate of the map. In the limit, the invariant set is a Cantor middle-third set of vertical lines.

Alligood  
Chaos

# Atrator Fractal



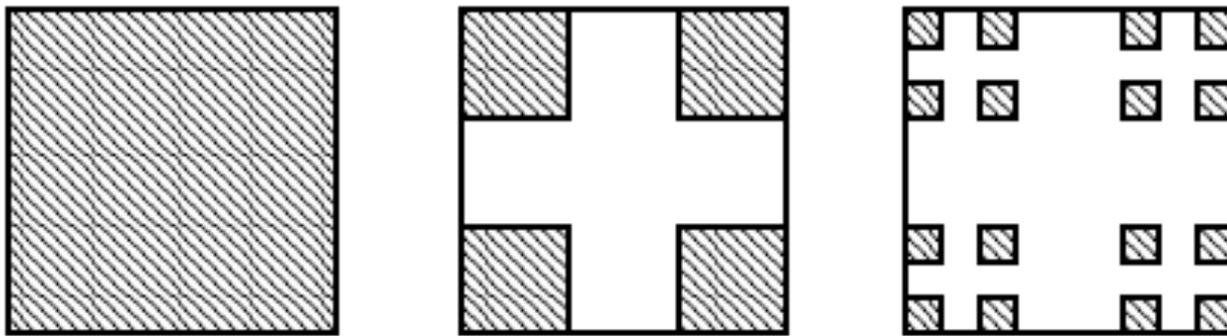
Atrator para  
 $n \rightarrow \infty$

**Figure 4.4 Construction of the Sierpinski gasket.**

Start with a triangle, remove the central triangle, and repeat with each remaining triangle.

Alligood  
Chaos

# Atrator Fractal



Atrator para  
 $n \rightarrow \infty$

Alligood  
Chaos

**Figure 4.5 Construction of the Sierpinski carpet.**

Remove a central cross from the square, and repeat for each remaining square.

# Fractal no Mapa da Tenda

$$T_3 \begin{cases} 3x & \text{para } x \leq 1/2 \\ 3(1-x) & \text{para } x > 1/2 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \Rightarrow \lim x \rightarrow -\infty$$

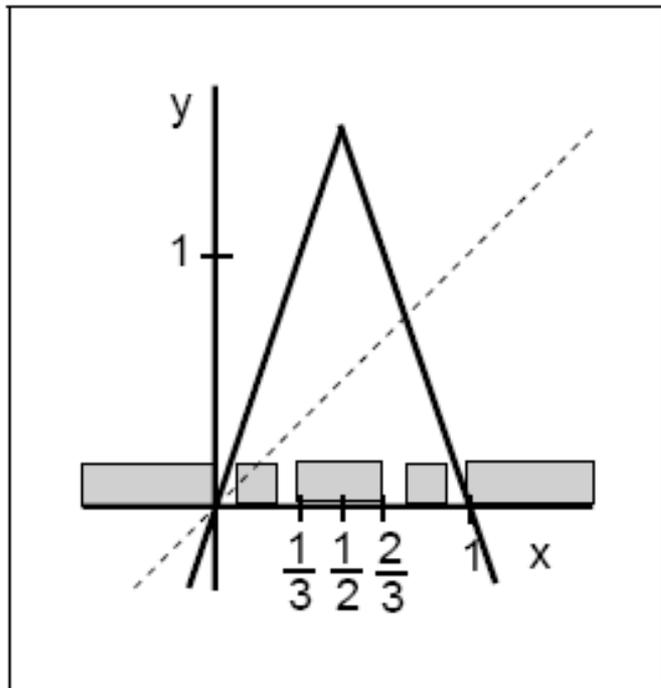
$$x \in (1/3, 2/3) \Rightarrow \lim x \rightarrow -\infty$$

$$\text{pois } T_3 \in (1, \infty)$$

$$x \in (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9) \Rightarrow$$

$$\lim x \rightarrow -\infty$$

$$\text{pois } T^2_3 \in (1, \infty)$$



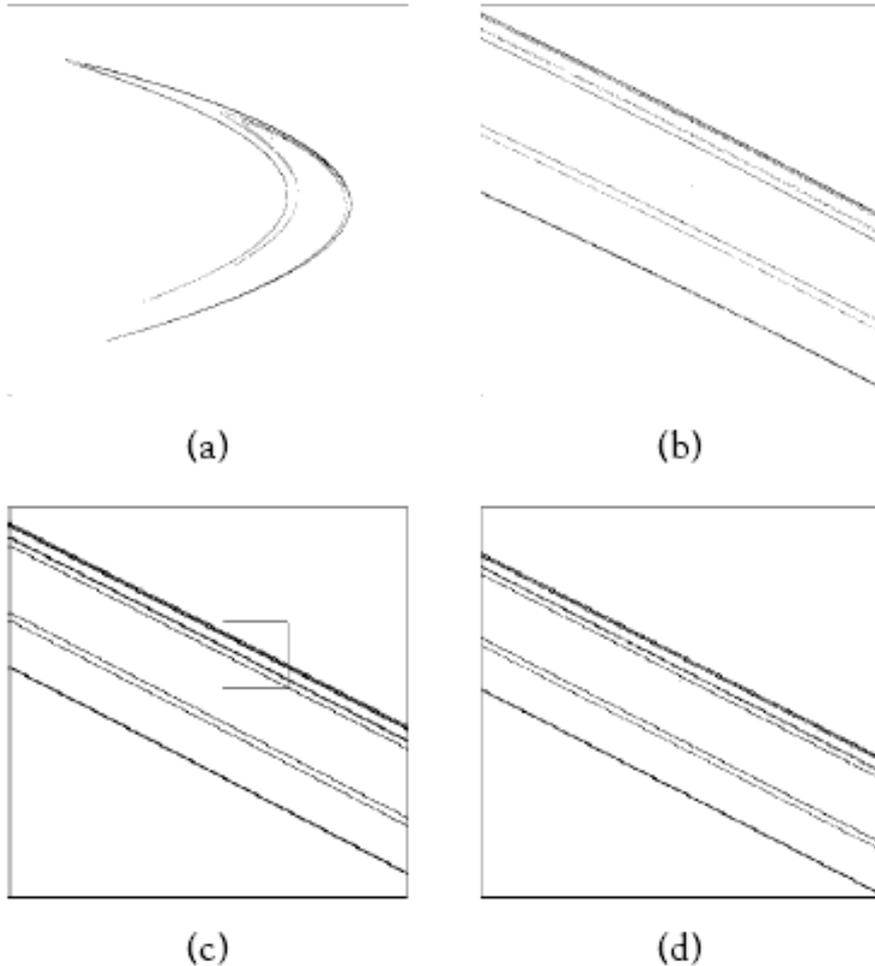
**Figure 4.6** The tent map with slope 3.

The shaded points map out of the unit interval after two or fewer iterations. There is another region of points (not shown) that maps out after three iterations, and so on. All points not lying in the middle-third Cantor set are attracted to  $-\infty$ .

# Atrator Fractal

Mapa de Hénon

$$f(x, y) = (1.4 - x^2 + 0.3y, x)$$



**Figure 4.7 Self-similarity of the Hénon attractor.**

(a) An attracting orbit of (4.1). Parts (b),(c),(d) are successive magnifications, showing the striated structure repeated on smaller and smaller scales. This sequence is zooming in on a fixed point. (a)  $[-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5]$ . (b)  $[0.78, 0.94] \times [0.78, 0.94]$ . (c)  $[0.865, 0.895] \times [0.865, 0.895]$ . (d)  $[0.881, 0.886] \times [0.881, 0.886]$ .

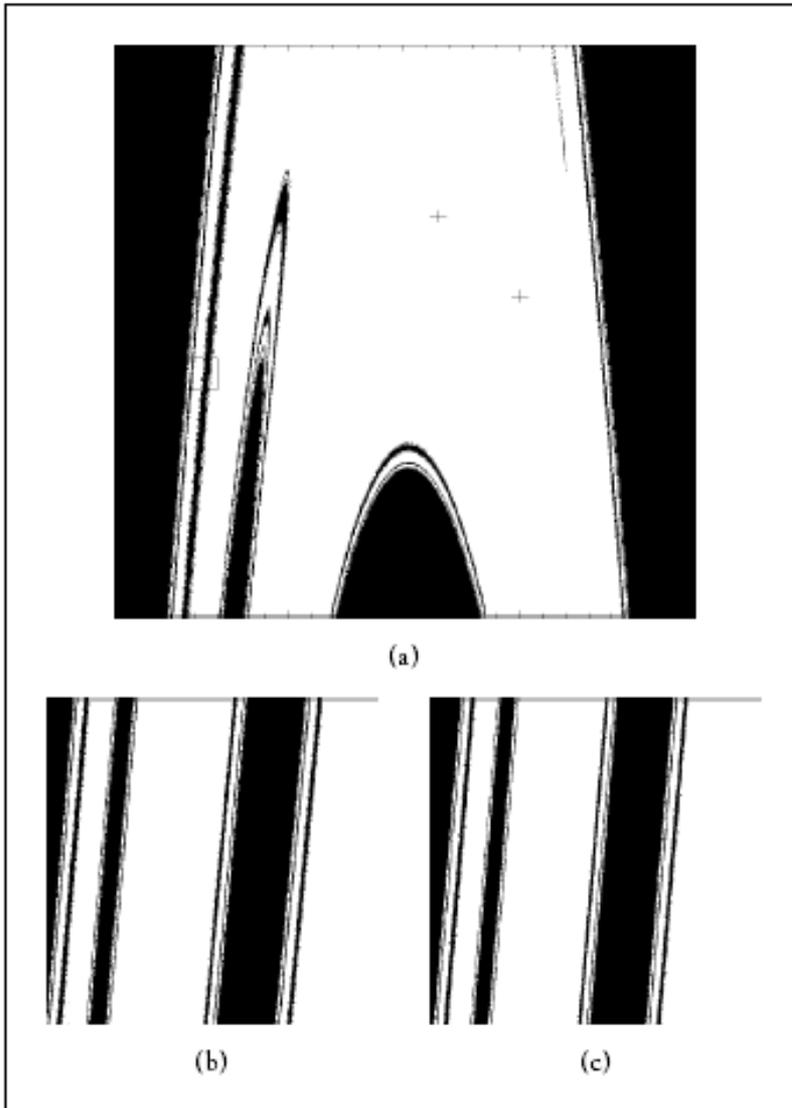
Alligood  
Chaos

## Mapa de Hénon

$$f(x, y) = (1.39 - x^2 - 0.3y, x)$$

Atratores:  $\infty$  e órbita periódica  
 $\{(1, 0.3), (0.3, 1)\}$

Fronteira entre bacias é fractal

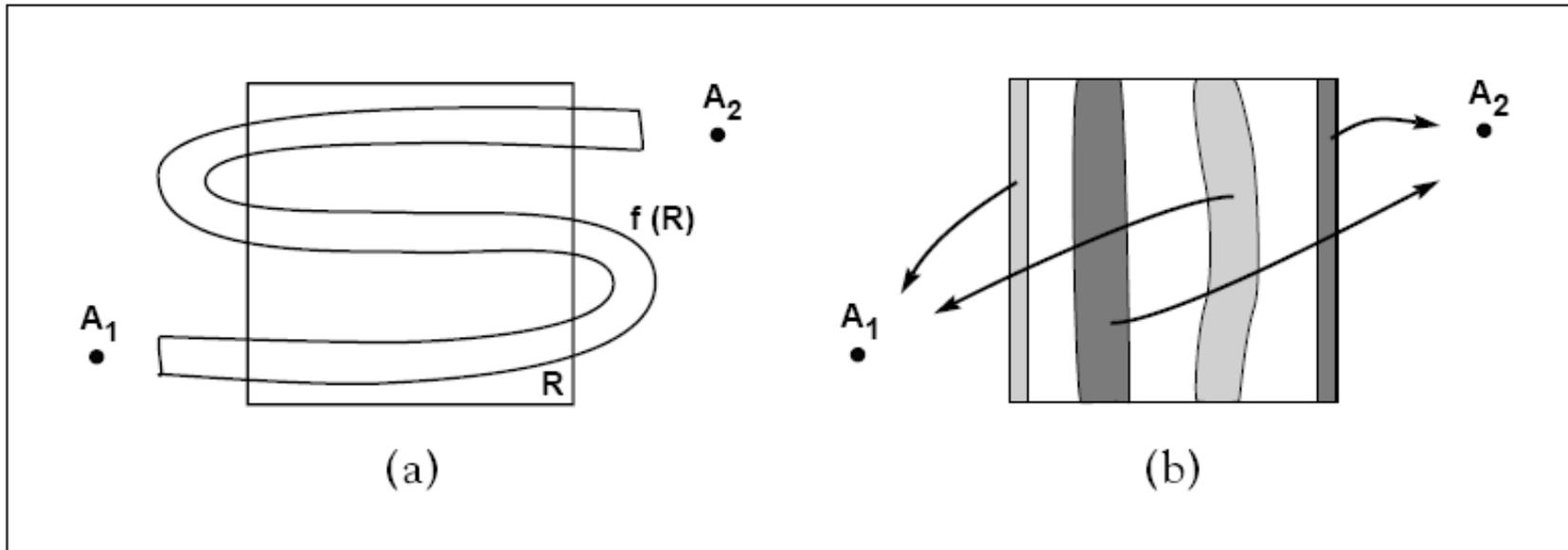


**Figure 4.8** Self-similarity of the Hénon basin.

The points in white are attracted to the period-two attractor  $\{(1, 0.3), (0.3, 1)\}$  of (4.2), marked with crosses. The points in black are attracted to infinity with iteration. (a) The region  $[-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5]$ . (b) The subregion  $[-1.88, -1.6] \times [-0.52, -0.24]$ , which is the box in part (a). (c) The subregion  $[-1.88, -1.86] \times [-0.52, -0.5]$ , the box in the lower left corner of part (b).

Alligood  
Chaos

# Conjunto de Cantor Fractal



Alligood  
Chaos

**Figure 4.9 Construction of a fractal basin boundary.**

(a) The image of the rectangle  $R$  is an S-shaped strip. Points that map outside and to the left of  $R$  are attracted to the sink  $A_1$ , and points that map outside and to the right of  $R$  are attracted to the sink  $A_2$ . (b) The shaded regions are mapped out of the rectangle in one iteration. Each of the three remaining vertical strips will lose 4 shaded substrips on the next iteration, and so on. The points remaining inside forever form a Cantor set.

# 4- Dimensão Fractal

# 5- Cálculo da Dimensão de Contagem de Caixas

Objetivo:

Introduzir algoritmo para quantificar a dimensão de um atrator caótico

Intervalo  $[0, 1]$  coberto por  $n$  caixas de largura  $1/n$

Intervalo  $[0, 8]$  coberto por  $8n$  caixas de largura  $1/n$

Intervalo  $[0, 1]$  coberto por  $C(1/\varepsilon)$  caixas de largura  $\varepsilon$   
(constante  $C$  depende do intervalo)

Número de caixas,  $N$ , depende da largura da caixa  $1/\varepsilon$

$$N(\varepsilon) = C 1/\varepsilon$$

Retângulo pode ser coberto com

$$N(\varepsilon) = C (1/\varepsilon)^2$$

Se a dimensão for  $d$ :

$$N(\varepsilon) = C (1/\varepsilon)^d$$

Exemplo :

quadrado de lados 2 coberto por

$N = 4(1/\varepsilon)^2$  caixas de lados  $\varepsilon = 1/n$

$n = 7 \Rightarrow \varepsilon = 1/n = 1/7$  e  $N = 4 \left(\frac{1}{1/7}\right)^2 = 4 \times 49$  caixas

Quadrado de lado arbitrário

$N = C(1/\varepsilon)^2$  caixas

A dimensão de um conjunto é  $d$  se ele for coberto por  $N$  caixas de lados  $\varepsilon$

$$N(\varepsilon) = C(1/\varepsilon)^d$$

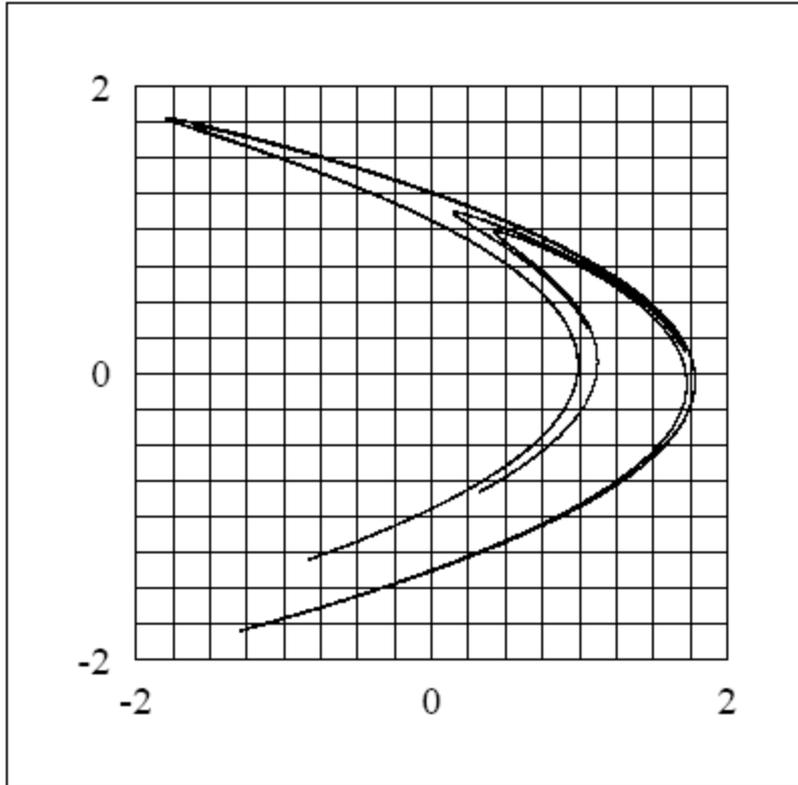
$d$  pode não ser inteiro!

Definição :

$$\text{Dimensão (de caixa)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

# Atrator de Hénon

$$f(x, y) = (1.4 - x^2 + 0.3y, x)$$



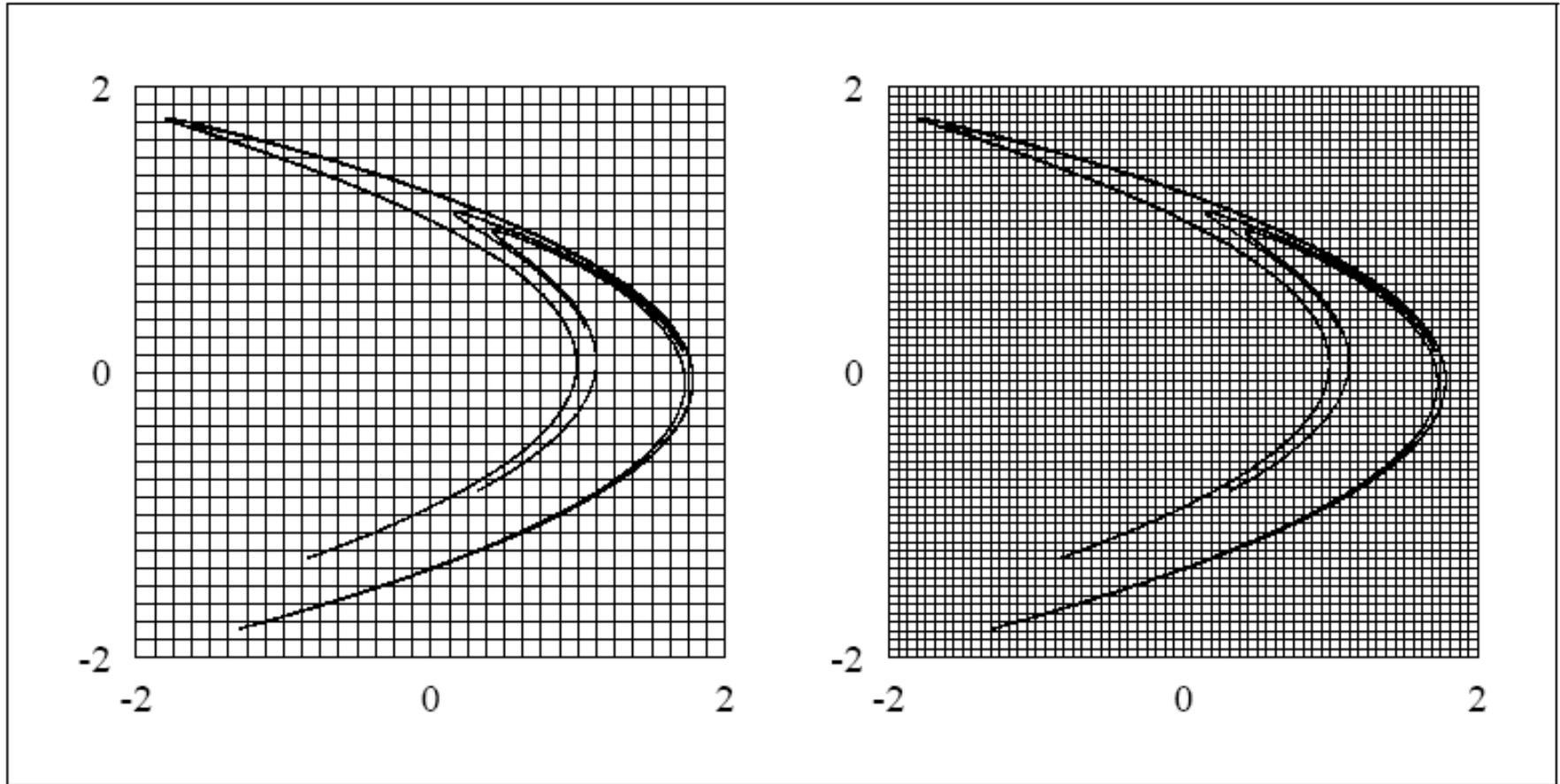
Atrator ocupa 76  
das 256 caixas.

**Figure 4.13** Grid of boxes for dimension measurement.

The Hénon attractor of Example 4.10 is shown beneath a grid of boxes with side-length  $\epsilon = 1/4$ . Of the 256 boxes shown, 76 contain a piece of the attractor.

Alligood  
Chaos

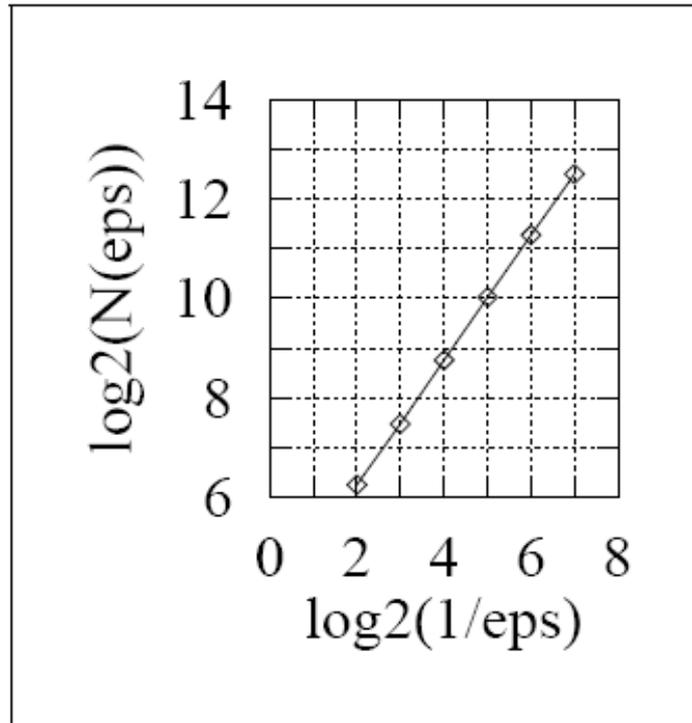
## Caixas de tamanhos diferentes



**Figure 4.15** Finding the box-counting dimension of the Hénon attractor.

Two grids are shown, with gridsize  $\epsilon = 1/8$  and  $1/16$  respectively.

## Cálculo da Dimensão de Caixa para o Atrator de Hénon



$$d = 1.27$$

**Figure 4.16** Box-counting dimension of the Hénon attractor.

A graphical report of the results of the box counts in Figures 4.13 and 4.15. The box-counting dimension is the limit of  $\log_2 N(\epsilon) / \log_2(1/\epsilon)$ . The dimension corresponds to the limiting slope of the line shown, as  $\epsilon \rightarrow 0$ , which is toward the right in this graph. The line shown has slope  $\approx 1.27$ .

Dimensão de Correlação ( útil para dados experimentais )

Órbita  $S = \{ v_0, v_1, \dots, v_N \}$  do mapa  $f$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Proporção de pares de pontos da órbita cujas distâncias são maiores que  $r > 0$

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\{ \text{pares } \{ v_i, v_j \} : v_i, v_j \in S_N, |v_i - v_j| < r \}}{\{ \text{pares } \{ v_i, v_j \} : v_i, v_j \in S_N \}}$$

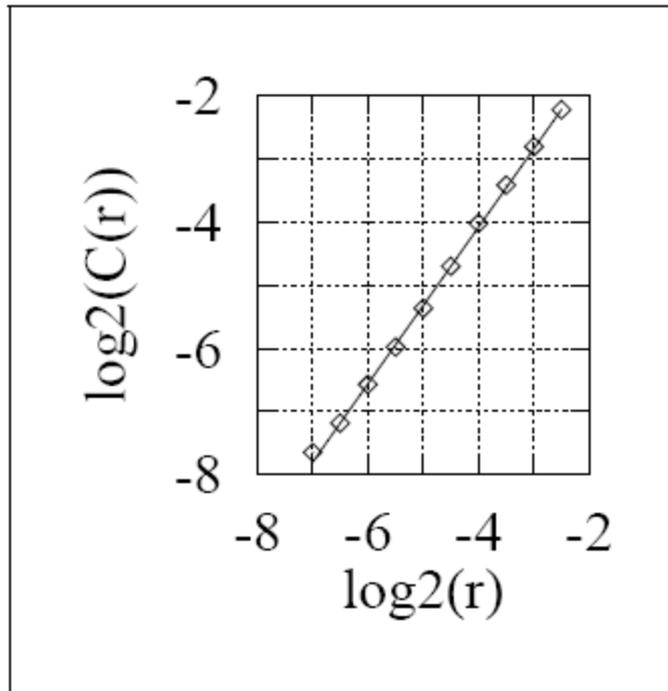
$$0 \leq C \leq 1 \quad \text{para } 0 < r < \infty$$

Se  $C(r) \approx r^d$ ,  $d$  é a dimensão de correlação da órbita

Definição:

$$d \equiv \dim_{\text{cor}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log C(r)}{\log(r)}$$

## Cálculo da Dimensão para o Atrator de Hénon Com a Dimensão de Correlação



$$d = 1.23$$

**Figure 4.17 Correlation dimension of the Hénon attractor.**

A graphical report of the results of the correlation dimension estimate for the Hénon attractor. The correlation dimension is the limit of  $\log_2 C(r)/\log_2(r)$ . The dimension corresponds to the limiting slope of the line shown, as  $r \rightarrow 0$ , which is toward the left. The line shown has slope  $\approx 1.23$ .

Dimensão do conjunto de Cantor  $K$

$2^n$  intervalos de largura  $1/3^n$

$$\dim ( K ) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 2}{n \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.631\dots$$

$$0 < \dim ( K ) < 1$$