

23/6/95

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

ILHAS MAGNÉTICAS SECUNDÁRIAS EM "REVERSED-FIELD-PINCHES"

Luiz Henrique Alves Monteiro

Iberê Luiz Caldas
Prof. Iberê Luiz Caldas
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Tese de doutorado apresentada
ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de
Doutor em Ciências.*

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Mutsuko Yamamoto Kucinski

Co-orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Comissão Examinadora:

- Prof^a. Dr^a. Mutsuko Yamamoto Kucinski (IFUSP)
- Prof. Dr. Edson Del Bosco (INPE)
- Prof. Dr. Roberto Antonio Clemente (UNICAMP)
- Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato (UFRS)
- Prof. Dr. Nelson Fiedler-Ferrara (IFUSP)

São Paulo

1995

SBI-IFUSP



305M810T2292



538 USP

M775i

D

e. 2

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Monteiro, Luiz Henrique Alves

Ilhas magnéticas secundárias em
"reversed-field-pinch". São Paulo, 1995.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Aplicada
Área de Concentração: Física Nuclear
Orientador: Profa. Dra. Mutsuko Yamamoto Kucinski

Unitermos: 1. Reversed-field-pinch (RFP);
2. Acoplamento de modos resistivos; 3. Ilhas
magnéticas secundárias; 4. Método da média.

SP/IF/SBI - 21/95

Índice

Resumo	iii
“Abstract”	iv
Prefácio	v
Agradecimentos	vi
0 Conceitos básicos da física de plasmas	vii
0.1 A energia como fator essencial no desenvolvimento da civilização	vii
0.2 As reações nucleares que liberam energia	xi
0.3 Os combustíveis dos reatores de fusão	xiii
0.4 A relação entre fusão nuclear e plasma	xv
0.5 O modelo MHD	xviii
0.6 Equilíbrio e estabilidade de plasmas com simetria cilíndrica	xxi
0.7 Um breve histórico do confinamento magnético de plasmas	xxiv
Bibliografia	xxvii
1 O “Reversed-Field-Pinch”	1
1.1 Uma introdução ao RFP	1
1.2 A motivação deste trabalho	3
Bibliografia	6
2 A fase quase-estacionária no RFP	8
2.1 O princípio variacional de Woltjer	8
2.2 O modelo de estados relaxados de Taylor	11
2.3 Comentários sobre o modelo de Taylor	15
2.4 Instabilidades características de RFPs	17
2.5 O processo cíclico de sustentação do campo toroidal reverso em RFPs	19
2.6 O objetivo deste trabalho	24
Bibliografia	25

3 Métodos para o cálculo analítico de estruturas magnéticas	29
3.1 Coordenadas curvilíneas generalizadas	30
3.2 Superfícies magnéticas em sistemas simétricos	30
3.3 A definição de Ψ em termos de um fluxo magnético transversal	31
3.4 O cálculo de estruturas magnéticas através do formalismo hamiltoniano	33
3.5 O cálculo de estruturas magnéticas através do método da média	38
Bibliografia	44
4 Superfícies magnéticas em RFPs	47
4.1 O campo magnético na fase quase-estacionária	47
4.2 Ilhas magnéticas em RFPs	49
4.2.1 O sistema simétrico — a escolha de x^1	50
4.2.2 O sistema perturbado — a escolha de x^2	52
4.2.3 Superfícies magnéticas médias	53
4.2.4 O acoplamento dos modos primários	55
4.3 Mapas numéricos a analíticos	56
4.4 Análise da estrutura do campo \vec{B}	66
Bibliografia	69
5 Comentários finais	70
Apêndice A	72
Apêndice B	74

Resumo

O mecanismo de sustentação do equilíbrio num *reversed-field-pinch* (RFP), conhecido como “efeito dínamo”, tem sido interpretado como um processo cíclico em que a difusão resistiva age contrariamente à relaxação do plasma¹.

A difusão resistiva ocorre naturalmente em plasmas. Seu efeito é sempre desestabilizante, levando a configuração magnética para longe do estado de mínima energia (em direção a configurações mais instáveis). Em RFPs, a difusão normalmente excita modos de ruptura $(m; n)$. Em todas as máquinas, observa-se que o número do modo poloidal m dominante é $m = 1$ e o espectro do modo toroidal n é mais largo, com um pico em torno de $n \sim 2R_0/a$ (R_0 é o raio maior do toróide e a é o raio da coluna de plasma). Tais modos podem ser responsáveis pelo fenômeno de relaxação, pois permitem a quebra e a reconexão das linhas do campo magnético confinante. Conseqüentemente, a energia magnética do plasma pode ser reduzida através de mudanças nas propriedades topológicas do campo. A relaxação, que ocorre via instabilidades, tende a restaurar a configuração magnética inicial. Assim, a configuração de equilíbrio oscila em torno do estado de energia magnética mínima.

Observações experimentais e simulações numéricas têm sugerido que, em cada ciclo da fase de sustentação, as instabilidades resistivas são excitadas em uma determinada seqüência: 1) inicialmente, a difusão desestabiliza dois modos adjacentes com $m = 1$: $(1; n)$ e $(1; n+1)$; 2) estes modos primários se acoplam e excitam dois modos secundários $(0; 1)$ e $(2; 2n+1)$; 3) todos estes modos podem se acoplar, produzindo um alargamento no espectro.

Nesta tese nós mostramos analiticamente que, num plasma de RFP cilíndrico cujo equilíbrio é perturbado por dois modos helicoidais $(m_1; n_1)$ e $(m_2; n_2)$, formam-se ilhas magnéticas nas superfícies de ressonância primária com $q = \frac{m_1}{n_1}$ e $q = \frac{m_2}{n_2}$ e também nas superfícies de ressonância secundária com $q = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$ e $q = \frac{|m_1-m_2|}{|n_1-n_2|}$ (q é o fator de segurança). Assim, nós confirmamos o suposto acoplamento de modos que acontece na fase de sustentação do campo reverso. Utilizando um método da média para solucionar as equações diferenciais que descrevem as trajetórias das linhas do campo magnético do plasma, nós determinamos uma expressão analítica para as superfícies magnéticas em torno das regiões ressonantes. Estas superfícies têm estrutura de ilhas. Nós assumimos que o campo do plasma é dado pela superposição do campo de equilíbrio de Taylor² com um campo perturbativo associado às oscilações magnéticas. Mapas das superfícies magnéticas médias são comparados com os mapas de Poincaré obtidos através da integração numérica das equações das linhas de campo, usando parâmetros típicos do RFP ETA-BETA II.

¹Ortolani S., Schnack D. D., “*Magnetohydrodynamics of Plasma Relaxation*”, Singapore, World Scientific (1993).

²Taylor J. B., *Relaxation of Toroidal Plasma and Generation of Reverse Magnetic Fields*, Phys. Rev. Lett. **33**, 1139 (1974).

Abstract

The mechanism of sustainment of the equilibrium in a *reversed-field-pinch* (RFP), known as “dynamo effect”, has been interpreted as a cyclic process in which the resistive diffusion counteracts the plasma relaxation³.

A resistive diffusion occurs naturally in plasmas. Its effect is always destabilizing, leading the magnetic configuration far away from minimum energy state (toward more unstable configurations). In RFPs, the diffusion usually excites tearing modes $(m; n)$. In all machines the dominant poloidal mode number m is found to be $m = 1$ and the spectrum of the toroidal mode number n is broader with a peak at $n \sim 2R_0/a$ (R_0 is the major radius of the torus and a is the radius of the plasma column). These modes may be responsible for relaxation phenomena as they allow the breaking and reconnection of confining magnetic field lines. Consequently, the plasma magnetic energy can be reduced through changes on the field topological properties. The relaxation that happens via instabilities tends to restore the initial magnetic configuration. Thus, the equilibrium configuration oscillates around the minimum magnetic energy state.

Experimental observations and numerical simulations suggest that, in each cycle of the quasi-stationary phase, the resistive instabilities rise in one particular sequence: 1) the diffusion initially destabilize two adjacent modes with $m = 1$: $(1; n)$ and $(1; n + 1)$; 2) these primary modes couple themselves and excite two secondary modes $(0; 1)$ and $(2; 2n + 1)$; 3) all these modes couple themselves producing a broader spectrum.

In this thesis we analytically show that, in a cylindrical RFP plasma whose equilibrium is perturbed by two helical modes $(m_1; n_1)$ and $(m_2; n_2)$, magnetic islands are formed at the primary resonance surfaces with $q = \frac{m_1}{n_1}$ and $q = \frac{m_2}{n_2}$, and also at the secondary resonance surfaces with $q = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$ and $q = \frac{|m_1-m_2|}{|n_1-n_2|}$ (q is the safety-factor). Thus, we confirm the presumed coupling of modes that happens at the sustainment of the reversed field. Applying an averaging method to solve the differential field line equations, we derive an analytical expression for the magnetic surfaces around the resonant regions. These surfaces have structure of islands. We assume that the plasma field is given by the superposition of the Taylor’s equilibrium field⁴ with a perturbative field associated to the magnetic oscillations. Average magnetic surfaces are compared with Poincaré maps obtained by numerical integration of the field line equations, using typical parameters of RFP ETA-BETA II.

³Ortolani S., Schnack D. D., “*Magnetohydrodynamics of Plasma Relaxation*”, Singapore, World Scientific (1993).

⁴Taylor J. B., *Relaxation of Toroidal Plasma and Generation of Reverse Magnetic Fields*, Phys. Rev. Lett. **33**, 1139 (1974).

Prefácio

O projeto inicial da minha tese de doutorado era fazer um estudo comparativo entre as aplicações do formalismo hamiltoniano e do método da média no cálculo da estrutura magnética de plasmas confinados. Posteriormente, surgiu a idéia de utilizar o método da média desenvolvido basicamente pela minha orientadora, a Prof^a. Mutsuko Y. Kucinski⁵, na determinação da estrutura de ilhas magnéticas de um plasma de *reversed-field-pinch* (RFP) em equilíbrio perturbado por modos ressonantes. Eu escrevi esta tese enfatizando os resultados obtidos para o RFP. O estudo comparativo inicialmente sugerido entra como um trabalho complementar.

No prólogo, eu apresento alguns conceitos básicos da fusão nuclear e a sua relação com a física de plasmas. Este capítulo é destinado a dois tipos de leitores: àqueles que estão se iniciando na área e sentem a necessidade de um texto introdutório básico e àqueles que, por amizade, se dispõem a folhear este trabalho (eu acho frustrante quando tento ler as teses dos meus amigos e a única parte que entendo é a seção de agradecimentos).

No capítulo 1, há um resumo sobre as principais características e a história do desenvolvimento do RFP. O nome desta máquina decorre do fato de que o campo toroidal na borda do plasma tem um sentido inverso em relação ao campo na região central. Na prática esta reversão é interessante, porque aumenta a estabilidade da configuração magnética. Neste capítulo eu exponho a motivação da tese.

No capítulo 2, eu descrevo o modelo de relaxação de Taylor e as observações experimentais que caracterizam a estrutura magnética de um plasma de RFP. Nesta máquina, ainda não é bem compreendido o processo pelo qual a configuração de equilíbrio consegue se sustentar por um tempo muito maior do que o previsto para a difusão resistiva. Simulações numéricas e dados experimentais têm sugerido que o mecanismo de sustentação do campo reverso ocorre de acordo com um processo cíclico. Em cada ciclo, modos resistivos ($m; n$) se desenvolvem e se acoplam, excitando mais modos. O principal objetivo desta tese é confirmar analiticamente este suposto acoplamento de modos.

No capítulo 3, eu trato dos métodos analíticos que normalmente são empregados na determinação da morfologia de um campo magnético confinante \vec{B} . O mapeamento da estrutura das linhas de \vec{B} é fundamental para uma melhor compreensão do confinamento em RFPs, uma vez que as partículas que constituem o plasma se movem preferencialmente ao longo destas linhas. Quando \vec{B} apresenta alguma simetria espacial, suas linhas de campo formam superfícies (magnéticas) e o cálculo destas superfícies é trivial. Se esta simetria é quebrada por uma "pequena" perturbação, as linhas de \vec{B} ainda podem formar superfícies "aproximadas". O cálculo analítico destas superfícies

⁵Kucinski M. Y., Caldas I. L., Monteiro L. H. A., Okano V., *Magnetic Surfaces in Non-Symmetric Plasmas*, Plasma Phys. Control. Fusion **34**, 1067 (1992).

pode ser feito aplicando-se o formalismo hamiltoniano ou um método da média para solucionar as equações diferenciais que descrevem as trajetórias das linhas de \vec{B} .

No capítulo 4, eu determino analiticamente a estrutura magnética de um plasma de RFP em equilíbrio MHD cilíndrico perturbado por dois modos resistivos $(m_1; n_1)$ e $(m_2; n_2)$. O campo magnético do plasma é tomado como a soma entre o campo de equilíbrio de Taylor (capítulo 2) com o campo associado às instabilidades resistivas. Com o auxílio de um método da média (capítulo 3), eu calculo uma função de superfície Ψ que descreve as superfícies magnéticas do plasma em torno das regiões de ressonância primária $q = \frac{m_1}{n_1}$ e $q = \frac{m_2}{n_2}$ e das regiões de ressonância secundária $q = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$ e $q = \frac{|m_1-m_2|}{|n_1-n_2|}$. Tais superfícies têm estrutura de ilhas. Assim, eu mostro analiticamente que os modos primários $(m_1; n_1)$ e $(m_2; n_2)$ se acoplam e excitam os modos secundários $(m_1 + m_2; n_1 + n_2)$ e $(|m_1 - m_2|; |n_1 - n_2|)$. Este resultado confirma o acoplamento de modos que supostamente acontece durante a sustentação da reversão do campo toroidal em descargas de RFPs.

No capítulo 5, eu faço uma revisão dos principais pontos deste trabalho.

Agradecimentos

Agradeço a Mutsuko Y. Kucinski e a Iberê L. Caldas pelo interesse e dedicação com que me orientaram neste trabalho.

Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro.

Prólogo

Conceitos básicos da física de plasmas

Este capítulo trata dos fundamentos da física de plasmas, como o próprio conceito de plasma e sua relação com as pesquisas em fusão nuclear, o critério de Lawson, o modelo MHD (equações, equilíbrio e estabilidade) e as características de algumas máquinas de confinamento magnético de plasmas (*z-pinch*, *pinch-estabilizado*, *tokamak*, *reversed-field-pinch*). A leitura deste capítulo é dispensável para quem está familiarizado com estes conceitos.

0.1 A energia como fator essencial no desenvolvimento da civilização

Num dia de atividade moderada, um homem adulto normal gasta em torno de 2.500 *kcal* ($10^7 J$) para manter o funcionamento do seu organismo, o que equivale a uma potência média de $\sim 100 W$ [1]. No ano de 1988, a população mundial estimada em 5 bilhões de habitantes consumiu $\sim 3.10^{20} J$, considerando-se os gastos de energia com a atividade industrial, produção de eletricidade, produção de alimentos, iluminação, transporte, sistemas de aquecimento e de refrigeração[2]. Este consumo corresponde a $\sim 2000 W$ por habitante; uma quantidade de potência 20 vezes maior que a taxa metabólica básica.

Desde a pré-história, o desenvolvimento da nossa civilização vem sendo influenciado decisivamente pela descoberta e pelo uso de diferentes *fontes de energia*. O homem vem aprendendo a utilizar os recursos energéticos do seu meio ambiente a fim de assegurar a sua sobrevivência e também para tornar sua vida mais confortável[3, 4].

A primeira grande conquista energética do homem ocorreu há um milhão de anos, quando ele aprendeu a fazer o fogo. Através do controle do fogo, o homem passou a dispor de uma fonte alternativa de calor que podia ser obtida a qualquer momento (ao contrário dos raios solares) e que não precisava ser transportada dentro do corpo (ao contrário da energia gerada no metabolismo dos seus alimentos). O fogo também servia para assustar os animais selvagens e mantê-los à distância, delimitando um lugar de

proteção e refúgio. A conquista do fogo representou um grande salto quantitativo no consumo de energia: a queima de 1 kg de madeira seca chega a produzir 4.000 kcal[4].

Por volta de 8.000 a.C., o homem desenvolveu a agricultura e aprendeu a domesticar e criar animais. O cultivo da terra para a produção de alimentos implicou num uso mais sistemático da *energia solar* e na sedentarização do grupo social, favorecendo sua evolução técnica. O objetivo inicial da criação de animais era constituir uma reserva alimentícia. Posteriormente, a *força muscular dos animais* começou a ser aproveitada no trabalho agrícola e no transporte de cargas e pessoas[3, 4].

As primeiras grandes civilizações de que se tem registro formaram-se entre 3.500 e 3.000 a.C. às margens de grandes rios (Nilo, no Egito; Tigre e Eufrates, na Mesopotâmia; Indo, na Índia; Hoang-ho, na China). Estas civilizações contavam com abundância de luz solar e tinham como base uma economia agropastoril[3].

No final da Idade Antiga (em torno do ano zero), surgiram as primeiras utilizações de forças inorgânicas para se produzir trabalho mecânico: a *energia eólica* foi aproveitada para impulsionar os barcos com velas, e a *energia hidráulica*, para mover os moinhos de água. Os moinhos de vento, inventados pelos árabes em 600 d.C., chegaram à Europa 500 anos mais tarde[3].

Em 1013, os chineses usaram gás natural transportado em tubos de bambu para fabricarem peças de porcelana. Em 1232, eles inventaram o balão de ar quente[3].

A introdução na Europa Ocidental da pólvora e das armas de fogo, durante o século XIV, contribuiu para o declínio do feudalismo. Em razão do alto custo destas armas, a organização de uma artilharia potente era um empreendimento acessível apenas para os reis, respaldados pela burguesia. A pólvora facilitou o fim da estrutura feudal e a conseqüente unificação monárquica de vários Estados europeus[4].

Nos séculos XV e XVI, o crescimento das cidades e a descoberta do “novo continente” provocaram uma expansão no comércio de mercadorias, exigindo níveis de produção progressivamente maiores. O trabalho artesanal foi se tornando insuficiente para atender à demanda. A *máquina a vapor*, desenvolvida por J. Watt entre 1765 e 1769, veio a revolucionar o sistema de produção. Por meio desta máquina, a *energia química* do combustível é transformada em *energia térmica*, e esta em trabalho mecânico. Nas indústrias, iniciou-se um processo de mecanização: a força muscular do homem começou a perder espaço para as máquinas. Os meios de produção deixavam de ser propriedade dos trabalhadores[3, 4].

Em 1831, M. Faraday e J. Henry demonstraram a possibilidade de se transformar *energia mecânica* em *energia elétrica*. No final do século XIX, foram construídas as primeiras usinas de geração de energia elétrica, aproveitando a energia mecânica de uma queda d'água (usinas hidro-elétricas) ou o calor produzido na queima de um combustível (usinas termo-elétricas). A eletricidade revelou-se uma forma de energia muito conveniente. Ela pode ser produzida junto aos locais que fornecem o combustível ou a força mecânica necessária à sua produção e transportada por grandes distâncias com poucas perdas. Com a criação das máquinas elétricas, o setor industrial tornou-se seu principal consumidor[4].

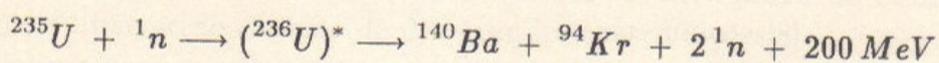
A *lenha* era o primeiro combustível das máquinas a vapor. No século XIX, ela foi substituída pelo *carvão mineral*, cujo poder energético é duas vezes maior. O carvão também passou a ser usado como combustível nas usinas termo-elétricas. Ao redor das

regiões carboníferas, constituíram-se verdadeiros pólos industriais. Com a agilização do transporte, em decorrência do uso da máquina a vapor na ferrovia e na navegação, os países industrializados passaram a colocar seus produtos em mercados cada vez mais distantes. Esta concorrência promoveu uma desarticulação dos artesanatos locais. As áreas não-industrializadas foram induzidas a se especializarem na produção de matérias-primas e alimentos para os países avançados[4].

Em meados do século XIX, os derivados do petróleo começaram a ganhar importância econômica. A proliferação das indústrias ampliou a demanda de óleos lubrificantes. O prolongamento da jornada de trabalho e o crescimento da taxa de alfabetização modificaram os hábitos da vida noturna, o que exigiu óleos combustíveis mais eficientes para a iluminação. O querosene era o derivado do petróleo mais importante da época. Em 1876, N. Otto inventou o motor de combustão interna que, posteriormente, equipou os automóveis. A gasolina, que até então era o derivado do petróleo de menor valor comercial, foi o combustível que apresentou o melhor desempenho nestes motores. Com a expansão da indústria automobilística, o petróleo tornou-se a nossa principal fonte energética[3, 4].

Na década de 30, foram realizadas as primeiras investigações experimentais sobre a estrutura dos núcleos dos átomos. Estas pesquisas revelaram uma nova fonte de energia[5]. As informações sobre os núcleos eram obtidas através do bombardeamento destes por diferentes tipos de partículas e pela observação dos resultados. Descobriu-se que a fusão de núcleos "leves" e a fissão de núcleos "pesados" liberavam energia. Nestas duas espécies de reações nucleares, a massa dos núcleos originais excede a massa das partículas-produto por uma quantia Δm . Esta diferença de massa é convertida em uma quantidade de energia E , de acordo com a famosa fórmula de A. Einstein $E = \Delta mc^2$ (c é a velocidade da luz) publicada em 1905.

A reação de fissão (fragmentação) nuclear foi proposta em 1939 por O. Hahn, F. Strassmann e L. Meitner para explicar o aparecimento de bário após o bombardeamento de urânio-235 por nêutrons[5]:



A absorção do nêutron leva à formação do urânio-236 num estado excitado (representado pelo asterisco) que, ao se quebrar em núcleos mais leves, libera energia. Como nesta reação há a emissão de nêutrons, sugeriu-se a possibilidade de se utilizar este processo multiplicativo de nêutrons para provocar fissões posteriores, desencadeando uma seqüência de reações. Em 1942, um grupo de pesquisadores liderados por E. Fermi construiu o primeiro reator nuclear, baseado no princípio das reações em cadeia. Este mesmo princípio foi usado na construção das bombas atômicas, testadas em 1945.

Um reator nuclear funciona basicamente como uma usina termo-elétrica. A energia liberada nas reações nucleares é usada para aquecer água. O vapor produzido movimenta as turbinas acopladas a um gerador, que transforma energia mecânica em energia elétrica. Considerando todos os reatores de fissão, atualmente são produzidos $\sim 10^{19} \frac{\text{J}}{\text{ano}}$ [6]. A maioria destes reatores está localizada nos Estados Unidos, Rússia, Japão e na Europa Ocidental. O principal combustível utilizado é o urânio-235, que constitui cerca de 0,7% do urânio natural.

O outro tipo de reação nuclear que é capaz de fornecer energia é a fusão entre núcleos “leves”. Este é o mecanismo básico de produção de energia nas estrelas.

Em 1932, E. Rutherford e colaboradores usaram um acelerador de partículas para provocar colisões entre núcleos de deutério (D). Eles mostraram que, quando um núcleo mais pesado era formado, havia liberação de energia[5].

A liberação não-controlada de uma grande quantidade de energia através da fusão foi conseguida em 1952, com o primeiro teste de explosão de uma bomba-H. No interior desta bomba, havia uma mistura de deutério e trítio (T), e uma pequena bomba atômica. A detonação da bomba atômica produzia o calor necessário para que os núcleos de D e T se fundissem.

Atualmente, a nossa sociedade urbano-industrial vem exigindo uma crescente demanda de energia. A preocupação com uma possível escassez na disponibilidade de recursos tem motivado a procura de fontes alternativas de energia, uma vez que as fontes convencionais apresentam restrições em vários níveis[7, 8]:

i) *origem fóssil* (petróleo, carvão, gás natural) — têm reservas limitadas e provocam danos ambientais (potencial energético estimado: $\sim 10^{23} J$);

ii) *hidro-elétricas* — potencial limitado e danos ambientais (potencial estimado para o Brasil: $\sim 10^{19} \frac{J}{ano}$);

iii) *fissão nuclear* — não há solução satisfatória para os rejeitos radioativos e o perigo de um acidente nuclear está sempre presente (potencial estimado com a fissão do ^{235}U : $\sim 10^{23} J$).

Se for mantido o atual ritmo de crescimento no consumo de energia, dentro de aproximadamente 100 anos, as reservas de combustíveis fósseis e de urânio deverão estar seriamente comprometidas. Por isso, há a necessidade de se encontrar “novas” fontes que possam fornecer energia em grandes quantidades. A luz solar e a fusão termonuclear controlada aparecem como as duas melhores possibilidades¹. Acredita-se que outras opções como a energia eólica, a das marés, a geotérmica (calor das regiões vulcânicas) e a dos bio-combustíveis (como o álcool obtido a partir da fermentação da cana-de-açúcar) não serão capazes de dar grandes contribuições[8].

As pesquisas para se construir um reator de fusão começaram na década de 50 e continuam até hoje. A grande vantagem destes reatores é a utilização de combustíveis praticamente inesgotáveis. Do ponto de vista do lixo radioativo, a meia-vida dos núcleos produzidos num reator de fusão é relativamente baixa, da ordem de dezenas de anos, de modo que os métodos já desenvolvidos para guardar os rejeitos radioativos dos reatores de fissão são perfeitamente satisfatórios. Outra vantagem é que os reatores de fusão são inerentemente seguros contra explosões nucleares. As condições exigidas para a produção de energia dependem de um delicado balanço entre certos parâmetros que, se destruído, cessa a reação automaticamente[9].

Nesta tese, nós estudamos a estrutura magnética de uma máquina chamada *reversed-field-pinch* (RFP). Assim como o *tokamak*, o RFP é um protótipo de reator de fusão. Nas próximas seções, são discutidas as condições necessárias para se produzir uma reação de fusão nuclear.

¹No Brasil, ainda existe um grande potencial hidro-elétrico que pode ser aproveitado: a capacidade instalada corresponde a apenas $\sim 25\%$ do potencial total[6].

0.2 As reações nucleares que liberam energia

Os núcleos atômicos são compostos de prótons e nêutrons, que coletivamente são chamados de nucleons. Experimentalmente, verifica-se que a massa total de um núcleo é menor do que a soma das massas dos seus nucleons. Isto significa que, quando livres, os prótons e nêutrons têm mais massa do que quando ligados formando um núcleo. Portanto, na formação de um núcleo, uma quantidade de massa Δm "desaparece", convertendo-se em *energia de ligação* E_{lig} de acordo com a fórmula $E_{lig} = \Delta mc^2$. Esta energia equivale ao trabalho necessário para quebrar o núcleo e dissociá-lo em seus nucleons individuais. A energia de ligação de um núcleo composto por Z prótons e N nêutrons é dada por [8, 10]:

$$E_{lig} = [(Zm_p + Nm_n) - m_{(Z,N)}] c^2$$

m_p , m_n e $m_{(Z,N)}$ são a massa do próton, do nêutron e do núcleo, respectivamente.

Cada elemento químico tem uma *energia de ligação por nucleon* $\epsilon_{lig} \equiv \frac{E_{lig}}{A}$ característica (A é o número total de nucleons $A \equiv Z + N$). A variação de ϵ_{lig} em função de A é mostrada na figura abaixo.

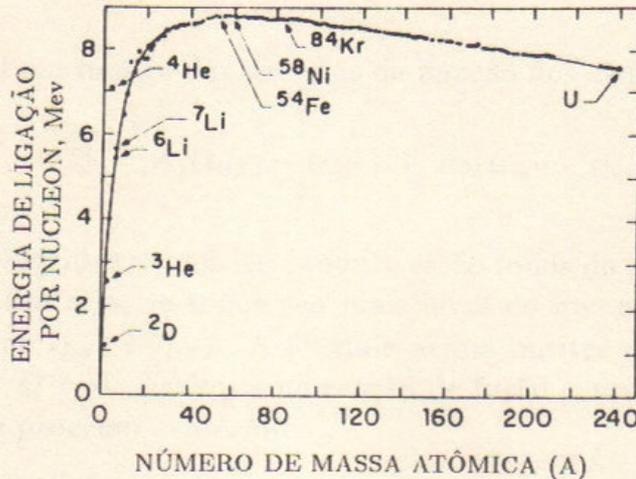
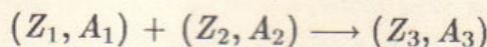


Figura 0-1: Variação de ϵ_{lig} em função do número de nucleons A [8].

A figura 0-1 mostra que o valor de ϵ_{lig} cresce rapidamente com o aumento inicial de A , atinge uma região de máximo para valores de A entre 50 e 60, e a partir daí, declina linear e gradualmente.

Analisando esta curva, pode-se prever em quais reações nucleares de fusão e de fissão ocorre liberação de energia.

O primeiro processo considerado é a fusão entre dois núcleos com números de prótons e de nucleons (Z_1, A_1) e (Z_2, A_2) , formando um núcleo mais pesado (Z_3, A_3) ²:



²Geralmente, o núcleo formado é instável, de modo que ele decai para um estado de menor energia quebrando-se em duas partículas. Exemplo: ${}^7\text{Li} + {}^1\text{H} \rightarrow ({}^8\text{Be})^* \rightarrow 2{}^4\text{He}$. Um exemplo de formação de um núcleo estável é: ${}^{12}\text{C} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{16}\text{O}$.

Numa reação nuclear, a energia total se conserva. A energia total de um núcleo é dada pela soma de sua energia cinética K_i com sua massa de repouso $m_{(Z_i, N_i)}c^2$. Para a reação anterior:

$$m_{(Z_1, N_1)}c^2 + K_1 + m_{(Z_2, N_2)}c^2 + K_2 = m_{(Z_3, N_3)}c^2 + K_3$$

Esta expressão pode ser reescrita como:

$$[m_{(Z_1, N_1)} + m_{(Z_2, N_2)}]c^2 - m_{(Z_3, N_3)}c^2 = K_3 - (K_1 + K_2) \equiv Q$$

A grandeza Q é chamada de *energia da reação*. Se numa fusão, a massa dos reagentes for maior do que a massa do produto, então esta diferença de massa é convertida em energia cinética do produto. Portanto, uma reação libera energia quando $Q > 0$.

Considerando que a carga elétrica e o número de nucleons se conservam³:

$$Z_1 + Z_2 = Z_3$$

$$A_1 + A_2 = A_3$$

pode-se escrever Q em função das energias de ligação dos elementos envolvidos:

$$Q = A_1(\epsilon_{lig3} - \epsilon_{lig1}) + A_2(\epsilon_{lig3} - \epsilon_{lig2})$$

Se os núcleos reagentes e o núcleo produto estão todos do lado esquerdo do máximo da curva $\epsilon_{lig} \times A$ (ou seja, se todos são mais leves do que o ferro), então o valor de ϵ_{lig3} é maior do que ϵ_{lig1} e ϵ_{lig2} . A fórmula acima mostra que, neste caso, a reação libera energia pois $Q > 0$. Assim, uma reação de fusão entre núcleos "leves" ($A \sim 2$) é normalmente um processo exotérmico⁴.

Uma análise semelhante pode ser feita para as reações de fissão. A conclusão que se chega é a seguinte: para uma fissão liberar energia, um núcleo "pesado" ($A \sim 200$) deve se partir em dois ou mais fragmentos, de modo que todos os núcleos envolvidos sejam mais pesados que o ferro. Ou seja, o processo é exotérmico quando o valor de ϵ_{lig} dos núcleos formados é maior do que o do núcleo original.

Na próxima seção, apresentam-se as reações que provavelmente serão produzidas nos futuros reatores de fusão.

³Numa reação nuclear, a carga sempre é conservada. Para que o número de nucleons se conserve, a energia cinética com que os reagentes colidem deve ser inferior a $\sim 1 \text{ MeV}$.

⁴Como a curva de $\epsilon_{lig} \times A$ apresenta oscilações para A pequeno, algumas reações de fusão entre núcleos "leves" são endotérmicas. Exemplo: ${}^3\text{T} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + {}^1\text{n}$; $Q = -0,8 \text{ MeV}$. Porém, o comportamento geral é o descrito no texto acima.

0.3 Os combustíveis dos reatores de fusão

A força atrativa que mantém os nucleons ligados dentro do núcleo é “forte” e de “curto alcance”, se comparada à força coulombiana. Por exemplo[7]: dois prótons separados pela distância⁵ $d = 2,5 \text{ fermis}$ geram uma energia potencial devido à interação nuclear de $\simeq 20 \text{ MeV}$, enquanto que a energia potencial da repulsão coulombiana é de apenas $\simeq 0,6 \text{ MeV}$. Se a distância entre os prótons for aumentada para $d = 10 \text{ fermis}$, a energia nuclear cai praticamente para zero. Contudo, a energia coulombiana se torna apenas quatro vezes menor. Diz-se que, a *força nuclear* é de “curto alcance” porque vai a zero muito mais rapidamente do que a força de Coulomb. Mas, para distâncias nucleares típicas (da ordem de poucos *fermis*), a força nuclear é muito mais “forte”.

De acordo com a teoria clássica, uma reação de fusão só ocorre quando os núcleos reagentes se aproximam até a distância d na qual a força nuclear supera a repulsão elétrica. Portanto, para que um núcleo mais pesado possa ser formado, os reagentes devem se chocar com uma energia cinética suficiente para superarem o topo da *barreira coulombiana* E_{bar} . Se os núcleos interagentes têm número de prótons igual a Z_1 e Z_2 , então a energia E_{bar} é dada por[11]:

$$E_{bar} = K \frac{Z_1 Z_2 e^2}{d}$$

onde $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ é a unidade de carga elétrica, d é a distância (entre os “centros” dos núcleos) a partir da qual a força nuclear se torna dominante e $K \simeq 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$ é uma constante. Para núcleos “leves” pode-se tomar d igual ao diâmetro nuclear (em um núcleo com A nucleons, $d \simeq d_0 A^{1/3}$, com $d_0 = 3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$).

Esta fórmula clássica para E_{bar} prevê que a fusão de dois núcleos de deutério requer uma energia cinética de $\simeq 400 \text{ keV}$. Se um gás tivesse 400 keV de energia cinética média por partícula, sua temperatura⁶ seria de $\sim 10^9 \text{ K}$ (~ 100 vezes superior a do interior do sol). Se fosse necessário atingir uma temperatura tão elevada, a produção de uma reação de fusão em laboratório seria praticamente inviável.

Na realidade, experimentalmente se observam reações de fusão para valores de energia cinética consideravelmente menores do que E_{bar} . Esta observação não é explicada classicamente, mas pode ser interpretada pela mecânica quântica.

Quanticamente, mostra-se que a probabilidade de dois núcleos se combinarem é não-nula, mesmo no caso dos reagentes colidirem com energia cinética insuficiente para superarem a barreira do potencial elétrico. A probabilidade de uma reação é alta, se a energia da partícula se aproxima de E_{bar} . Para energias menores, esta probabilidade diminui, mas permanece finita. Assim, reações de fusão podem ocorrer para energias abaixo daquela prevista pelas considerações clássicas.

A probabilidade de ocorrência de uma fusão nuclear está diretamente relacionada à repulsão coulombiana entre os prótons dos núcleos interagentes. Quanto maior o número de prótons Z_1 e Z_2 , maior a repulsão coulombiana e maior deverá ser a energia cinética relativa para que o processo tenha alguma chance de ocorrer[7].

⁵ $1 \text{ fermi} = 10^{-15} \text{ m}$.

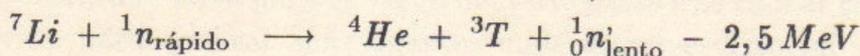
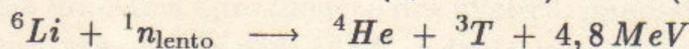
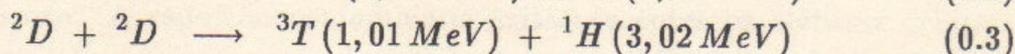
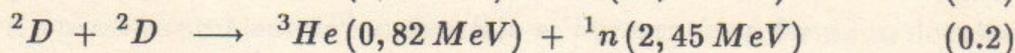
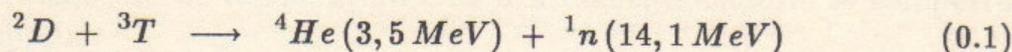
⁶ Num gás monoatômico, a relação entre a energia cinética média por partícula E_c e a temperatura T é $E_c = \frac{3}{2} k_B T$, onde $k_B = 8,6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}}$ é a constante de Boltzmann.

A princípio, a fusão entre núcleos de hidrogênio parece ser a reação que mais facilmente pode ser produzida, pois $Z = 1$ é o menor possível. Mas isto não é verdade. O tamanho dos núcleos reagentes também influi na probabilidade de uma reação. Por esta razão, uma fusão com hidrogênio é menos provável do que com seus isótopos, *deutério* e *trítio*: embora as alturas das barreiras coulombianas criadas pelo hidrogênio e pelos seus isótopos sejam iguais, o hidrogênio tem a desvantagem de ser um núcleo menor.

Em geral, sob as mesmas condições de temperatura e pressão, *as reações entre os isótopos do hidrogênio são mais prováveis do que quaisquer outras reações em que participam elementos mais pesados*. Por isso, o deutério e o trítio deverão ser os principais combustíveis dos reatores de fusão[8, 9].

O deutério é um isótopo estável, sendo encontrado nas águas dos oceanos numa proporção de 1 para 6670 átomos de hidrogênio. Estima-se que seu potencial energético via fusão seja de $\sim 10^{31} J$. O trítio é um elemento energeticamente instável, decaindo radioativamente pela emissão de um elétron. Como sua meia-vida é relativamente curta (12,36 anos), não é encontrado naturalmente⁷[8].

Para os reatores de fusão, as reações nucleares de maior interesse são[8, 9, 11]:



As duas últimas reações representam um modo de produção de trítio a partir do lítio.

A energia Q liberada em cada reação aparece na forma de energia cinética das partículas-produto, sendo distribuída entre estas partículas numa proporção inversa às suas massas. O principal objetivo das pesquisas em fusão nuclear controlada é encontrar uma maneira eficiente de aproveitar esta energia.

De todas as possíveis reações de fusão entre núcleos "leves" nas quais os reagentes têm energia cinética inferior a $100 keV$, a reação (0.1) é a que apresenta maior probabilidade de ocorrência. Por este motivo, supõe-se que os reatores de primeira geração funcionarão a base de $D-T$. No interior destes reatores, os combustíveis estarão envolvidos por uma camada de lítio que terá dupla finalidade: 1) impedir que os nêutrons atinjam as paredes do reator e 2) produzir o trítio necessário para as reações. O potencial energético deste esquema de fusão depende das reservas mundiais de lítio. Espera-se que, com a quantidade de lítio existente na terra e nos oceanos, possa se obter $\sim 10^{28} J$, o que dá à humanidade cerca de 1 milhão de anos para desenvolver um reator que funcione só com deutério[8].

⁷Na verdade, o trítio é constantemente produzido na atmosfera pelos raios cósmicos, através da interação de prótons ou nêutrons altamente energéticos com o nitrogênio-14.

Num reator $D-D$, as reações (0.2) e (0.3) ocorrerão com probabilidades aproximadamente iguais. O deutério existe em grande quantidade na natureza, podendo ser obtido a baixo custo. Neste esquema, o trítio e lítio não são mais necessários. Contudo, as condições exigidas para se produzir uma reação de fusão entre dois núcleos de deutério são sensivelmente mais difíceis de serem atingidas do que entre um núcleo de deutério e um de trítio⁸.

0.4 A relação entre fusão nuclear e plasma

No início da década de 80, fez-se a previsão de que o primeiro reator de fusão entrará em funcionamento por volta do ano 2020[8]. Para que este reator produza energia elétrica a um preço economicamente competitivo, estimou-se que a potência total liberada nas reações deverá ser de $\simeq 4.10^9 W$, o que equivale à fusão de $\simeq 2,8$ gramas de deutério por minuto, ou $\simeq 7.10^{21}$ reações nucleares por segundo⁹. Esta taxa de reações pode ser obtida confinando-se $\simeq 2.10^{22}$ núcleos de deutério num volume de $1 m^3$ a $T \simeq 10^9 K$. Nestas condições de temperatura e de densidade, o deutério se comporta de uma maneira especial.

Na temperatura e pressão ambientes¹⁰, o deutério se apresenta na forma molecular D_2 e no estado gasoso. A repulsão coulombiana existente entre os elétrons orbitais de cada molécula impede a aproximação dos núcleos, impossibilitando a fusão. Porém, quando a temperatura se eleva para $10^6 K$, o deutério passa a se chocar com uma energia cinética suficiente para quebrar suas ligações moleculares e dissociar os seus núcleos atômicos dos elétrons orbitais. Em tais condições, os núcleos podem se aproximar e, eventualmente, se fundirem.

O comportamento de um conjunto de íons (núcleos) e elétrons não é igual ao de um gás. Além das colisões, as partículas sentem os efeitos dos campos elétricos e magnéticos devido às suas cargas e correntes. Este tipo de comportamento da matéria caracteriza o estado de *plasma*. O termo *plasma* foi introduzido por I. Langmuir em 1928, num artigo[12] sobre descargas elétricas em gases rarefeitos ionizados¹¹.

A matéria no estado de plasma está nas condições mais adequadas para a ocorrência de reações nucleares. Por isso, o estudo da fusão nuclear controlada está intimamente ligado ao estudo da física de plasmas¹².

⁸Para energias abaixo de $100 keV$, a soma das probabilidades das duas reações $D-D$ é ~ 100 vezes menor do que a da reação $D-T$.

⁹O projeto do reator prevê o uso de trítio e deutério como combustíveis. Os números aqui apresentados são para a reação deutério-deutério.

¹⁰ $T \simeq 300 K$; $p \simeq 1 atm$.

¹¹Neste artigo, Langmuir escreve: "We shall use the name *plasma* to describe this region containing balanced charges of ions and electrons".

¹²Apesar dos elétrons não participarem das reações de fusão, é essencial que eles sejam confinados (dentro do reator) juntamente com os núcleos. Deste modo, a concentração de cargas positivas e negativas é igual, não permitindo o aparecimento de grandes campos elétricos que dificultariam o confinamento.

É importante se obter uma condição relacionando a densidade n , o tempo de confinamento da energia τ_e e a temperatura T do plasma para que um reator seja auto-sustentado, isto é, a energia gerada é maior do que a gasta para sustentar seu funcionamento.

Nas altas temperaturas exigidas para a fusão, um plasma perde parte de sua energia na forma de radiação[8, 9, 11]. A maior parte desta radiação é emitida pelos elétrons defletidos pelo campo coulombiano dos íons (*bremstrahlung*). Portanto, para que um reator seja auto-sustentado, a energia liberada nas fusões tem que ser suficiente para manter o plasma aquecido e compensar as perdas com a radiação.

Considere que um plasma de volume V_p seja composto por uma única espécie de núcleos reagentes (ex.: deutério) e que a densidade dos íons seja igual à dos elétrons $n_{\text{ions}} = n_{\text{elétrons}} = n$. A energia E necessária para manter este plasma numa temperatura T durante um intervalo de tempo τ_e é[8, 9, 11]:

$$E = 3nV_p k_B T + \tau_e P_{\text{rad}}$$

onde P_{rad} é a potência dissipada pela radiação *bremstrahlung*[8, 9, 11]:

$$P_{\text{rad}} = \alpha n^2 V_p T^{1/2} \quad (\alpha = \text{constante}^{13})$$

A potência total fornecida pelas reações de fusão é[8, 9, 11]:

$$P_{\text{fus}} = \frac{1}{2} n^2 V_p \langle \sigma v \rangle Q$$

onde $\langle \sigma v \rangle$ é a *reatividade da reação*¹⁴, sendo função apenas da temperatura, e Q é a energia liberada em uma reação.

Se a energia térmica total do plasma $E + \tau_e P_{\text{fus}}$ é convertida em energia elétrica com uma eficiência χ , a condição para que num reator haja ganho líquido de energia é[8, 9, 11]:

$$\chi(E + \tau_e P_{\text{fus}}) > E$$

ou:

$$n\tau_e > \frac{3k_B T}{\frac{\chi}{1-\chi} \frac{\langle \sigma v \rangle Q}{2} - \alpha T^{1/2}}$$

O lado direito da desigualdade é função apenas da temperatura. Assim, o processo de geração de energia elétrica é auto-sustentado numa temperatura T , se a quantidade $n\tau_e$ é maior que um certo valor mínimo. Este critério de confinamento foi deduzido pela primeira vez por J. D. Lawson em 1957[13].

Para $\chi = \frac{1}{3}$ e $T = 10^9 \text{ K}$, um reator $D-D$ exige que¹⁵ $n\tau_e > 5.10^{22} \text{ m}^{-3} \text{ s}$.

¹³ $\alpha \simeq 10^{-21} \text{ eV m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1/2}$.

¹⁴ $\langle \sigma v \rangle = 2R/n^2$. R é o número de reações por unidade de tempo (*taza da reação*) por unidade de volume do plasma.

¹⁵ Para $T = 10^9 \text{ K}$: $\langle \sigma v \rangle_{D-D} \simeq 4.10^{-23} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ e $\langle \sigma v \rangle_{D-T} \simeq 9.10^{-22} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

Uma análise semelhante pode ser feita para o caso em que os núcleos reagentes são de duas espécies diferentes. A única alteração no critério de Lawson é que no lugar de $\frac{(\sigma v)Q}{2}$ aparece $\frac{(\sigma v)Q}{4}$. Com os mesmos valores de χ e T usados anteriormente, obtém-se que um reator $D-T$ se auto-sustenta se $n\tau_e > 10^{20} m^{-3}s$. Esta análise mostra que a condição $n\tau_e$ para o $D-T$ é 2 a 3 ordens de grandeza menor que para o $D-D$. Por isso, a primeira geração de reatores deverá funcionar a base de $D-T$.

Basicamente, o critério de Lawson pode ser satisfeito de duas maneiras: ou se cria um plasma altamente denso¹⁶ com um tempo de confinamento de energia pequeno ou se cria um plasma de menor densidade com um tempo de confinamento de energia maior.

A primeira abordagem, alto n e baixo τ_e , é normalmente tentada através do *confinamento inercial* do plasma. Neste esquema de fusão, usam-se feixes de *laser* de alta potência para implodir pequenas esferas de combustível (uma mistura de deutério e trítio com cerca de 0,1 mm de raio). A criação das condições para a fusão do combustível ocorre da seguinte forma[14]. Inicialmente, a incidência do *laser* aquece a superfície da esfera. Com a expansão do plasma superficial, surgem ondas de compressão que convergem para o centro das esferas. O conseqüente aumento de densidade (no interior das esferas), aliado ao aumento de temperatura, provocam um aumento na taxa das reações de fusão. As esferas acabam explodindo devido ao rápido aquecimento da sua região central. O objetivo deste esquema é obter uma quantidade de energia, através das reações de fusão, maior do que a necessária para aquecer e comprimir o combustível. Neste processo, o confinamento do plasma resulta simplesmente da inércia da matéria (como a massa da esfera é finita, ela leva um tempo finito para explodir). O τ_e estimado é da ordem de $10^{-10} s$.

Estudos simulados em computador indicaram que, para haver ganho de energia, uma esfera de $D-T$ precisa ser comprimida até $\sim 10^4$ vezes sua densidade original¹⁷. O critério de Lawson para o $D-T$, reescrito em termos da densidade de massa ρ e do raio r da esfera, torna-se $\rho r > 1 g/cm^2$ para $T \simeq 10^8 K$ [14]. Experimentalmente, estes valores ainda estão longe de serem atingidos.

A segunda abordagem, baixo n e alto τ_e , é normalmente tentada através do *confinamento magnético* do plasma, usando-se a propriedade de que partículas com carga elétrica se movem preferencialmente em torno das linhas de um campo magnético, em órbitas helicoidais (no limite de colisão zero, o movimento perpendicular às linhas de um campo uniforme é nulo). Por isso, campos magnéticos podem ser combinados de modo a criar uma geometria adequada de linhas de campo, confinando o plasma em uma determinada região do espaço sem a necessidade de um recipiente material em volta. O objetivo deste esquema é impedir a expansão do plasma por um determinado tempo τ_e , de modo que possam ocorrer o número necessário de reações de fusão para satisfazer o critério de Lawson.

Um plasma é composto por uma grande quantidade de partículas, sendo capaz de exibir comportamentos bem complicados. O comportamento de um plasma é normalmente descrito através de alguns modelos. O mais utilizado é o modelo MHD.

¹⁶Em comparação com um gás nas condições ambientes, que tem $n \sim 10^{25} m^{-3}$.

¹⁷A mistura sólida $D-T$ tem $n \simeq 4,5 \cdot 10^{28} m^{-3}$.

0.5 O modelo MHD

Para que o estado de um plasma seja completamente caracterizado, em um certo instante t , é necessário que se conheçam as posições e as velocidades de todos os seus elétrons e íons constituintes. A princípio, a evolução temporal deste estado poderia ser determinada solucionando-se as equações de movimento das suas partículas. Na prática, porém, este cálculo se torna impossível. O grande número de partículas envolvidas impossibilita uma descrição exata do comportamento de um plasma, num nível microscópico. Um cálculo aproximado pode ser feito através de modelos macroscópicos, como a Teoria Cinética e a *MagnetoHidroDinâmica* (MHD). Na Teoria Cinética, as posições e as velocidades dos elétrons e íons são descritas por funções de distribuição de probabilidades dependentes do tempo. As propriedades globais do sistema são obtidas a partir destas funções estatísticas. No modelo MHD, ao invés do plasma ser especificado em termos de suas partículas constituintes, ele é considerado um meio contínuo.

As primeiras análises teóricas sobre o equilíbrio e a estabilidade de plasmas confinados magneticamente utilizaram a teoria MHD ideal. Segundo este modelo, o plasma é considerado um fluido perfeitamente condutor (resistividade elétrica $\eta = 0$), eletricamente neutro, com densidade de massa ρ , velocidade macroscópica \vec{v} e pressão cinética p . Na presença de um campo magnético \vec{B} , o comportamento do fluido obedece às seguintes equações, derivadas da hidrodinâmica e do eletromagnetismo[15, 16, 17]:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \vec{J} \times \vec{B} \quad (0.4)$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (0.5)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (0.6)$$

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} \quad (0.7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \quad (0.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\Gamma} \right) = 0 \quad (0.9)$$

O estado do fluido é especificado pelas grandezas ρ , \vec{v} , p e \vec{B} . As equações MHD descrevem como este estado evolui com o tempo t . O campo elétrico \vec{E} , medido no sistema de referência do laboratório, e a densidade de corrente \vec{J} são tratadas como quantidades auxiliares. Nestas equações, não há nenhum termo dissipativo de energia (como a viscosidade ou a resistividade elétrica).

A equação (0.4) expressa a aceleração do plasma¹⁸ em resposta à variação espacial da pressão térmica e à força de Lorentz (outras forças, como a gravitacional, são desprezadas). A equação (0.5) é a lei de Ampère¹⁹ sem o termo referente à corrente de deslocamento $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Esta aproximação é válida se as ondas que se propagam no plasma

¹⁸ $\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ é a aceleração medida por um observador que se move com o fluido.

¹⁹ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ é a constante de permeabilidade magnética do vácuo.

têm velocidade muito menor do que a velocidade da luz²⁰. A equação (0.6) é a lei de Faraday, que relaciona a variação temporal do campo magnético \vec{B} com um campo elétrico \vec{E} . A equação (0.7) é uma forma especial da lei de Ohm. Esta fórmula provém da transformação de Lorentz do campo \vec{E} para um campo \vec{E}' medido num sistema de referência que se move junto com o plasma ideal com velocidade \vec{v} ²¹. A variação de ρ obedece à equação de conservação de massa (0.8). A evolução da pressão p , dada por (0.9), depende da escolha de Γ . Se o fluido for considerado adiabático²², $\Gamma = \frac{5}{3}$; se for isotérmico, $\Gamma = 1$. O plasma também pode ser tomado como um fluido incompressível, com $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ (isto equivale formalmente ao limite $\Gamma \rightarrow \infty$)[15, 16, 17].

O modelo MHD é capaz de dar uma descrição quantitativa razoável para fenômenos que tenham escalas de comprimento (L) e de tempo (T) muito maiores do que as escalas microscópicas do plasma (se os íons giram em torno das linhas de \vec{B} com raio de Larmor r_i e período ciclotrônico t_i , então o modelo é válido para descrever fenômenos em que $L \gg r_i$ e $T \gg t_i$).

Mesmo para sistemas de confinamento magnético de geometria simples, as soluções dependentes do tempo das equações (0.4)–(0.9) não são triviais. Um estado do plasma de interesse, para o qual é mais fácil se determinar uma solução analítica, é o estado de *equilíbrio*.

O equilíbrio é um estado em que todas as forças se compensam, de modo que as grandezas físicas independem do tempo ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). Um plasma ideal em equilíbrio estático ($\vec{v} = 0$) satisfaz às seguintes equações[15, 16, 17]:

$$\vec{\nabla} p = \vec{J} \times \vec{B} \quad (0.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (0.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (0.12)$$

Multiplicando escalarmente a equação (0.10) por \vec{B} , obtém-se que:

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} p = 0 \quad (0.13)$$

Esta relação mostra que as superfícies de pressão constante contém as linhas do campo magnético \vec{B} . Estas superfícies isobáricas são chamadas de *superfícies magnéticas*.

A teoria MHD é muito utilizada para se obter critérios de estabilidade para plasmas em equilíbrio. Tais análises contribuem para o desenvolvimento de configurações magnéticas cada vez mais estáveis[15, 16, 18].

Quando um sistema se encontra num equilíbrio em que a energia potencial não é a menor possível, uma pequena perturbação pode se desenvolver. Se isto acontece, então o equilíbrio é instável à esta perturbação: o “excesso” de energia potencial, convertido em energia cinética, faz com que o sistema se afaste de sua posição original. Se a perturbação é amortecida, então o equilíbrio é estável.

²⁰O modelo não descreve fenômenos relativísticos ($v_{Alfvén} = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \ll c$; $v_{som} = \sqrt{\frac{\Gamma p}{\rho}} \ll c$).

²¹Para $(v/c) \ll 1$, $\vec{E}' \simeq \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \simeq \eta \vec{J} = 0$.

²²No caso adiabático, Γ é a razão entre as capacidades térmicas a pressão (C_p) e a volume constante (C_v) de um gás monoatômico ($\Gamma \equiv \frac{C_p}{C_v}$).

A estabilidade de um plasma pode ser examinada através da análise dos *modos normais de oscilação*. Para este cálculo, as grandezas físicas x que descrevem o plasma são escritas como $x = x_0 + x_1$, onde o índice 0 se refere ao valor do equilíbrio não-perturbado e o índice 1 representa a perturbação, que é escolhida da seguinte forma $x_1(\vec{r}, t) = x_1(\vec{r})e^{-i\omega t}$. Supõe-se que $|x_1| \ll |x_0|$, de modo que as equações MHD possam ser linearizadas²³. As soluções destas equações determinam as frequências naturais ω de oscilação do sistema. Se a parte imaginária de ω for positiva, a perturbação é instável. Neste caso, o fator $e^{-i\omega t}$ é reescrito em termos da razão de crescimento γ como $e^{\gamma t}$ (γ é um número real positivo). As instabilidades mais perigosas são aquelas que se desenvolvem num tempo muito inferior ao necessário para que o critério de Lawson seja satisfeito ($\gamma^{-1} \ll \tau_e$).

Outro teste de estabilidade é baseado no princípio da conservação da energia total de um plasma sem efeitos dissipativos (*princípio da energia*). Este método consiste em se submeter um plasma em equilíbrio a um deslocamento $\delta\vec{r}$. Multiplicando-se a equação de movimento (0.4) pela velocidade da perturbação $\frac{d\delta\vec{r}}{dt}$ e integrando-se sobre todo o volume do plasma, obtém-se a energia total do sistema perturbado, que é constante no tempo. Se a perturbação causa um aumento na energia potencial, então o equilíbrio é estável. Por outro lado, se a perturbação diminui a energia potencial, então a energia cinética do sistema aumenta, e assim, a velocidade da perturbação $\frac{d\delta\vec{r}}{dt}$ cresce.

No modelo MHD ideal, assume-se que os fluidos são perfeitos condutores de eletricidade ($\eta = 0$). Este modelo prevê que, no interior de um fluido estático ($\vec{v} = 0$), as linhas do campo magnético confinante \vec{B} ficam "congeladas".

Na verdade, plasmas reais têm resistividade elétrica η não-nula. Uma das principais conseqüências de $\eta \neq 0$ é permitir a quebra e a reconexão das linhas de \vec{B} , alterando suas propriedades topológicas. Portanto, mesmo na ausência de instabilidades, a estrutura magnética de um plasma resistivo estático se modifica com o passar do tempo. A evolução de \vec{B} , num fluido com resistividade isotrópica, é governada pela *equação de difusão*:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \frac{\nabla^2 \vec{B}}{\mu_0} \quad (0.14)$$

Esta equação é obtida a partir das equações MHD (0.5)–(0.7), tomando-se a lei de Ohm (0.7) com $\eta \neq 0$ ($\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{J}$). A solução de (0.14) tem a seguinte forma:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) e^{-t/\tau_r} \quad (0.15)$$

sendo τ_r chamado de *tempo de difusão resistiva*. Este parâmetro indica quando os efeitos resistivos são importantes. Se o modelo MHD pretende descrever fenômenos cuja escala de tempo característica T é da ordem de grandeza de τ_r , então a resistividade do plasma deve ser levada em conta.

Normalmente, utiliza-se uma geometria cilíndrica para o cálculo do equilíbrio e da estabilidade de plasmas confinados magneticamente. Em tal geometria, $\tau_r \sim \frac{\mu_0 a^2}{\eta}$, onde $r = a$ é o raio da coluna de plasma.

²³Isto é, termos da ordem de grandeza de $(\frac{x_1}{x_0})^2$ ou menores são desprezados.

0.6 Equilíbrio e estabilidade de plasmas com simetria cilíndrica

As configurações magnéticas de interesse para a fusão nuclear têm uma geometria toroidal. Em tal geometria, é muito complicado se obter soluções analíticas para as equações de equilíbrio (0.10)–(0.12). No entanto, pode-se usar uma *aproximação cilíndrica* para descrever este sistema se o raio maior do toróide R_0 for muito maior que seu raio menor a ($R_0/a \rightarrow \infty$) ou se os efeitos devido à curvatura do toróide forem pequenos para R_0/a finito. Esta aproximação consiste em se representar o toróide por um cilindro periódico de comprimento $2\pi R_0$. Na figura 0-2, são mostrados os sistemas de coordenadas cilíndricas r, θ, z e “toroidais” $r, \theta, \varphi \equiv \frac{z}{R_0}$. Nas coordenadas cilíndricas, θ é o ângulo *azimutal* e z é a posição *axial*. No sistema “toroidal”, a nomenclatura muda: θ se torna o ângulo *poloidal* e φ , o ângulo *toroidal*. Nestes dois sistemas, r é a coordenada *radial*.

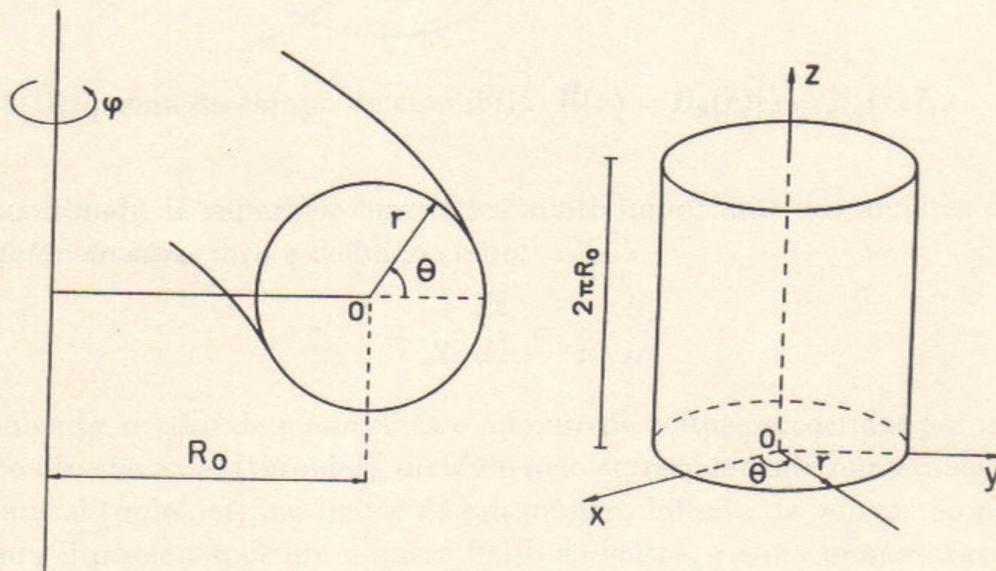


Figura 0-2: Coordenadas “toroidais” r, θ, φ e cilíndricas r, θ, z .

A estrutura das superfícies magnéticas de um campo \vec{B} é determinada a partir da equação diferencial $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$, onde $d\vec{l}$ representa um deslocamento paralelo às linhas de campo. Numa geometria cilíndrica, esta equação pode ser reescrita como:

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} = \frac{dz}{B_z} \quad (0.16)$$

Para que as equações de equilíbrio MHD sejam satisfeitas num sistema com simetria cilíndrica²⁴, a componente radial de $\vec{B}(r)$ deve se anular ($B_r = 0$). Por isso [15, 16, 17]:

$$\vec{B}(r) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta + B_z(r)\vec{e}_z \quad (0.17)$$

²⁴ \vec{B} , \vec{J} e p independem de θ e z .

A equação (0.16) mostra que $B_r = 0$ implica em $dr = 0$. Assim, as linhas do campo helicoidal $\vec{B}(r)$ formam superfícies magnéticas cilíndricas, descritas por $r = C$. Cada valor da constante C individualiza uma superfície magnética (figura 0-3). A linha de campo correspondente a $C = 0$ é chamada de *eixo magnético*.

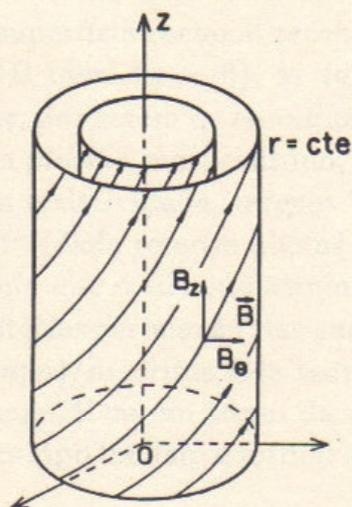


Figura 0-3: Esquema do campo de equilíbrio $\vec{B}(r) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta + B_z(r)\vec{e}_z$.

Uma quantidade de superfície magnética muito importante nas análises de estabilidade é o *fator de segurança* q definido como:

$$q(r) \equiv \frac{1}{R_0} \frac{dz}{d\theta} = \frac{r}{R_0} \frac{B_z}{B_\theta} \quad (0.18)$$

Geometricamente, o valor de q especifica o número de voltas percorridas por uma linha de campo na direção axial (toroidal), dividido pelo correspondente número de voltas na direção azimutal (poloidal), no limite de um número infinito de voltas. Se uma linha se fecha sobre si mesma após um número finito de voltas, q é um número racional; e a superfície magnética também é chamada de *racional*.

Em geral, ao se estudar a estabilidade de um plasma cilíndricamente simétrico, escolhe-se o deslocamento perturbativo $\delta\vec{r}$ da seguinte forma [15, 16, 18]:

$$\delta\vec{r}(r, \theta, z, t) = \vec{\xi}(r) e^{i(m\theta - n\frac{z}{R_0})} e^{-i\omega t} \quad (0.19)$$

Devido à simetria do equilíbrio, as dependências em θ e z foram expandidas em séries de Fourier (assim como foi feito para a dependência temporal). m e n são os números (inteiros) de onda na direção azimutal e axial, respectivamente. Cada par $(m; n)$ caracteriza um modo perturbativo. A superfície da frente de onda da perturbação é dada por $m\theta - n\frac{z}{R_0} = \text{constante}$.

As análises de estabilidade mostraram que um modo $(m; n)$ tende a se desenvolver na superfície magnética $r = r_s$ cuja as linhas de \vec{B} são paralelas à frente de onda da perturbação $\delta\vec{r}$, ou seja [15, 16, 18]:

$$\vec{B}(r_s) \cdot \vec{\nabla} \left(m\theta - n\frac{z}{R_0} \right) = 0 \quad (0.20)$$

A expressão (0.20) equivale a:

$$q(r_s) = \frac{m}{n} \quad (0.21)$$

Na superfície $r = r_s$, cada linha de \vec{B} se fecha sobre si mesma após m voltas toroidais e n voltas poloidais. Esta superfície racional recebe o nome de *superfície ressonante*.

Segundo o modelo MHD ideal ($\eta = 0$), as *instabilidades de dobra* com $m = 0$ e $m = 1$ são as mais perigosas, por serem de crescimento mais rápido. Tais instabilidades deformam toda a coluna do plasma sem, contudo, romperem as linhas do campo \vec{B} .

Ao se incluir o efeito da resistividade, surgem “novos” modos que são excluídos na teoria MHD ideal. A resistividade remove alguns dos vínculos topológicos associados à estrutura de \vec{B} , permitindo que o sistema atinja estados de menor energia potencial através da quebra e da posterior reconexão das suas linhas de campo.

Os *modos de ruptura* ($m; n$), descritos pela teoria MHD resistiva ($\eta \neq 0$), provocam a quebra das superfícies magnéticas em torno da região de ressonância $r = r_s$. Ao se reconectarem, as linhas de campo tendem a formar superfícies magnéticas com estrutura de ilhas (figura 0-4).

Uma *ilha magnética* é um tubo formado por superfícies magnéticas que envolvem um eixo magnético local. As ilhas se enrolam helicoidalmente em torno do eixo $r = 0$. Toda esta estrutura, gerada por um modo ($m; n$), se fecha sobre si mesma após m voltas toroidais e n voltas poloidais. Quando as ilhas crescem, as superfícies cilíndricas que caracterizam o equilíbrio são “empurradas”, podendo até se romperem. Nesta tese, nós calculamos uma estrutura de ilhas típica de plasmas confinados em *reversed-field-pinches*.

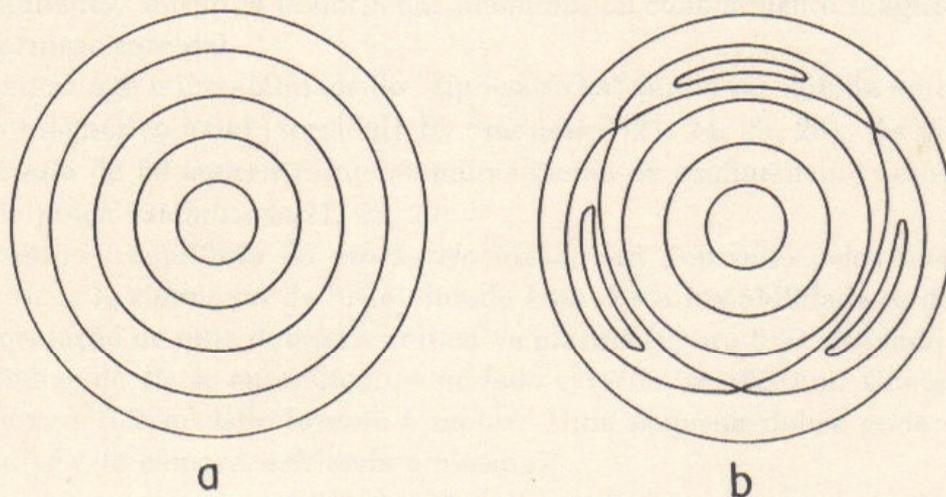


Figura 0-4: (a) Secção transversal das superfícies magnéticas de um plasma em equilíbrio cilíndrico. (b) Superfícies magnéticas com estrutura de ilhas, devido ao desenvolvimento de um modo de ruptura com $m = 3$.

A história das pesquisas sobre o confinamento de plasmas é caracterizada pela procura de configurações magnéticas cada vez mais estáveis.

0.7 Um breve histórico do confinamento magnético de plasmas

Por volta de 1950, foram realizadas as primeiras experiências de confinamento magnético de plasmas, explorando o *efeito pinch*[19, 20]. Em tais experimentos[21], aplicava-se uma diferença de potencial elétrico entre as extremidades de um tubo cilíndrico, fazendo com que uma densidade de corrente axial J_z fluísse através do plasma. Esta corrente gerava um campo magnético azimutal B_θ . Como a força resultante $\vec{J} \times \vec{B} = J_z B_\theta (-\vec{e}_r)$ age radialmente “para dentro”, a coluna de plasma era comprimida até que a força eletromagnética e o gradiente da pressão cinética se equilibrassem. Este sistema de confinamento magnético ficou conhecido como *z-pinch*. O aquecimento do plasma era proporcionado por sua própria corrente elétrica²⁵.

O *z-pinch* apresentava dois graves problemas. O primeiro estava na sua forma cilíndrica, que favorecia a perda de partículas e de energia pelas extremidades. O segundo era que seu equilíbrio era altamente instável a deformações do “tipo-salsicha”, que correspondem aos modos (MHD ideal) com $m = 0$ (figura 0-5). Tal instabilidade resulta de uma constrição (ou expansão) localizada, com simetria azimutal, na coluna de plasma. Nas regiões de constrição, a corrente do plasma se concentra, tornando J_z e B_θ maiores do que o “normal”. Como a pressão cinética do plasma não pode crescer a fim de resistir ao aumento da pressão magnética, a perturbação se desenvolve. Em consequência, as regiões de constrição tendem a ficar naturalmente mais apertadas (e as regiões de expansão tendem a aumentar). Esta instabilidade freqüentemente ocasionava a quebra da coluna do plasma[22].

A solução encontrada para evitar as perdas nas bordas foi dobrar o *z-pinch* e unir suas extremidades. Assim, a maioria das máquinas de confinamento magnético passou a ter um formato toroidal.

Percebeu-se que a instabilidade do “tipo-salsicha” podia ser inibida adicionando-se um campo magnético axial (toroidal) B_z “modesto”[23, 24, 25, 26]. As pesquisas no final da década de 50 concentraram-se num sistema de confinamento com $B_z \sim B_\theta$, chamado de *pinch-estabilizado*[27, 28, 29].

No entanto, o equilíbrio do *pinch-estabilizado* era destruído pelos modos (MHD ideal) com $m = 1$, chamados de instabilidade-*kink*. Esta instabilidade se desenvolve a partir da formação de uma dobra na coluna de plasma (figura 0-5). No lado interno da dobra, as linhas de B_θ se aproximam, e no lado externo, se afastam. Como resultado, a pressão magnética no lado interno é maior. Uma pequena dobra pode crescer até atingir a parede da câmara, esfriando o plasma.

Para se atenuar esta instabilidade, passou-se a envolver o plasma com uma casca metálica de alta condutividade. Assim, se o movimento instável ocorresse num tempo muito mais curto do que o necessário para as linhas de B_θ penetrarem na casca condutora, então estas linhas de campo eram comprimidas entre a descarga e a parede²⁶. Esta compressão resultava numa força restauradora[23, 24].

²⁵Um plasma com resistividade η dissipa uma potência de ηJ^2 na forma de calor.

²⁶Um ponto de vista alternativo é que a coluna de plasma é repelida por uma corrente imagem, oposta, induzida na parede condutora.

Outra maneira de inibir a instabilidade-*kink* é elevando-se a intensidade do campo externo B_z . O modo $m = 1$ é estabilizado se o critério de *Kruskal-Shafranov* é satisfeito[30, 31]:

$$\frac{B_\theta(a)}{B_z(a)} < \frac{2\pi a}{L}$$

onde $L = 2\pi R_0$ é o comprimento da coluna cilíndrica periódica. Esta condição (normalmente expressa como $q(a) > 1$) determina um limite na magnitude da corrente do plasma $I_p = \frac{2\pi a}{\mu_0} B_\theta(a)$ em função da intensidade do campo toroidal. Quando esta condição é violada, a coluna do plasma se deforma helicoidalmente.

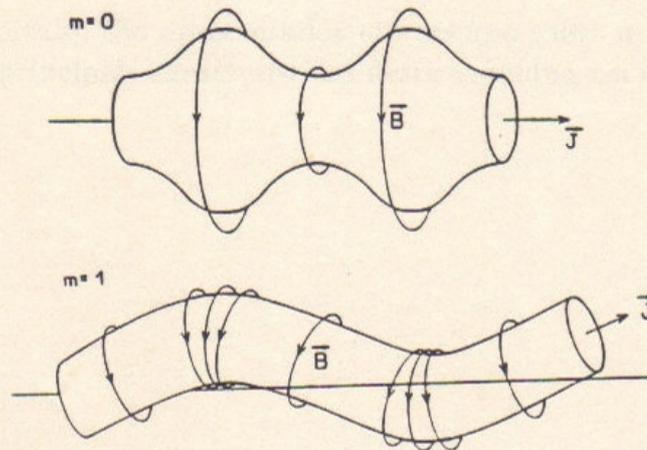


Figura 0-5: Instabilidade-“salsicha” ($m = 0$) e instabilidade-*kink* ($m = 1$).

Apesar do campo externo estabilizante e da forma toroidal, o confinamento no *pinch-estabilizado* era caracterizado por grandes perdas de energia e por instabilidades residuais. Estes insucessos iniciais nas pesquisas sobre o confinamento magnético de plasmas não diminuíram o otimismo dos pesquisadores daquela época. Muitos acreditavam que a construção de um reator de fusão não estava longe de ocorrer. Porém, eles já haviam percebido que as instabilidades constituiriam num sério obstáculo para o progresso das pesquisas. As instabilidades pareciam impor limites nas quantidades de pressão e de corrente que podiam ser confinadas por um campo magnético[32, 33].

As primeiras análises teóricas de estabilidade baseavam-se no modelo MHD ideal. Usando o *princípio da energia*[34, 35], B. R. Suydam obteve em 1958 um importante critério para a verificação da estabilidade de um equilíbrio cilíndrico[36]. Este critério estabelece que os modos com $m \neq 0$ são estáveis se a desigualdade:

$$-\frac{dp}{dr} < \frac{rB_z^2}{8\mu_0} \left(\frac{dq/dr}{q} \right)^2$$

é satisfeita em todos os pontos do plasma²⁷. Num *pinch-estabilizado*, $dq/dr \sim 0$, de forma que esta condição não era satisfeita. Isto explicava a sua pouca estabilidade.

²⁷Num plasma confinado, a pressão decresce do centro para a borda da câmara ($\frac{dp}{dr} < 0$).

O critério de Suydam sugeriu que a estabilidade de um *pinch* poderia ser melhorada de duas maneiras: aumentando a intensidade de B_z ou aumentando a variação do passo²⁸ das linhas de \vec{B} (o que corresponde a aumentar dq/dr).

O primeiro caminho (B_z grande) foi originalmente proposto por A. D. Sakharov e I. E. Tamm. No início dos anos 60, foram construídas na ex-URSS uma série de máquinas denominadas de *tokamak*²⁹. Nestas máquinas, B_z é ~ 10 vezes maior que B_θ . O *tokamak* vem sendo muito estudado e é um dos esquemas favoritos para os futuros reatores de fusão[38].

O segundo caminho (dq/dr grande) originou as máquinas *reversed-field-pinch* (RFP). Num RFP, o campo toroidal tem seu sentido revertido perto da borda do plasma. Esta reversão na orientação de B_z proporciona um aumento em dq/dr .

No próximo capítulo, são apresentados um resumo sobre a história do desenvolvimento do RFP, as principais características desta máquina e a motivação da tese.

²⁸O passo $P(r)$ é definido como o avanço axial da linha por radiano de rotação azimutal: $P(r) \equiv \frac{dz}{d\theta} = R_0 q(r)$.

²⁹Do russo, *toroid* (toroidal) *kamera* (câmara) *magnit* (magnético) *katushka* (espira)[8]. Parece que o primeiro *tokamak* foi construído em 1955 e era um projeto ultra-secreto[37].

Bibliografia

- [1] Villela G. G., Bacila M., Tastaldi H., *"Bioquímica"*, Ed. Guanabara, Rio de Janeiro (1961).
- [2] Gibbons J. H., Blair P. D., Gwin H. L., *Strategies for Energy Use*, Sci. Am. 261(3), 86 (1989).
- [3] Cook E., *"Man, Energy, Society"*, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1976).
- [4] Nova A. C. B., *"Energia e Classes Sociais no Brasil"*, Ed. Loyola, São Paulo (1985).
- [5] Tipler P. A., *"Física Moderna"*, Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro (1981).
- [6] *"Almanaque Abril 1993"*, Ed. Abril, São Paulo (1993).
- [7] Cruz F. F. S., Marinelli J. R., Moraes M. M. W., *Fusão Nuclear em Plasma*, Caderno Catarinense de Ensino de Física (UFSC) 6(1), 59 (1989).
- [8] Gross R. A., *"Fusion Energy"*, John Wiley & Sons, New York (1984).
- [9] Kammash T., *"Fusion Reactor Physics"*, Ann Arbor Science Publishers, New York (1976).
- [10] Saffioti W., *"Fundamentos de Energia Nuclear"*, Ed. Vozes, Rio de Janeiro (1982).
- [11] Glasstone S., Lovberg R. H., *"Controlled Thermonuclear Reactions"*, D. Van Nostrand Company, New York (1960).
- [12] Langmuir I., *Oscillations in Ionized Gases*, Proc. Nat. Acad. Sci. 14, 627 (1928).
- [13] Lawson J. D., *Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor*, Proc. Phys. Soc. (London) B-70, 6 (1957).
- [14] Motz H., *"The Physics of Laser Fusion"*, Academic Press, London (1979).
- [15] Gill R. D. (ed.), *"Plasma Physics and Nuclear Fusion Research"*, Academic Press, London (1981).
- [16] Bateman G., *"MHD Instabilities"*, The MIT Press, London (1978).

- [17] Galvão R. M. O., *Equilíbrio Magnetohidrodinâmico*, Física de Plasma (UFF) 1, G1 (1979).
- [18] Galvão R. M. O., *Estabilidade Magnetohidrodinâmica*, Física de Plasma (UFF) 1, H1 (1979).
- [19] Bennett W. H., *Magnetically Self-Focusing Streams*, Phys. Rev. 45, 890 (1934).
- [20] Tonks L., *Theory of Magnetic Effects in the Plasma of an Arc*, Phys. Rev. 56, 360 (1939).
- [21] Thonemann P. C., Cowhig. W. T., *High-Current Gas Discharge at Low Pressures*, Nature 166, 903 (1950).
- [22] Cousins S. W., Ware A. A., *Pinch Effect Oscillations in a High Current Toroidal Ring Discharge*, Proc. Phys. Soc. (London) B-64, 159 (1951).
- [23] Tayler R. J., *The Influence of an Axial Magnetic Field on the Stability of a Constricted Gas Discharge*, Proc. Phys. Soc. (London) B-70, 1049 (1957).
- [24] Rosenbluth M. N., *Stability and Heating in the Pinch Effect*, Proceedings of the 'Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy (Geneva,1958)', United Nations Publication, 31, 85 (1958).
- [25] Burkhardt L. C., Lovberg R. H., Sawyer G. A., Stratton T. F., *Stability Studies with Longitudinal Magnetic Field on a Straight Pinched Discharge*, J. Appl. Phys. 29, 964 (1958).
- [26] Golovin I. N., Ivanov D. P., Kirillov V. D., Petrov D. P., Razumanova K. A., Yavlinsky N. A., *Stable Plasma Column in a Longitudinal Magnetic Field*, Proceedings of the 'Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy (Geneva,1958)', United Nations Publication, 32, 72 (1958).
- [27] Butt E. P., Carruthers R., Mitchell J. T. D., Pease R. S., Thonemann P. C., Bird M. A., Blears J., Hartill E. R., *The Design and Performance of ZETA*, Proceedings of the 'Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy (Geneva,1958)', United Nations Publication, 32, 42 (1958).
- [28] Allibone T. E., Chick D. R., Thomson G. P., Ware A. A., *Review of Controlled Thermonuclear Research at A. E. I. Research Laboratory*, Proceedings of the 'Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy (Geneva,1958)', United Nations Publication, 32, 169 (1958).
- [29] Conner J. P., Hagerman D. C., Honsaker J. L., Karr H. J., Mize J. P., Osher J. E., Phillips J. A., Stovall Jr. E. J., *Operational Characteristics of the Stabilized Toroidal Pinch Machine*, Proceedings of the 'Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy (Geneva,1958)', United Nations Publication, 32, 297 (1958).

- [30] Kruskal M., Schwarzschild M., *Some Instabilities of a Completely Ionized Plasma*, Proc. Phys. Soc. (London) A-223, 348 (1954).
- [31] Shafranov V. D., *On the Stability of a Cylindrical Gaseous Conductor in a Magnetic Field*, J. Nucl. Energy 5, 86 (1957).
- [32] Carruthers R., Davenport P. A., *Observation of the Instability of Constricted Gaseous Discharge*, Proc. Phys. Soc. (London) B-70, 49 (1957).
- [33] Latham R., Nation J. A., *Report on Linear Pinch Devices*, Nucl. Instrum. 4, 261 (1959).
- [34] Bernstein I. B., Frieman E. A., Kruskal M. D., Kulsrud R. M., *An Energy Principle for Hydromagnetic Stability Problems*, Proc. Roy. Soc. (London) A-244, 17 (1958).
- [35] Newcomb W. A., *Hydromagnetic Stability of a Diffuse Linear Pinch*, Ann.Phys. 10, 232 (1960).
- [36] Suydam B. R., *Stability of a Linear Pinch*, Proceedings of the 'Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy (Geneva,1958)', United Nations Publication, 31, 157 (1958).
- [37] Kadomtsev B. B., *Evolution of the Tokamak*, Plasma Phys. Control. Fusion 30, 2031 (1988).
- [38] Kadomtsev B. B., *"Tokamak Plasma: a Complex Physical System"*, IOB Publishing, London (1992).

Capítulo 1

O “Reversed-Field-Pinch”

O *reversed-field-pinch* (RFP) é um protótipo de reator de fusão nuclear. Na seção 1.1, apresentam-se a origem histórica e as características desta máquina de confinamento magnético de plasmas. Na seção 1.2, expõe-se a motivação desta tese.

1.1 Uma introdução ao RFP

O RFP[1, 2, 3] é um sistema toroidal com simetria axial no qual o plasma é confinado pela combinação de um campo toroidal B_z (produzido em grande parte pelas correntes poloidais no plasma) com um campo poloidal B_θ (gerado pela corrente do plasma que flui ao longo da direção toroidal). Num RFP, $B_z \sim B_\theta$ e $q \ll 1$ (num *tokamak*, $B_z \gg B_\theta$ e $q > 1$). O nome *reversed-field-pinch* vem do fato de que B_z apresenta, na região externa do plasma ($r \sim a$), um sentido oposto ao da região interna ($r < a$). Este *campo reverso* é gerado naturalmente pelo próprio plasma, como uma consequência do processo de relaxação.

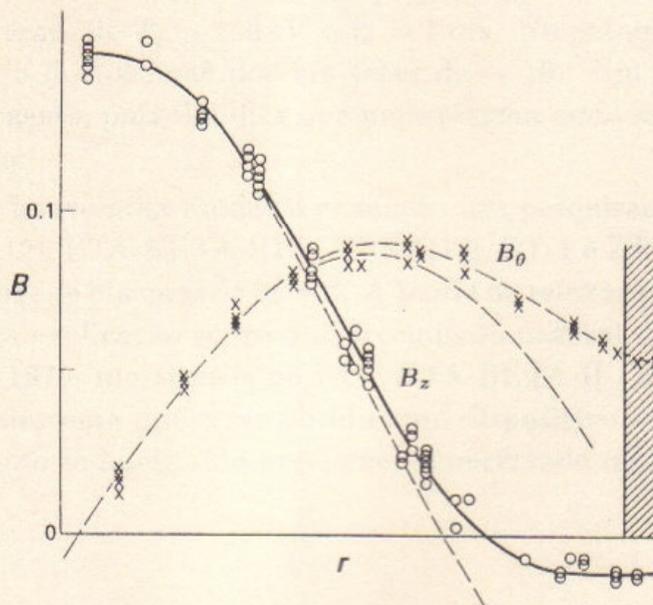


Figura 1-1: Perfis relaxados de $B_\theta(r)$ e $B_z(r)$ típicos de uma máquina RFP[3].

No final dos anos 50, campos toroidais espontaneamente reversos já haviam sido detectados na maioria dos *pinches-estabilizados* (como, por exemplo, no ZETA[4], no Gamma[5] e no Columbus S-4 (linear)[6]). Contudo, a importância desta observação não foi apreciada naquele tempo. O aparecimento do campo reverso era inesperado e inconsistente com as previsões teóricas.

Em 1962, A. P. Babichev *et al.*[7] observaram que plasmas toroidais retinham uma configuração RFP por um tempo maior do que o tempo $\tau_r \sim \frac{\mu_0 a^2}{\eta}$ esperado para a difusão resistiva. Esta observação é um dos pontos fundamentais do comportamento de plasmas de RFPs que ainda hoje não é completamente entendida.

No ano seguinte, T. Ohkawa *et al.*[8] compararam a estabilidade de diversas configurações magnéticas experimentais. Eles concluíram que o melhor desempenho era obtido quando se provocava uma reversão no campo toroidal.

Talvez, a observação experimental mais importante para progresso das pesquisas em RFPs tenha sido a descoberta de um *período quiescente* (quase-estacionário) em que a estabilidade da descarga era muito melhorada, associado à *reversão espontânea* de B_z na borda do plasma. Esta descoberta foi feita em 1965 na máquina ZETA[9].

O ZETA ($R_0 = 150 \text{ cm}$; $a = 50 \text{ cm}$) não foi projetado para ter campo toroidal reverso. Porém, B_z se revertia naturalmente quando $\frac{I_p}{\langle B_z \rangle}$ excedia um certo valor crítico ($\langle \dots \rangle$ denota o valor médio sobre o volume do plasma). A auto-reversão já tinha sido observada em outros experimentos, mas nenhum deles exibia um período quase-estacionário, no qual o nível das flutuações era bastante reduzido.

Em 1969, a importância da configuração de campo reverso tornou-se melhor compreendida, sendo publicado o primeiro artigo[10] discutindo as propriedades do RFP ZETA. Mostrou-se que, quando a configuração de campo reverso se ajustava, a temperatura T , o tempo de confinamento de energia τ_e e o parâmetro $\beta \equiv \frac{\langle p \rangle}{\langle B^2 \rangle / 2\mu_0}$ começavam a aumentar constantemente e continuavam a crescer até que o campo reverso se perdesse. Nesta época, a temperatura dos íons e o tempo de confinamento de energia no *tokamak* T-3 eram de $T_i \sim 300 \text{ eV}$ e $\tau_e \sim 10 \text{ ms}$ [11]; maiores do que no ZETA, onde os valores correspondentes eram de $T_i \sim 150 \text{ eV}$ e $\tau_e \sim 1 \text{ ms}$. No entanto, o valor de β de $\sim 5\%$ no RFP excedia o do *tokamak* por um fator de ~ 10 . Um β maior é um fator economicamente atraente, pois significa que mais plasma pode ser confinado por um dado campo magnético.

Nos anos 70, houve uma modesta expansão nas pesquisas de RFPs. Em máquinas como o HBTX-I[12], ETA-BETA-I[13], TPE-1[14], ZT-1 e ZT-S[15] foram estudadas as propriedades físicas de plasmas de alto- β . A teoria de relaxação de J. B. Taylor procurou dar uma primeira explicação sobre o aparecimento natural da configuração de campo reverso[16]. Em 1979, mostrou-se no RFP ETA-BETA-II ($R_0 = 65 \text{ cm}$; $a = 12,5 \text{ cm}$) que o período quiescente podia ser obtido num dispositivo relativamente pequeno[17]. Tal comportamento só havia sido previamente observado no ZETA.

Em 1990, existiam cerca de 15 máquinas-RFP em operação cujos parâmetros típicos eram[3]:

raio da "coluna" de plasma: $a = 7 - 52 \text{ cm}$

raio maior do toróide: $R_0 = 14 - 200 \text{ cm}$

densidade do plasma: $n \simeq 10^{19} - 10^{20} \text{ m}^{-3}$

temperatura dos elétrons e dos íons: $T_e \sim T_i \simeq 0,1 - 1,0 \text{ keV}$

tempo de confinamento de energia: $\tau_e \simeq 0,1 - 1,0 \text{ ms}$

corrente do plasma: $I_p \simeq 100 - 700 \text{ kA}$

$\beta_{\text{poloidal}} \equiv \frac{\langle p \rangle}{\langle B_\theta^2 \rangle / 2\mu_0}$: $\beta_{\text{poloidal}} \simeq 8 - 15 \%$

O RFP vem sendo muito estudado. Este interesse se deve a três razões principais. A primeira é o seu potencial como reator de fusão. O nível de eficiência do RFP (o valor de β) é alto, se comparado com o do *tokamak*. Em princípio, o RFP poderá atingir a temperatura de ignição simplesmente através do aquecimento ôhmico, evitando-se assim a necessidade de sistemas extras de aquecimento. Outro motivo de interesse é que os íons possuem um mecanismo de aquecimento (não compreendido) que faz com que sua temperatura seja freqüentemente maior do que a temperatura dos elétrons. O aquecimento dos íons é o que interessa para a fusão. Além disso, a física do RFP está ligada a de outros sistemas de confinamento como o *tokamak*, o *stellarator* e o *spheromak*. A maioria das técnicas experimentais e teóricas são transferíveis entre estes sistemas. Uma melhor compreensão sobre o confinamento magnético no RFP pode levar até a novos conceitos de reatores.

1.2 A motivação deste trabalho

Segundo Taylor[16], o equilíbrio no RFP é um estado relaxado em que a energia magnética é quase mínima, havendo pouca energia disponível para o desenvolvimento de instabilidades. Mesmo assim, são detectadas oscilações no campo magnético de equilíbrio da ordem de 1%.

Estas oscilações magnéticas são descritas analiticamente como uma superposição de modos de Fourier do tipo $e^{i(m\theta - n\frac{z}{R_0})}$ onde m é o número de onda poloidal e n , o toroidal. Cada componente $(m; n)$ é interpretada como uma distorção na estrutura magnética dentro do plasma, devido a uma instabilidade com o mesmo número $(m; n)$. Uma oscilação $(m; n)$ corresponde ao modo de ruptura $(m; n)$ que provoca o aparecimento de ilhas em torno da superfície ressonante com $q = \frac{m}{n}$.

O principal efeito das instabilidades resistivas é provocar o surgimento de ilhas magnéticas. No entanto, a influência destas ilhas na evolução da descarga varia de acordo com a estrutura magnética global do plasma.

Num *tokamak*, os modos resistivos mais perigosos têm $n = 1$ e m baixo (tipicamente $m = 2, 3$). Como¹ $q > 1$ e $dq/dr > 0$ (figura 1-2), as superfícies ressonantes estão “bem separadas”. As ilhas magnéticas podem atingir grandes amplitudes sem que haja interação entre elas. Se uma ilha encostar na câmara metálica que envolve o plasma, uma grande quantidade de energia é transferida (na forma de calor) do plasma para a câmara. Este fenômeno é chamado de *disruptura*.

Num RFP, os modos resistivos dominantes têm $m = 1$ e n grande (tipicamente $n \sim \frac{2R_0}{a}$). Como $q \ll 1$ e $dq/dr < 0$, as superfícies ressonantes estão muito pouco espaçadas (em comparação com o *tokamak*) e as ilhas logo se superpõem. Com a superposição das ilhas, as superfícies magnéticas em torno das regiões de ressonância são destruídas e as linhas de campo passam a ter um comportamento estocástico. Num RFP, os modos resistivos não são capazes de causar uma *disruptura*.

A diferença entre os efeitos dos modos resistivos no *tokamak* e no RFP é consistente com as diferenças do perfil do fator de segurança $q(r)$ [18]. Num *tokamak*, a configuração magnética está longe do estado de energia potencial mínima. A estabilidade do sistema é aumentada quando ocorrem *disrupturas*, pois o plasma esfria. Num RFP, os campos magnéticos se afastam pouco do estado de energia mínima e os modos resistivos não causam uma *disruptura*. Contudo, especula-se que o desenvolvimento destes modos esteja relacionado com o processo de sustentação do campo reverso.

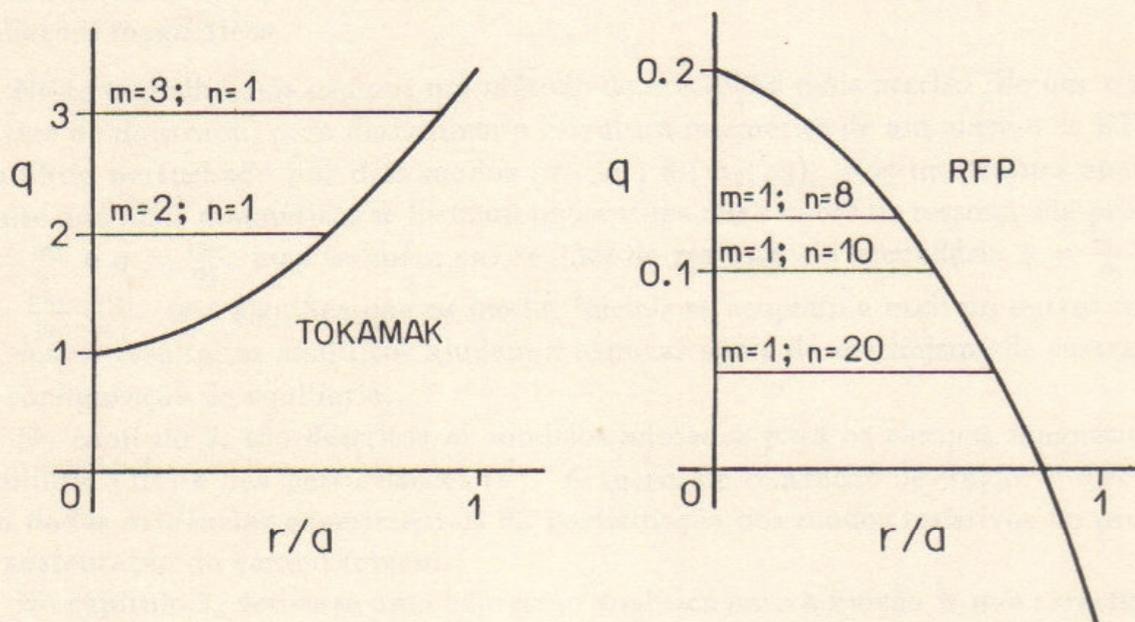


Figura 1-2: Perfis de $q(r)$ característicos no *tokamak* e no RFP.

Partículas com carga elétrica (que constituem um plasma) se movem preferencialmente ao longo das linhas de um campo magnético. Por isso, pode-se compreender melhor o confinamento do plasma em máquinas do tipo *tokamak* ou RFP, através do mapeamento das estruturas magnéticas que caracterizam estes sistemas.

¹ $q > 1$ é uma condição de estabilidade para o *tokamak*. Esta condição garante que o modo mais perigoso ($m = 1; n = 1$) não irá se desenvolver.

Se o plasma apresenta alguma simetria espacial, então sua estrutura magnética é descrita por uma função de superfície $\Psi(x^1, x^2)$; de forma que as superfícies $\Psi = \text{const}$ contém as linhas do campo magnético confinante \vec{B} . Quando esta simetria é ligeiramente quebrada por uma pequena perturbação, as linhas de campo ainda podem formar superfícies magnéticas "aproximadas". O cálculo destas superfícies pode ser feito aplicando-se um *método da média* a fim de se obter uma solução aproximada das equações $\vec{B} \times d\vec{\ell} = 0$.

Na minha dissertação de mestrado, nós determinamos analiticamente a estrutura magnética de um plasma de *tokamak* em equilíbrio MHD ideal perturbado por campos helicoidais ressonantes[19, 20]. Este cálculo foi motivado pela verificação experimental de que a instabilidade disruptora podia ser controlada por correntes elétricas externas, enroladas helicoidalmente na câmara que contém o plasma[21]. Nos nossos cálculos, a forma toroidal do *tokamak* foi levada em conta. Como conseqüência, um único modo perturbativo $(m; n)$, associado ao campo gerado pelas correntes helicoidais externas, criava ilhas magnéticas na região de ressonância principal $q = \frac{m}{n}$ e também em $q = \frac{m \pm 1}{n}$. Nós determinamos expressões analíticas para as superfícies magnéticas em torno das regiões ressonantes, aplicando um método de média para se solucionar as equações $\vec{B} \times d\vec{\ell} = 0$ das linhas do campo magnético total $\vec{B} \equiv \vec{B}_0 + \vec{b}$, onde \vec{B}_0 é o campo de equilíbrio e \vec{b} , o campo das correntes perturbativas. Com nossos resultados, podia se encontrar uma intensidade da corrente helicoidal adequada para se controlar as oscilações magnéticas.

Neste trabalho, nós usamos um método de média[22] mais preciso (do que o usado na tese de mestrado) para determinar a estrutura magnética de um plasma de RFP em equilíbrio perturbado por dois modos $(m_1; n_1)$ e $(m_2; n_2)$. Nós mostramos analiticamente que ilhas magnéticas se formam não apenas nas regiões de ressonância principal $q = \frac{m_1}{n_1}$ e $q = \frac{m_2}{n_2}$, mas também nas regiões de ressonância secundária $q = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$ e $q = \frac{|m_1 - m_2|}{|n_1 - n_2|}$. Isto significa que os modos iniciais se acoplam e excitam outros modos. Os nossos resultados analíticos ajudam a explicar parte do mecanismo de sustentação da configuração de equilíbrio.

No capítulo 2, são descritos os modelos adotados para os campos magnéticos de equilíbrio (\vec{B}_0) e das perturbações (\vec{b}). A teoria de relaxação de Taylor é discutida. São dadas evidências experimentais da participação dos modos resistivos no processo de sustentação do campo reverso.

No capítulo 3, deriva-se uma expressão analítica para a função Ψ que caracteriza a estrutura de plasmas cuja a simetria é quebrada por uma pequena perturbação. Esta função é obtida usando-se um método da média para solucionar as equações $\vec{B} \times d\vec{\ell} = 0$.

No capítulo 4, calcula-se analiticamente a estrutura do campo $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$ de um plasma de RFP em equilíbrio perturbado por dois modos ressonantes. Determinam-se superfícies magnéticas aproximadas, utilizando-se um método da média por nós desenvolvido. Nossos resultados analíticos são comparados com mapas de Poincaré obtidos pela integração numérica das equações das linhas de campo, usando parâmetros típicos do RFP ETA-BETA II.

No capítulo 5, são apresentadas as conclusões deste trabalho.

Bibliografia

- [1] Bodin H. A. B., Newton A. A., *Reversed-Field-Pinch Research*, Nucl. Fusion 20, 1255 (1980).
- [2] Bodin H. A. B., Krakowski R. A., Ortolani S., *The Reversed-Field Pinch: from Experiment to Reactor*, Fusion Technol. 10, 307 (1986).
- [3] Bodin H. A. B., *The Reversed Field Pinch*, Nucl. Fusion 30, 1717 (1990).
- [4] Butt E. P., Carruthers R., Mitchell J. T. D., Pease R. S., Thonemann P. C., Bird M. A., Blears J., Hartill E. R., *The Design and Performance of ZETA*, Proceedings of the 'Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy (Geneva,1958)', United Nations Publication, 32, 42 (1958).
- [5] Allibone T. E., Chick D. R., Thomson G. P., Ware A. A., *Review of Controlled Thermonuclear Research at A. E. I. Research Laboratory*, Proceedings of the 'Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy (Geneva,1958)', United Nations Publication, 32, 169 (1958).
- [6] Buckhardt L. C., Lovberg R. H., *Field Configuration and Stability in a Linear Discharge*, Proceedings of the 'Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy (Geneva,1958)', United Nations Publication, 31, 29 (1958).
- [7] Babichev A. P., Karchevskii A. J., Muromkin Yu. A., *Screw Instability of a Toroidal Discharge in an Alternating Magnetic Field*, Sov. Phys. JETP 16, 625 (1963).
- [8] Ohkawa T., Forsen H. K., Schupp Jr. A. A., Kerst D. W., *Toroidal Discharge Experiments with Rapid Programming*, Phys. Fluids 6, 846 (1963).
- [9] Butt E. P., Cole H. C., Dellis A. N., Gibson A., Rusbridge M., Wort D., *Conditions for Improved Stability in ZETA*, Proceedings of a 'Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Culham, 1965)', IAEA, 2, 751 (1966).
- [10] Robinson D. C., King R. E., *Factors Influencing the Period of Improved Stability in ZETA*, Proceedings of the 'Third International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Novosibirsk,1968)', IAEA, Vienna, 1, 263 (1969).

- [11] Artsimovich L. A., Bobrovsky G. A., Gorbunov E. P., Ivanov D. P., Kirillov V. D., Kuznetsov E. I., Mirnov S. V., Petrov M. P., Razumanova K. A., Strelkov V. S., Shcheglov D. A., *Experiments in Tokamak Devices*, Nucl. Fusion Supplement 1, 17 (1969).
- [12] Gowers C. W., Robinson D. C., Sykes A., Verhage A. J. L., Wesson J. A., Watts M. R. C., Bodin H. A. B., *An Experimental, 3-D Numerical and Analytical Study of Reversed-Field Pinches (RFP)*, Nucl. Fusion Supplement 1, 429 (1977).
- [13] Buffa A., Costa S., Giannella R., Malesani G., Nalesso G. F., Ortolani S., *Heating, Diffusion and Stability of Reverse-Field Pinch Configurations*, Nucl. Fusion Supplement 1, 447 (1977).
- [14] Shimada T., Hirano Y., Maejima Y., Ogawa K., *Reversed-Field Pinch Experiments on TPE-1*, Nucl. Fusion Supplement 1, 463 (1977).
- [15] Baker D. A., Burkhardt L. C., Di Marco J. N., Haberstick A., Hagenon R. L., Howell R. B., Karr H. J., Schofield A. E., *Current, Temperature and Confinement Time Scaling in Toroidal Reversed-Field Pinch Experiments ZT-1 and ZT-S*, Nucl. Fusion Supplement 1, 419 (1977).
- [16] Taylor J. B., *Relaxation of Toroidal Plasma and Generation of Reverse Magnetic Fields*, Phys. Rev. Lett. 33, 1139 (1974).
- [17] Buffa A., Costa S., De Angelis R., Giudicotti L., Gowers C. W., Malesani G., Nalesso G. F., Ortolani S., Scarin P., Watts M. R. C., *ETA-BETA-II: Reversed Field Pinch Plasmas with Improved Confinement*, Nucl. Fusion Supplement 2, 275 (1981).
- [18] Holmes J. A., Carreras B. A., Hender T. C., Hicks H. R., Lynch V. E., An Z. G., Diamond P. H., *Nonlinear Interaction of Tearing Modes: A Comparison between the Tokamak and the Reversed Field Pinch Configurations*, Phys. Fluids 28, 261 (1985).
- [19] Monteiro L. H. A., *"Superfícies Magnéticas de Campos Helicoidais Toroidais em Tokamaks"*, Dissertação de Mestrado, IFUSP (1990).
- [20] Monteiro L. H. A., Okano V., Kucinski M. Y., Caldas I. L., *Magnetic Structure of Toroidal Helical Fields in Tokamaks*, Phys. Lett. A 193, 89 (1994).
- [21] Karger F., Lackner K., Fussmann G., Cannici B., Engelhardt W., Gernhardt J., Glock E., Groening D. E., Klüber O., Lisitano G., Mayer H. M., Meisel D., Morandi P., Sesnic S., Wagner F., Zehrfeld H. P., *On the Origin of the Disruptive Instability in the Pulsator I Tokamak*, Nucl. Fusion Supplement 1, 267 (1977).
- [22] Kucinski M. Y., Caldas I. L., Monteiro L. H. A., Okano V., *Magnetic Surfaces in Non-Symmetric Plasmas*, Plasma Phys. Control. Fusion 34, 1067 (1992).

Capítulo 2

A fase quase-estacionária no RFP

Em máquinas como o *tokamak* e o RFP, a configuração do campo magnético tende a evoluir na direção de um pequeno número de estados preferidos, que independem das condições iniciais da descarga. A estrutura detalhada destes estados é determinada por uns poucos parâmetros, como a corrente do plasma e o fluxo magnético toroidal, e pela geometria do sistema. Este processo envolve a reconexão das linhas do campo magnético e é conhecido como *relaxação do plasma*[1].

Numa descarga de RFP, o plasma relaxa para uma configuração magnética quase-estacionária com campo toroidal reverso. Esta fase é sustentada por um tempo muito maior do que o previsto teoricamente para a difusão resistiva.

Neste capítulo, discute-se o modelo de relaxação de Taylor, que descreve razoavelmente os perfis do campo magnético de equilíbrio observado em RFPs. São dadas evidências experimentais de uma possível relação entre a sustentação do campo reverso e o desenvolvimento de modos resistivos. Os objetivos deste trabalho são explicados de uma maneira mais detalhada.

2.1 O princípio variacional de Woltjer

Considere um plasma inicialmente em repouso. Se este plasma não está em equilíbrio, ele entrará em movimento. Ao se mover, uma fração da sua energia potencial é convertida em energia cinética, que por sua vez é parcialmente dissipada na forma de radiação. Assim, o plasma vai para um estado cuja energia é menor do que a do estado inicial. A princípio, um plasma se moveria até atingir o estado de equilíbrio de energia potencial mínima[2]. Quando isto acontece, diz-se que houve uma *relaxação completa* do plasma.

Um plasma confinado por um campo magnético \vec{B}_0 num volume V_p tem a seguinte energia “não-cinética” E [2]:

$$E = \int_{V_p} \left(\frac{\vec{B}_0^2}{2\mu_0} + \frac{p}{\Gamma - 1} \right) dv \quad (2.1)$$

onde p é a pressão e Γ é a razão entre a capacidade térmica do plasma a pressão constante e a capacidade térmica a volume constante. O primeiro termo do integrando é a densidade de energia magnética e o segundo, a densidade de energia interna (térmica).

As configurações de plasmas completamente relaxados devem minimizar a expressão (2.1). O caminho inverso também deve ser verdadeiro: configurações de equilíbrio podem ser obtidas através da minimização de E ¹. Neste cálculo, os vínculos do movimento de relaxação têm que ser levados em consideração.

Um vínculo é uma condição de invariância sobre alguma quantidade do movimento. Somente são acessíveis os estados que satisfazem aos mesmos invariantes. Assim, a minimização de E não deve ser feita entre todos os estados possíveis, ela deve ser feita entre os estados que têm os mesmos invariantes do estado inicial.

Se a energia E é minimizada sem se levar em conta nenhum vínculo, obtém-se que $\vec{B}_0 = 0$ e $p = 0$. Embora esta seja uma solução de equilíbrio, ela não tem nenhum interesse prático[1, 2].

Num plasma envolvido por uma câmara perfeitamente condutora², o fluxo magnético toroidal Φ_z é constante. A minimização de E com $\Phi_z = \text{constante}$ dá um estado com densidade de corrente nula $\vec{J} = 0$, que também não é uma solução interessante[1]. Portanto, há a necessidade de se considerar vínculos adicionais. Um dos principais problemas para se calcular a configuração final de um plasma é descobrir quais são os vínculos que devem ser impostos ao movimento de relaxação.

No interior de um plasma ideal em equilíbrio MHD estático, as linhas do campo \vec{B}_0 são “congeladas”. Isto significa que qualquer propriedade topológica das linhas de \vec{B}_0 é uma quantidade invariante, podendo ser tomada como um vínculo[2].

Em 1958, L. Woltjer mostrou que, num sistema hidromagnético com resistividade nula ($\eta = 0$), a *helicidade magnética total* K_0 associada ao campo \vec{B}_0 é constante[3]. K_0 é definida como:

$$K_0 = \int_{V_p} \vec{A} \cdot \vec{B}_0 dv$$

onde \vec{A} é o potencial vetor de \vec{B}_0 ($\vec{B}_0 = \vec{\nabla} \times \vec{A}$) e V_p é o volume do sistema.

Woltjer queria descobrir que vínculos deveriam ser considerados a fim de se obter a configuração de \vec{B}_0 que minimizava a energia magnética E_m do sistema:

$$E_m = \int_{V_p} \frac{\vec{B}_0^2}{2\mu_0} dv$$

¹De acordo com Leibniz, o nosso mundo é o melhor de todos os possíveis e, por isso, as leis da natureza podem ser descritas em termos de *princípios variacionais*.

²Esta condição implica em $\vec{n} \cdot \vec{B}_0 = 0$, onde \vec{n} é o vetor normal à superfície externa do sistema.

Ele presumia que o estado de energia magnética mínima deveria ser *force-free*, isto é, com $\vec{J} \times \vec{B}_0 = 0$. Esta idéia parece intuitiva pois, se a energia magnética é mínima, então o campo \vec{B}_0 não pode produzir movimento e, por isso, a força de Lorentz deve se anular.

Uma configuração *force-free* é descrita pelo sistema de equações:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J} \quad (2.2)$$

sendo μ uma função das coordenadas espaciais. Woltjer provou que, num sistema envolvido por uma casca perfeitamente condutora, a solução com $\mu = \text{constante}$ representa o estado de menor energia magnética. Nesta prova, ele considerou $K_0 = \text{constante}$ como o único vínculo do movimento, sendo o estado relaxado obtido através do seguinte princípio variacional:

$$\delta E_m - \lambda \delta K_0 = 0 \quad (2.3)$$

onde λ é um multiplicador de Lagrange. Para um plasma completamente relaxado, $\mu = 2\lambda\mu_0 = \text{constante}$.

Com seus resultados, Woltjer pretendia descrever os campos magnéticos observados em plasmas estelares (como, por exemplo, na Nebulosa do Caranguejo).

Em 1969, D. R. Wells e J. Norwood Jr. usaram um princípio variacional semelhante a (2.3) para calcular a configuração de um plasma em equilíbrio dinâmico ($v \neq 0$) estável[4]. Neste cálculo, minimizou-se a energia E' do plasma:

$$E' = \int_{V_p} \left(\frac{\vec{B}_0^2}{2\mu_0} + \frac{\rho \vec{v}^2}{2} \right) dv \quad (2.4)$$

onde $\rho \vec{v}^2/2$ é a densidade de energia cinética, tomando-se como vínculos do movimento³:

$$K_0 = \text{constante} \quad e \quad \int_{V_p} \vec{v} \cdot \vec{B}_0 dv = \text{constante}$$

Eles obtiveram que o estado de equilíbrio mais estável era *force-free* ($\vec{J} \times \vec{B}_0 = 0$), com $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \vec{B}_0$ (note que a velocidade de equilíbrio \vec{v} é igual à velocidade de Alfvén). Esta configuração foi observada experimentalmente em Θ -*pinches*[4].

Em 1974, J. B. Taylor elaborou sua teoria de relaxação baseando-se no trabalho de Woltjer. A teoria de Taylor descreve com razoável sucesso a configuração magnética de equilíbrio observada em RFPs.

Esta teoria é descrita a seguir.

³O segundo vínculo expressa o fato de que as componentes paralelas de \vec{v} e \vec{B}_0 não interagem.

2.2 O modelo de estados relaxados de Taylor

A helicidade magnética[5] é uma medida do grau de “enrolamento” (*twist*) e de “acoplamento” (*linking*) das linhas do campo \vec{B}_0 e pode ser atribuída a duas fontes diferentes: uma interna, devido às próprias torções das linhas, e outra externa, devido aos entrelaçamentos das superfícies magnéticas que contém estas linhas. Por exemplo, para um sistema constituído por duas superfícies magnéticas toroidais com fluxos magnéticos longitudinais ϕ_1 e ϕ_2 , $K_0 = 2\phi_1\phi_2$ se estas superfícies estão entrelaçadas como anéis de uma corrente. Se este entrelaçamento não existe, $K_0 = 0$ [1].

No caso MHD ideal, a helicidade é uma constante do movimento. Quando as linhas de campo são fechadas, há uma helicidade invariante para cada linha; se o campo gera superfícies magnéticas, há uma helicidade invariante para cada superfície. Para cada tubo de fluxo dentro do plasma, pode-se definir uma helicidade K_i :

$$K_i = \int_{V_i} \vec{A} \cdot \vec{B}_0 \, dv \quad (0 \leq i \leq \infty)$$

onde V_i é o volume do $i^{\text{ésimo}}$ tubo cuja superfície lateral é formada por linhas de campo. Cada integral K_i é invariante num plasma perfeitamente condutor.

Contudo, plasmas reais têm uma resistividade não-nula. Como conseqüência, todos os vínculos topológicos são relaxados devido à difusão resistiva. Na relaxação, ocorre um processo de *dissipação seletiva* entre as quantidades conservadas; isto é, umas quantidades decaem mais rápido do que outras. A evolução do plasma é governada pela(s) quantidade(s) menos dissipada(s).

Taylor conjecturou que, no movimento de relaxação de um plasma *ligeiramente resistivo*, cada invariante K_i deixava de ser relevante, pois as linhas de campo podiam se quebrar e se reconectar e os tubos de fluxo não retinham mais suas identidades. Assim, a helicidade podia ser transferida entre as fontes interna e externa, alterando localmente a topologia do campo. No entanto, a helicidade magnética total K_0 deveria permanecer aproximadamente conservada, uma vez que independe da necessidade de se identificar as linhas de campo e de quaisquer considerações topológicas[6]. Se a energia interna do plasma fosse desprezível⁴, então a relaxação do plasma poderia ser descrita pelo princípio variacional (2.3) de Woltjer. Isto é, a energia potencial (magnética) deve ser minimizada assumindo-se que helicidade magnética total é constante.

Taylor também percebeu que, num plasma resistivo, tanto a energia magnética quanto a helicidade total estão naturalmente sujeitas à dissipação. No entanto, a teoria variacional não exige que a helicidade total seja absolutamente invariante; ela somente exige que o processo dinâmico responsável pela dissipação da energia seja mais rápido do que para a dissipação da helicidade. O que importa é a invariância da helicidade em relação à energia.

⁴ $\frac{p}{\Gamma-1} \ll \frac{\vec{B}_0^2}{2\mu_0}$.

Portanto, a configuração magnética de equilíbrio é solução do sistema de equações (2.2). Taylor solucionou estas equações usando uma "aproximação cilíndrica" para descrever o RFP.

Como num RFP, $q \ll 1$, as linhas de \vec{B}_0 envolvem o plasma poloidalmente muito mais do que toroidalmente. A curvatura das linhas de \vec{B}_0 é quase independente da toroidicidade, exceto perto do eixo magnético. Por este motivo, os efeitos toroidais são relativamente pequenos num RFP (e não pelo fato da razão de aspecto R_0/a ser muito grande). A geometria toroidal do RFP pode ser aproximada por um cilindro periódico (figura 0-2, pág. xxi), tomando-se: $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 2\pi R_0$. A solução das equações (2.2) em coordenadas cilíndricas é[6]:

$$\begin{aligned} B_{0r} &= 0 \\ B_{0\theta}(r) &= B_0 J_1(\mu r) \\ B_{0z}(r) &= B_0 J_0(\mu r) \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde B_0 é o valor (constante) do campo no eixo magnético ($r = 0$) e J_0 e J_1 são as funções cilíndricas de Bessel de ordens 0 e 1. Esta solução é normalmente chamada de *Modelo da Função de Bessel* (MFB). A constante μ pode ser relacionada a grandezas medidas experimentalmente.

Em geral, não são disponíveis medidas internas (por meios não destrutivos) da configuração magnética de um plasma de RFP em alta temperatura[7]. Por isso, normalmente a informação experimental diz respeito ao campo magnético observado na borda.

Para descrever a configuração de um plasma de RFP, são comumente usados dois parâmetros adimensionais, Θ e F , relacionados com a intensidade de \vec{B}_0 na borda do plasma ($r = a$):

$$\begin{aligned} \Theta &\equiv \frac{B_{0\theta}(a)}{\langle B_{0z} \rangle} = \frac{\mu_0 a I_p}{2\Phi_z} \\ F &\equiv \frac{B_{0z}(a)}{\langle B_{0z} \rangle} = \frac{\pi a^2 B_{0z}(a)}{\Phi_z} \end{aligned}$$

onde $\langle B_{0z} \rangle$ é o valor médio (sobre o volume do plasma) do campo toroidal e I_p é a corrente do plasma. Θ é uma medida da magnitude da corrente em relação ao fluxo toroidal Φ_z . F se refere à "profundidade" do campo reverso: há reversão de B_{0z} na borda do plasma quando $F < 0$.

μ e F são escritos em função de Θ como:

$$\mu = \frac{2\Theta}{a} \quad (2.6)$$

$$F = \frac{\Theta J_0(2\Theta)}{J_1(2\Theta)} \quad (2.7)$$

A relação (2.6) mostra que a configuração magnética de equilíbrio depende apenas do valor de Θ , ou seja, da razão I_p/Φ_z . Isto significa que os perfis do campo magnético são independentes das características de cada máquina e das condições iniciais de cada descarga. O que deve ter inspirado Taylor a desenvolver sua teoria é a existência de uma mesma configuração de equilíbrio, comum a todos os RFPs.

Segue desta teoria que se a corrente I_p e o fluxo toroidal Φ_z são mantidos constantes no tempo, ou seja $\Theta = \text{constante}$, então a configuração do estado relaxado com $\mu = \text{constante}$ é sustentada. Experimentalmente, observa-se nos RFPs um estado quase-estacionário por tempos que excedem em muito o tempo de difusão resistiva $\tau_r \sim \frac{\mu_0 a^2}{\eta}$. Este resultado implica que há uma contínua geração de campo reverso dentro do plasma numa taxa tal que compensa o decaimento natural devido à difusão resistiva. O processo de geração de campo parece envolver instabilidades e/ou turbulência e processos de reconexão das linhas de campo.

Pela expressão (2.7), há reversão do campo toroidal ($F < 0$) quando $\Theta > 1,2$. Este resultado concorda satisfatoriamente com muitas observações.

Um terceiro parâmetro adimensional experimentalmente disponível é o β , definido como a razão entre as pressões cinética e magnética. Os estados de energia mínima no modelo de Taylor têm energia interna nula, portanto $p = 0$ e $\beta = 0$. Tais estados são normalmente expressos em termos de uma curva no plano $\Theta - F$ dada por (2.7).

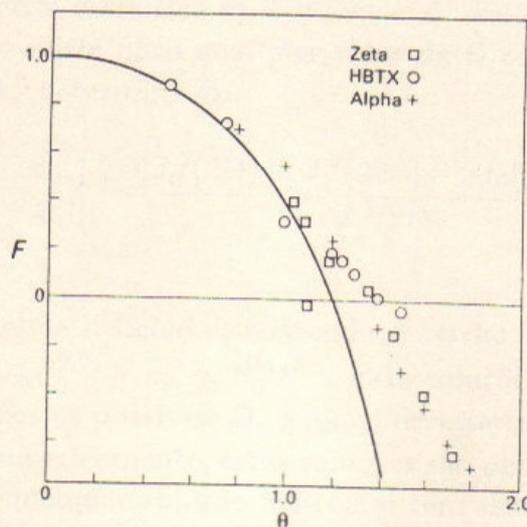


Figura 2-1: Curva $\Theta - F$ de Taylor (linha cheia) comparada com os dados experimentais de três diferentes máquinas: Alpha, Zeta e HBTX1[8].

A determinação do estado relaxado de menor energia é mais complexa do que foi indicado até agora. As equações (2.2) têm várias soluções compatíveis com as condições de contorno e com os valores das invariantes K e Φ_z . A solução mais geral possível é[8]:

$$\vec{B}_0 = \sum_{k_1, k_2} a_{k_1, k_2} \vec{B}_0^{k_1, k_2}(\vec{r})$$

onde a_{k_1, k_2} são constantes arbitrárias e as componentes de $\vec{B}_0^{k_1, k_2}$ são dadas por:

$$\begin{aligned} B_{0r}^{k_1, k_2}(r, \theta, z) &= \frac{-B_0}{(\mu^2 - k_2^2)^{1/2}} \left[k_2 \frac{dJ_{k_1}(y)}{dy} + \frac{k_1 \mu}{y} J_{k_1}(y) \right] \sin(k_1 \theta + k_2 z) \\ B_{0\theta}^{k_1, k_2}(r, \theta, z) &= \frac{-B_0}{(\mu^2 - k_2^2)^{1/2}} \left[\mu \frac{dJ_{k_1}(y)}{dy} + \frac{k_1 k_2}{y} J_{k_1}(y) \right] \cos(k_1 \theta + k_2 z) \\ B_{0z}^{k_1, k_2}(r, \theta, z) &= B_0 J_{k_1}(y) \cos(k_1 \theta + k_2 z) \end{aligned}$$

sendo k_1 um número inteiro, k_2 um número real e y definido como:

$$y \equiv r(\mu^2 - k_2^2)^{1/2}$$

Ao se impor a condição de contorno de que o plasma está envolvido por uma casca perfeitamente condutora, e portanto:

$$\Phi_z = \text{constante} \quad e \quad B_{0r}(a, \theta, z) = 0$$

obtém-se dois tipos de solução:

1) a solução com simetria cilíndrica $k_1 = 0$, $k_2 = 0$. Esta solução é o próprio Modelo da Função de Bessel e existe para qualquer valor de Θ compatível com as invariantes K e Φ_z . A razão K/Φ_z^2 determina Θ :

$$\frac{K}{\Phi_z^2} = \frac{R_0}{a} \left\{ \frac{2\Theta[J_0^2(2\Theta) + J_1^2(2\Theta)] - 2J_0(2\Theta)J_1(2\Theta)}{J_1^2(2\Theta)} \right\}$$

2) a solução com simetria helicoidal, contendo o termo $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ somado a outro termo, isto é, $a_{0,0}B_0^{0,0} + a_{k_1, k_2}B_0^{k_1, k_2}$. Esta solução existe somente para valores discretos de Θ . De todos os possíveis Θ , o único de interesse é o que dá as soluções de mais baixa energia. Numericamente, estas soluções são obtidas para $\Theta \simeq 1,56$, $k_1 = 1$ e $k_2 a \simeq 1,25$. Assim, qualquer solução helicoidal têm sempre este mesmo valor de Θ ; o que varia é a proporção entre a parte cilíndrica e a parte helicoidal. Neste caso, a razão K/Φ_z^2 determina a intensidade da distorção helicoidal a_1/a_0 [8]:

$$\frac{K}{\Phi_z^2} \simeq \frac{R_0}{a} \left[8,21 + 4,49 \left(\frac{a_1}{a_0} \right)^2 \right]$$

A teoria de estados relaxados de Taylor prevê dois valores críticos para Θ : o primeiro em $\Theta \simeq 1,20$, a partir do qual ocorre a reversão do campo toroidal na borda do plasma; e o segundo em $\Theta \simeq 1,56$, onde a coluna do plasma sofre uma distorção helicoidal. O modelo prevê que o parâmetro Θ não pode ultrapassar este último valor. Diz-se que Θ satura em $\simeq 1,56$. Então, para um RFP: $1,20 \leq \Theta \leq 1,56$.

Espera-se que os estados relaxados de energia mínima ($\mu = \text{constante}, \beta = 0$) sejam completamente estáveis, uma vez que não há nenhuma energia livre disponível para o desenvolvimento de instabilidades[9].

2.3 Comentários sobre o modelo de Taylor

A principal observação experimental que sustenta a teoria de Taylor é o fato da configuração magnética de equilíbrio nos RFPs depender apenas do parâmetro Θ .

Na metade interna de um plasma de RFP ($r \leq a/2$), há uma excelente concordância entre as medidas experimentais dos campos poloidal e toroidal e o Modelo da Função de Bessel (MFB). Nesta região, o perfil do μ experimental é praticamente uniforme.

Contudo, na região externa ($a/2 < r \leq a$), o comportamento observado nos RFPs difere significativamente do MFB. O campo magnético medido tem um fluxo reverso menor e o raio no qual o campo toroidal reverte é maior, se comparados com as previsões do MFB (figura 2-2). As observações experimentais também mostram que μ cai para um valor pequeno na borda e que Θ não satura em $\simeq 1,56$, podendo atingir valores maiores ($\simeq 2$) que este limite teórico. Além disso, o diagrama experimental $\Theta - F$ está normalmente deslocado para a direita da curva do MFB (figura 2-1)[1, 8, 10].

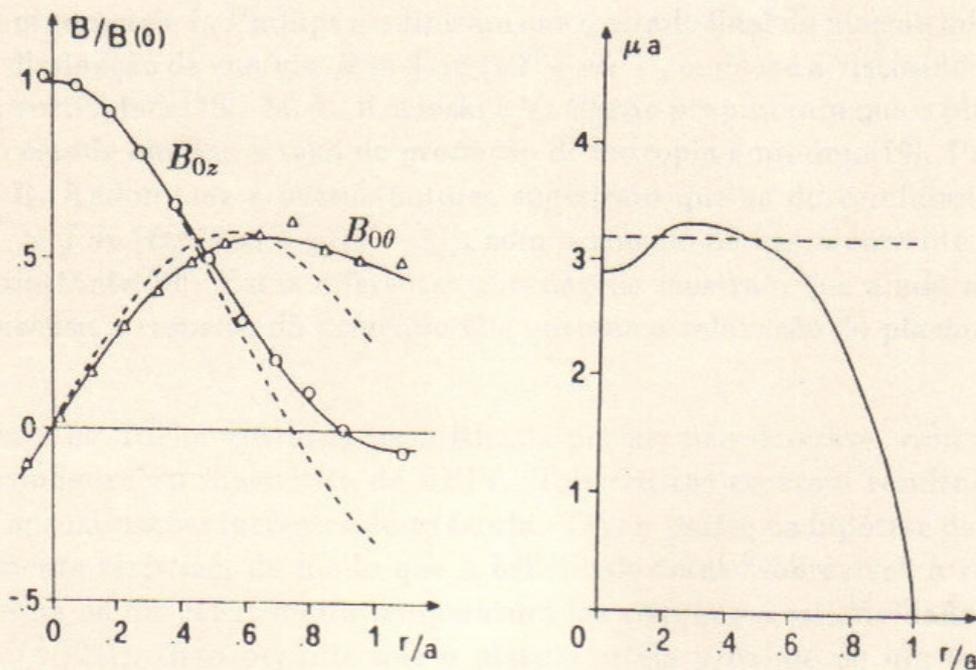


Figura 2-2: Perfis radiais de $B_{0\theta}$, B_{0z} e μ . Dados experimentais do RFP ETA-BETA II (linha cheia) são comparados com o MFB (linha pontilhada)[11].

Algumas possíveis justificativas para estas discrepâncias são:

- Os estados completamente relaxados de Taylor têm $\beta = 0$. Contudo, experimentalmente[10], $\beta \sim 0,1$. A inclusão de uma pressão finita leva a um aumento do campo poloidal, o que desloca a curva teórica $F - \Theta$ para mais próximo dos dados experimentais[12, 13, 14].
- No MFB, $\mu = \mu_0 \vec{J} \cdot \vec{B}_0 / B_0^2$ é uniforme em todo o plasma. Na prática, μ deve tender a zero na borda do plasma, pois \vec{J} tende a zero[10, 11].
- O RFP é um sistema toroidal e não cilíndrico. A consideração da geometria toroidal resulta num decréscimo de μ de $\sim 20\%$ na região externa (em relação ao MFB com $\mu = \text{constante}$)[14]. Embora μ não caia para o pequeno valor observado na borda, este resultado sugere que a diminuição de μ pode ser, em parte, atribuída a efeitos toroidais. Ainda, a geometria toroidal leva a um aumento de Θ . A razão para este aumento é que $\langle B_{0z} \rangle$ diminui[14, 15]. Este aumento vai de encontro com as observações de que o campo toroidal se reverte para $\Theta \simeq 1,4$; um número maior do que o limite de 1,2 previsto pelo MFB[10].
- Num plasma MHD ideal existe um número infinito de vínculos. Talvez, a helicidade magnética total K_0 não seja a única invariante que “sobreviva” na presença de uma pequena resistividade[16].
- Taylor supôs que o plasma relaxa para o estado de energia magnética mínima, com $K_0 = \text{constante}$. No entanto, existem outros modelos de relaxação que partem de princípios diferentes. Por exemplo, E. Hameiri e J. H. Hammer conjecturaram que o plasma vai para um estado que maximiza a entropia do sistema[17]. D. Montgomery e L. Phillips assumiram que o estado final do plasma minimiza a taxa de dissipação de energia $R \equiv \int dv (\eta J^2 + \nu \omega^2)$, onde ν é a viscosidade e $\omega = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ é a vorticidade[18]. M. Y. Kucinski e V. Okano propuseram que o plasma vai para um estado em que a taxa de produção de entropia é mínima[19]. Para *tokamaks*, B. B. Kadomtsev e outros autores sugeriram que se deve minimizar a energia $E'' = \int dv [B_\theta^2 / 2\mu_0 + p / (\Gamma - 1)]$, com o vínculo de que a corrente do plasma I_p é constante[20]. Estas diferentes abordagens mostram que ainda não existe um consenso a respeito do princípio que governa a relaxação do plasma.

A teoria de Taylor costuma ser criticada porque não descreve, com absoluta precisão, a configuração magnética de RFPs. Tais críticas esperam resultados que estão além das aproximações inerentes desta teoria. Taylor partiu da hipótese de que o plasma é *ligeiramente resistivo*, de modo que a helicidade total “sobrevive” à relaxação. Na parte interna de um RFP, a alta temperatura faz com que a resistividade seja pequena ($\eta \propto T^{-3/2}$ [21]). Isto permite que o plasma esteja próximo de um estado completamente relaxado e que os perfis do campo magnético concordem com o MFB. Mas, na parte externa, a temperatura é menor; conseqüentemente, a resistividade é maior. Nesta região, os dados experimentais não são bem ajustados pelo MFB. Só que, a rigor, a teoria de Taylor não é válida numa região com “grande” resistividade.

Por ser de natureza variacional, esta teoria nada informa sobre os detalhes da dinâmica do processo de relaxação; isto é, ela não diz o que está acontecendo para fazer com que o estado final se torne o que ele é. Desde a sua publicação, a principal questão na física do RFP é a respeito do mecanismo de sustentação da configuração magnética de equilíbrio, freqüentemente chamado de *efeito dínamo*⁵. Os detalhes dinâmicos deste processo vêm sendo estudados intensamente.

Observações experimentais sugerem que o efeito dínamo está fortemente relacionado com o desenvolvimento de instabilidades MHD resistivas com $m = 1$.

2.4 Instabilidades características de RFPs

Acredita-se que as instabilidades MHD resistivas tenham um importante papel na sustentação do campo reverso, embora o mecanismo detalhado deste processo ainda não seja totalmente compreendido.

Normalmente, máquinas RFPs operam em baixo Θ ($\sim 1,4$), próximo do estado de mínima energia, pois aí encontram-se as melhores condições de estabilidade da descarga. No equilíbrio, as flutuações magnéticas \vec{b} detectadas são da ordem de 1% (em relação aos valores de equilíbrio⁶). Os tempos de vida destas perturbações sugerem um caráter resistivo. O número do modo poloidal m predominante em todas as máquinas é $m = 1$. O espectro do modo toroidal n é mais largo, com um pico em torno de $n \sim 2R_0/a$, conforme pode ser verificado na tabela 2-1. Tais perturbações são ressonantes numa região interna à *superfície reversa* do plasma (superfície magnética com $B_{0z} = 0$). Um aumento de Θ torna o plasma mais instável, provocando um alargamento no espectro dos modos $(m; n)$.

RFP	$R_0(cm)/a(cm)$	modos dominantes
ETA-BETA II[22]	65/12,5 \simeq 5	$m = 1 ; n \simeq 10$
EXTRAP T1[23]	50/5,7 \simeq 9	$m = 1 ; n = 14 - 19$
HBTX1A[24]	80/26 \simeq 3	$m = 1 ; n \simeq 8$
HBTX1B[25]	80/25 \simeq 3	$m = 1 ; n = 10 - 12$
MST[26]	150/52 \simeq 3	$m = 1 ; n = 5 - 7$
RFX[27]	240/46 \simeq 4,5	$m = 1 ; n = 8 - 10$
STE-2[28]	40/10 = 4	$m = 1 ; n = 8 - 11$
STP-3(M)[29]	50/10 = 5	$m = 1 ; n = 9 - 13$
TPE-1RM20[30]	75/19,2 \simeq 4	$m = 1 ; n = 7 - 9$
ZT-40M[31]	114/20 \simeq 6	$m = 1 ; n \simeq 12$

Tabela 2-1: Razão de aspecto e modos resistivos dominantes em alguns RFPs.

⁵ A *teoria dínamo*, que se originou na astrofísica, procura explicar a geração e a sustentação de campos magnéticos de grande escala em corpos estelares. A essência do problema é descrever o mecanismo pelo qual a energia magnética é gerada a partir de alguma outra forma de energia; presumivelmente, gravitacional ou térmica. Ainda não se conhece uma resposta completamente satisfatória a esta questão.

⁶ $\frac{b}{B_0} \sim 1\%$.

A. Bazzani *et al.* sugeriram o seguinte modelo analítico para descrever os perfis destas oscilações magnéticas[33]: assume-se que a componente poloidal é desprezível ($b_\theta \equiv 0$) e que a componente radial b_r se anula no eixo ($r = 0$) e na borda do plasma ($r = a$), sendo escrita como:

$$b_r = b_0 \frac{r(a-r)}{a^2} \frac{\partial T}{\partial z}(\theta, z)$$

onde b_0 é uma constante e $T(\theta, z)$ é uma dupla série de Fourier que leva em conta o espectro experimental das oscilações magnéticas. A componente toroidal b_z é obtida através da condição $\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$.

Por exemplo, para o caso da oscilação conter apenas dois modos ressonantes $(m_1; n_1)$ e $(m_2; n_2)$, as componentes radial e toroidal de \vec{b} são dadas por:

$$b_r = b_r^{(m_1; n_1)}(r) \cos(m_1 \theta - n_1 \frac{z}{R_0}) + b_r^{(m_2; n_2)}(r) \cos(m_2 \theta - n_2 \frac{z}{R_0}) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r b_r)}{\partial r}$$

onde:

$$b_r^{(m; n)} \equiv b_0 \frac{r(a-r)}{2a^2} c_m d_n$$

c_m e d_n são os coeficientes dos modos poloidal e toroidal, respectivamente. Para o RFP ETA-BETA II, foram atribuídos os seguintes valores para estes coeficientes[33, 34]:

$$c_0 = 0,5 \quad c_1 = 1,0 \quad c_2 = 0,25$$

$$d_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 8, n > 20 \\ n/10 & \text{para } 8 \leq n \leq 10 \\ (20 - n)/10 & \text{para } 10 \leq n \leq 20 \end{cases}$$

O modelo analítico de Bazzani *et al.* para o campo \vec{b} associado às instabilidades resistivas foi o único que nós encontramos na literatura. Este modelo ajusta precariamente os perfis observados por D. Brotherton-Ratcliffe *et al.*[24], mostrados na figura abaixo.

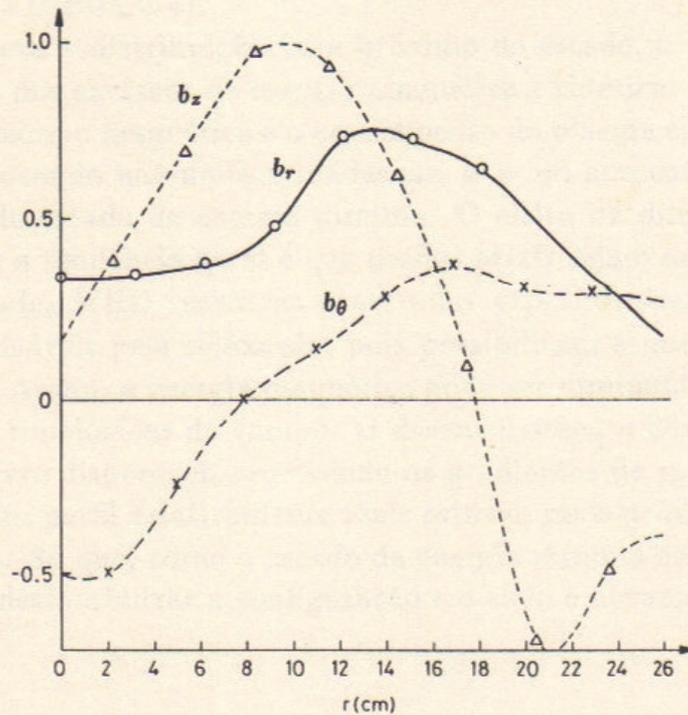


Figura 2-3: Perfis radiais de b_r , b_θ e b_z medidos no RFP HBTX1A[24].

O perfil analítico de b_r é compatível com as medidas no HBTX1A. Porém, a escolha de $b_\theta \equiv 0$ não tem fundamento experimental, uma vez que este termo é da mesma ordem de grandeza das outras duas componentes de \vec{b} . Perfis semelhantes foram encontrados no ETA-BETA II[32].

Há muitas investigações experimentais e numéricas que suportam a tese de que as instabilidades MHD resistivas com $m = 1$ são responsáveis pelo processo de sustentação da configuração magnética de equilíbrio de um plasma de RFP.

2.5 O processo cíclico de sustentação do campo toroidal reverso em RFPs

Na fase quase-estacionária, observam-se oscilações em quantidades globais do plasma como o fluxo magnético toroidal, a corrente toroidal e o potencial elétrico induzido (*loop voltage*)[25, 28, 31, 35]. Trabalhos experimentais também mostram a presença de uma modulação de larga escala do tipo “dente-de-serra” no fluxo de raios-X de baixa energia[29, 30, 36, 37]. Tal atividade é mais evidente em regimes de alto Θ ($> 1,6$), embora ainda esteja presente em baixo Θ ($< 1,6$). Estas observações sugerem a existência de algum *processo cíclico* inerente à fase de sustentação do equilíbrio. Ou seja, deve haver alguma relação geral entre a sustentação e as oscilações detectadas.

O mecanismo de sustentação da configuração de campo reverso, conhecido como efeito dínamo, tem sido interpretado como um *processo cíclico* de três etapas[1, 11]: relaxação do plasma, difusão resistiva e crescimento de instabilidades. Este modelo é baseado na observação de que a configuração oscila na vizinhança do estado de energia magnética mínima (figura 2-4).

A relaxação leva a distribuição para próximo do estado $\mu = \text{constante}$, $\beta = 0$ ao "livrar" o plasma dos excessos de energia magnética e cinética.

A difusão do campo magnético e o aquecimento do plasma agem de maneira oposta à relaxação, provocando não-uniformidades em μ e um aumento de β , e assim, afastando o plasma do estado de energia mínima. O efeito da difusão resistiva é sempre desestabilizante e a tendência geral é que modos MHD sejam excitados.

As instabilidades MHD resistivas observadas experimentalmente (seção anterior) podem ser responsáveis pela relaxação, pois possibilitam a quebra e a reconexão das linhas de campo. Assim, a energia magnética pode ser diminuída através de mudanças nas propriedades topológicas do campo. O desenvolvimento destas instabilidades consome a energia livre disponível, removendo os gradientes de μ . Conseqüentemente, o plasma adquire um perfil relativamente mais estável; mais próximo do estado completamente relaxado. Só que, como o estado de energia mínima não é acessível, a difusão resistiva torna a desestabilizar a configuração e o ciclo é novamente repetido.



Figura 2-4: Esquema do processo cíclico de sustentação do equilíbrio[1].

V. Antoni *et al.*[9] calcularam numericamente o crescimento de instabilidades MHD em configurações magnéticas derivadas do seguinte perfil analítico de $\mu \equiv \mu_0 \vec{J} \cdot \vec{B}_0 / B_0^2$:

$$\mu(r) = \mu(0) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^\alpha \right]$$

onde:

$$\mu(0) \equiv \frac{2 \Theta_0}{a} \quad (2.9)$$

Para RFPs, as distribuições experimentais de $\mu(r)$ são bem descritas para valores de α e Θ_0 contidos nos seguintes intervalos:

$$2 \leq \alpha \leq 6 \quad ; \quad 1,4 \leq \Theta_0 \leq 2,0$$

Estas análises mostraram que as instabilidades resistivas com $m = 1$ são normalmente as primeiras a serem excitadas pela difusão, o que está de acordo com as experiências. Modos resistivos com $m = 0$ só surgem se os $m = 1$ já estiverem presentes; os com $m = 2$ são sempre estáveis.

É possível se discutir a dinâmica dos processos de difusão e de relaxação olhando apenas para a região central do plasma[1, 9, 35, 38]. Tal análise dispensa uma descrição detalhada da evolução dos perfis de \vec{J} e \vec{B}_0 .

Verificou-se experimentalmente[9, 35, 38, 39] que os modos $m = 1$ resistivos são excitados quando o parâmetro Θ_0 (definido pela expressão (2.9)) atinge o valor crítico de $\Theta_0 \sim 2$, independentemente do valor de Θ . Este limite superior⁷ de Θ_0 pode ser interpretado como um limite inferior para o fator de segurança no eixo $q(0)$ (em analogia à condição $q(0) > 1$ do *tokamak*). $q(0)$ é expresso em termos de Θ_0 por:

$$q(0) = \frac{a}{\Theta_0 R_0}$$

Portanto, se $\Theta_0 < 2$, então $q(0) > \frac{1}{2}(\frac{a}{R_0})$.

Num RFP, a difusão resistiva tende a elevar a distribuição de $J(0)$ (densidade de corrente no eixo), pois como o centro é mais quente (menos resistivo), torna-se um canal preferencial para o fluxo da corrente. Um aumento de $J(0)$ causa um aumento em Θ_0 , o que equivale a uma diminuição em $q(0)$. Assim, na difusão, as superfícies magnéticas ressonantes aos modos $m = 1$ são empurradas para dentro do plasma. Quando $q(0)$ se aproxima do valor crítico $\frac{1}{2}(\frac{a}{R_0})$, as instabilidades resistivas com $m = 1$ e $n \sim 2R_0/a$ são excitadas. Estas instabilidades se desenvolvem na região central e formam superfícies magnéticas com estrutura de *ilhas*. Como estas ilhas estão muito próximas, elas logo se superpõem, criando uma região onde as linhas de campo têm um comportamento estocástico. Isto provoca um achatamento do perfil de \vec{J} perto do eixo e uma elevação de $q(0)$. Com a reconexão das linhas de campo, restaura-se a configuração inicial estável aos modos de ruptura.

Na figura abaixo, é mostrada a oscilação temporal de $q(0)$ observada no ETA-BETA II. Note que o valor mínimo de $q(0) \simeq 0,10$ é compatível com a condição $q(0) > \frac{1}{2}(\frac{a}{R_0})$ (nesta máquina, $\frac{a}{R_0} \simeq \frac{1}{5}$).

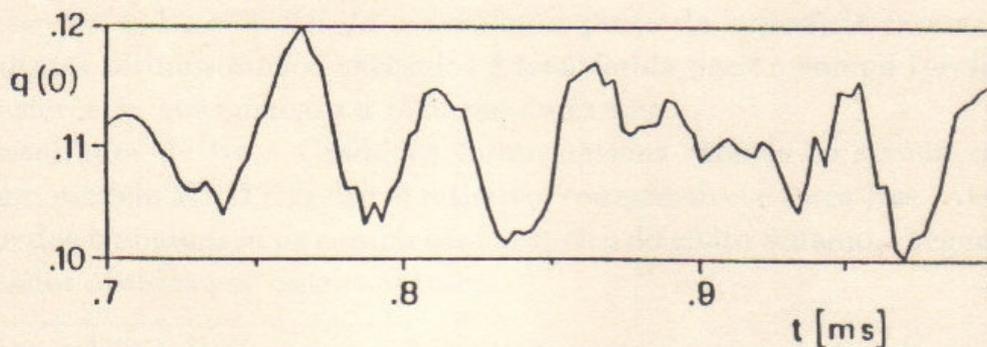


Figura 2-5: Oscilação temporal de $q(0)$ detectada no RFP ETA-BETA II[39].

⁷ Às vezes, o valor crítico considerado é $\Theta_0 \sim \frac{3}{2}$.

O efeito dínamo também pode ser analisado em função da evolução temporal do parâmetro de reversão F .

A geração do campo toroidal reverso no RFP não ocorre necessariamente de maneira contínua. Observações experimentais[35, 37] e simulações numéricas[40, 41] indicam que F oscila ao longo do tempo (figura 2-6). Este fenômeno é consistente com o modelo de que a difusão resistiva e a relaxação constituem fases alternadas de cada ciclo da oscilação. Durante a difusão, F vai em direção a zero (torna-se menos negativo) e a concentração de \vec{J} em torno do eixo aumenta o campo poloidal na região central. Durante a relaxação, F diminui (torna-se mais negativo) devido a um aumento significativo na geração do campo reverso.

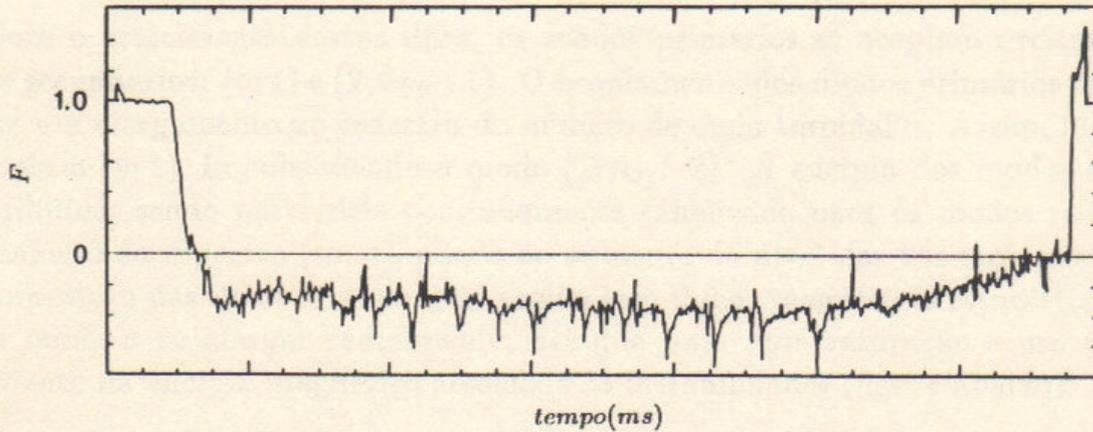


Figura 2-6: Evolução temporal de $F \equiv \frac{B_{0z}(a)}{\langle B_{0z} \rangle}$ observada no RFP ZT-40M[37].

Y. L. Ho e G. G. Craddock[41] propuseram que o efeito dínamo é um mecanismo de conversão da energia magnética poloidal, acumulada na região central durante a difusão, em campo magnético toroidal na superfície reversa⁸. Eles mostraram numericamente que os modos $m = 1$ são os responsáveis por esta conversão, através de um processo com três estágios. No primeiro estágio, a energia do campo poloidal médio acumulada na difusão é transferida para os modos $m = 1$, $n \sim 2R_0/a$ ressonantes na região central do plasma. Estes modos se acoplam e excitam modos com $m = 0$, $n \sim 1 - 2$. No segundo estágio, o acoplamento dos modos $m = 0$ com os modos primários ativam modos com $m = 1$, $n > 2R_0/a$ ressonantes perto da superfície reversa. Por fim, a energia destes últimos modos excitados é transferida para o campo toroidal médio. É esta transferência que sustenta a reversão do campo.

Os resultados de Ho e Craddock foram obtidos através de simulações numéricas usando um modelo MHD cilíndrico, resistivo, compressível e *force-free*. Até o momento, este é um dos trabalhos mais completos a respeito do efeito dínamo, chegando a unificar os resultados obtidos por outros autores.

⁸O fluxo poloidal deve ser fornecido continuamente por uma fonte externa (tal como um circuito externo). A geração do campo reverso ocorre enquanto esta fonte permanecer ativa.

Na fase de sustentação, as instabilidades resistivas com $m = 1$ são dominantes. Porém, modos com $m = 0$ e $m = 2$ são também detectados, principalmente depois que os sinais com $m = 1$ atingem suas maiores amplitudes[31, 37], como pode ser observado na figura abaixo. Simulações numéricas corroboram estas observações experimentais[40, 41, 42, 43, 44, 45].

Levando em consideração todas estas informações, foi sugerido o seguinte modelo para explicar a seqüência na qual os modos de ruptura são excitados durante os ciclos da fase de sustentação[40, 41, 42, 43, 44, 45, 1]:

(i) Como as superfícies ressonantes aos modos $m = 1$ são muito próximas, a difusão resistiva pode desestabilizar dois modos adjacentes: $(1; n_0)$ e $(1; n_0 + 1)$. Estes modos resistivos geram ilhas magnéticas nas superfícies com $q = \frac{1}{n_0}$ e $q = \frac{1}{n_0 + 1}$.

(ii) Com o crescimento destas ilhas, os modos primários se acoplam excitando dois modos secundários: $(0; 1)$ e $(2; 2n_0 + 1)$. O acoplamento dos modos primários com $(0; 1)$ produz um alargamento no espectro do número de onda toroidal n . Assim, $(1; n_0 + 1)$ se acopla a $(0; 1)$, impulsionando o modo $(1; n_0 + 2)$. A energia dos modos $m = 1$ é redistribuída, sendo parte dela continuamente canalizada para os modos $m \neq 1$. O alargamento do espectro $(m; n)$, aliado ao aumento do nível das flutuações, provocam a superposição das ilhas, criando uma região com linhas magnéticas estocásticas. Esta região tende a se alargar radialmente, até que haja uma saturação e um posterior decaimento da energia magnética associada às instabilidades (figura abaixo).

(iii) A configuração inicial é recuperada pela reconexão das linhas de campo e, novamente, desestabilizada pela difusão resistiva. O ciclo se repete muitas vezes até o fim da descarga.

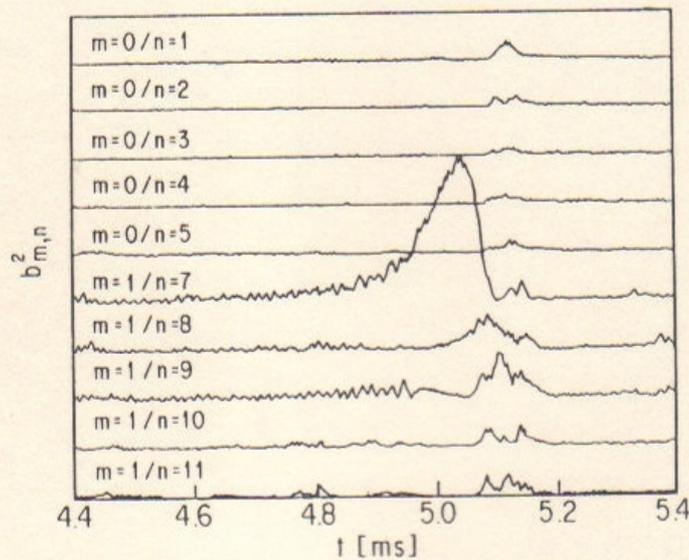


Figura 2-7: Evolução temporal da energia magnética $b_{m;n}^2$ associada aos modos resistivos $(m; n)$ detectada no RFP TPE-1RM20[30]. Pode-se perceber que os modos $m = 0$ surgem após o pico do modo $m = 1$ principal e que ocorre uma saturação e um posterior decaimento de todas as instabilidades.

2.6 O objetivo deste trabalho

Na página 176 do livro "Magnetohydrodynamics of Plasma Relaxation", de S. Ortolani e D. D. Schnack[1], encontramos o seguinte comentário (por nós traduzido): *Seria mais confortável se os resultados numéricos fossem sustentados por uma teoria analítica. Contudo, as simulações têm sugerido que a relaxação, pelo menos no RFP, é basicamente não-linear e inclui a interação de muitos modos. Este fato torna extremamente difícil o desenvolvimento de uma teoria analítica. Até agora, não foi formulada nenhuma teoria analítica satisfatória sobre o dínamo em RFPs. Há uma grande lacuna entre a simples descrição variacional de Taylor e os complexos cálculos numéricos tridimensionais.*

Neste trabalho, nós mostramos analiticamente que, num plasma cilíndrico em equilíbrio perturbado por dois modos ressonantes $(m_1; n_1)$ e $(m_2; n_2)$, ilhas magnéticas se formam não apenas nas superfícies (ressonantes) onde $q = \frac{m_1}{n_1}$ e $q = \frac{m_2}{n_2}$, mas também em $q = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$ e $q = \frac{|m_1-m_2|}{|n_1-n_2|}$. Isto significa que os modos primários se acoplam, excitando outros modos. Assim, nós explicamos os acoplamentos da fase (ii) descrita na página anterior.

O nosso objetivo não é elaborar uma teoria para o efeito dínamo. Nós apenas procuramos confirmar analiticamente uma das possíveis fases deste processo.

No próximo capítulo, é mostrado como pode ser feito o cálculo de uma função de superfície Ψ que descreve a estrutura magnética de plasmas quase-simétricos. São descritos os dois métodos analíticos normalmente usados neste cálculo, que são o formalismo hamiltoniano e o método da média.

Bibliografia

- [1] Ortolani S., Schnack D. D., *"Magnetohydrodynamics of Plasma Relaxation"*, Singapore, World Scientific (1993).
- [2] Kruskal M. D., Kulsrud R. M., *Equilibrium of a Magnetically Confined Plasma in a Toroid*, Phys. Fluids 1, 265 (1958).
- [3] Woltjer L., *A Theorem on Force-Free Magnetic Fields*, Proc. Nat. Acad. Sci. 44, 389 (1958).
- [4] Wells D. R., Norwood Jr. J., *A Variational Approach to the Dynamic Stability of High-Density Plasmas in Magnetic Containment Devices*, J. Plasma Phys. 3, 21 (1969).
- [5] Berger M. A., Field G. B., *The Topological Properties of Magnetic Helicity*, J. Fluid Mech. 147, 133 (1984).
- [6] Taylor J. B., *Relaxation of Toroidal Plasma and Generation of Reverse Magnetic Fields*, Phys. Rev. Lett. 33, 1139 (1974).
- [7] Caramana E. J., Moses R. W., *General Characteristics of Reversed-Field Pinch Equilibria with Specified Global Parameters*, Nucl. Fusion 24, 498 (1984).
- [8] Taylor J. B., *Relaxation and Magnetic Reconnection in Plasmas*, Rev. Mod. Phys. 58, 741 (1986).
- [9] Antoni V., Merlin D., Ortolani S., Paccagnella R., *MHD Stability Analysis of Force-Free Reversed Field Pinch Configurations*, Nucl. Fusion 26, 1711 (1986).
- [10] Bodin H. A. B., *The Reversed Field Pinch*, Nucl. Fusion 30, 1717 (1990).
- [11] Ortolani S., *MHD Relaxation Processes in Plasmas*, Proceedings of the 'IV Latin American Workshop on Plasma Physics (Buenos Aires, 1990)', CNEA, 1, 281 (1990).
- [12] Turner L., Christiansen J. P., *Incomplete Relaxation of Pinch Discharges*, Phys. Fluids 24, 893 (1981).
- [13] Edenstrasser J. W., Nalesso G. F., Schuurman W., *Finite-Beta Minimum Energy Equilibria of RFPs, Screw Pinches and Tokamaks*, Nucl. Instrum. Methods 207, 75 (1985).

- [14] Jain K. K., *Characteristics of the Toroidal Relaxed State of Reversed Field Pinches and Comparison with Experimental Results*, Phys. Fluids B 2, 2643 (1990).
- [15] Miller G., Turner L., *Force-Free Equilibria in Toroidal Geometry*, Phys. Fluids 24, 363 (1981).
- [16] Bhattachargee A., Glasser A. H., K. Avinash, Sedlak J. E., *Relaxation of Toroidal Plasmas*, Phys. Fluids 29, 242 (1986).
- [17] Hameiri E., Hammer J. H., *Turbulent Relaxation of Compressible Plasmas*, Phys. Fluids 25, 1855 (1982).
- [18] Montgomery D., Phillips L., *Minimum Dissipation Rates in Magnetohydrodynamics*, Phys. Rev. A 38, 2953 (1988).
- [19] Kucinski M. Y., Okano V., *Relaxation of Toroidal Plasmas. Tokamaks*, Plasma Phys. Control. Fusion. 37, 1 (1995).
- [20] Kadomtsev B. B., *"Tokamak Plasma: a Complex Physical System"*, IOB Publishing, London, p.155 (1992).
- [21] Ortolani S., Rostagni G., *Density Limits and Scaling Laws in Reversed Field Pinches*, Nucl. Instrum. Methods 207, 35 (1983).
- [22] Antoni V., Bassan M., Buffa A., Costa S., Giudicotti L., Grossmann W., Martini S., Ortolani S., Paccagnella R., Puiatti M. E., Scarin P., Valisa M., Zilli E., *Reversed Field Pinch Plasmas with Current Flat-Top in ETA-BETA II*, Nucl. Fusion Supplement 2, 487 (1985).
- [23] Mazur S., *Magnetic Field Fluctuations in the High Aspect Ratio Extrap T1 Reversed Field Pinch*, Phys. Scripta 49, 233 (1994).
- [24] Brotherton-Ratcliffe D., Gimblett C. G., Hutchinson I. H., *Analysis of Internal Magnetic Fluctuations in the HBTX1A Reversed Field Pinch*, Plasma Phys. Control. Fusion 29, 161 (1987).
- [25] Alper B., Antoni V., Bevir M. K., Bodin H. A. B., Bunting C. A., Carolan P. G., Cunnane J., Evans D. E., Field A. R., Gee S. J., Gimblett C. G., Hayden R., Jarboe T. R., Kirby P., Manley A., Newton A. A., Noonan P. G., Patel A., Pease R. S., Rusbridge M. G., Schneider K. P., Storey D. P., Tsui H. Y. W., Whitfield S., Wilcock P. D., *Results from HBTX with Improved Confinement*, Nucl. Fusion Supplement 2, 399 (1987).
- [26] Hokin S., Almagri A., Assadi S., Beckstead J., Chartas G., Crocker N., Cudzinovic M., Den Hartog D., Dexter R., Holly D., Prager S., Rempel T., Sarff J., Scime E., Shen W., Spragins C., Sprott C., Starr G., Stoneking M., Watts C., Nebel R., *Global Confinement and Discrete Dynamo Activity in the MST Reversed Field Pinch*, Phys. Fluids B 3, 2241 (1991).

- [27] Antoni V., Apolloni L., Bagatin M., Baker W., Bassan M., Bellina F., Benfatto I., Bergsaker H., Buffa A., Campostrini P., Cappello S., Carraro L., Casarotto E., Chitarin G., Collarin P., Costa S., De Lorenzi A., Desideri D., Fauri M., Ferrer C., Fiorentin P., Gaio E., Giudicotti L., Gnesotto F., Guarnieri M., Guatieri R., Hemming O., Innocente P., Kusstascher P., Luchetta A., Malesani G., Manduchi G., Marchiori G., Martin P., Martines E., Martini S., Maschio A., Moresco M., Murari A., O'Leary P., Paccagnella R., Pasqualotto R., Piovan R., Pomaro N., Puiatti M. E., Rostagni G., Sardella A., Scarin P., Schimidt V., Serianni G., Sonato P., Spada E., Stella A., Toigo V., Tramontin L., Trevisan F., Valisa M., Vitturi S., Zaccaria P., Zilli E., Zollino G., *Confinement Studies on RFX*, Plasma Phys. Control. Fusion **35**, B333 (1993).
- [28] Musamune S., Kawasaki K., Murata A., Ishijima D., Iida M., Oshiyama H., *Effects of Boundary Conditions on Magnetic Fluctuation Behaviour in a RFP Produced in a Non-Bellows Metal Chamber*, Plasma Phys. Control. Fusion **35**, 209 (1993).
- [29] Sato K., Amano T., Chen Z. X., Arimoto H., Yamada S., Nagata A., Yokoyama K., Kamada Y., Matsuoka A., Masamune S., Shindo H., Saito K., Murata H., Oshiyama H., Shiima S., Tamaru T., *Experimental and Theoretical Studies of the STP-3(M) Reversed Field Pinch in the High Current Density Regime*, Nucl. Fusion Supplement **2**, 413 (1987).
- [30] Brunsell P. R., Yagi Y., Hirano Y., Maejima Y., Shimada T., *Coherent Magnetic Field Fluctuations and Locked Modes in a Reversed-Field Pinch*, Phys. Fluids B **5**, 885 (1993).
- [31] Watt R. G., Nebel R. A., *Sawteeth, Magnetic Disturbances, and Magnetic Flux Regeneration in the Reversed-Field Pinch*, Phys. Fluids **26**, 1168 (1983).
- [32] Antoni V., *Properties of Magnetic Fluctuations in RFP Experiments*, Proceedings of the 'International School of Plasma Physics Piero Caldirola (Varenna, 1987)', Ed. Compositori, **1**, 431 (1988).
- [33] Bazzani A., Malavasi M., Siboni S., Pellacani C., Rambaldi S., Turchetti G., *Poincaré Map and Anomalous Transport in a Magnetically Confined Plasma*, Nuovo Cimento B **103**, 659 (1989).
- [34] Malavasi M., Bazzani A., Siboni S., Turchetti G., *Chaotic Transitions and Anomalous Diffusion in a RFP-Confined Plasma: Dependence from the Spectra Data*, Proceedings of the 'Fenomeni non Lineari in Fluidodinamica e Fisica Dei Plasmi (Bologna, 1989)'.
- [35] Antoni V., Ortolani S., *Relaxation Phenomena and on Axis q Limit in a Reversed Field Pinch*, Phys. Fluids **30**, 1489 (1987).
- [36] Wurden G. A., *Soft X-Ray Array Results on the ZT-40M Reversed Field Pinch*, Phys. Fluids **27**, 551 (1984).

- [37] Howell R. B., Ingraham J. C., Wurden G. A., Weber P. G., Buchenauer C. J., *Asymmetric Magnetic Flux Generation, $m = 1$ Activity, and Edge Phenomena on a Reversed Field Pinch*, Phys. Fluids 30, 1828 (1987).
- [38] Antoni V., Martin P., Ortolani S., *Experimental Evidence of on Axis q Oscillations in ETA-BETA II*, Plasma Phys. Control. Fusion 29, 279 (1987).
- [39] Ortolani S., Valissa M., *Results of Recent Studies on ETA-BETA II*, Proceedings of the 'International School of Plasma Physics Piero Caldirola (Varenna, 1987)', Ed. Compositori, 1, 283 (1988).
- [40] Kusano K. Sato T., *Simulation Study of the Self-Sustainment Mechanism in the Reversed-Field Pinch Configuration*, Nucl. Fusion 30, 2075 (1990).
- [41] Ho Y. L., Craddock G. G., *Nonlinear Dynamics of Field Maintenance and Quasiperiodic Relaxation in Reversed-Field Pinch*, Phys. Fluids B 3, 721 (1991).
- [42] Schnack D. D., Caramana E. J., Nebel R. A., *Three-Dimensional Magnetohydrodynamic Studies of the Reversed-Field Pinch*, Phys. Fluids 28, 321 (1985).
- [43] An Z. G., Diamond P. H., Hahm T. S., Lee G. S., Scott B. D., Carreras B. A., Garcia L., Holmes J. A., Lynch V. E., *Energy Confinement and Nonlinear Tearing Mode Dynamics in a High Current Reversed Field Pinch*, Nucl. Fusion Supplement 2, 663 (1987).
- [44] Holmes J. A., Carreras B. A., Diamond P. H., Lynch V. E., *Nonlinear Dynamics of Tearing Modes in the Reversed Field Pinch*, Phys. Fluids 31, 1166 (1988).
- [45] Kusano K., Sato T., *Nonlinear Coupling Effects on the Relaxation Process in the Reversed Field Pinch*, Nucl. Fusion 27, 821 (1987).
- [46] Kucinski M. Y., Caldas I. L., Monteiro L. H. A., Okano V., *Magnetic Surfaces in Non-Symmetric Plasmas*, Plasma Phys. Control. Fusion 34, 1067 (1992).

Capítulo 3

Métodos para o cálculo analítico de estruturas magnéticas

A utilização prática de campos magnéticos para o confinamento de plasmas depende do conhecimento da geometria de suas linhas de campo, uma vez que partículas carregadas se movem muito mais facilmente ao longo destas linhas que na direção transversal a elas. Em sistemas simétricos, o equilíbrio do plasma é caracterizado pela existência de *superfícies magnéticas* descritas por uma função $\Psi(x^1, x^2) = \text{constante}$ que contém as linhas do campo confinante \vec{B} . Quando esta simetria é quebrada por uma pequena perturbação, as linhas de campo ainda podem formar superfícies magnéticas “aproximadas” em algumas regiões[1, 2].

Consultando a literatura, nós verificamos que a estrutura de um campo \vec{B} é normalmente determinada através dos seguintes métodos:

- integrando-se numericamente a equação diferencial:

$$\vec{B} \times d\vec{\ell} = 0 \quad (3.1)$$

onde $d\vec{\ell}$ representa um deslocamento paralelo às linhas de campo. O mapa de Poincaré do sistema é construído seguindo-se (numericamente) uma ou mais linhas de campo por muitos circuitos toroidais e assinalando-se os pontos de intersecção destas linhas com um plano perpendicular ao eixo magnético[3].

- analiticamente, usando-se o *formalismo hamiltoniano*. Um campo magnético \vec{B} tridimensional solenoidal ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) é equivalente a um sistema hamiltoniano unidimensional não-autônomo (dependente do “tempo”), se for feita uma analogia entre a coordenada toroidal e o tempo[4].
- analiticamente, aplicando-se um *método da média*[5] para se obter uma solução aproximada da equação diferencial (3.1).

Neste capítulo, deriva-se uma expressão analítica para a função $\Psi(x^1, x^2)$ que caracteriza a estrutura magnética de plasmas simétricos em equilíbrio. Se a simetria é destruída por uma pequena perturbação, o cálculo analítico de “superfícies aproximadas”

é normalmente feito usando-se o formalismo hamiltoniano ou um método da média. Estes dois métodos analíticos são aqui descritos. No capítulo seguinte, nós usaremos um método da média para calcular a estrutura magnética de um plasma de RFP em equilíbrio cilíndrico perturbado por dois modos helicoidais ressonantes.

3.1 Coordenadas curvilíneas generalizadas

Abaixo, são definidas algumas relações válidas num sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas x^1, x^2, x^3 [6]. Estas relações serão usadas no decorrer deste trabalho.

- As superfícies $x^i = \text{constante} = C$ são chamadas de *superfícies coordenadas*. Os vetores $\vec{e}^i \equiv \vec{\nabla} x^i$ ($i = 1, 2, 3$), normais às superfícies $x^i = C$, definem a *base contravariante*.
- Uma *curva coordenada* x^i é uma curva ao longo da qual x^j e x^k ($i \neq j \neq k$) são constantes. Os vetores $\vec{e}_i \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}$ (\vec{r} é o vetor posição), tangentes às curvas x^i , constituem a *base covariante*.
- As componentes covariantes e contravariantes de um vetor $\vec{A} = A_i \vec{e}^i = A^i \vec{e}_i$ são definidas respectivamente como $A_i = \vec{A} \cdot \vec{e}_i$ e $A^i = \vec{A} \cdot \vec{e}^i$ ($\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_{ij}$).
- x^1, x^2, x^3 são tomadas de modo a satisfazerem à relação $\vec{e}_i = \sqrt{g} \vec{e}^j \times \vec{e}^k$ para qualquer permutação cíclica entre i, j, k . \sqrt{g} é dado por $\sqrt{g} = (\vec{e}^1 \cdot \vec{e}^2 \times \vec{e}^3)^{-1}$.

3.2 Superfícies magnéticas em sistemas simétricos

Em sistemas simétricos de confinamento de plasmas, todas as funções de equilíbrio que têm significado físico dependem apenas de duas variáveis. Então, usando um sistema de coordenadas curvilíneas x^1, x^2, x^3 , as quantidades físicas podem ser escritas em termos das coordenadas x^1 e x^2 — x^3 é a *coordenada ignorável*.

Num sistema MHD simétrico, é possível se definir uma função de superfície $\Psi(x^1, x^2)$ que contém as linhas do campo magnético $\vec{B}(x^1, x^2)$. Esta função deve satisfazer à seguinte relação [1, 2]:

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \Psi = 0 \quad (3.2)$$

Assim, as linhas de \vec{B} são tangentes às superfícies:

$$\Psi(x^1, x^2) = \text{constante} = C \quad (3.3)$$

sendo que cada valor da constante C individualiza uma *superfície magnética*.

Se o sistema independe de x^3 , a relação (3.2) é escrita como:

$$B^1 \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} + B^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} = 0 \quad (3.4)$$

Escrevendo as componentes contravariantes B^i em termos das componentes covariantes do potencial vetor \vec{A} ($\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$), obtém-se de (3.4) que¹:

$$\frac{\partial A_3}{\partial x^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} = 0$$

Portanto, pode-se identificar Ψ como [1, 2]:

$$\Psi = -A_3(x^1, x^2) \quad (3.5)$$

A função de superfície magnética Ψ também pode ser definida em termos de um fluxo transversal de \vec{B} .

3.3 A definição de Ψ em termos de um fluxo magnético transversal

Uma *quantidade de superfície magnética* é qualquer variável que é uniforme sobre uma superfície magnética. Por exemplo, num plasma em equilíbrio MHD estático, $\vec{\nabla} p = \vec{J} \times \vec{B}$, de onde segue que $\vec{B} \cdot \vec{\nabla} p = 0$. Esta relação mostra que a pressão p é uma quantidade de superfície; isto é, $p = p(\Psi)$. Assim, as superfícies magnéticas equivalem às *superfícies isobáricas*.

Outras quantidades de superfície são o fluxo magnético longitudinal Φ (através da secção transversal de uma superfície $\Psi = C$) e o fluxo transversal χ (através da secção longitudinal de uma superfície $\Psi = C$ limitada pelo eixo magnético do sistema). Como não há fluxo *através* de uma superfície magnética, então Φ e χ caracterizam uma dada superfície Ψ . Ou seja, as *superfícies de fluxo* $\Phi = C'$ e $\chi = C''$ são equivalentes às superfícies magnéticas $\Psi = C$. Por isso, pode-se definir Ψ em termos do fluxo transversal χ [1, 2].

Nesta secção, x^1 e x^2 são tomados de modo que o eixo magnético do sistema coincida com uma curva coordenada x^3 , sendo x^2 a coordenada transversal. No eixo magnético, $x^1 = x_0^1$ e $\vec{B} = B^3 \vec{e}_3$.

Na literatura [7, 8], normalmente define-se $\chi \equiv L\Psi$ como o fluxo do campo \vec{B} através de uma superfície transversal $x^2 = \text{constante}$, que se estende desde o eixo magnético até a curva coordenada x^3 limitada por $0 \leq x^3 \leq L$. L é o período da coordenada x^3 . Assim, o fluxo $L\Psi$ é dado por [8]:

$$L\Psi = \int_{x_0^1}^{x^1} dx^1 \int_0^L \sqrt{g} B^2 dx^3 \quad (3.6)$$

Derivando (3.6) em relação a x^1 , obtém-se que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^1} = \frac{1}{L} \int_0^L \sqrt{g} B^2 dx^3 \quad (3.7)$$

¹ $B^i = (\epsilon_{ijk}/\sqrt{g})(\partial A_k/\partial x^j)$; onde $\epsilon_{ijk} = 0$, se 2 ou 3 índices são iguais, +1 para um número par de permutações, e -1 para um número ímpar de permutações.

Levando em conta que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e assumindo que $B^1(x_0^1, x^2, x^3) = 0$, obtém-se a seguinte expressão ao se derivar (3.6) em relação a x^2 :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{L} \int_0^L \sqrt{g} B^1 dx^3 \quad (3.8)$$

Se $\sqrt{g} B^1$ e $\sqrt{g} B^2$ são independentes de x^3 , então as equações (3.7) e (3.8) são escritas como[8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} &= \sqrt{g} B^2 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} &= -\sqrt{g} B^1 \end{aligned}$$

Estas equações mostram que a função Ψ descreve as superfícies magnéticas do sistema, pois a relação:

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \Psi = 0$$

é satisfeita.

A função Ψ definida pela expressão (3.6) também pode ser escrita em termos do potencial vetor \vec{A} , aplicando-se o teorema de Stokes. Assim[8]:

$$\Psi = -\frac{1}{L} \int_0^L A_3 dx^3$$

Em sistemas simétricos:

$$\Psi = -A_3(x^1, x^2) \quad (3.9)$$

que é uma expressão idêntica a (3.5).

Na verdade, muitas configurações de interesse prático não apresentam uma simetria espacial, o que impede o uso da fórmula $\Psi(x^1, x^2) = -A_3 = \int \sqrt{g} B^2 dx^1$ para o cálculo de estruturas magnéticas. Normalmente nestes casos, o campo magnético \vec{B} do plasma é escrito como:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b} \quad (3.10)$$

onde \vec{B}_0 é o campo simétrico (de equilíbrio) e \vec{b} é uma pequena perturbação que destrói a simetria original do sistema. Esta perturbação pode ser causada por oscilações espontâneas do plasma (instabilidades)[9], por correntes externas[10] ou por imperfeições no ajuste das bobinas magnéticas de confinamento[11].

Em geral, a estrutura de \vec{B} é determinada numericamente, através da integração direta das equações $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$, ou analiticamente, usando-se o formalismo hamiltoniano ou um método da média.

3.4 O cálculo de estruturas magnéticas através do formalismo hamiltoniano

A equação das linhas de campo $\vec{B} \times d\vec{\ell} = 0$ pode ser escrita em termos das coordenadas curvilíneas generalizadas x^1, x^2, x^3 como um sistema de duas equações diferenciais:

$$\frac{dx^1}{dx^3} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{\nabla} x^1}{\vec{B} \cdot \vec{\nabla} x^3} = \frac{B^1}{B^3} \quad (3.11)$$

$$\frac{dx^2}{dx^3} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{\nabla} x^2}{\vec{B} \cdot \vec{\nabla} x^3} = \frac{B^2}{B^3}$$

Se estas equações forem reescritas num (novo) sistema de coordenadas y^1, y^2, y^3 tal que exista uma função $H(y^1, y^2, y^3)$ que satisfaça a:

$$\frac{dy^1}{dy^3} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{\nabla} y^1}{\vec{B} \cdot \vec{\nabla} y^3} = -\frac{\partial H}{\partial y^2} \quad (3.12)$$

$$\frac{dy^2}{dy^3} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{\nabla} y^2}{\vec{B} \cdot \vec{\nabla} y^3} = \frac{\partial H}{\partial y^1}$$

então as equações das linhas de \vec{B} serão equivalentes a um sistema hamiltoniano unidimensional *não-autônomo* (dependente das três coordenadas y^1, y^2, y^3).

Em 1962, D. W. Kerst demonstrou esta equivalência pela primeira vez, usando um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z e assumindo que B_z era uniforme[12].

Este resultado pode ser estendido para um caso totalmente geral. Por exemplo, A. Salat fez a seguinte mudança de coordenadas[13]:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv 0 \\ y^1 &\equiv p \equiv A_2(x^1, x^2, x^3) \\ y^2 &\equiv q \equiv x^2 \\ y^3 &\equiv t \equiv x^3 \\ H &\equiv -A_3(x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Com estas escolhas, Salat mostrou que as equações (3.12) formam um sistema hamiltoniano:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (3.14)$$

onde o momento p e a hamiltoniana H são escritos em função das componentes B^i :

$$p = \int_{x_0^1}^{x^1} \sqrt{g} B^3 dx^1 + F(x^2, x^3)$$

$$H = \int_{x_0^1}^{x^1} \sqrt{g} B^2 dx^1 + G(x^2, x^3)$$

As funções F e G podem ser tomadas como identicamente nulas se $\sqrt{g}B^1 = 0$ no eixo magnético ($x^1 = x_0^1$).

Demonstrações semelhantes a esta foram feitas por outros autores, com algumas restrições ou diferenças. Por exemplo: K. J. Whiteman[4], M. P. Bernardin e J. A. Tataronis[14] e E. Pinã e T. Ortiz[15] identificaram q como x^1 ($q \equiv x^1$) e tomaram $A_2 \equiv 0$; A. H. Boozer[16] usou explicitamente coordenadas de fluxo; M. S. Janaki e G. Ghosh[17] trabalharam num sistema de coordenadas ortogonais; L. Turner[18] fez esta demonstração para campos com simetria helicoidal cilíndrica e H. Ralph Lewis[19], para campos toroidais.

Em geral, a mudança de coordenadas $(x^1, x^2, x^3) \rightarrow (p, q, t)$ não simplifica a solução das equações $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$. Provavelmente, a principal razão para o uso do formalismo hamiltoniano em problemas práticos se deve ao *teorema de Noether*. Quando um problema formulado possui uma coordenada ignorável, o teorema de Noether assegura a existência de uma constante do movimento. Assim, se a hamiltoniana H independe de uma coordenada canônica, a coordenada conjugada é uma constante do movimento; se H independe do tempo, então a própria hamiltoniana é uma constante.

Se $x^3 \equiv t$ é uma coordenada ignorável, o sistema de equações (3.14) é *autônomo* e, por isso, integrável. Neste caso, a hamiltoniana $H = H(p, q)$ satisfaz à relação $\vec{B} \cdot \vec{\nabla} H(p, q) = 0$; o que implica que as superfícies (magnéticas) $H = \text{constante}$ contém as linhas de \vec{B} . Porém, no caso não-autônomo $\vec{B} \cdot \vec{\nabla} H(p, q, t) \neq 0$.

Quando o problema possui uma "simetria aproximada", então algum método da *teoria de perturbação* pode ser aplicado para criar uma coordenada ignorável e, assim, transformar a simetria aproximada numa exata (pelo menos formalmente). O teorema de Noether fornece um invariante correspondente, chamado de *invariante adiabático*[20, 21, 22].

H. Poincaré chamou de *problema fundamental da dinâmica* o estudo do efeito de pequenas perturbações hamiltonianas sobre um sistema integrável.

Freqüentemente, supõe-se que a hamiltoniana H correspondente ao campo total $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$ tem a seguinte forma:

$$H(p, q, t) = H_0(p, q) + h(p, q, t) \quad (3.15)$$

onde H_0 é a hamiltoniana que descreve as linhas do campo não-perturbado \vec{B}_0 e h se relaciona à perturbação \vec{b} que destrói a simetria original.

Uma superfície magnética é muito sensível a qualquer perturbação fraca, por ser formada de infinitas voltas das linhas de campo. Por isso, mesmo para uma pequena mudança no campo de equilíbrio, as alterações na estrutura magnética do plasma podem ser grandes.

Existem muitos procedimentos analíticos [20, 21, 22] que fornecem (com diferentes graus de precisão) uma solução aproximada para o sistema de equações do movimento relacionado com a hamiltoniana total H definida em (3.15). Normalmente, o sistema simétrico (plasma em equilíbrio) é resolvido em termos de suas variáveis de *ângulo-ação* ϕ, I . Estas “novas” variáveis se relacionam com as “velhas” q e p através de:

$$I = \frac{1}{L} \oint_{H_0=\text{const}} p dq$$

$$\phi = \frac{\partial S(q, I)}{\partial I}$$

onde L é o período da coordenada q e $S(q, I)$ é a função geratriz da transformação canônica $(p, q) \rightarrow (I, \phi)$, sendo definida como:

$$S(q, I) = \int p dq$$

Nas novas coordenadas, as equações da trajetória das linhas de \vec{B}_0 são:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{dH_0}{dI} = \omega(I) = \frac{1}{q(I)}$$

onde q é o fator de segurança de \vec{B}_0 . Integrando-se estas equações, obtém-se que:

$$I = \text{constante}$$

$$\phi = \omega t + \text{constante}'$$

Ou seja, I é uma constante do movimento (não-perturbado) e ϕ varia linearmente com o tempo. A hamiltoniana H_0 é expressa apenas em função de I :

$$H_0(p, q) = H_0(I) \quad (3.16)$$

Quando a perturbação é considerada, adiciona-se à hamiltoniana de equilíbrio $H_0(I)$ um “pequeno” termo $h(I, \phi, t)$ expandido numa dupla série de Fourier:

$$h(I, \phi, t) = \sum_{m,n} h_{mn}(I) e^{i(m\phi - nt)} \quad (3.17)$$

onde m e n são números inteiros e h_{mn} são os coeficientes associados aos modos $(m; n)$.

Assim, a hamiltoniana H definida em (3.15) é reescrita como:

$$H(I, \phi, t) = H_0(I) + \sum_{m,n} h_{mn}(I) e^{i(m\phi - nt)} \quad (3.18)$$

e as respectivas equações do movimento são:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -i \sum_{m,n} m h_{mn}(I) e^{i(m\phi - nt)} \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) + \sum_{m,n} \frac{d h_{mn}(I)}{dI} e^{i(m\phi - nt)} \end{aligned}$$

Técnicas padrões da teoria de perturbação[20, 21, 22] podem ser usadas para se obter uma solução aproximada deste sistema de equações. Desta maneira, o formalismo hamiltoniano vem sendo utilizado no cálculo analítico da estrutura magnética de diferentes máquinas de confinamento de plasmas, como *stellarators*[23, 24, 25], *levitrons*[26, 27] e *tokamaks*[28, 29, 30, 31, 32].

Basicamente, são analisados dois tipos de problemas:

1) a uma hamiltoniana não-perturbada com simetria cilíndrica:

$$H_0 = H_0(r)$$

são adicionadas duas perturbações com helicidades diferentes:

$$h(r, \theta, z) = h_{m_1 n_1}(r) \cos(m_1 \theta - n_1 \frac{z}{R_0}) + h_{m_2 n_2}(r) \cos(m_2 \theta - n_2 \frac{z}{R_0})$$

o que destrói a simetria original. São determinadas as *ilhas magnéticas primárias* (cujos termos ressonantes aparecem explicitamente na hamiltoniana $H = H_0 + h$)[23, 24] e as *ilhas secundárias* (que resultam do acoplamento das ressonâncias primárias)[25, 26, 27, 28, 32]².

2) a uma hamiltoniana não-perturbada na geometria toroidal:

$$H_0 = H_0(r, \theta)$$

é adicionada uma única perturbação helicoidal:

$$h(r, \theta, \varphi) = h_{mn}(r) \cos(m\theta - n\varphi)$$

(φ é a coordenada angular toroidal — ver figura 0-2) que é suficiente para quebrar a simetria inicial. Determinam-se a ilha primária[31] e as ilhas secundárias que decorrem da toroidicidade do sistema[24, 29, 30].

²Uma hamiltoniana do tipo: $H(v, x, t) = (v^2/2) - M \cos x - P \cos k(x - t)$ é chamada de *hamiltoniana paradigma*. Este é um dos mais simples sistemas não-integráveis. O caso $M = 0, P = 0$ corresponde à hamiltoniana de uma partícula livre; o caso $M \neq 0, P = 0$, à hamiltoniana de um pêndulo e o caso $M \neq 0, P \neq 0$, à uma partícula carregada interagindo com duas ondas planas eletrostáticas[33, 34]. Este último caso também corresponde à hamiltoniana de um campo cilíndrico $\vec{B}_0(r)$ com $B_{0z} = \text{constante}$ perturbado por dois modos helicoidais.

Nestes dois casos, as linhas do campo total \vec{B} apresentam um comportamento estocástico em torno das separatrizes das ilhas magnéticas. Esta estocasticidade também ocorre se a intensidade da perturbação é suficiente para causar a superposição das ilhas.

A existência simultânea de trajetórias regulares e de regiões de estocasticidade é uma característica de sistemas hamiltonianos *quase-integráveis* $H = H_0 + h$. O teorema KAM (A. N. Kolmogorov, V. I. Arnold, J. Moser) afirma que se $\frac{h}{H_0}$ é “suficientemente pequeno” e h é analítica em I, ϕ, t num dado domínio, então a maioria das superfícies $I = \text{constante}$ são apenas “ligeiramente deformadas”³. A perturbação destrói as superfícies localizadas nas regiões ressonantes $q = \frac{m}{n}$. Pelo teorema de Poincaré-Birkhoff, surgem $2m$ pontos fixos — metade *elípticos* (pontos localmente estáveis, também chamados de pontos-O), metade *hiperbólicos* (pontos localmente instáveis, também chamados de pontos-X) dispostos alternadamente. Os pontos elípticos são circundados por trajetórias regulares; os pontos hiperbólicos são conectados pela separatriz. Assim, sobre estes pontos fixos se formam superfícies com estrutura de *ilhas*. Se a amplitude da perturbação aumenta, as ilhas secundárias que resultam do acoplamento dos modos primários se tornam mais evidentes. A superposição deste conjunto de ilhas pode levar a uma completa estocasticização das linhas do campo \vec{B} [20, 21, 22].

Ao nosso ver, a principal dificuldade para o uso do formalismo hamiltoniano em cálculos de estruturas magnéticas é que, em geral, não é possível se obter uma relação analítica entre o campo perturbativo \vec{b} e a hamiltoniana perturbativa $h(I, \phi, t)$. Tal relação só pode ser feita em alguns casos particulares, como:

- quando o equilíbrio é cilíndrico $\vec{B}_0 = \vec{B}_0(r)$ e a perturbação tem um único modo helicoidal $\vec{b}_{m;n}$ [31]. Neste caso, as equações das linhas do campo total \vec{B} são integráveis, pois o sistema depende apenas de duas coordenadas, r e $m\theta - n\frac{z}{R_0}$. Isto permite a identificação de h como o fluxo de \vec{b} através de uma superfície helicoidal cilíndrica com $m\theta - n\frac{z}{R_0} = \text{constante}$ (seção 3.3).
- quando há dois modos helicoidais diferentes, mas são feitas restrições quanto aos campos de equilíbrio e da perturbação. Por exemplo, M. Pettini e G. Torricelli-Camponi [35] obtiveram uma relação analítica entre \vec{b} e h trabalhando num sistema de coordenadas cartesianas x, y, z e adotando que $\vec{B}_0(x) = (0, B_{0y}(x), B_{0z})$ e que $\vec{b}(x, y, z) = \vec{b}(x)e^{i(k_y y + k_z z)}$. Assim, eles conseguiram relacionar h com \vec{b} [35]. H. Sugimoto *et al.* [36] trabalharam numa geometria cilíndrica r, θ, z e assumiram que $\vec{B}_0(r) = (0, B_{0\theta}(r), B_{0z})$ e que a componente- z do campo total era uniforme.

Alguns autores adotam modelos para os coeficientes $h_{mn}(I)$ [30, 37, 38, 39]; outros deixam seus resultados em função destes coeficientes.

Na prática, as medidas experimentais nos permitem construir uma expressão analítica para o campo perturbativo $\vec{b}(r, \theta, z)$ melhor do que diretamente para a hamiltoniana perturbativa $h(I, \phi, t)$. Por isso, escolher um modelo para $h_{mn}(I)$ ou fazer restrições “não-realistas” para o campo \vec{B} não nos parece um procedimento satisfatório.

³Uma formulação mais precisa deste teorema envolve argumentos de topologia e da teoria de números.



Outro método usualmente empregado para a solução das equações das linhas de campo $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$ é o método da média.

3.5 O cálculo de estruturas magnéticas através do método da média

Se um sistema integrável⁴ é sujeito a uma pequena perturbação de magnitude⁵ ϵ , então as quantidades que eram constantes do movimento começam a evoluir lentamente. Esta evolução pode tornar-se considerável para intervalos de tempo da ordem de $\frac{1}{\epsilon}$ (a evolução é pequena em intervalos da ordem de 1). Através de um *método da média*, podem-se escrever as equações que governam a evolução das grandezas que variam lentamente. A idéia básica deste método é separar o movimento perturbado em dois: um de evolução "lenta" e outro de oscilação "rápida". A média é tomada sobre uma variável angular que oscila rapidamente. Este método leva diretamente ao cálculo de *invariantes adiabáticas*, que são as invariantes aproximadas do movimento perturbado[22].

Baseando-se nestes princípios, N. N. Bogolyubov e colaboradores (como Y. A. Mitropolsky[5] e N. Krylov) propuseram procedimentos analíticos para solucionar sistemas de equações diferenciais que não necessariamente derivam de uma hamiltoniana ou, se derivam, não necessariamente são escritos em termos de variáveis canônicas⁶.

Suponha que seja dado o seguinte sistema de n equações diferenciais de primeira ordem[1, 2]:

$$\frac{dx^k}{d\tau} = f^k(x^i, \tau) \quad (i = 1, 2, \dots, k, \dots, n)$$

onde f^k é função das n variáveis x^i e é periódica em τ com período L .

O método da média consiste em se substituir o sistema de equações que contém a evolução rápida do movimento — que aparece na dependência de f^k com a variável τ — por um sistema de equações médias. O ponto crucial deste método é a mudança de coordenadas $x^k \rightarrow \bar{x}^k$ que possibilita a eliminar, com um dado grau de precisão, as fases rápidas das equações originais, e assim separar o movimento rápido do lento.

⁴Por exemplo: a equação das linhas do campo \vec{B}_0 de um plasma em equilíbrio simétrico.

⁵Por exemplo: $\epsilon = \frac{b}{B_0}$.

⁶Outros autores, como M. Lindstedt, H. Poincaré e H. von Zeipel desenvolveram métodos de solução média para sistemas hamiltonianos[20, 21, 22].

O método da média desenvolvido por Bogolyubov foi aplicado por A. I. Morozov e L. S. Solov'ev com o objetivo de investigar a morfologia de campos magnéticos de sistemas não-simétricos, sem integrar diretamente as equações das linhas de campo $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$. Eles determinaram analiticamente uma função de superfície magnética aproximada $\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ correspondente ao seguinte campo $\vec{B}[1]$:

$$\vec{B}(x^1, x^2, x^3) = b^1 \vec{e}_1 + b^2 \vec{e}_2 + (B_0^3 + b^3) \vec{e}_3$$

onde $\vec{B}_0 = B_0^3(x^1, x^2) \vec{e}_3$ é um campo simétrico "longitudinal" e $\vec{b}(x^1, x^2, x^3)$ é um pequeno campo que destrói esta simetria. As equações diferenciais que descrevem a trajetória das linhas de \vec{B} são:

$$\frac{dx^k}{dx^3} = \frac{B^k}{B^3} = \frac{b^k}{B_0^3 + b^3} \quad (k = 1, 2)$$

Desprezando termos da ordem de $(\frac{b}{B_0})^3$ ou menores, estas equações são reescritas como:

$$\frac{dx^k}{dx^3} \simeq \frac{b^k}{B_0^3} \left(1 - \frac{b^3}{B_0^3}\right) \equiv f^k(x^i, x^3) \quad (i, k = 1, 2) \quad (3.19)$$

Se as funções f^k definidas acima são periódicas em x^3 , então pode-se aplicar um método da média para solucionar este sistema de equações.

Foi adotada a seguinte notação[1, 2]:

$$\bar{f}(x^i) \equiv \frac{1}{L} \int_0^L f(x^i, x^3) dx^3 \quad (i = 1, 2)$$

$$\tilde{P}(f) \equiv \tilde{f}(x^i, x^3) = f - \bar{f} \quad (i = 1, 2) \quad (3.20)$$

$$\hat{P}(f) \equiv \hat{f}(x^i, x^3) = \tilde{P} \left(\int_0^{x^3} \tilde{f} dx^3 \right) \quad (i = 1, 2)$$

onde as operações de média ($\bar{\quad}$) e integração ($\hat{\quad}$) em x^3 são feitas mantendo-se x^i constantes; e L é o período da coordenada x^3 . A expressão (3.20) estabelece que qualquer função $f(x^1, x^2, x^3)$ pode ser escrita como a soma de um termo que independe de x^3 (\bar{f}) com um termo que varia com x^3 (\tilde{f}).

Pelo método da média de Bogolyubov, as soluções aproximadas do sistema de equações (3.19) são dadas por:

$$x^k = \bar{x}^k + \hat{f}^k(\bar{x}^i, x^3) + \dots \quad (i, k = 1, 2) \quad (3.21)$$

onde as coordenadas médias \bar{x}^k satisfazem às seguintes equações:

$$\frac{d\bar{x}^k}{dx^3} = \bar{f}^k + \frac{\partial \hat{f}^k}{\partial \bar{x}^i} \bar{f}^i + \dots \quad (i, k = 1, 2) \quad (3.22)$$

Substituindo as funções f^k definidas em (3.19) nas equações médias (3.22) e levando em conta que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, obtém-se:

$$\frac{d\bar{x}^1}{d\bar{x}^3} \simeq \frac{1}{\sqrt{g} B_0^3} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}^2} \quad (3.23)$$

$$\frac{d\bar{x}^2}{d\bar{x}^3} \simeq \frac{-1}{\sqrt{g} B_0^3} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}^1}$$

sendo a função de superfície $\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ definida como[1]:

$$\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) \equiv \bar{A}_3 - \frac{\sqrt{g}}{B_0^3} \widehat{b}^1 \widehat{b}^2 \quad (3.24)$$

As equações (3.23) implicam que Ψ satisfaz a:

$$\vec{\nabla} \Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) \cdot d\vec{\ell} \simeq 0 \quad (3.25)$$

onde $d\vec{\ell}$ representa um deslocamento paralelo às linhas médias do campo \vec{B} . Portanto, a função $\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ descreve as superfícies magnéticas médias de \vec{B} . Considerando as correções periódicas em x^3 , o comportamento "real" (aproximado) destas linhas é dado pela expressão (3.21):

$$x^k \simeq \bar{x}^k + \frac{\widehat{b}^k}{B_0^3} + \mathcal{O}\left(\frac{b}{B_0}\right)^2 \quad (i, k = 1, 2) \quad (3.26)$$

Assim, as superfícies (magnéticas):

$$\Psi\left(x^1 - \frac{\widehat{b}^1}{B_0^3}, x^2 - \frac{\widehat{b}^2}{B_0^3}\right) \simeq \text{constante} \quad (3.27)$$

contém as linhas de \vec{B} , com uma precisão da ordem de $(\frac{b}{B_0})^2$.

Com este procedimento, Morozov e Solov'ev[1] obtiveram uma função de superfície magnética aproximada sem a direta integração das equações $\vec{B} \times d\vec{\ell} = 0$. Na determinação da fórmula (3.24) para Ψ , eles assumiram que o campo simétrico era puramente "longitudinal" ($\vec{B}_0 = B_0^3 \vec{e}_3$). Tal restrição limita muito a utilidade prática desta fórmula.

Na minha dissertação de mestrado[40, 41], nós usamos este mesmo método da média para determinar a estrutura magnética de um plasma de *tokamak* em equilíbrio MHD estático[42] perturbado por correntes helicoidais externas[43]. Nós obtivemos uma expressão analítica para uma função Ψ que descrevia as superfícies magnéticas em torno das regiões ressonantes (como a geometria toroidal foi considerada, um único modo helicoidal $(m; n)$ criava ilhas magnéticas na região de ressonância principal $q = \frac{m}{n}$ e também nas regiões de ressonância secundária $q = \frac{m \pm 1}{n}$).

Na aplicação deste método de solução aproximada, a escolha das coordenadas é fundamental. Dependendo desta escolha, alguns detalhes da estrutura magnética podem desaparecer no processo de média. Nós tomamos x^1 como uma quantidade de superfície magnética do campo não-perturbado \vec{B}_0 ; x^3 como sendo a outra coordenada relevante do sistema, e x^2 como a coordenada ignorável. Com estas escolhas:

$$B_0^1 = \vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla} x^1 = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial B_0^i}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^2} = 0$$

onde $g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j$ são as componentes do tensor métrico contravariante. A simetria do equilíbrio era destruída pela dependência de \vec{b} com x^2 . Note que $B_0^1 = 0$ decorre da escolha de coordenadas e não de uma restrição a \vec{B}_0 (o que diferencia o nosso trabalho do de Morozov e Solov'ev). Assim, o sistema de equações a ser resolvido era:

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dx^3} &= \frac{b^1}{B_0^3 + b^3} \\ \frac{dx^2}{dx^3} &= \frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3 + b^3} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Desprezando termos da ordem de $(\frac{b}{B_0})^2$ ou menores, nós pudemos escrever as equações médias derivadas de (3.29) em termos de uma função Ψ . Tais equações médias tinham a mesma forma das equações (3.23) e Ψ foi definida como[40, 41]:

$$\Psi(\overline{x^1}, \overline{x^2}) \equiv F + \sqrt{g} B_0^2 \frac{\widehat{b^1}}{B_0^3} \quad (3.30)$$

onde LF é o fluxo de \vec{B} através de uma superfície $x^2 = \text{constante}$ limitada por uma superfície magnética do sistema não-perturbado. Na verdade, LF equivale a $\overline{A_3}$ na expressão (3.24).

As posições das linhas de \vec{B} foram obtidas a partir das posições médias, usando (3.21):

$$\begin{aligned} x^1 &\simeq \bar{x}^1 + \mathcal{O}\left(\frac{b}{B_0}\right) \\ x^2 &\simeq \bar{x}^2 + \frac{\widehat{B}_0^2}{B_0^3} + \mathcal{O}\left(\frac{b}{B_0}\right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

A correção $\frac{\widehat{B}_0^2}{B_0^3}$ à coordenada média \bar{x}^2 aparece devido à toroidicidade do equilíbrio. Esta "correção toroidal" ($\frac{\widehat{B}_0^2}{B_0^3} \sim \frac{a}{R_0} \sim 20\%$) é muito mais importante do que a correção devido ao campo perturbativo ($\frac{b}{B_0} \sim 1\%$).

Assim, nós obtivemos que, em torno das regiões ressonantes, as superfícies[40, 41]:

$$\Psi(x^1, x^2 - \frac{\widehat{B}_0^2}{B_0^3}) \simeq \text{constante} \quad (3.32)$$

continham (aproximadamente) as linhas do campo \vec{B} . Os mapas derivados desta expressão analítica apresentaram uma boa concordância com os mapas obtidos através da integração numérica das equações $\vec{B} \times d\vec{\ell} = 0$, usando parâmetros típicos do tokamak TBR-1[40, 41, 44].

Recentemente, nós desenvolvemos um método da média[45] que fornece uma fórmula analítica para Ψ mais precisa do que a expressão (3.30) (que foi obtida através do método de Bogolyubov). Esta maior precisão se deve a uma diferença na definição das coordenadas médias \bar{x}^1 e \bar{x}^2 .

Na aplicação de um método da média, as equações originais são substituídas por equações médias em termos de \bar{x}^1 e \bar{x}^2 . No entanto, a escolha destas coordenadas médias não é única. Nós escrevemos[45]:

$$\begin{aligned} x^1 &\equiv \bar{x}^1 + \delta x^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, x^3) \\ x^2 &\equiv \bar{x}^2 + \widetilde{x}^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, x^3) + \delta x^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, x^3) \end{aligned}$$

Em princípio, \bar{x}^1 e \bar{x}^2 podem ser solução de qualquer sistema autônomo de duas equações diferenciais de primeira ordem; e \widetilde{x}^2 pode ser escolhido arbitrariamente. Nossa idéia foi construir um método de perturbação onde a *solução de primeira-ordem* ($\delta x^i = 0$) do sistema de equações (3.29) contivesse as principais características da estrutura magnética (como, por exemplo, a "correção toroidal" $\frac{\widehat{B}_0^2}{B_0^3}$). δx^i são as *correções de segunda-ordem*.

Nós fizemos as seguintes escolhas para \bar{x}^1 , \bar{x}^2 e Ψ [45]:

$$\frac{d\bar{x}^1}{dx^3} = \frac{\bar{b}^1}{B_0^3} \left(1 + \frac{\bar{b}^3}{B_0^3}\right)^{-1}$$

$$\bar{x}^2 = \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3}$$

$$\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \overline{\int_0^{\bar{x}^1} \sqrt{g} B_0^2(\bar{x}^1, x^3) d\bar{x}^1} - \overline{\int_c^{\bar{x}^2 + \bar{x}^2} \sqrt{g} b^1(\bar{x}^1, x^2, x^3) dx^2} \quad (3.33)$$

onde c é uma constante que satisfaz à condição:

$$\overline{\sqrt{g} b^2(\bar{x}^1, c, x^3)} = 0$$

Pode-se mostrar que a função Ψ definida em (3.33) obedece às equações:

$$\frac{d\bar{x}^1}{dx^3} = \frac{-1}{\sqrt{g} B_0^3} \left(1 + \frac{\bar{b}^3}{B_0^3}\right)^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}^2}$$

$$\frac{d\bar{x}^2}{dx^3} \simeq \frac{1}{\sqrt{g} B_0^3} \left(1 + \frac{\bar{b}^3}{B_0^3}\right)^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}^1}$$

o que implica na expressão (3.25):

$$\vec{\nabla} \Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) \cdot d\vec{\ell} \simeq 0$$

Portanto, as superfícies:

$$\Psi\left(x^1, x^2 - \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3}\right) \simeq \text{constante} \quad (3.34)$$

contém as linhas do campo total \vec{B} . Os mapas derivados da expressão analítica (3.33) concordam perfeitamente com os mapas de Poincaré correspondentes[45].

No próximo capítulo, nós usamos a expressão (3.33) para determinar a função Ψ que descreve a estrutura magnética aproximada de um plasma de RFP em equilíbrio cilíndrico perturbado por dois modos ressonantes. As coordenadas x^1, x^2, x^3 são escolhidas seguindo o mesmo critério estabelecido pelas relações (3.28). O campo do plasma $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$ é tomado como uma superposição do campo \vec{B}_0 de equilíbrio de Taylor[46] (pág. 12) com o campo \vec{b} associado aos modos resistivos, para o qual Bazzani *et al.*[47] sugeriram um modelo analítico (pág. 18). Superfícies magnéticas aproximadas são comparadas com os mapas de Poincaré obtidos através da integração numérica das linhas de \vec{B} , usando parâmetros típicos do RFP ETA-BETA II.

Bibliografia

- [1] Morozov A. I., Solov'ev L. S., *The Structure of Magnetic Fields*, Reviews of Plasma Physics 2, 1 (1966).
- [2] Solov'ev L. S., Shafranov V. D., *Plasma Confinement in Closed Magnetic Systems*, Reviews of Plasma Physics 5, 1 (1970).
- [3] Finn J. M., *The Destruction of Magnetic Surfaces in Tokamaks by Current Perturbations*, Nucl. Fusion 15, 845 (1975).
- [4] Whiteman K. J., *Invariants and Stability in Classical Mechanics*, Rep. Prog. Phys. 40, 1033 (1977).
- [5] Bogolyubov N. N., Mitropolsky Y. A., *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, Gordon & Breach, New York (1961).
- [6] Spiegel M. R., *Análise Vetorial*, Mc Graw Hill, São Paulo (1977).
- [7] Edenstrasser J. W., *Unified Treatment of Symmetric MHD Equilibria*, J. Plasma Phys. 24, 299 (1980).
- [8] Kucinski M. Y., Caldas I. L., *MHD Equilibrium Equation in Symmetric Systems*, Publicações IFUSP, P-817 (1990).
- [9] Albert D. B., Morton A. H., *Fast-Growing Helical MHD Modes During the Disruptive Instability in LT-3 Tokamak*, Nucl. Fusion 17, 863 (1977).
- [10] Karger F., Wobig H., Corti S., Gernhardt J., Klüber O., Lisitano G., Mc Cormick K., Meisel D., Sesnic S., *Influence of Resonant Helical Fields on Tokamak Discharges*, Proceedings of the 'Fifth International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Tokyo,1974)', IAEA, 1, 207 (1975).
- [11] Matsuda S., Yoshikawa M., *Magnetic Island Formation Due to Error Field in the JFT-2 Tokamak*, Japan J. Appl. Phys. 14, 87 (1975).
- [12] Kerst D. W., *The Influence of Errors on Plasma-Confining Magnetic Fields*, Plasma Phys. 4, 253 (1962).
- [13] Salat A., *Hamiltonian Approach to Magnetic Fields with Toroidal Surfaces*, Z. Naturforsch. 40a, 959 (1985).

- [14] Bernardin M. P., Tataronis J. A., *Hamiltonian Approach to the Existence of Magnetic Surfaces*, J. Math. Phys. 26, 2370 (1985).
- [15] Piña E., Ortiz T., *On Hamiltonian Formulations of Magnetic Field Line Equations*, J. Phys. A: Math. Gen. 21, 1293 (1988).
- [16] Boozer A. H., *Evaluation on the Structure of Ergodic Fields*, Phys. Fluids 26, 1288 (1983).
- [17] Janaki M. S., Ghosh G., *Hamiltonian Formulation of Magnetic Field Line Equations*, J. Phys. A: Math. Gen. 20, 3679 (1987).
- [18] Turner L., *Hamiltonian Representation for Helically Symmetric Magnetic Fields*, J. Math. Phys. 26, 991 (1985).
- [19] Ralph Lewis H., *Representation of Magnetic Fields with Toroidal Topology in Terms of Field-Line Invariants*, Phys. Fluids B 2, 2551 (1990).
- [20] Lichtenberg A. J., Lieberman M. A., *"Regular and Stochastic Motion"*, Springer-Verlag, New York (1983).
- [21] Sagdeev R. Z., Usikov D. A., Zaslavsky G. M., *"Nonlinear Physics - from the Pendulum to Turbulence and Chaos"*, Harwood Academic Publishers, London (1988).
- [22] Arnold V. I. (ed.), *"Dynamical System III"*, Springer-Verlag, Berlin (1988).
- [23] Rosenbluth M. N., Sagdeev R. Z., Taylor J. B., Zaslavsky G. M., *Destruction of Magnetic Surfaces by Magnetic Field Irregularities*, Nucl. Fusion 6, 297 (1966).
- [24] Filonenko N. N., Sagdeev R. Z., Zaslavsky G. M., *Destruction of Magnetic Surfaces by Magnetic Field Irregularities: Part II*, Nucl. Fusion 7, 253 (1967).
- [25] Wobig H., *Magnetic Surfaces and Localized Perturbations in the Wendelstein VII-A Stellarator*, Z. Naturforsch. 42a, 1054 (1987).
- [26] Freis R. P., Hartman C. W., Hamzeh F. M., Lichtenberg A. J., *Magnetic-Island Formation and Destruction in a Levitron*, Nucl. Fusion 13, 533 (1973).
- [27] Hamzeh F. M., *Magnetic-Surface Destruction in Toroidal Systems*, Nucl. Fusion 14, 523 (1974).
- [28] Mercier C., *Magnetic Islands and Turbulence*, Sov. J. Plasma Phys. 9, 82 (1983).
- [29] Lichtenberg A. J., *Stochasticity as the Mechanism for the Disruptive Phase of the $m = 1$ Tokamak Oscillations*, Nucl. Fusion 24, 1277 (1984).
- [30] Lichtenberg A. J., Itoh K., Itoh S. I., Fukuyama A., *The Role of Stochasticity in Sawtooth Oscillations*, Nucl. Fusion 32, 495 (1992).
- [31] Elsässer K., *Magnetic Field Line Flow as a Hamiltonian Problem*, Plasma Phys. Control. Fusion 28, 1743 (1986).

- [32] Hatori T., Irie H., Abe Y., Urata K., *Chaotic Magnetic Field Line in Toroidal Plasmas*, Prog. Theor. Phys. Supplement 98, 83 (1989).
- [33] Rechester A. B., Stix T. H., *Stochastic Instability of a Nonlinear Oscillator*, Phys. Rev A 19, 1656 (1979).
- [34] Escande D. F., *Stochasticity in Classical Hamiltonian Systems: Universal Aspects*, Phys. Rep. 121, 165 (1985).
- [35] Pettini M., Torricelli-Camponi G., *Stochastic Magnetic Field Generation in MHD Resistive Instabilities: Validity Limits of Linear Stability Analysis*, J. Plasma Phys. 40, 419 (1988).
- [36] Sugimoto H., Kurasawa T., Ashida H., *Stochastic Diffusion of Magnetic Field Lines*, Plasma Phys. Control. Fusion 36, 383 (1994).
- [37] Elsässer K., Düchs D., Sack Ch., *Stochastic Stability of a Plasma Torus*, Phys. Lett. A 120, 57 (1987).
- [38] Elsässer K., Deeskow P., *Magnetic Field Line Diffusion at the Onset of Stochastic*, Z. Naturforsch. 42a, 1181 (1987).
- [39] Düchs D. F., Montvai A., Sack C., *On Diffusion of Magnetic Field Lines*, Plasma Phys. Control. Fusion 33, 919 (1991).
- [40] Monteiro L. H. A., "Superfícies Magnéticas de Campos Helicoidais Toroidais em Tokamaks", Dissertação de Mestrado, IFUSP (1990).
- [41] Monteiro L. H. A., Okano V., Kucinski M. Y., Caldas I. L., *Magnetic Structure of Toroidal Helical Fields in Tokamaks*, Phys. Lett. A 193, 89 (1994).
- [42] Kucinski M. Y., Caldas I. L., Monteiro L. H. A., Okano V., *Toroidal Plasma Equilibrium with Arbitrary Current Distribution*, J. Plasma Phys. 44, 303 (1990).
- [43] Kucinski M. Y., Caldas I. L., *Toroidal Helical Fields*, Z. Naturforsch. 42a, 1124 (1987).
- [44] Kucinski M. Y., Caldas I. L., Monteiro L. H. A., Okano V., *Magnetic Structure of Non-Symmetric Systems — Toroidal Helical Plasmas*, Proceedings of the 'Joint Varenna-Lausanne International Workshop on Theory of Fusion Plasmas (Varenna, 1990)' 1, 685 (1990).
- [45] Kucinski M. Y., Caldas I. L., Monteiro L. H. A., Okano V., *Magnetic Surfaces in Non-Symmetric Plasmas*, Plasma Phys. Control. Fusion 34, 1067 (1992).
- [46] Taylor J. B., *Relaxation and Magnetic Reconnection in Plasmas*, Rev. Mod. Phys. 58, 741 (1986).
- [47] Bazzani A., Malavasi M., Siboni S., Pellacani C., Rambaldi S., Turchetti G., *Poincaré Map and Anomalous Transport in a Magnetically Confined Plasma*, Nuovo Cimento B 103, 659 (1989).

Capítulo 4

Superfícies magnéticas em RFPs

O objetivo desta tese é mostrar analiticamente que, num plasma de RFP em equilíbrio MHD cilíndrico perturbado por dois modos helicoidais $(m_1; n_1)$ e $(m_2; n_2)$, formam-se ilhas magnéticas nas regiões de ressonância principal $q = \frac{m_1}{n_1}$ e $q = \frac{m_2}{n_2}$ e também nas regiões de ressonância secundária $q = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$ e $q = \frac{|m_1-m_2|}{|n_1-n_2|}$. Através deste cálculo, pretende-se confirmar o acoplamento de modos que supostamente acontece durante a fase de sustentação do campo toroidal reverso (pág. 23).

Neste capítulo, determina-se a estrutura magnética resultante da superposição do campo \vec{B}_0 de equilíbrio de Taylor com o campo \vec{b} associado aos modos ressonantes. Com o auxílio de um método da média por nós desenvolvido, deriva-se analiticamente uma função Ψ que descreve as superfícies magnéticas do campo total $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$ em torno das regiões de ressonância. Estas superfícies têm estrutura de ilhas. A evolução temporal da configuração magnética pode ser simulada com uma conveniente variação da amplitude da perturbação $\epsilon \equiv \frac{b}{B_0}$. Espera-se que com o aumento da intensidade dos modos primários $(m_1; n_1)$ e $(m_2; n_2)$, os modos secundários $(m_1 + m_2; n_1 + n_2)$ e $(|m_1 - m_2|; |n_1 - n_2|)$ tornem-se cada vez mais evidentes. Superfícies magnéticas médias são comparadas com mapas obtidos através da integração numérica das linhas do campo total \vec{B} , usando parâmetros típicos do RFP ETA-BETA II.

4.1 O campo magnético na fase quase-estacionária

Na fase quase-estacionária de uma descarga em RFP, o campo magnético \vec{B} do plasma pode ser escrito como a soma de um campo simétrico \vec{B}_0 com um pequeno campo perturbativo \vec{b} que quebra esta simetria:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b} \quad (4.1)$$

Nós tomamos \vec{B}_0 como sendo o campo de equilíbrio de Taylor[1] (págs. 12 e 13):

$$\begin{aligned} B_{0r} &= 0 \\ B_{0\theta}(r) &= B_0 J_1(2\Theta r/a) \\ B_{0z}(r) &= B_0 J_0(2\Theta r/a) \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde B_0 é o valor do campo no eixo magnético ($r = 0$), J_0 e J_1 são as funções cilíndricas de Bessel de ordens 0 e 1, e $\Theta \equiv \frac{B_{0\theta}(a)}{B_{0z}}$ é uma constante.

Nós escolhemos o modelo de Taylor devido a sua simplicidade e pelo fato das regiões ressonantes se localizarem na parte interna do plasma ($r \leq a/2$). Nesta região, há uma boa concordância entre as expressões (4.2) e os perfis experimentais do campo médio de equilíbrio (figura 2-2).

Para o campo \vec{b} associado aos modos resistivos $(m_1; n_1)$ e $(m_2; n_2)$:

$$\vec{b} = \vec{b}_{m_1; n_1} + \vec{b}_{m_2; n_2}$$

nós adotamos o modelo sugerido por Bazzani *et al.*[2]: a componente poloidal de \vec{b} é considerada desprezível ($b_\theta \equiv 0$) e as componentes radial (b_r) e toroidal (b_z) são dadas por:

$$b_r = b_r^{(m_1; n_1)}(r) \cos(m_1\theta - n_1 \frac{z}{R_0}) + b_r^{(m_2; n_2)}(r) \cos(m_2\theta - n_2 \frac{z}{R_0}) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r b_r)}{\partial r}$$

com:

$$b_r^{(m; n)} \equiv b_0 \frac{r(a-r)}{2a^2} c_m d_n$$

sendo c_m e d_n os coeficientes dos modos poloidal e toroidal, respectivamente.

Este modelo foi descrito na seção 2.4 (págs. 18 e 19). Nós havíamos observado que a expressão (4.3) representa o perfil experimental de b_r , enquanto que para b_θ e b_z a concordância é precária. Nós veremos a seguir que somente b_r é relevante¹ no cálculo da estrutura do campo total \vec{B} .

¹A perturbação \vec{b} pouco afeta a trajetória das linhas do campo \vec{B}_0 nas direções poloidal e toroidal, pois $b_\theta \ll B_{0\theta}$ e $b_z \ll B_{0z}$. Contudo, como \vec{B}_0 se anula na direção radial, um pequeno termo b_r é capaz de alterar significativamente a estrutura do campo $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$.

4.2 Ilhas magnéticas em RFPs

Para o campo magnético:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}_{m_1; n_1} + \vec{b}_{m_2; n_2} \quad (4.4)$$

a equação das linhas de campo $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$ pode ser escrita como um sistema de duas equações em termos das coordenadas curvilíneas x^1, x^2, x^3 :

$$\frac{dx^1}{dx^3} = \frac{B^1}{B^3} \quad ; \quad \frac{dx^2}{dx^3} = \frac{B^2}{B^3} \quad (4.5)$$

sendo $B^i \equiv \vec{B} \cdot \vec{\nabla} x^i$ as componentes contravariantes. Este é um sistema não-autônomo, no sentido de que os B^i 's dependem explicitamente de três coordenadas. Conseqüentemente, as linhas de campo podem não formar superfícies magnéticas. Contudo, se a intensidade da perturbação for "pequena", espera-se que longe das ressonâncias as superfícies magnéticas de equilíbrio sejam apenas ligeiramente deformadas; e, nas regiões ressonantes, as linhas de campo formem superfícies "aproximadas" com estrutura de ilhas.

Nós desenvolvemos um método da média[3] (págs. 42 e 43) com o objetivo de calcular analiticamente tais superfícies aproximadas (sem que seja necessário integrar numericamente as equações (4.5)).

Para a aplicação deste método, o campo total \vec{B} deve ser escrito como a soma de um campo simétrico com uma pequena perturbação que destrói esta simetria. Aqui, nós escrevemos:

$$\vec{B} = \vec{B}_{m_1; n_1} + \vec{b}_{m_2; n_2}$$

onde $\vec{B}_{m_1; n_1}$ é definido como a superposição do campo de equilíbrio de Taylor com o campo associado ao modo ressonante $(m_1; n_1)$:

$$\vec{B}_{m_1; n_1} \equiv \vec{B}_0(r) + \vec{b}_{m_1; n_1}(r, m_1\theta - n_1 \frac{z}{R_0}) \quad (4.6)$$

O campo $\vec{B}_{m_1; n_1}$ tem uma simetria helicoidal cilíndrica, pois é função da coordenada radial r e da coordenada helicoidal $m_1\theta - n_1 \frac{z}{R_0}$ (expressões (4.2) e (4.3)). Suas linhas de campo formam superfícies magnéticas com dois tipos básicos de estrutura:

- i) ilhas, em torno da região ressonante com $q = \frac{m_1}{n_1}$;
- ii) cilindros aproximadamente circulares, longe da ressonância.

A perturbação $\vec{b}_{m_2; n_2}$ corresponde ao outro modo $(m_2; n_2)$.

Na aplicação deste método da média, a escolha de coordenadas é fundamental. O método exige que as coordenadas x^1 e x^3 estejam relacionadas ao campo simétrico. A coordenada x^1 deve ser escolhida como uma quantidade de superfície do sistema simétrico, a fim de que:

$$B_{m_1; n_1}^1 = \vec{B}_{m_1; n_1} \cdot \vec{\nabla} x^1 = 0 \quad (4.7)$$

e x^3 deve ser a outra coordenada relevante de $\vec{B}_{m_1; n_1}$. No nosso caso:

$$x^3 \equiv m_1 \theta - n_1 \frac{z}{R_0} \quad (4.8)$$

A simetria de \vec{B} é destruída devido a dependência de $\vec{b}_{m_2; n_2}$ com x^2 .

Todas as quantidades físicas são funções periódicas de x^3 com periodicidade L . As médias são tomadas sobre um período de x^3 .

4.2.1 O sistema simétrico — a escolha de x^1

A estrutura magnética do sistema simétrico pode ser descrita por uma função de fluxo magnético $\psi_0(r, x^3)$. Convencionalmente, $2\pi\psi_0$ é o fluxo de $\vec{B}_{m_1; n_1}(r, x^3)$ através de uma fita helicoidal cilíndrica de largura r , especificada pela superfície coordenada $x^3 \equiv m_1 \theta - n_1 \frac{z}{R_0} = \text{constante}$.

Nós obtemos que a função ψ_0 é dada por:

$$\psi_0(r, x^3) = G_0(r) + G_1(r) \sin x^3 \quad (4.9)$$

onde:

$$G_0(r) = \int_0^r \frac{r R_0}{m_1} (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla} x^3) dr$$

e:

$$G_1(r) \sin x^3 = \int_0^r \frac{r R_0}{m_1} (\vec{b}_{m_1; n_1} \cdot \vec{\nabla} x^3) dr$$

ψ_0 deve ter um extremo em torno de²:

$$\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla} x^3 = m_1 \frac{B_{0\theta}}{r} - n_1 \frac{B_{0z}}{R_0} \simeq 0$$

que corresponde à região ressonante, pois:

$$q \equiv \frac{r B_{0z}}{R_0 B_{0\theta}} \simeq \frac{m_1}{n_1}$$

²A condição de extremo (máximo ou mínimo):

$$\vec{\nabla} \psi_0(r, x^3) = 0$$

pode ser simplificada para:

$$\frac{dG_0(r)}{dr} \simeq 0$$

se $|G_0| \gg |G_1|$; isto é, se $|\vec{B}_0| \gg |\vec{b}_{m_1; n_1}|$.

Fora das ilhas, cada superfície magnética de $\vec{B}_{m_1; n_1}$ pode ser especificada pelo raio r_0 , definido como o valor de r em $x^3 = 0$. Assim, estas superfícies são descritas pela equação:

$$\psi_0(r, x^3) = \psi_0(r_0, 0) = G_0(r_0)$$

Para cada valor de x^3 , nós temos aproximadamente que:

$$r \simeq r_0 - \frac{G_1(r_0)}{dG_0(r_0)/dr_0} \sin x^3 \quad (4.10)$$

O perfil radial da função ψ_0 e as superfícies magnéticas $\psi_0 = \text{constante}$ são mostradas esquematicamente na figura 4-1.

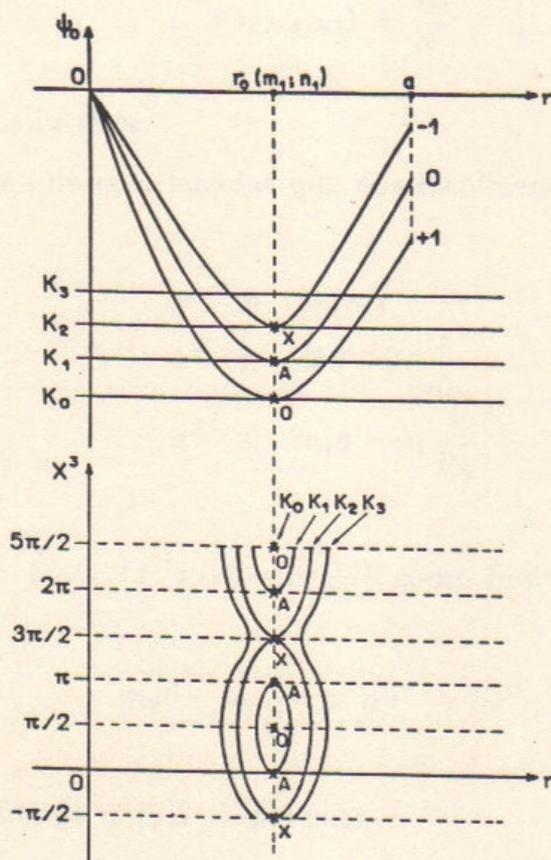


Figura 4-1: Função de fluxo helicoidal $\psi_0(r, x^3)$ e superfícies $\psi_0 = \text{constante} = K_i$ do campo $\vec{B}_{m_1; n_1}$. Os índices +1, 0 e -1 correspondem a $\sin x^3 = +1, 0$ e -1 . Em torno de $q(r_0) = \frac{m_1}{n_1}$, formam-se ilhas magnéticas. $\psi_0 = K_0$ corresponde ao eixo magnético das ilhas (pontos-O) e $\psi_0 = K_2$, à separatriz (superfície que contém os pontos-X).

Para calcular a estrutura magnética do campo total \vec{B} , nós escolhemos a função de fluxo ψ_0 como sendo a coordenada x^1 :

$$x^1 \equiv \psi_0(r_0) \quad (4.11)$$

Assim, a condição (4.7) é satisfeita.

4.2.2 O sistema perturbado — a escolha de x^2

Quando a simetria é quebrada, as linhas de campo não formam superfícies magnéticas. Apesar disto, pode-se determinar superfícies aproximadas em termos de coordenadas médias \bar{x}^1 e \bar{x}^2 . Se $\vec{b}_{m_2; n_2}$ não é suficientemente forte, esperam-se cadeias de ilhas em $q = \frac{m_1}{n_1}$ e em $q = \frac{m_2}{n_2}$, e nas outras superfícies racionais que são afetadas pelo acoplamento deste modo com o modo $(m_1; n_1)$.

É apropriado tomar:

$$x^2 \equiv M\theta - N\frac{z}{R_0} \quad (4.12)$$

se nós quisermos analisar a estrutura magnética em torno de uma superfície racional:

$$q(r_{0(M;N)}) = \frac{M}{N}$$

sendo M e N números inteiros.

Portanto, o sistema de coordenadas que nós escolhemos para analisar a estrutura do campo \vec{B} é:

$$\begin{aligned} x^1 &\equiv \psi_0(r_0) \\ x^2 &\equiv M\theta - N\frac{z}{R_0} \\ x^3 &\equiv m_1\theta - n_1\frac{z}{R_0} \end{aligned} \quad (4.13)$$

A fim de escrever $\vec{b}_{m_2; n_2}(r, m_2\theta - n_2\frac{z}{R_0})$ como função destas coordenadas, nós definimos:

$$m_2\theta - n_2\frac{z}{R_0} \equiv \alpha x^2 - \beta x^3$$

sendo os números racionais α e β dados por:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{m_1 n_2 - n_1 m_2}{m_1 N - n_1 M} \\ \beta &= \frac{M n_2 - N m_2}{m_1 N - n_1 M} \end{aligned} \quad (4.14)$$

A maior dificuldade para a aplicação de um método da média está na escolha adequada das coordenadas. Uma vez que isto é feito, resta uma álgebra trabalhosa.

4.2.3 Superfícies magnéticas médias

No capítulo anterior, nós havíamos adotado a seguinte notação (pág. 39):

$$\bar{f}(\bar{x}^1, \bar{x}^2) \equiv \frac{1}{L} \int_0^L f(\bar{x}^1, \bar{x}^2, x^3) dx^3$$

$$\tilde{P}(f) \equiv \tilde{f}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, x^3) = f - \bar{f}$$

$$\hat{P}(f) \equiv \hat{f}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, x^3) = \tilde{P} \left(\int_0^{x^3} \tilde{f} dx^3 \right)$$

onde as integrações são feitas mantendo-se fixos \bar{x}^1 e \bar{x}^2 .

De acordo com o nosso método da média[3], uma superfície magnética aproximada é descrita por (pág. 43):

$$\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \Psi(x^1 - \delta x^1, x^2 - \tilde{x}^2 - \delta x^2) = \text{constante} \equiv K$$

sendo a função Ψ obtida pela fórmula (3.33)³:

$$\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \overline{\int_0^{\bar{x}^1} \sqrt{g} B_{m_1; n_1}^2(\bar{x}^1, x^3) dx^1} - \overline{\int_c^{\bar{x}^2 + \tilde{x}^2} \sqrt{g} b_{m_2; n_2}^1(\bar{x}^1, x^2, x^3) dx^2} \quad (4.15)$$

Na expressão (4.15), g é o determinante do tensor métrico covariante relativo ao sistema de coordenadas (4.13), podendo ser calculado através de:

$$\sqrt{g} = (\vec{\nabla} x^1 \cdot \vec{\nabla} x^2 \times \vec{\nabla} x^3)^{-1}$$

\tilde{x}^2 é a correção de primeira-ordem a \bar{x}^2 :

$$\tilde{x}^2 = \frac{\widehat{B_{m_1; n_1}^2}}{B_{m_1; n_1}^3} \quad (4.16)$$

e c é uma constante que satisfaz à condição:

$$\sqrt{g} b_{m_2; n_2}^2(\bar{x}^1, c, x^3) = 0 \quad (4.17)$$

³No capítulo 3, \vec{B}_0 representa o campo simétrico e \vec{b} , a perturbação. Neste capítulo, $\vec{B}_{m_1; n_1} \equiv \vec{B}_0 + \vec{b}_{m_1; n_1}$ é o campo simétrico e $\vec{b}_{m_2; n_2}$ é a perturbação.

δx^1 e δx^2 são termos da ordem de $\frac{b}{B_0}$. No nosso caso, a solução de primeira-ordem ($\delta x^i = 0$) é satisfatória, pois a intensidade relativa da flutuação é muito pequena (em RFPs, $\frac{b}{B_0}$ é tipicamente da ordem de $\sim 1\%$).

A função Ψ definida em (4.15) pode ser calculada analiticamente, usando-se as expressões (4.2) e (4.3) para $\vec{B}_{m_1; n_1}(r, x^3)$ e $\vec{b}_{m_2; n_2}(r, x^2, x^3)$, e a expressão (4.10) que relaciona r a $x^1 \equiv \psi_0(r_0)$.

Em torno da superfície racional $q(r_{0(M;N)}) = \frac{M}{N}$, a constância de Ψ determina a seguinte relação (detalhes deste cálculo são dados no Apêndice A, na pág. 72):

$$r_0 \simeq r_{0(M;N)} \pm \frac{W_{M;N}}{4} \sqrt{2 [K \pm \sin(\alpha \bar{x}^2 + \beta \frac{\pi}{2})]} \quad (4.18)$$

onde $W_{M;N}$ é a largura da separatriz:

$$W_{M;N} = 4 \left[\left| \frac{J_\beta(\alpha f(r))}{\alpha} \right| \frac{r b_r^{(m_2; n_2)}(r)}{N(-\frac{dq(r)}{dr}) B_{0\theta}(r)} \right]_{r=r_{0(M;N)}}^{\frac{1}{2}} \quad (4.19)$$

e a função $f(r)$ é dada por:

$$f = \frac{(m_1 N - n_1 M)}{(m_1 - n_1 q)^2} \frac{1}{B_{0\theta}} \left(\frac{1}{n_1} \frac{\partial r b_r^{(m_1; n_1)}}{\partial r} + r b_r^{(m_1; n_1)} \frac{dq/dr}{(m_1 - n_1 q)} \right) \quad (4.20)$$

Cada valor da constante K individualiza uma superfície magnética de \vec{B} .

O sinal $\pm \sin(\alpha \bar{x}^2 + \beta \frac{\pi}{2})$ deve ser tomado de acordo com o sinal de $\frac{J_\beta(\alpha f)}{\alpha}$. Se $\frac{J_\beta(\alpha f)}{\alpha} \geq 0$, o sinal do \sin em (4.18) é $+$. Neste caso, $K = 1$ corresponde à separatriz, $K < 1$ às superfícies internas à separatriz e $K > 1$, às superfícies externas.

Em primeira-ordem, a coordenada média \bar{x}^2 é obtida através de:

$$\bar{x}^2 = x^2 - \widetilde{x}^2 = x^2 - f(r_{0(M;N)}) \cos x^3 \quad (4.21)$$

Na derivação da expressão (4.18), é necessário se fazer uma única restrição quanto à escolha de M e N : β (definido em (4.14)) deve resultar num número inteiro.

Observação : Em geral, o termo $\frac{1}{n_1} \frac{\partial r b_r^{(m_1; n_1)}}{\partial r}$ que aparece na função $f(r)$ é uma ordem de grandeza menor do que $r b_r^{(m_1; n_1)} \frac{dq/dr}{(m_1 - n_1 q)}$. Isto significa que $W_{M;N}$ praticamente independe de b_z . Ou seja, é a componente radial da perturbação, b_r , a que determina a largura das ilhas⁴. Este resultado numérico justifica a nossa escolha de \vec{b} conforme o modelo descrito na pág. 48.

⁴Esta conclusão não se alteraria se $b_\theta \neq 0$.

4.2.4 O acoplamento dos modos primários

Através das expressões (4.18)—(4.21), pode-se calcular a estrutura de ilhas nas superfícies racionais:

$$q = \frac{M}{N} = \frac{m_2 + \beta m_1}{n_2 + \beta n_1}$$

sendo β um número inteiro:

$$\beta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

O caso $\beta = 0$ corresponde à ilha primária em $q = \frac{m_2}{n_2}$.

Os acoplamentos dos modos primários $(m_1; n_1)$ e $(m_2; n_2)$ são dados por $\beta \neq 0$. As ilhas secundárias correspondem a $\beta = \pm 1$; e as ilhas de ordens maiores correspondem a $\beta = \pm 2, \pm 3, \dots$. Estas ilhas aparecem se a perturbação é suficientemente forte, mas não tão forte a ponto de destruir as superfícies magnéticas. O tamanho das ilhas diminui com o aumento de $|\beta|$.

Para determinar os acoplamentos resultantes entre dois modos adjacentes $(m; n)$ e $(m; n + 1)$, nós tomamos:

$$m_1 = m, \quad n_1 = n$$

$$m_2 = m, \quad n_2 = n + 1$$

Com estas escolhas, as superfícies ressonantes estão localizadas em:

$$q = \frac{m(\beta + 1)}{n(\beta + 1) + 1} \quad ; \quad \beta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

As ressonâncias secundárias, dadas por $\beta = +1$ e $\beta = -1$, correspondem às regiões $q = \frac{2m}{2n+1}$ e $q = \frac{0}{1}$, respectivamente. Assim, nós mostramos analiticamente que os modos primários $(m; n)$ e $(m; n + 1)$ se acoplam e excitam os modos secundários $(2m; 2n + 1)$ e $(0; 1)$. Este resultado confirma parte do modelo que explica a sustentação do campo reverso (pág. 23).

A largura da separatriz, dada pela expressão (4.19), difere pelo fator $\left[\left| \frac{J_\beta(\alpha f)}{\alpha} \right| \right]^{\frac{1}{2}}$ da expressão "tradicional" [4, 5, 6]:

$$W_{m;n} = 4 \left[\frac{r b_r^{(m;n)}(r)}{n \left(-\frac{dq(r)}{dr} \right) B_{0\theta}(r)} \right]_{r=r_0(m;n)}^{\frac{1}{2}}$$

que não leva em consideração os efeitos do acoplamento. Esta fórmula fornece apenas a largura das ilhas dos modos primários $(m; n)$.

Devido ao acoplamento, as ilhas numa mesma superfície ressonante têm formas diferentes. Para as ilhas primárias, a diferença entre a nossa fórmula para $W_{M;N}$ e a expressão "tradicional" é da ordem de $\sim 20\%$, para os casos tratados neste trabalho.

4.3 Mapas numéricos e analíticos

Nós chamamos de *mapas numéricos* aqueles obtidos pela integração numérica das equações $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$ por 1000 voltas poloidais (ou toroidais). Cada ponto de uma cadeia de ilhas é a intersecção da linha do campo \vec{B} com um plano transversal, após um circuito poloidal (ou toroidal).

Os *mapas analíticos* são derivados a partir das expressões (4.18)—(4.21) e (4.10) (detalhes do método de mapeamento são dados no Apêndice B, na pág. 74).

Nós calculamos a estrutura de \vec{B} numérica e analiticamente, utilizando valores típicos do RFP ETA-BETA II[7]:

raio da "coluna" de plasma: $a = 0,125m$
 raio maior do toróide: $R_0 = 0,65m$
 parâmetro que caracteriza o perfil de \vec{B}_0 : $\Theta \simeq 1,4 - 2,0$
 intensidade relativa da perturbação: $\epsilon \equiv b_0/B_0 \simeq 1 - 2\%$
 modos primários: $m = 1, n \sim 10$

Os coeficientes de Fourier c_m e d_n são tomados em concordância com as medidas experimentais[2, 8]:

$$c_0 = 0,5 \quad c_1 = 1,0 \quad c_2 = 0,25$$

$$d_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 8, n > 20 \\ n/10 & \text{para } 8 \leq n \leq 10 \\ (20 - n)/10 & \text{para } 10 \leq n \leq 20 \end{cases}$$

As figuras 4-2 a 4-9 são mapas de \vec{B} com os seguintes valores numéricos:

	Θ	$\epsilon \equiv b_0/B_0$	modos primários ($m; n$), ($m; n + 1$)	plano do mapeamento
figura 4-2	1,4	0%	—	$\theta = 0$
figura 4-3	1,5	0,2%	(1; 9), (1; 10)	$\theta = 0$
figura 4-4	1,5	0,4%	(1; 9), (1; 10)	$\theta = 0$
figura 4-5	1,5	0,2%	(1; 9), (1; 10)	$\theta = \pi/2$
figura 4-6	1,5	0,2%	(1; 9), (1; 10)	$z = 0$
figura 4-7	1,7	0,2%	(1; 9), (1; 10)	$\theta = 0$
figura 4-8	1,5	0,2%	(1; 10), (1; 11)	$\theta = 0$
figura 4-9	1,5	1,0%	(1; 9), (1; 10)	$\theta = 0$

As superfícies mapeadas correspondem às separatrizes em $q = \frac{m}{n}$ (cadeia de ilhas mais interna) $q = \frac{m}{n+1}$, $q = \frac{2m}{2n+1}$ e $q = \frac{0}{1}$ (cadeia mais externa). As ilhas em $\frac{0}{1}$ e em $\frac{2m}{2n+1}$ resultam do acoplamento entre os modos primários. Na maioria dos mapas, nós tomamos $\epsilon = 0,2\%$ a fim de que não houvesse superposição das ilhas. Assim, nós podemos comparar os resultados *analíticos* com os *numéricos*.

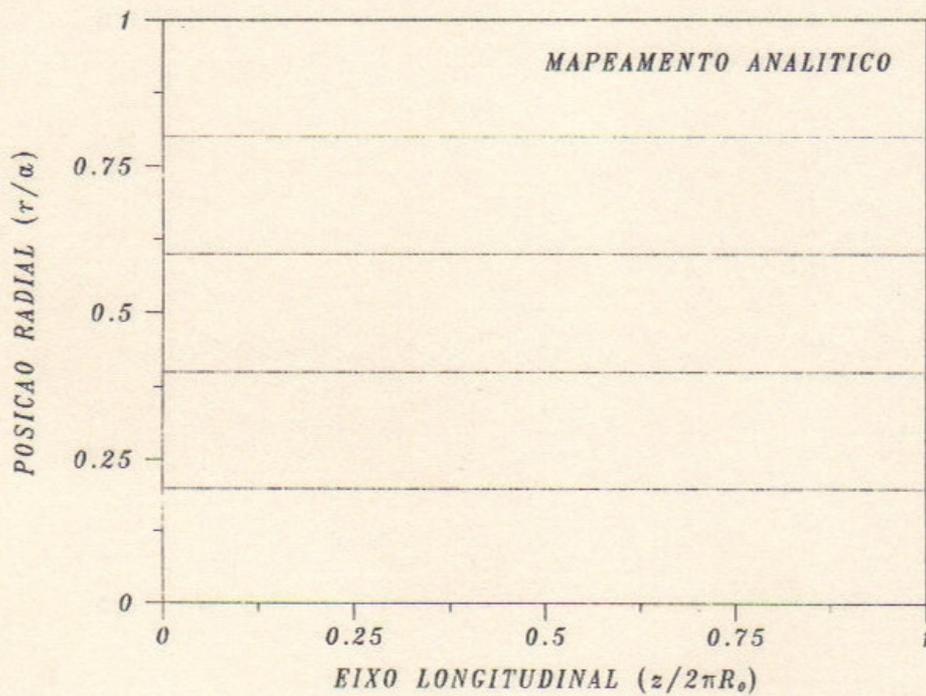
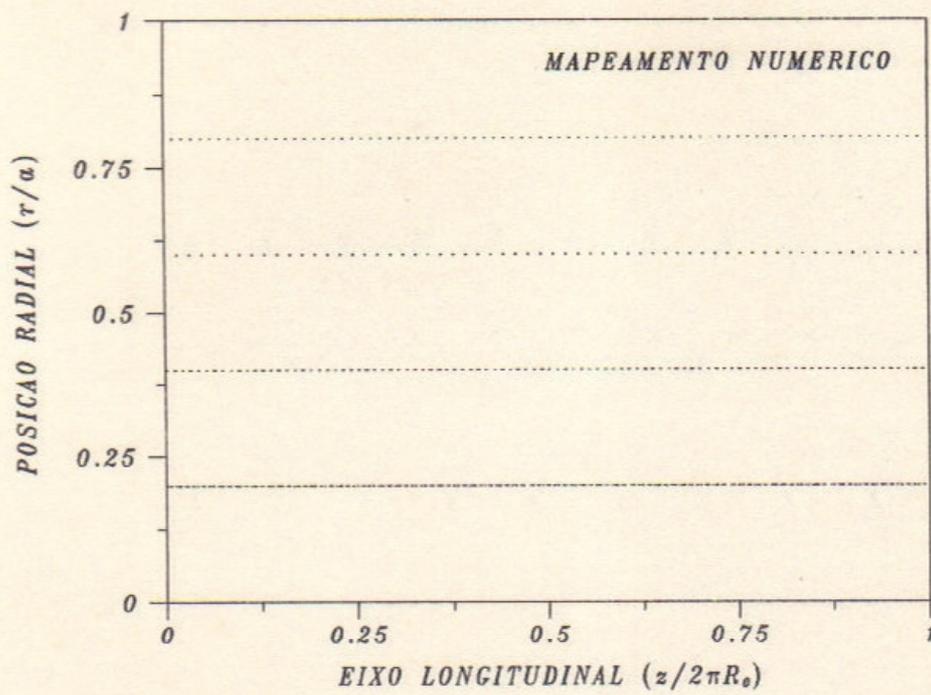


Figura 4-2: Superfícies magnéticas do campo de equilíbrio \vec{B}_0 ($\epsilon = 0\%$) no plano $\theta = 0$. As superfícies são cilindros circulares com $\tau = \text{constante}$.

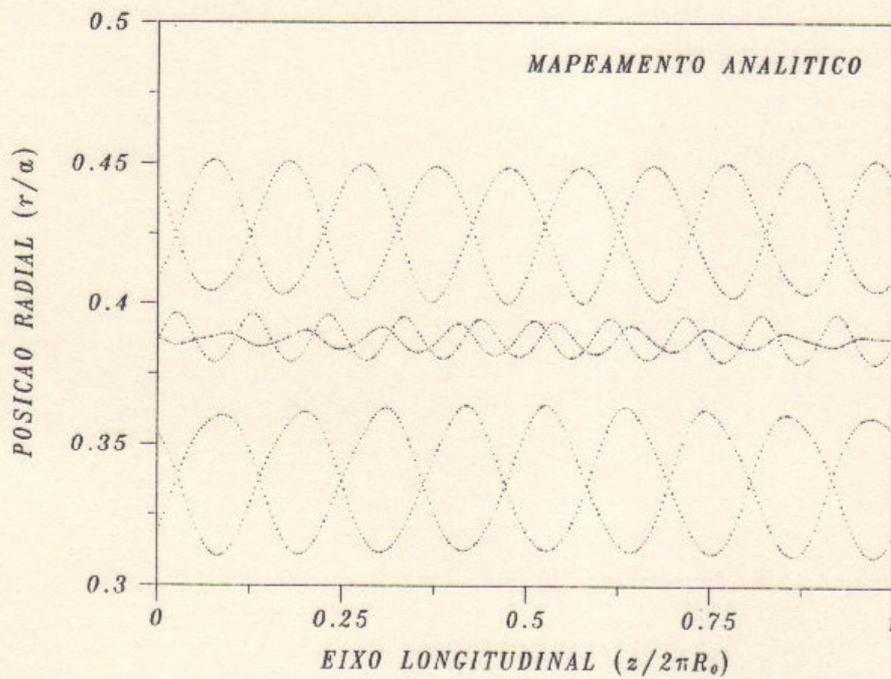
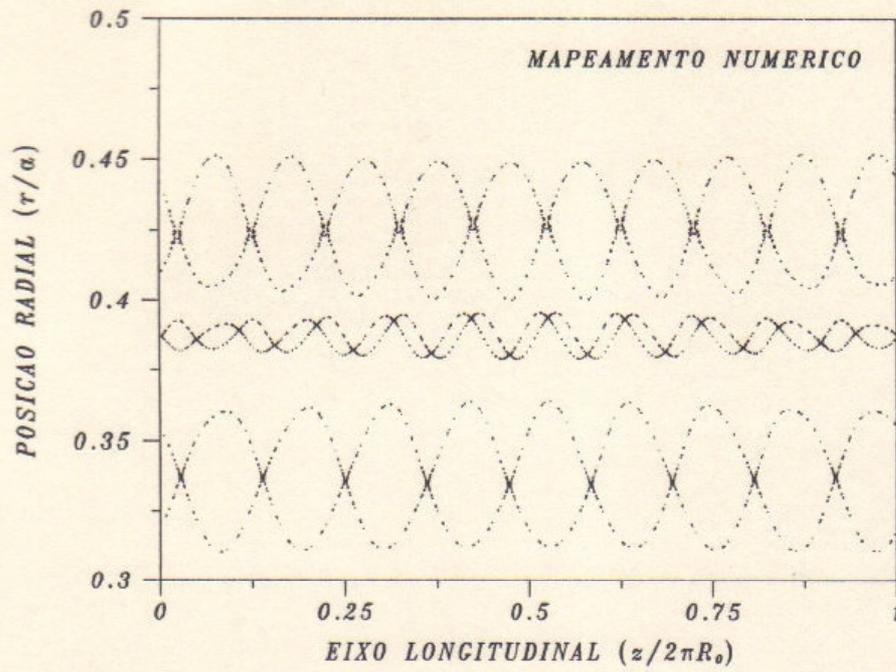


Figura 4-3: Modos primários (1;9) e (1;10); $\Theta = 1,5$; $\epsilon = 0,2\%$; plano $\theta = 0$. Ilhas primárias em $q = \frac{1}{9}$ e $q = \frac{1}{10}$ e ilha secundária em $q = \frac{2}{19}$.

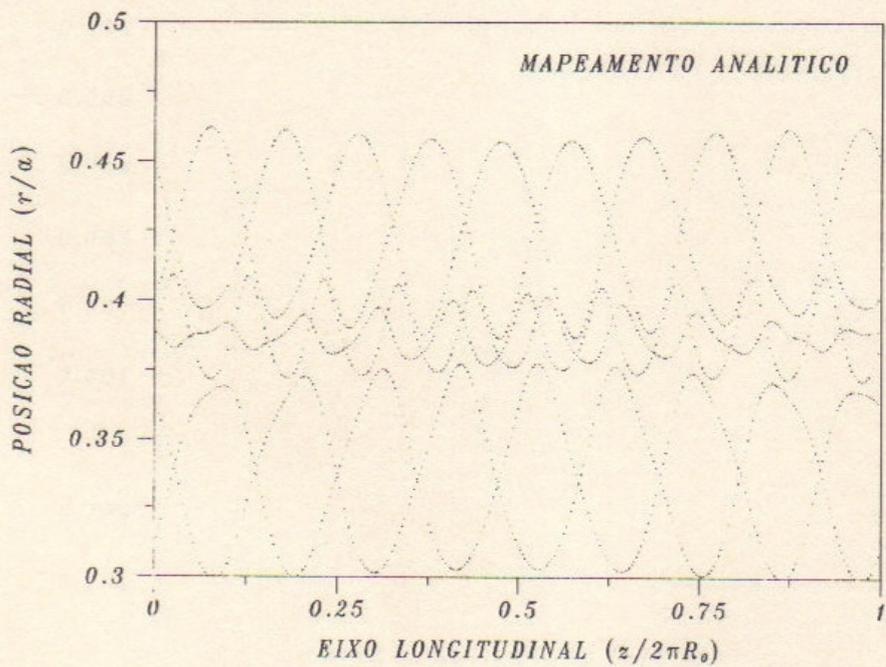
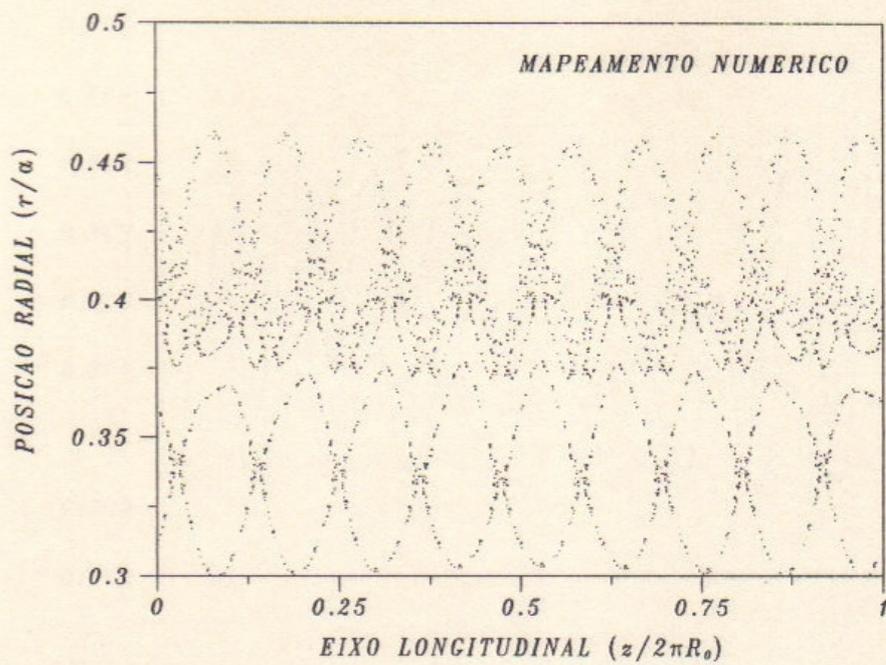


Figura 4-4(a): Modos primários (1;9) e (1;10); $\Theta = 1,5$; $\epsilon = 0,4\%$; plano $\theta = 0$. Para esta intensidade da perturbação, as ilhas em $q = \frac{1}{10}$ e em $q = \frac{2}{19}$ começam a se superpor.

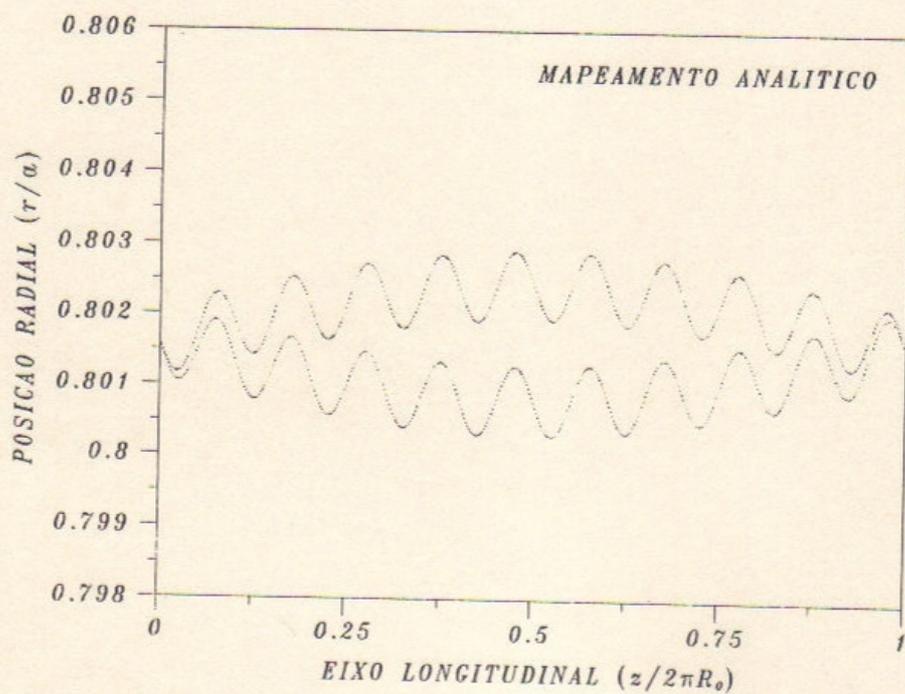
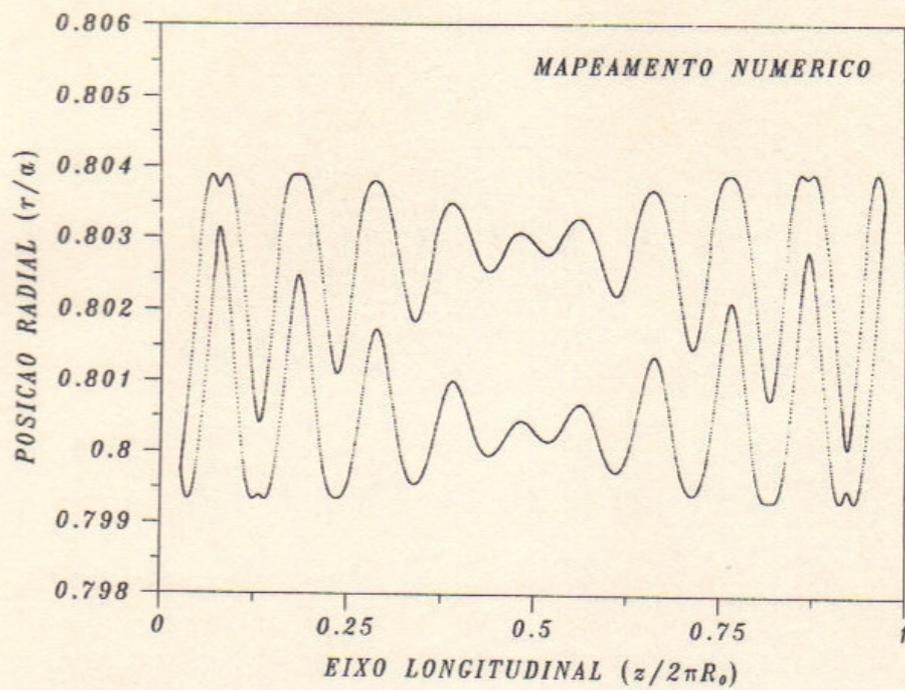


Figura 4-4(b): Idem à figura 4-4(a). Ilha secundária em $q = \frac{0}{1}$.

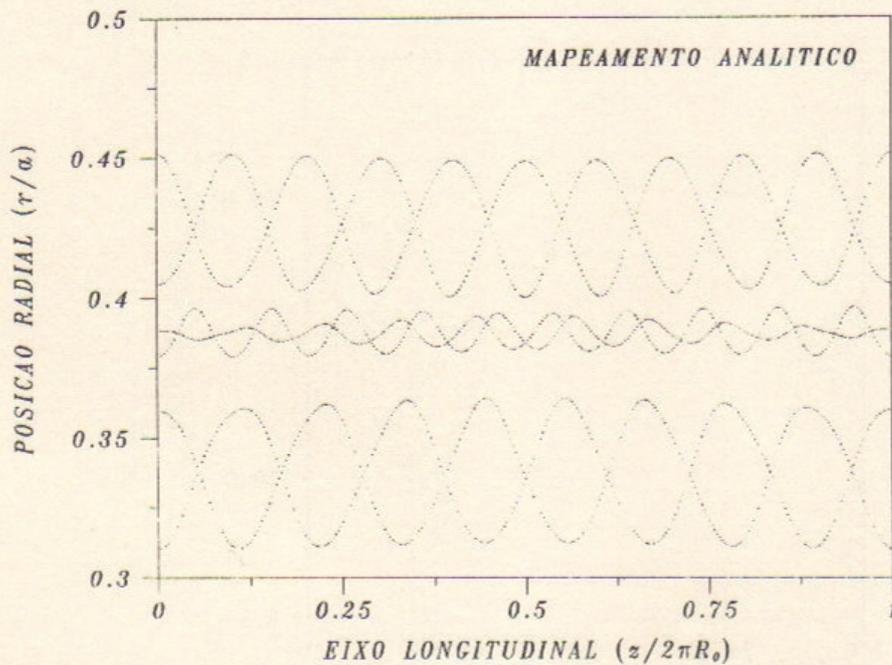
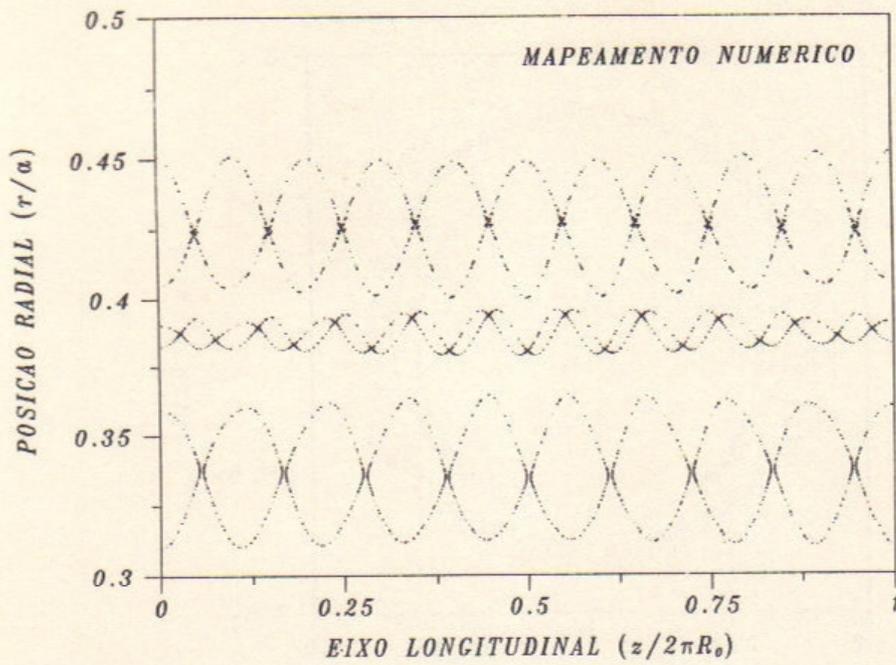
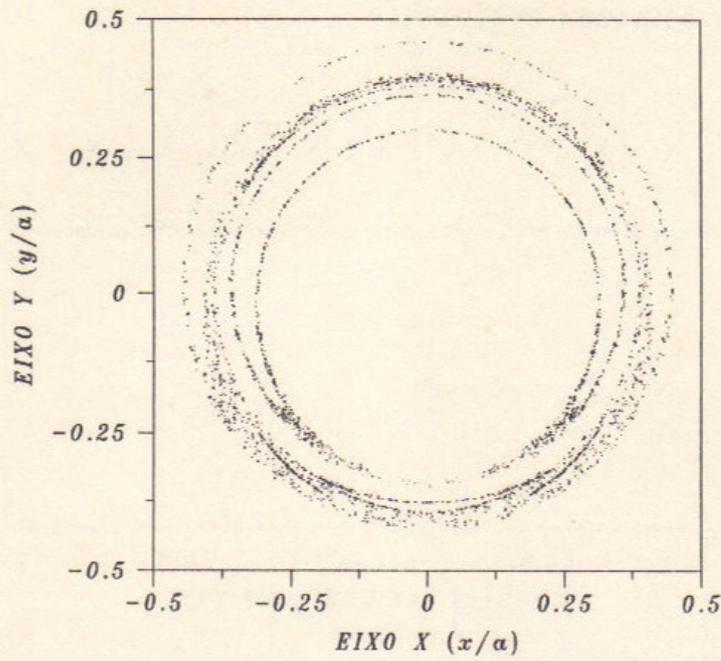
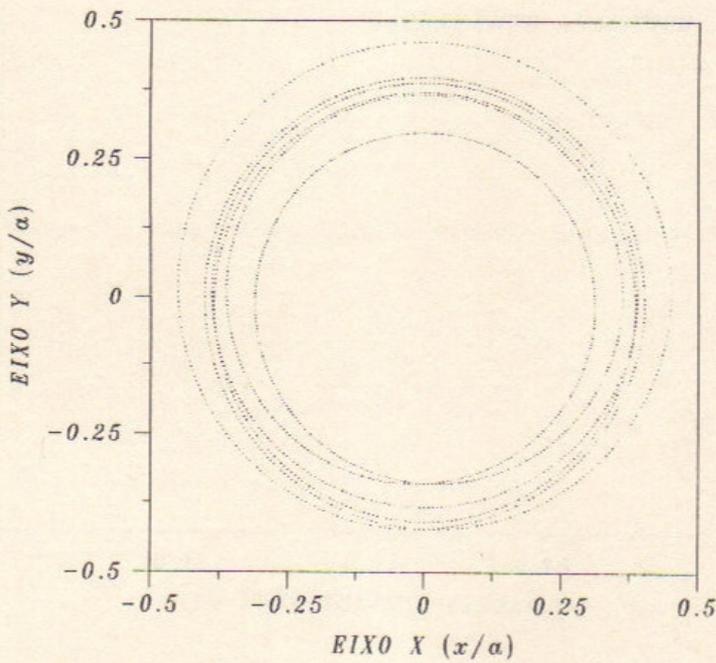


Figura 4-5: Modos primários (1;9) e (1;10); $\Theta = 1,5$; $\epsilon = 0,2\%$; plano $\theta = \pi/2$. Com a variação de θ ($0 \rightarrow \pi/2$), pode-se perceber que toda a estrutura magnética gira helicoidalmente em torno do eixo-z.



MAPEAMENTO NUMERICO



MAPEAMENTO ANALITICO

Figura 4-6: Modos primários (1;9) e (1;10); $\Theta = 1,5$; $\epsilon = 0,4\%$; plano $z = 0$. Em torno de $q = \frac{1}{9}$ e de $q = \frac{1}{10}$, surge uma ilha magnética; em $q = \frac{2}{19}$, surgem duas.

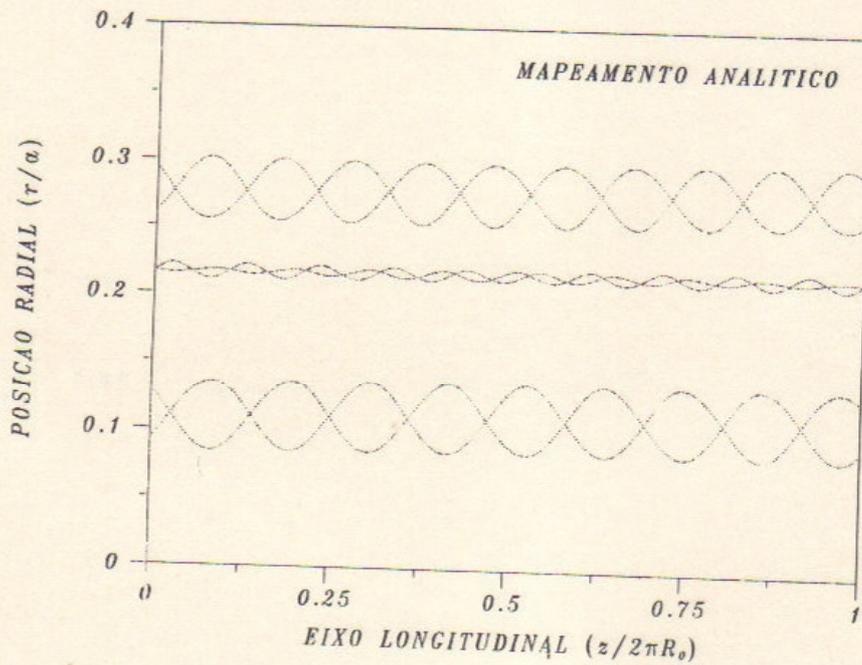
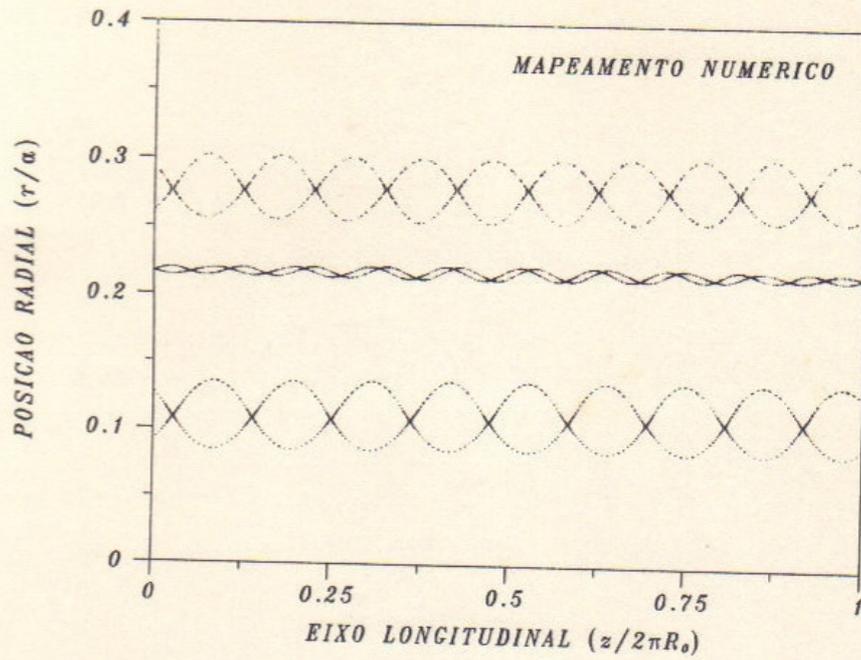


Figura 4-7: Modos primários (1;9) e (1;10); $\Theta = 1,7$; $\epsilon = 0,2\%$; plano $\theta = 0$. Quanto maior Θ , mais internamente se localizam as superfícies ressonantes.

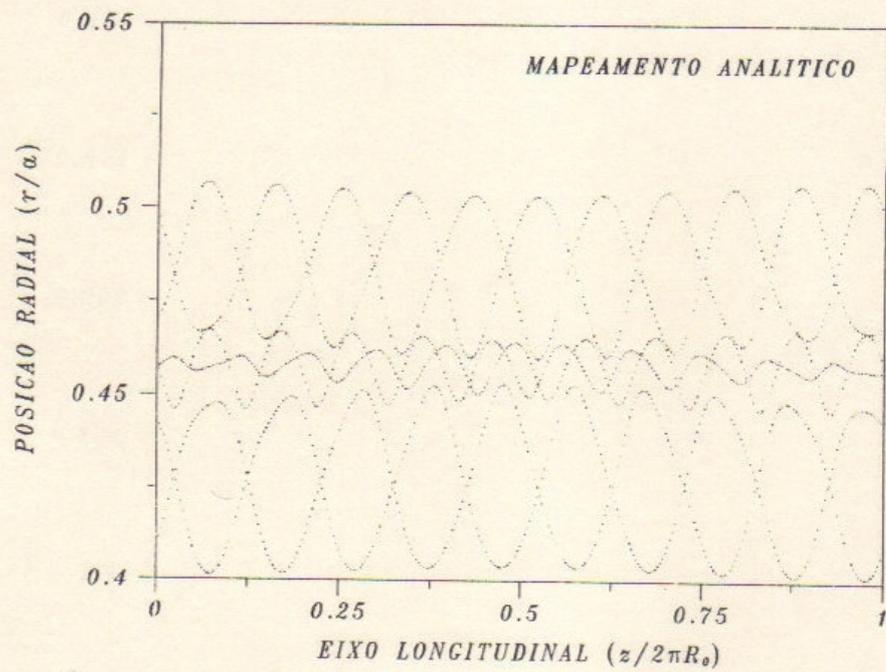
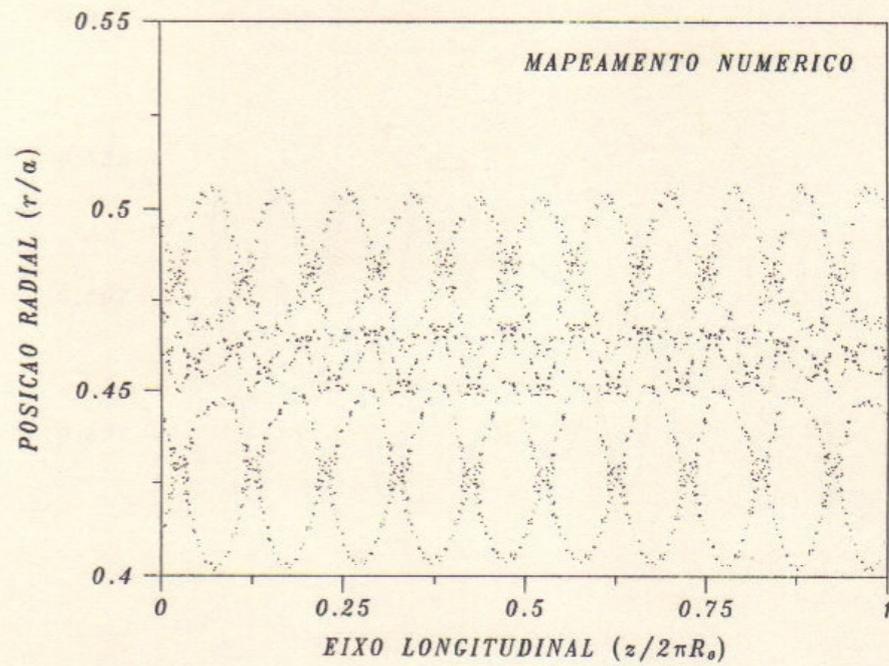


Figura 4-8(a): Modos primários (1;10) e (1;11); $\Theta = 1,5$; $\epsilon = 0,2\%$; plano $\theta = 0$.
 Ilhas primárias em $q = \frac{1}{10}$ e $q = \frac{1}{11}$ e ilha secundária em $q = \frac{2}{21}$.

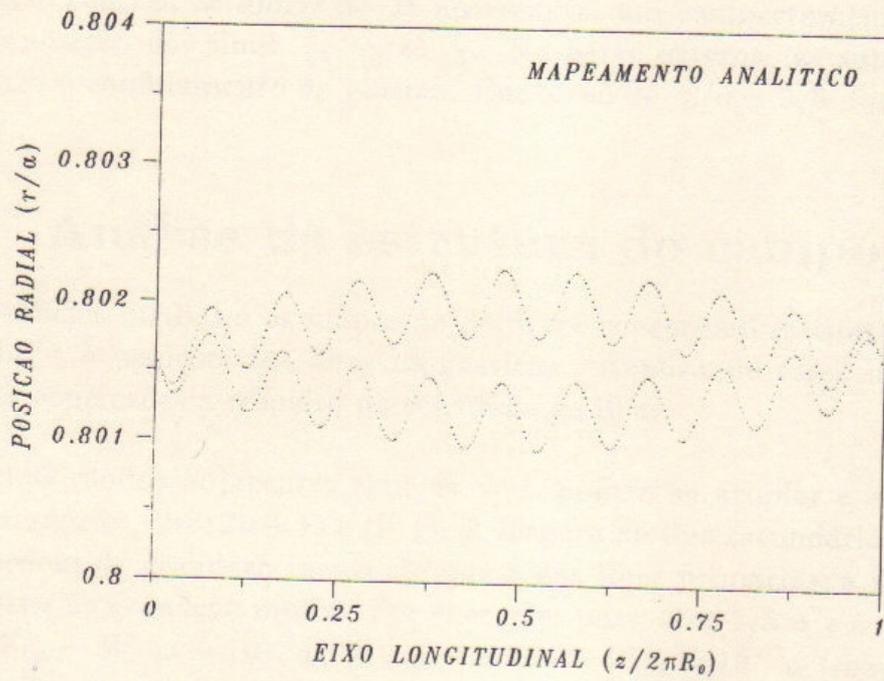
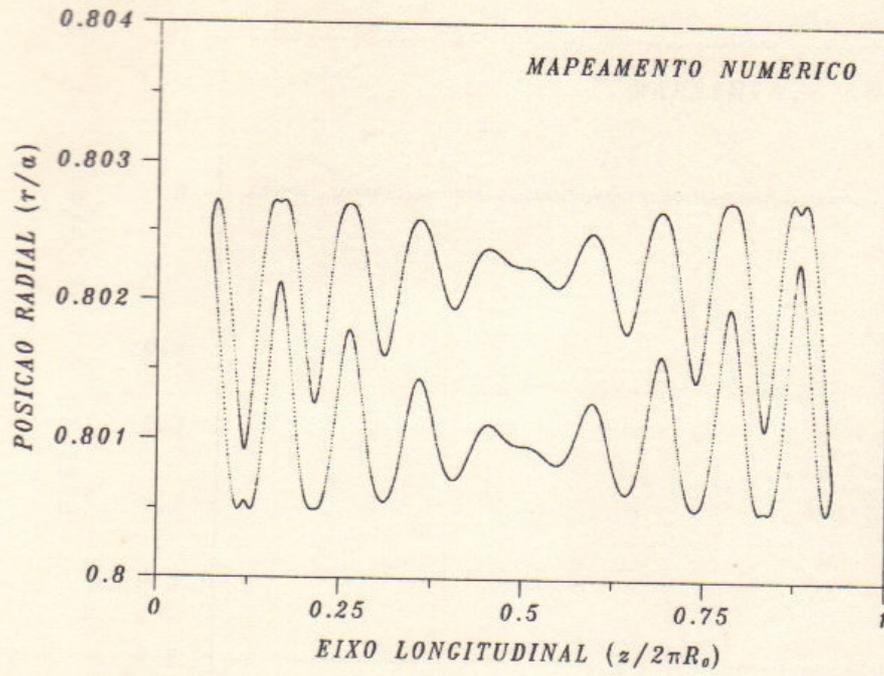


Figura 4-8(b): Idem à figura 4-8(a). O acoplamento de dois modos adjacentes com $m = 1$ leva à formação da ilha secundária em $q = \frac{0}{1}$.

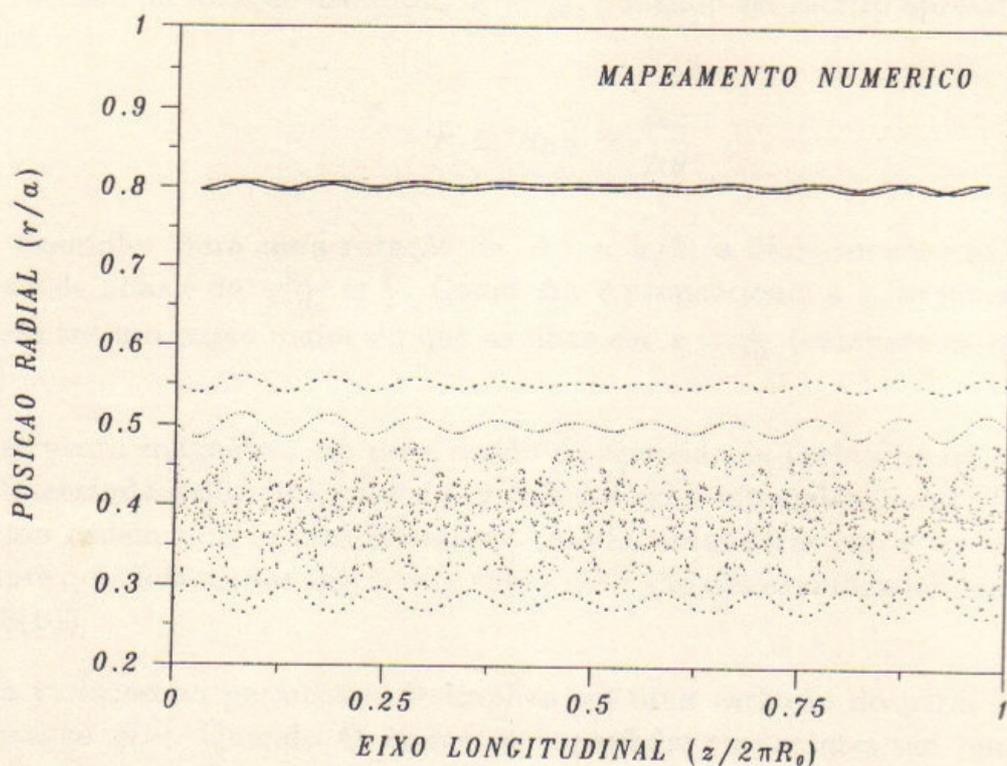


Figura 4-9: Modos primários (1;9) e (1;10); $\Theta = 1,5$; $\epsilon = 1,0\%$; plano $\theta = 0$. Na região central, as linhas de \vec{B} apresentam um comportamento estocástico devido à superposição das ilhas $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{2}{19}$. Na parte externa, as superfícies “cilíndricas” garantem o confinamento do plasma. Em torno de $r/a \simeq 0,8$ forma-se a ilha $\frac{0}{1}$.

4.4 Análise da estrutura do campo \vec{B}

As superfícies médias e os mapas de Poincaré concordam satisfatoriamente quanto ao tamanho e à posição das ilhas magnéticas. Analisando estes mapas, pode-se tirar algumas conclusões a respeito da estrutura de ilhas:

- Dois modos adjacentes com $m = 1$ podem se acoplar e excitar os modos secundários $(2m; 2n + 1)$ e $(0; 1)$. A largura da ilha secundária $(2m; 2n + 1)$ é uma ordem de grandeza menor do que a das ilhas primárias; a ilha $(0; 1)$ é duas ordens de grandeza menor. Por exemplo: para $\Theta = 1,5$ e $\epsilon = 0,4\%$, obtém-se que $W_{1;9} \sim W_{1;10} \sim 10^{-1}a$, $W_{2;19} \sim 10^{-2}a$ e $W_{0;1} \sim 10^{-3}a$ (mapas 4-4(a) e 4-4(b)).
- Numa região ressonante $q = \frac{M}{N}$, formam-se M ilhas num plano $\theta = \text{constante}$ e N ilhas num plano $z = \text{constante}$ (o mapa 4-6 no plano $z = 0$ corresponde ao mapa 4-4(a) no plano $\theta = 0$).

- O passo P das linhas de um campo \vec{B} é definido como o avanço axial das linhas por radiano de rotação azimutal, $P \equiv \frac{dz}{d\theta}$, podendo ser escrito aproximadamente como:

$$P \simeq R_0 q \simeq \frac{\Delta z}{\Delta \theta}$$

Por exemplo: para uma rotação de $\Delta \theta = \pi/2$, o deslocamento axial de uma cadeia de ilhas é de $\frac{\Delta z}{2\pi R_0} \simeq \frac{q}{4}$. Como Δz é proporcional a q , as ilhas em $q = \frac{1}{9}$ devem ter um passo maior do que as ilhas em $q = \frac{1}{10}$ (compare os mapas 4-3 e 4-5).

- A estrutura magnética em uma região de ressonância (primária ou secundária) é influenciada pelos dois modos primários. Como consequência, as ilhas de uma mesma cadeia têm formas diferentes. A ilha secundária em $q = \frac{0}{1}$ é formada sempre que dois modos adjacentes com $m = 1$ são desestabilizados (mapas 4-4(b) e 4-8(b)).
- Uma variação no parâmetro Θ implica em uma variação do perfil do fator de segurança $q(r)$. Quando Θ cresce, as superfícies ressonantes são “empurradas” em direção à região central do plasma e a largura das ilhas diminui (compare os mapas 4-3 e 4-7).
- Para um dado valor de Θ , pode-se determinar a intensidade da perturbação necessária para que as ilhas comecem a se superpor. O critério de estocasticidade das linhas de \vec{B} é dado pela seguinte expressão⁵:

$$\frac{W_{m;n+1} + W_{2m;2n+1}}{2} \geq r_{0(m;n+1)} - r_{0(2m;2n+1)}$$

A superposição ocorre quando a soma das semi-larguras das separatrizes das ilhas adjacentes é igual ou maior à distância das respectivas superfícies ressonantes.

Numericamente, nós obtemos que para $\Theta = 1,5$ o valor crítico da perturbação no RFP ETA-BETA II é $\epsilon_{crítico} \sim 0,4\%$ (mapa 4-4(a)). Para $\Theta = 1,7$ este número sobe para $\epsilon_{crítico} \sim 1\%$. Como o valor experimental de ϵ é tipicamente da ordem de $\sim 1 - 2\%$, o interior do plasma deve ser caracterizado por um campo magnético estocástico (mapa 4-9).

- Segundo o modelo de Taylor, o perfil de $q(r)$ no RFP é tal que quanto mais externas são as superfícies ressonantes $q = \frac{m}{n}$ e $q = \frac{m}{n+1}$, mais próximas elas estão. Assim, o valor de $\epsilon_{crítico}$ diminui com o aumento de n . Por exemplo, no caso de $\Theta = 1,5$ e $n = 9$, obtém-se que $\epsilon_{crítico} \sim 0,4\%$ (mapa 4-4(a)). Para $n = 10$, o valor crítico cai para $\sim 0,2\%$ (mapa 4-8(a)).

⁵Nós adaptamos este critério para incluir a presença da ilha secundária em $q = \frac{2m}{2n+1}$. Normalmente, o valor crítico de ϵ é calculado levando-se em conta apenas a superposição das ilhas primárias[9, 10, 11].

O processo cíclico de sustentação do campo reverso pode ser simulado com uma conveniente variação dos parâmetros ϵ e Θ . Cada ciclo pode ser visualizado através da seguinte seqüência de figuras: 4-2 \rightarrow 4-3 \rightarrow 4-4 \rightarrow 4-9 \rightarrow 4-2 etc.

No início de um ciclo, o nível das flutuações é baixo e o confinamento do plasma é garantido pelas superfícies de fluxo cilíndricas que caracterizam o equilíbrio (figura 4-2). Na medida que o plasma se aquece, a densidade de corrente no eixo se eleva, diminuindo $q(0)$ (isto equivale a um aumento de Θ). Assim, o plasma vai se afastando do estado mais estável (de energia magnética mínima). Quando $q(0)$ atinge um certo valor crítico ($\sim \frac{1}{2} \frac{a}{R_0}$), modos resistivos com $m = 1$ e $n \sim \frac{2R_0}{a}$ são desestabilizados. Estes modos se acoplam, excitando outros (figuras 4-3 e 4-4). O aumento da amplitude destes modos causa a superposição das ilhas magnéticas primárias e secundárias, de maneira que as linhas de campo na região central passam a ter um comportamento estocástico (figura 4-9). Com a estocastização de \vec{B} , ocorre um "rápido" transporte radial de energia (o transporte de calor ao longo das linhas de um campo magnético é eficiente). Conseqüentemente, a temperatura no centro diminui e $q(0)$ aumenta, estabilizando os modos $m = 1$. Após a relaxação, a energia disponível para o desenvolvimento das instabilidades diminui (Θ diminui). Assim, a intensidade das flutuações decresce e as ilhas deixam de se superpor, de forma que reaparecem as superfícies de fluxo cilíndricas. Então, o processo se repete.

Este capítulo contém os principais resultados do nosso trabalho. Tais resultados estão publicados na revista *Plasma Physics and Controlled Fusion*[12].

Bibliografia

- [1] Taylor J. B., *Relaxation and Magnetic Reconnection in Plasmas*, Rev. Mod. Phys. **58**, 741 (1986).
- [2] Bazzani A., Malavasi M., Siboni S., Pellacani C., Rambaldi S., Turchetti G., *Poincaré Map and Anomalous Transport in a Magnetically Confined Plasma*, Nuovo Cimento B **103**, 659 (1989).
- [3] Kucinski M. Y., Caldas I. L., Monteiro L. H. A., Okano V., *Magnetic Surfaces in Non-Symmetric Plasmas*, Plasma Phys. Control. Fusion **34**, 1067 (1992).
- [4] Bateman G., *"MHD Instabilities"*, The MIT Press, London, p.197 (1978).
- [5] Antoni V., Ortolani S., *Characteristics of the Magnetic Field Fluctuations in the ETA-BETA II Reversed Field Pinch Experiment*, Plasma Phys. **25**, 799 (1983).
- [6] Ortolani S., *MHD Relaxation Processes in Plasmas*, Proceedings of the 'IV Latin American Workshop on Plasma Physics (Buenos Aires, 1990)', CNEA, **1**, 281 (1990).
- [7] Ortolani S., Valissa M., *Results of Recent Studies on ETA-BETA II*, Proceedings of the 'International School of Plasma Physics Piero Caldirola (Varenna, 1987)', Ed. Compositori, **1**, 283 (1988).
- [8] Malavasi M., Bazzani A., Siboni S., Turchetti G., *Chaotic Transitions and Anomalous Diffusion in a RFP-Confined Plasma: Dependence from the Spectra Data*, Proceedings of the 'Fenomeni non Lineari in Fluidodinamica e Fisica Dei Plasmi (Bologna, 1989)'.
- [9] Zaslavsky G. M., Chirikov B. V., *Stochastic Instability of Non-Linear Oscillations*, Sov. Phys. Usp. **14**, 549 (1972).
- [10] Rechester A. B., Rosenbluth M. N., *Electron Heat Transport in a Tokamak with Destroyed Magnetic Surfaces*, Phys. Rev. Lett. **40**, 38 (1978).
- [11] Fernandes A. S., Heller M. V. A. P., Caldas I. L., *The Destruction of Magnetic Surfaces by Resonant Helical Windings*, Plasma Phys. Control. Fusion **30**, 1203 (1988).
- [12] Monteiro L. H. A., Kucinski M. Y., Caldas I. L., *Coupling of Modes in RFPs: An Analytical Approach*, Plasma Phys. Control. Fusion **37**, 541 (1995).

Capítulo 5

Comentários finais

As descargas em RFPs são caracterizadas pela presença de flutuações magnéticas de origem resistiva. Alguns autores têm sugerido que estas flutuações estão relacionadas com a sustentação do campo toroidal reverso. O nosso objetivo neste trabalho foi mostrar analiticamente o suposto acoplamento de modos que ocorre durante esta fase de sustentação.

Nos dois primeiros capítulos, nós apresentamos os modelos teóricos (equações MHD, teoria de relaxação de Taylor, modelo de Bazzani para o campo magnético associado às instabilidades resistivas) e as observações experimentais (sustentação da reversão no campo toroidal, oscilações cíclicas em quantidades globais do plasma) que motivaram e que constituem a base deste trabalho.

No capítulo 3, nós descrevemos os métodos analíticos que normalmente são empregados no cálculo da estrutura de um campo magnético \vec{B} quase-simétrico. Nós observamos que o uso do formalismo hamiltoniano para um caso geral de \vec{B} é muito difícil. Como alternativa, nós desenvolvemos um método da média que fornece uma fórmula analítica para as superfícies magnéticas aproximadas de \vec{B} .

Com o auxílio deste método, nós determinamos no capítulo 4 a estrutura de um plasma de RFP cilíndrico em que o campo \vec{B} foi tomado como a soma do campo \vec{B}_0 de Taylor com o campo \vec{b} de Bazzani associado a dois modos resistivos $(m_1; n_1)$ e $(m_2; n_2)$. As equações $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$ do campo total $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$ foram escritas num sistema de coordenadas convenientemente escolhido, a fim de calcular as superfícies magnéticas médias nas regiões ressonantes. Nós verificamos que quando a intensidade da perturbação era pequena ($\epsilon < 0,5\%$), as linhas de \vec{B} formavam superfícies aproximadas com estrutura de ilhas em torno das regiões de ressonância principal ($q = \frac{m_1}{n_1}$ e $q = \frac{m_2}{n_2}$) e secundária ($q = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$ e $q = \frac{|m_1-m_2|}{|n_1-n_2|}$). Assim, nós mostramos que os modos primários podiam se acoplar e excitar outros modos, confirmando uma das etapas do processo de sustentação do campo reverso em RFPs. Esta estrutura magnética foi mapeada numérica e analiticamente, utilizando valores típicos do RFP ETA-BETA II. As superfícies magnéticas médias concordaram satisfatoriamente com os mapas obtidos através da integração numérica das linhas de campo.

A expressão (4.18) que descreve as superfícies de \vec{B} nas regiões ressonantes é válida para qualquer RFP. A nossa técnica analítica de mapeamento é muito mais rápida do que a integração numérica: o tempo de CPU gasto é em média 100 vezes menor.

Uma sugestão para trabalhos futuros é calcular a estrutura de ilhas em RFPs considerando a sua forma toroidal. Na literatura, existem modelos analíticos para o campo magnético de equilíbrio nesta geometria (seção 2.3). Devido à toroidicidade do sistema, um único modo helicoidal $(m; n)$ é capaz de excitar outros modos. Talvez, o acoplamento entre este modo primário e as ressonâncias secundárias produza resultados interessantes.

O nosso método da média pode ser utilizado na determinação da estrutura magnética de outras máquinas de confinamento de plasmas. Na aplicação deste método, a escolha de coordenadas é de fundamental importância pois, dependendo desta escolha, alguns detalhes da estrutura magnética podem desaparecer no processo de média. O método exige que o sistema de coordenadas seja escolhido de forma a satisfazer às condições (3.28).

Este método também pode ser adaptado para incluir a resposta do plasma à perturbação ressonante, escrevendo o campo magnético total como a soma de um campo simétrico com um pequeno termo que destrói esta simetria; sendo que este pequeno termo conteria a perturbação e a resposta do plasma (que deve ser da mesma ordem de grandeza da perturbação).

Um plasma de RFP apresenta muitos comportamentos interessantes que ainda não são bem compreendidos, tais como o aquecimento anômalo dos íons, o fenômeno de relaxação e o mecanismo de sustentação do campo reverso. O mapeamento das possíveis estruturas magnéticas do plasma pode contribuir para um melhor entendimento destes processos.

Apêndice A

A seguir, são dadas algumas fórmulas úteis para a determinação de Ψ a partir de (4.15). Neste cálculo, termos da ordem de grandeza de $(\frac{b}{B_0})^2$ ou menores são desprezados.

- Para o sistema de coordenadas $x^1 \equiv \psi_0$, $x^2 \equiv M\theta - N\frac{z}{R_0}$ e $x^3 \equiv m_1\theta - n_1\frac{z}{R_0}$, \sqrt{g} vale:

$$\sqrt{g} = \frac{1}{\vec{\nabla}x^1 \cdot \vec{\nabla}x^2 \times \vec{\nabla}x^3} = \left(\frac{m_1}{m_1N - n_1M} \right) \frac{1}{B_{m_1;n_1}^3}$$

- A relação (4.10) é escrita em função das componentes de \vec{B}_0 e de $\vec{b}_{m_1;n_1}$ como:

$$r \simeq r_0 + \frac{r_0 b_r^{(m_1;n_1)}(r_0)}{B_{0\theta}(r_0)(m_1 - n_1q(r_0))} \sin x^3$$

- A correção de primeira-ordem \widetilde{x}^2 , dada por (4.16), é calculada da seguinte forma:

$$\widetilde{x}^2 \simeq \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} + \frac{\widehat{b_{m_1;n_1}^2}}{B_0^3} - \frac{B_0^2 \widehat{b_{m_1;n_1}^3}}{B_0^3 B_0^3}$$

No nosso caso:

$$\frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \simeq \left[\frac{(m_1N - n_1M) r b_r^{(m_1;n_1)}}{(m_1 - n_1q)^3 B_{0\theta}} \frac{dq}{dr} \right] \cos x^3$$

$$\frac{\widehat{b_{m_1;n_1}^2}}{B_0^3} - \frac{B_0^2 \widehat{b_{m_1;n_1}^3}}{B_0^3 B_0^3} \simeq \left[\frac{(m_1N - n_1M) 1}{n_1(m_1 - n_1q)^2 B_{0\theta}} \frac{\partial r b_r^{(m_1;n_1)}}{\partial r} \right] \cos x^3$$

\widetilde{x}^2 pode ser escrita em termos da função $f(r)$ definida pela expressão (4.20):

$$\widetilde{x}^2 = f(r) \cos x^3$$

- O cálculo do primeiro termo de Ψ na expressão (4.15) resulta em:

$$\Psi_0 \equiv \int_0^{\bar{x}^1} \sqrt{g} B_{m_1; n_1}^2(\bar{x}^1, x^3) d\bar{x}^1 = \int_0^{r_0} \frac{M - Nq(r_0)}{m_1 N - n_1 M} R_0 B_{0\theta}(r_0) dr_0$$

- O segundo termo de Ψ é calculado com o auxílio da seguinte relação¹:

$$e^{ix \cos \varphi} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik(\varphi + \frac{\pi}{2})} J_k(x)$$

onde k é um número inteiro e J_k são as funções de Bessel cilíndricas. Assim:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &\equiv - \int_c^{\sqrt{x^2 + \tilde{x}^2}} \sqrt{g} b_{m_2; n_2}^1(\bar{x}^1, x^2, x^3) dx^2 \\ &= - \frac{R_0 r_0 b_r^{(m_2; n_2)}(r_0) J_\beta(\alpha f(r_0))}{(m_1 N - n_1 M) \alpha} \sin[\alpha(x^2 - f(r_0) \cos x^3) + \beta \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

onde β é um número inteiro.

- A função Ψ que descreve as superfícies aproximadas do campo total \vec{B} é dada pela soma das expressões de Ψ_0 e Ψ_1 definidas acima. A expressão (4.18) é obtida expandindo-se $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 = \text{constante}$ em torno de $r_0 = r_{0(M;N)}$.

¹Veja, por exemplo, o livro "Mathematical Methods for Physicists" de G. Arfken.

Apêndice B

A estrutura magnética de \vec{B} é calculada “analiticamente” seguindo-se o procedimento descrito abaixo.

1) Atribuem-se valores numéricos para as seguintes grandezas:

a : raio da “coluna” de plasma;

R_0 : raio maior do toróide;

$\Theta \equiv \frac{B_{0\theta}(a)}{\langle B_{0z} \rangle}$: parâmetro que caracteriza o perfil do campo de equilíbrio \vec{B}_0 ;

$\epsilon \equiv \frac{b_0}{B_0}$: razão entre as amplitudes máximas de \vec{b} e \vec{B}_0 (intensidade relativa da perturbação);

$(m_1; n_1)$, (m_2, n_2) : modos ressonantes primários;

c_{m_1} , c_{m_2} , d_{n_1} , d_{n_2} : coeficientes de Fourier relacionados aos modos poloidais m_1 e m_2 , e toroidais n_1 e n_2 ;

$(M; N)$: o nosso método permite o cálculo da estrutura de \vec{B} em torno da superfície racional $q = \frac{M}{N}$ (M e N são números inteiros);

$\theta = \text{constante}$: plano no qual a estrutura de \vec{B} é mapeada (também pode-se escolher um plano $z = \text{constante}$);

K : constante que especifica a superfície magnética a ser calculada (por exemplo: no caso de $\frac{J_\beta(\alpha f)}{\alpha} > 0$, $K = +1$ corresponde à separatriz).

2) Da equação $q(r_{0(M;N)}) = \left[\frac{r}{R_0} \frac{B_{0z}(r)}{B_{0\theta}(r)} \right]_{r=r_{0(M;N)}} = \frac{M}{N}$, determina-se numericamente $r_{0(M;N)}$.

3) Com o valor de $r_{0(M;N)}$, utilizam-se as fórmulas (4.19) e (4.20) para calcular a largura $W_{M;N}$.

4) Através da relação (4.18), obtém-se para cada valor de z o(s) correspondente(s) valor(es) de r_0 .

5) Cada par (r_0, z) especifica um único valor de r , determinado a partir da expressão (4.10).

6) O ponto (r, z) é assinalado no plano θ escolhido. O processo é repetido para outros valores de z , com z variando de 0 a $2\pi R_0$ (se o mapa for feito num plano $z = \text{constante}$, θ deve variar de 0 a 2π).