21/02/95

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Mapeamento Magnético do Tokamak TBR-1

José Antonio Sevidanes da Matta

Banca examinadora:
Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (IFUSP-Orientador)
Prof. Dr. Jair Koiller (LNCC-UFRJ)
Prof. Dr. Felipe Rizzato (UFRS)

Iberê Luiz Caldas

Dissertação de Mestrado
apresentada
ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo
IFUSP

Mario Gon de Oliveira
Vice-Presidente, em exercício

Orientador:**Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas**

São Paulo
1994

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2266 v.2
INSTITUTO DE FÍSICA

530.44
M 435m
M
e.2

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Matta, José Antonio Sevidanes da
Mapeamento magnético do Tokamak TBR-1. São Paulo, 1994.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Aplicada.
Área de Concentração: Física Nuclear
Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Unitermos: 1.Magnetohidrodinâmica; 2. Bobinas helicoidais ressonantes; 3. Tokamaks.

USP/IF/SBI - 51/94

Agradecimentos

De início agradeço ao Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas pela orientação neste trabalho. Ao Prof. Dr. Ricardo M. O. Galvão pelo incentivo no estudo da física de plasmas logo que cheguei no IFUSP.

Ao Prof. Dr. Ivan Cunha Nascimento, pela organização de todo pessoal do grupo. Aos Profs. Antonio C. A. Ferreira e Mutsuko Kucinski por recentes discussões e a atenção dispensada.

Gostaria de agradecer especialmente aos Profs. de vida Alex C. Mendes , Gélio C. Antunes, Douglas C. Giraldez, Regina Melo S., Lara K., Ibrahim El Chamaa, Gisele A. Oda, Murilo Baptista, Kai Ullmann, Agostinho Serrano, Gesil Sampaio, Nestor Saavedra, Kenya Oliveira, Elton Silva, Valdir Okano, José Morais, Edson, Raul M. C., Mauro Araujo, Zoezer Brasílio, Cristovão M., Kuba G., Stella Narita, Nilton T., Valdir Pereira, Pimenta C., André Sznajder, Cesar Castilho, Wagner Carvalho,..., pela solidariedade de todos.

Agradeço também aos amigos de muito trabalho Edson Sanada, Juan E., Tadeu Degasperi, Ing Tan, Sergei Kalmikov, Leonid Ruchko, Munemassa Machida, , Aloísio Fagundes, A. Tuszel, Ablício, Ivan, Nélio, Wanderley, Rogério, Célia Maria, Ilme, Eleonora, Sylvia, Lia,... e, é claro, meus pais, José e Maria, aos quais dedico minha dissertação.

Resumo

Nesta dissertação, são descritos equilíbrios hidromagnéticos de simetria axial para um fluido condutor ideal por meio de uma expansão assintótica em potências do inverso da razão de aspecto ($\epsilon = \frac{a}{R_0}$) a qual satisfaz a equação de Grad-Shafranov (**condição de equilíbrio**). Foram computados os principais perfis para estes equilíbrios. É investigado o efeito de perturbações não axiais sobre as superfícies magnéticas do tokamak **TBR-1**.

O método usado mostra como o campo magnético criado por correntes helicoidais externas separam as superfícies magnéticas dando origem à cadeias de ilhas magnéticas. O mapa de Poincaré das linhas de campo perturbadas pelos enrolamentos helicoidais ressonantes (**rhw**) são obtidos numéricamente para os parâmetros típicos do **TBR-1**.

Para parâmetros de perturbação crescentes foram observadas ressonâncias secundárias, que transformam contornos tipo-estado-ligado de uma dada ilha em estruturas semelhantes de ilhas magnéticas secundárias. Estes resultados foram usados para determinar o espectro criado pelas perturbações consideradas.

ABSTRACT

Axisymmetric hydromagnetic equilibria for an ideal conducting current fluid are described by means of an asymptotic expansion in powers of the inverse aspect ratio ($\epsilon = \frac{a}{R_0}$) that satisfies the Grad-Shafranov equation (**equilibrium condition**). The main profiles for these equilibria were computed. The effect of non-axisymmetric perturbations on the magnetic surfaces of the tokamak **TBR-1** is investigated.

The used method is able to show how magnetic field from external helical currents split the rational magnetic surface giving rise to the chain of magnetic islands. The Poincaré map of the field line perturbed by resonante helical windings (**rhw**) has been obtained numerically for the typical
TBR-1 parameters.

For increasing parameters of perturbation secondary resonances were observed, that transform the bound-state-like contours of a given island into similar structures of secondary magnetic islands. These results were used to determine the spectrum of the perturbation created by **rhw**.

Índice

1 Introdução **1**

2 Equilíbrio MHD **5**

2.1 Equações Básicas 5

2.2 Solução da Equação de Grad-Shafranov 10

2.3 Perfis de Equilíbrio para o TBR-1 14

3 Perturbação do Equilíbrio MHD por Correntes Helicoidais Ressonantes **18**

3.1 Espectro dos Modos Gerados pela Atuação do RHW 18

4 Mapeamento Magnético do Campo Resultante **26**

4.1 Trajetória das Linhas de Campo 26

4.2 Mapeamento Magnético 28

5 Discussões **46**

Apêndice A **49**

Apêndice B **55**

Referências **58**

Lista de Figuras

2.1 Esquema do tokamak e sua configuração magnética. 7
2.2 Linha de campo sobre uma superfície magnética. 9
2.3 Perfis radiais da densidade de corrente do plasma admitidos para solução da equação de Grad-Shafranov. 12
2.4 Mapa do campo magnético $\vec{B}_0$. 14
2.5 Perfis radiais de campo magnético poloidal, $B_{\theta_t 0}$, e toroidal $B_{\phi 0}$ na direção radial. 15
2.6 Perfis radiais da densidade de corrente toroidal de plasma, J_ϕ, e pressão, P, para o equilíbrio 16

3.1 Diagrama com as bobinas helicoidais ressonantes e ilhas magnéticas formadas no tokamak. 18
3.2 Perfis experimentais de descarga e campo magnético poloidal no TBR-1 19
3.3 Espectro criado pelas disposições do **rhw** a) $m_0/n_0 = 2/1$, b) $m_0/n_0 = 3/1$, c) $m_0/n_0 = 4/1$; na região do do limitador, $\rho_t = a$, com $I_{hel} = 90A$. 22
3.4 Espectro criado pelas disposições do **rhw** a) $m_0/n_0 = 2/1$, b) $m_0/n_0 = 3/1$, c) $m_0/n_0 = 4/1$; na região intermediária, $\rho_t = \frac{a}{2}$, com $I_{hel} = 90A$. 23
3.5 Espectro criado pelas disposições do **rhw** a) $m_0/n_0 = 2/1$, b) $m_0/n_0 = 3/1$, c) $m_0/n_0 = 4/1$; no interior da câmara, $\rho_t = \frac{a}{3}$, com $I_{hel} = 90A$. 24

4.1 Mapa de Poincaré do campo $\vec{B}$ com $m_0/n_0 = 2/1$ e $I_{hel} = 45A$. . 29
4.2 Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 2/1$ e $I_{hel} = 105A$. 30
4.3 Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 2/1$ e $I_{hel} = 145A$. 31

4.4 Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 2/1$ e $I_{hel} = 185A$. 32
4.5 Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 3/1$ e $I_{hel} = 45A$. 33
4.6 Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 3/1$ e $I_{hel} = 60A$. 34
4.7 Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 3/1$ e $I_{hel} = 105A$. 35
4.8 Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 3/1$ e $I_{hel} = 205A$. 37
4.9 Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 4/1$ e $I_{hel} = 45A$. 38
4.10 Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 4/1$ e $I_{hel} = 90A$. 39
4.11 Resultado do aumento de $I_{hel} = 45A$ até $125A$ com $m_0/n_0 = 2/1$ 41
4.12 Estrutura de modos surgidos dentro das ilhas magnéticas 42
4.13 Sequência de ampliações do mapa, figura 4.4, $m_0/n_0 = 2/1$ e $I_{hel} = 185A$. 43
4.14 Estrutura de modos surgidos para $I_{hel} = 250A$, exibindo a perturbação das superfícies mais internas. 43
4.15 Evolução dos modos com o acréscimo da corrente helicoidal para perturbações com $m_0 = 2$ e 3 44
4.16 Comportamento das linhas de campo ao redor do toro 45

A Coordenadas Bipolares 49
B Superfícies toroidais, onde $\xi = cte$ 51
C Plano poloidal denotando a coordenada $\omega = cte$ 52

Capítulo 1

Introdução

Em 1968 na conferência organizada pela I.A.E.A. sobre física de plasmas, em Novosibirsk, L.A. Artisimovich [68] e seu grupo, do Instituto Kurchatov em Moscou, apresentaram resultados do Tokamak T-3, que apontavam parâmetros de temperatura e densidade promissores ($T_e \geq 600eV$; $N_e \sim 2 \times 10^{19} m^{-3}$). A confirmação foi feita por pesquisadores do laboratório Culham (Inglaterra), usando como diagnóstico medidas de espalhamento Thompson de um laser de rubi, Dolan [82]. Com o resultado de tais medidas, a máquina do laboratório de física de plasmas de Princeton, C- Stellarator, sofreu modificação para tornar-se um Tokamak, o ST-Tokamak. Desde as primeiras experiências na URSS, anteriores à 1960, foram feitos aprimoramentos nos tokamaks na intenção de se alcançar temperaturas termonucleares.

Em tokamaks temos um plasma de simetria axial, que é confinado por um campo magnético toroidal intenso B_t, circulando ao longo da maior circunferência do toro, na mesma direção da corrente de plasma (o que é requerido pela teoria MHD). O aprisionamento do plasma por esse campo principal se dá devido ao fato de que as partículas do plasma (íons e elétrons) descrevem aproximadamente uma hélice como trajetória ao longo das linhas de campo magnético. Um campo magnético vertical fraco ($B_v \ll B_t$) se faz necessário, servindo como fonte para uma força $\vec{J} \times \vec{B}$, que mantém a posição do anel de plasma centrado num plano poloidal do toro. A câmara é preparada com vácuo, depois preenchida com hidrogênio ou seus isótopos a uma pressão no intervalo $10^{-4} - 10^{-5} mbar$. O sucesso

do tokamak T-3 pode ser atribuído, justamente, ao alto vácuo e ao controle do campo vertical.

A corrente de plasma (I_p) é induzida indutivamente, uma vez que o toro funciona como uma única espira secundária num transformador, isto é, a variação de corrente no enrolamento primário induz um campo elétrico ao longo do toro, tal campo aquece o plasma Ôhmicamente, sendo este método eficiente para criar plasmas relativamente quentes e densos ($T_e \sim 1KeV$, $N_e \geq 10^{19}m^{-3}$). Devido à presença da corrente de plasma, surge no interior do vaso uma componente poloidal de campo magnético (B_p).

A detecção e interpretação das flutuações de campo magnético observadas em tokamaks formam um problema bem difícil de ser resolvido, Mirnov e Semenov [77] . Em tokamaks, sob operação normal, sem instabilidades disruptoras, são observadas na borda do plasma pequenas perturbações helicoidais sobre o campo magnético poloidal, as quais chamamos de oscilações de Mirnov, estando as frequências associadas a essas oscilações no intervalo de 1-80 KHz, Vannucci *et al.* [88]. Caso as amplitudes dessa instabilidade aumentem, diminui o tempo de confinamento de energia, conforme observado no **TBR-1**, Vannucci *et al.* [89], indicando que a presença de perturbações helicoidais elevam a taxa com a qual é transferida energia da região central para a borda da coluna de plasma, Fernandes *et al.* [88] .

As principais instabilidades em plasmas confinados em tokamaks são as oscilações de Mirnov, disruptura maior e disruptura interna, Wesson [78]. A disruptura maior é uma abrupta, e geralmente imprevisível, expansão da coluna de plasma acompanhada de um pico negativo na tensão (f.e.m.) medida ao longo do toro, perda significante na energia do centro do plasma e um decréscimo na corrente. A instabilidade é quase sempre precedida de fortes modos de oscilação helicoidal (com números de onda poloidal $m = 2$ e 3), Mirnov e Semenov [77]. As disrupturas internas foram observadas inicialmente com medidas de raios-X moles no S-T Tokamak, mais tarde em outros tokamaks. Estas aparecem, em geral, como oscilações tipo dente-de-serra na temperatura do plasma, von Goeler

et al [74]. Seus efeitos sobre o confinamento global são menores do que os causados pelas disrupturas, em tokamaks com aquecimento Ôhmico, e de localização interna ao plasma (próximas ao centro da descarga). Essa radiação é produzida pela parte térmica dos elétrons do plasma; a intensidade da radiação depende da densidade e temperatura eletrônica (n_e, T_e).

Em concordância com a teoria MHD, podemos ter um plasma instável para perturbações helicoidais, ou seja, com modos kink e tearing instáveis, Nishikawa e Wakatani [90], se em alguma região a helicidade das linhas de campo do equilíbrio tiver simetria espacial igual a dessas perturbações. Neste caso, existem superfícies ressonantes, o que ocorre sempre que $q = \frac{m}{n}$ (onde **q** é o fator de segurança definido no cap. 2). Caso este parâmetro assuma valores abaixo da unidade, na região central, o plasma torna-se instável para o modo $m = 1/n = 1$, oque está relacionado à disruptura interna, limite Kruskal-Shafranov de estabilidade, Manheimer [89].

No estudo das instabilidades MHD, particularmente no tokamak Pulsator-I, obteve-se resultados interessantes, que levaram a um conhecimento maior sobre a natureza das disrupturas, F.Karger *et al.* [77]. Um dispositivo composto de espiras em forma de hélices, as bobinas ressonantes helicoidais, apresentou bons resultados no amortecimento das oscilações de Mirnov, além de retardarem as instabilidades de disruptura. Para uma determinada corrente helicoidal crítica, I^*_{hel}, a disruptura era antecipada. Disrupturas foram produzidas apenas quando a simetria helicoidal do campo magnético de perturbação era a mesma da trajetória do campo magnético do tokamak, indicando a existência de um efeito ressonante.

Neste trabalho fizemos simulações numéricas do equilíbrio MHD com os parâmetros do tokamak **TBR-1** [cap.2]. Para determinar tal equilíbrio, usamos as soluções da equação de Grad-Shafranov, determinadas por Kucinski e Caldas [91], admitindo um perfil cúbico de corrente de plasma com um pico (J_{max}) no centro da distribuição poloidal; este perfil foi apontado, entre outros, por Egorov [87]. Determinamos também o perfil de pressão (P) e corrente toroidal (J_ϕ) associados aos campos magnéticos de equilíbrio.

Nosso principal objeto de estudo está relacionado à aplicação de campos he-

licoidais ressonantes [cap.3] sobre o equilíbrio determinado numéricamente. Para efetuar esse estudo, usamos uma expressão analítica para o campo helicoidal gerado nas bobinas de perturbação, obtido por Kucinski e Caldas [87], resolvendo a equação de Laplace, para o potencial escalar magnético, em coordenadas toroidais [apêndice a].

Ao superpormos os campos de equilíbrio e os campos gerados pelas bobinas ressonantes helicoidais, observamos a formação de ilhas magnéticas no interior do plasma [cap.4]. Tal comportamento leva à modificação da configuração do equilíbrio dando lugar à uma estrutura caótica das linhas de campo resultantes, principalmente na região periférica do plasma. Organizamos, ao final [cap.5], as discussões sobre a superposição dos campos, a amplitude dos modos formados, a influência da geometria utilizada e alguns dos resultados obtidos recentemente no **TBR-1**.

Finalmente, nos apêndices são apresentados detalhes dos sistemas de coordenadas, parâmetros do tokamak **TBR-1** [apêndice a], e detalhes da integração numérica das linhas de campo magnético [apêndice b].

Capítulo 2

Equilíbrio MHD

2.1. Equações Básicas

No intento de encontrarmos um conjunto de equações que descrevam um plasma em equilíbrio, fazemos uso da teoria Magnetohidrodinâmica (MHD), que consiste na simplificação da equação de Vlasov, passando desse modelo de dois fluidos para o de um único fluido. Este fluido pode ser caracterizado pelas relações entre as equações de densidade de massa, carga, velocidade de fluido e pressão, que consideram a existência de ions e elétrons em meio a esse fluido.

$\alpha : i, e$

$$\rho_m(\vec{x}) = m_\alpha n_\alpha(\vec{x}) \sim m_i n_i(\vec{x})$$

$$\rho_c(\vec{x}) = q_\alpha n_\alpha(\vec{x}) = e(n_i - n_e)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho_m} m_\alpha n_\alpha \vec{v_\alpha}$$

$$\vec{J} = q_\alpha n_\alpha \vec{v_\alpha} \qquad P = P_e + P_i \tag{2.1}$$

As equações MHD são derivados a partir desse conjunto de equações mais as equações de Maxwell, conservação de momento e da lei de Ohm

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_m \vec{v} = 0 \qquad \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{2.2}$$

$$\rho_m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla P + \rho_c \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \tag{2.3}$$

$$\frac{m_e m_i}{\rho_m e^2}\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{m_i}{2\rho_m e}\nabla P + \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} - \frac{m_i}{\rho_m e}\vec{J}\times\vec{B} - \frac{\vec{J}}{\sigma} \qquad 2.4$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad 2.5$$

Ao avaliarmos essas equações nos limites de baixa temperatura e correntes finitas, a equação que representa a lei de Ohm torna-se:

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \qquad 2.6$$

considerando a densidade local de cargas, em qualquer posição no plasma, negligenciável ($\rho_c = 0$); assim como a corrente de deslocamento na lei modificada de Ampere. Ficando a cargo da lei de Ohm a relação entre $\vec{J}$ e $\vec{E}$, assim:

$$\nabla\times\nabla\times\vec{B} = \mu_0\sigma(\nabla\times\vec{E} + \nabla\times\vec{v}\times\vec{B}) \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad 2.7$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla\times\vec{v}\times\vec{B} + \frac{\mu_0}{\sigma}\nabla^2\vec{B} \qquad 2.8$$

Nessa forma percebemos que $\vec{B}$ poderá variar convectivamente ou difusivamente. Para um condutor perfeito, a condutividade é infinita, restando apenas o termo de convecção. Das equações 2.2-8, quatorze ao todo, duas para os escalares, ρ e P, e três para cada vetor: $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{J}$ e $\vec{v}$, ficamos com dez equações para nossa descrição MHD:

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t} + \nabla\cdot\rho_m\vec{v} = 0 \qquad \rho_m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\nabla P + \vec{J}\times\vec{B} \qquad 2.9$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla\times\vec{v}\times\vec{B} \qquad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \qquad 2.10$$

Como estamos interessados no equilíbrio estático que um plasma possa assumir, portanto, na magnetostática, $\frac{\partial}{\partial t}\rightarrow 0, \vec{v}\rightarrow 0$, obtemos

$$\nabla P = \vec{J}\times\vec{B} \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad 2.11$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \qquad \nabla\cdot\vec{J} = 0 \qquad 2.12$$

As principais relações de equilíbrio no nosso estudo são avaliados facilmente a partir da primeira das equações 2.11, e são dadas por:

$$\vec{B} \cdot \nabla P = 0 \qquad 2.13$$

$$\vec{J} \cdot \nabla P = 0 \qquad 2.14$$

onde está indicado a ortogonalidade de $\vec{B}$ e $\vec{J}$ com o gradiente de pressão; com efeito, sobre as superfícies isobáricas serão definidos também superfícies magnéticas e de densidade de corrente. Numa mesma superfície, $\vec{J}$ e $\vec{B}$ poderão cruzar-se sendo seu produto, $\vec{J} \times \vec{B}$, um vetor que aponta internamente à superfície, que **sustentará** o aumento de pressão de plasma conforme passemos para superfícies mais externas, Laing [54]. Quanto menor a pressão, menor poderá ser o ângulo com o qual $\vec{J}$ e $\vec{B}$ se encontram; logo em tais superfícies temos geralmente $\vec{J} \times \vec{B} \neq 0$ e $\vec{J} \cdot \vec{B} \neq 0$.

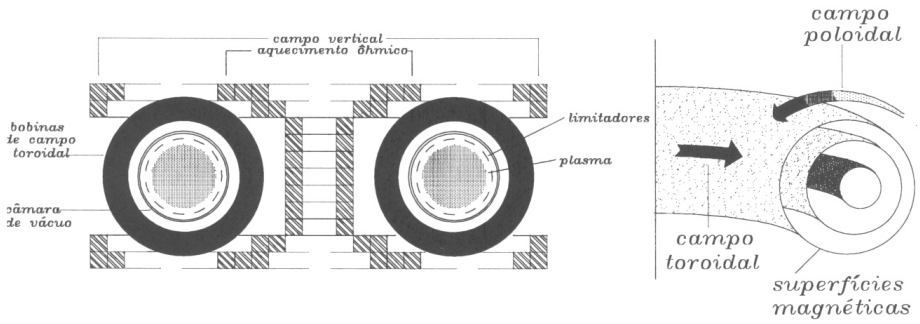


Figura 2.1 : Esquema do tokamak e sua configuração magnética.

Em dispositivos de confinamento magnético toroidal, como o tokamak, as linhas magnéticas estão localizadas em superfícies toroidais sobre as quais $P = cte$. Para um dado equilíbrio, a pressão é máxima próximo ao centro de uma seção poloidal do toro e constante como função do ângulo toroidal ϕ. Ao longo do toro,

nesse ponto de pressão máxima, definimos o **eixo magnético**, que corresponde à superfície composta de uma única linha magnética.

Da superposição do campo toroidal (B_t), gerado pela corrente que passa nas bobinas enroladas na superfície do toro, e do campo poloidal (B_p), campo criado pela corrente de plasma, resulta a configuração magnética para um tokamak. Esta configuração é indicada na figura 2.1.

Partindo do eixo magnético para regiões mais exteriores, o conjunto de linhas magnéticas descreve trajetórias em forma de **hélices** ao longo do toro [fig. 2.2].

Devido à curvatura existente no toro, a distribuição dessas hélices é mais densa do lado interno do toro. Os passos dessas trajetórias, sobre uma determinada superfície toroidal, caracterizam sua helicidade através de circuitos no plano poloidal e na direção toroidal. Estas superfícies podem ser classificadas em dois grupos de características distintas:

I) superfícies racionais
II) superfícies irracionais

Uma trajetória, numa superfície racional, tem a propriedade de fechar-se sobre si mesma após um número finito, **n**, de trânsitos toroidais, e um determinado número de voltas, **m**, no plano poloidal, formando hélices, ao longo do toro. Por outro lado as trajetórias em superfícies irracionais não são fechadas, isto é, uma trajetória partindo de um dado ângulo θ_0 sobre uma superfície retorna sobre a mesma com um novo ângulo $\theta_0 + \Delta\theta$, de forma que uma única trajetória poderá cobrir uma superfície toroidal. As trajetórias pertencentes às superfícies racionais são periódicas, ou seja, ao fecharem-se, cumprem o mesmo caminho que no trânsito anterior, Skornyakov [66].

Para caracterizar tais trajetórias fazemos usemos da transformada rotacional (ι), descrita pela média do valor $\Delta\theta$ em um transito toroidal, onde N é o número de voltas toroidais.

$$\iota = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_1^N \Delta\theta_n}{N} \qquad 2.15$$

A transformada rotacional também define, pelo seu inverso, o fator q de segu-

rança.

$$\iota = \frac{2\pi}{q} \qquad 2.16$$

Caso ι seja uma fração racional de 2π então a trajetória é fechada, caso contrário ela é quase-periódica. Nota-se, facilmente, que as superfícies racionais são em número bem menor que as irracionais.

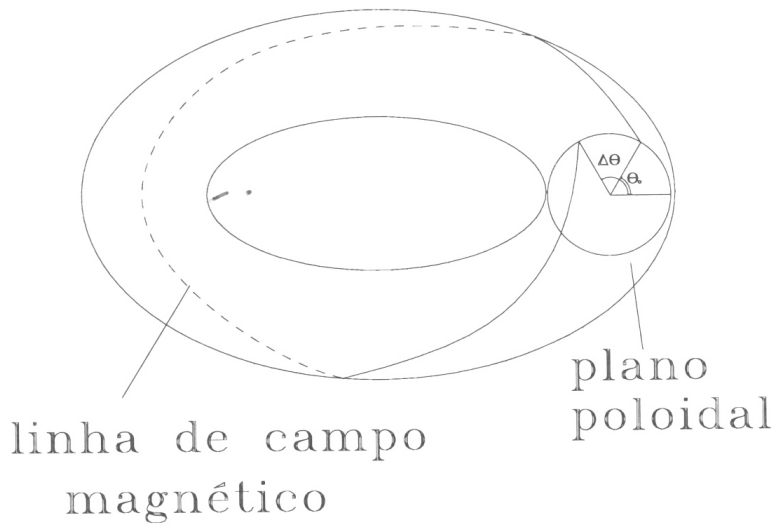


Figura 2.2 : Linha de campo sobre uma superfície magnética.

Nas equações $\nabla P = \vec{J} \times \vec{B}$ e $\vec{J} = \mu_0^{-1} \nabla \times \vec{B}$ é possível representar $\vec{B}$ em termos de uma função de fluxo magnético Ψ, denotando uma superfície magnética

$$\vec{B} = \vec{B}_t + \vec{B}_p \qquad \vec{B}_p = \nabla \times \vec{A}_\phi \qquad 2.17$$

$$\Psi = \frac{1}{2\pi} \int d\vec{S} \cdot \vec{B}_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{A}_\phi \cdot d\vec{L}_p \qquad \vec{A}_\phi = \hat{\phi} \frac{\Psi}{R} \qquad 2.18$$

onde $\vec{A}_\phi$ é o pontencial vetor na direção toroidal.

Exemplificaremos a seguir passos na derivação da equação de Grad-Shafranov em coordenadas cilindricas (apêndice a).

$$\vec{B_p} = \nabla \times \hat{\phi}\frac{\Psi}{R} = -\frac{\hat{R}}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial Z} + \frac{\hat{Z}}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R} \qquad 2.19$$

Da aplicação dessa relação à equação de equilíbrio, definindo o operador elíptico Δ^*,

$$\Delta^*\Psi = R\frac{\partial}{\partial R}(\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}) + \frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2} \qquad 2.20$$

e considerando

$$\nabla P(\Psi) = \frac{dP}{d\Psi}\nabla\Psi \qquad 2.21$$

$$I(\Psi) = RB_t \qquad I'\nabla\Psi = \nabla(RB_t) \qquad 2.22$$

onde RB_t representa a corrente superficial para cada superfície, pode-se obter a equação diferencial parcial elíptica de Grad-Shafranov [66]

$$\Delta^*\Psi = -R^2\mu_0 P' - \mu_0^2 II' \qquad 2.23$$

Para a solução desta equação deve-se admitir perfis para $P(\Psi)$ e $I(\Psi)$, sem os quais a equação não pode ser resolvida, indicamos nas referências Shafranov [66] e Yoshikawa [74] soluções analíticas de interesse. Na maioria dos perfis admitidos, esta equação torna-se não linear; como consequência, grande parte dos trabalhos estudados apresentam apenas soluções numéricas para esta equação, Finn [75].

2.2. Solução da Equação de Grad-Shafranov

Um sistema de coordenadas natural à geometria do Tokamak, as coordenadas toroidais (ξ, ω, ϕ), tem sua origem nas coordenadas bipolares, 2d, por rotação em torno de um eixo da mesma forma com que obtemos as coordenadas esféricas a partir das coordenadas polares.

Ocasionalmente encontra-se a aplicação desse sistema de coordenadas no estudo de plasmas confinados magneticamente, Shafranov [66]. Os detalhes dos sistemas de coordenadas são encontrados no apêndice a. É importante ressaltar que, nesse sistema, um ponto no plano poloidal é descrito pela coordenada (ξ, ω), associadas a um valor constante da coordenada ϕ (que é o ângulo na direção toroidal).

Apresentamos abaixo as relações entre o sistema de coordenadas toroidais e o sistema de coordenadas usado por Kucinski e Caldas [90] (ρ_t, θ_t, ϕ)

$$\rho_t = \frac{R_0'}{\cosh\xi - \cos\omega}$$
$$\theta_t = \pi - \omega \qquad 2.24$$

Em termos desse novo sistema de coordenadas a equação de Grad-Shafranov assume a forma:

$$\frac{1}{\rho_t}\frac{\partial}{\partial\rho_t}(\rho_t\frac{\partial\Psi}{\partial\rho_t}) + \frac{1}{\rho_t^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta_t^2} - \frac{\rho_t cos\theta_t}{R_0'}(2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho_t^2} + \frac{1}{\rho_t}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho_t}) - \frac{\rho_t sen\theta_t}{R_0'}(\frac{1}{\rho_t^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_t} - \frac{2}{\rho_t}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta\partial\rho_t})$$
$$= -\mu_0 R_0'^2 P' - \mu^2 II' - \mu_0 R_0'^2 P'(2\frac{\rho_t}{R_0'}cos\theta_t + \frac{\rho_t^2}{R_0'^2}sen^2\theta_t) \qquad 2.25$$

Para resolver essa equação, Kucinski e Caldas [90] expandiram Ψ em termos do inverso da razão de aspecto, obtendo assim uma primeira solução Ψ_0 de ordem zero, em $\frac{a}{R_0'}$, e Ψ_1 de primeira ordem ($\frac{\Psi_1}{\Psi_0} \ll 1$). Na solução, foi escolhida uma densidade de corrente elétrica no plasma, determinada experimentalmente por Egorov *et al.* [87] e aplicada em outras referências, como Wesson [89],

$$J_\phi(\rho_t) = J_{\phi 0}(1 - \frac{\rho_t^2}{a^2})^\gamma \qquad 2.26$$

com $J_{\phi 0} = \frac{(\gamma+1)}{\pi a^2} I_p$, sendo I_p a corrente de plasma, a o raio do plasma e γ uma constante.

Para $\gamma = 0, 1, 2, 3$, esse perfil assume as formas apresentadas a seguir (figura 2.3). Com este modelo, optamos por uma distribuição que determina um pico de corrente bem definido nas proximidades do centro do vaso. Com o equilíbrio MHD procuramos configurações magnéticas, que isolem o plasma da parede do vaso, e que correspondam ao equilíbrio observado no **TBR-1**.

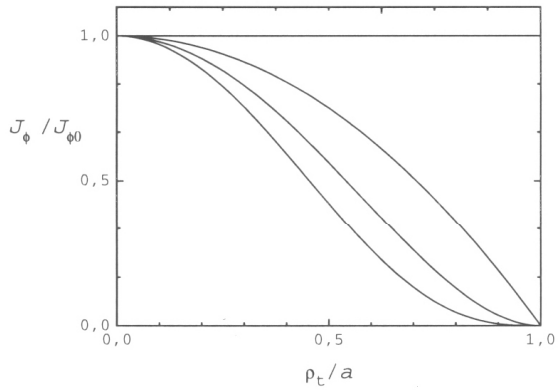


Figura 2.3 : Perfis radiais da densidade de corrente do plasma admitidos para solução da equação de Grad-Shafranov.

Contando com o perfil de corrente descrito acima Okano *et al.* [91] derivaram as seguintes soluções

$$\Psi(\rho_t, \theta_t) \cong \Psi_0(\rho_t) + \Psi_1(\rho_t, \theta_t) \qquad 2.27$$

onde

$$\Psi_0(\rho_t) = \frac{\mu_0 I_p R_0'}{4\pi} \left\{ 1 - Y + \frac{1 - Y^2}{2} + ... + \frac{1 - Y^{\gamma+1}}{\gamma + 1} \right\} \qquad 2.28$$

$$\Psi_1(\rho_t, \theta_t) = \Psi_0'(\rho_t) \cos\theta_t \int_{\rho_t}^{a} \frac{\rho}{R_0'} \lambda(\rho) d\rho \qquad 2.29$$

com

$$\lambda(\rho_t) = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-Y^{\gamma+1})^2}\left\{1 - Y + ... + \frac{1-Y^{\gamma+1}}{\gamma+1}\right.$$
$$\left. -[\frac{1-Y^{\gamma+2}}{\gamma+2} + ... + \frac{1-Y^{2\gamma+2}}{2\gamma+2}]\right\} + \beta_p - 1 \qquad 2.30$$

$$\Psi_0' = \frac{d\Psi_0(\rho_t)}{d\rho_t} \qquad Y = 1 - \frac{\rho_t^2}{a^2}$$

onde $\lambda(\rho_t)$ (assimetria do campo poloidal) relaciona-se ao parâmetro β_p, na superfície do plasma, $\lambda(a) = \beta_p + \frac{l_i}{2} - 1$. A partir da solução $\Psi(\rho_t, \theta_t)$, da equação de Grad-Shafranov, o campo magnético de equilíbrio $\vec{B}_0$ é reescrito e tais expressões permitem que sejam determinadas, numéricamente, as trajetórias das linhas de campo e o mapa de Poincaré, construido pela intersecção dessas trajetórias com o plano poloidal localizado em $\phi = 0$. A relação entre as componentes contravariantes de $\vec{B}_0$ e Ψ estão no apêndice a.

As equações que descrevem o campo magnético de equilíbrio são dadas por:

$$B_{\xi 0} = [B_{\theta_t 0} - \frac{\Psi_0(\rho_t)}{\rho_t^2}\int_{\rho_t}^{a}\frac{\rho}{R_0'}\lambda(\rho)d\rho]\,\frac{sin\theta_t}{sinh\xi} \qquad 2.31$$

$$B_{\theta_t 0} = \frac{1}{R_0'}\left\{\Psi_0'(\rho_t)[1 - \frac{\rho_t}{R_0'}\lambda(\rho_t)cos\theta_t] + \Psi_0(\rho_t)cos\theta_t\int_{\rho_t}^{a}\frac{\rho}{R_0'}\,\lambda(\rho)d\rho\right\} \qquad 2.32$$

$$B_{\phi 0} = -\frac{\mu_0 I}{\rho_t \sinh\xi} \qquad 2.33$$

onde I é dado por:

$$I \cong \frac{-I_e}{2\pi}[1 + (1-\beta_p)(\gamma+1)\frac{I_p^2 R_0'}{I_e^2 a^2}\{\frac{Y^{\gamma+1}}{\gamma+1} + .. + \frac{Y^{2\gamma+1}}{2\gamma+1}\}]$$

nessa expressão I_e representa a corrente que passa pelas espiras de campo toroidal ($I_e \gg I_p$).

A seguir, comparamos os mapeamentos de $\vec{B}_0$, obtidos com as aproximações $\Psi \sim \Psi_0(\rho_t)$ e $\Psi \cong \Psi_0(\rho_t) + \Psi_1(\rho_t, \theta_t)$. A influência da correção de primeira ordem,

na solução da equação de Grad-Shafranov, é mais significativa na parte externa do plasma. Assim, neste trabalho serão considerados campos $\vec{B}_0$ calculados a partir da equação 2.27.

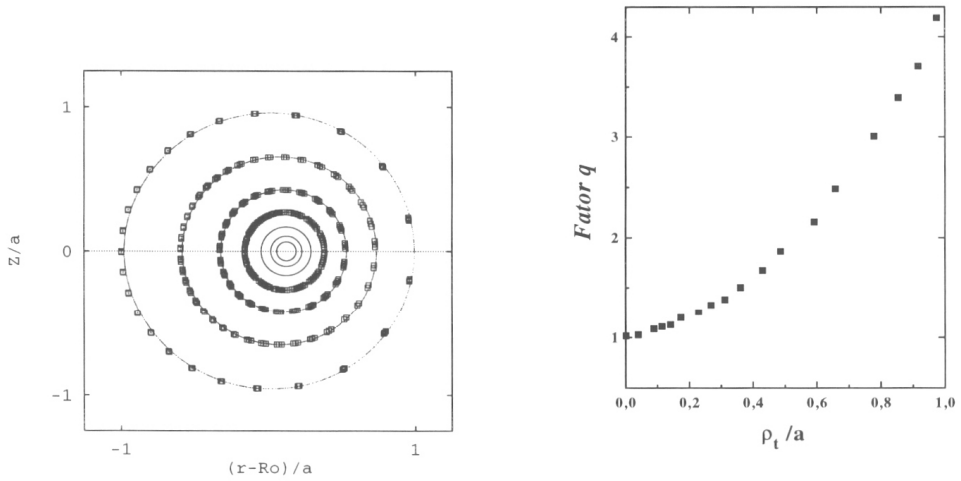


Figura 2.4 : Mapeamento do campo magnético $\vec{B}_0$ (mapa de Poincaré do equilíbrio). Solução contendo a correção de primeira ordem, linha contínua; a solução de ordem zero, pontos, exibe um contorno mais próximo do eixo maior. O fator **q** exibe valores $q(a) = 4,1$ e $q(0) = 1$.

2.3. Perfis de Equilíbrio para o TBR-1

Os perfis típicos no equilíbrio do Tokamak **TBR-1**, descrevem as componentes do campo magnético e corrente (figura 2.5-6), gerados dentro do toro, avaliados ao longo do equador do plano poloidal, na direção radial determinada por $\theta_t = 0$ e $\theta_t = \pi$.

A densidade de corrente toroidal associada ao campo de equilíbrio foi obtida por intermédio da equação de Ampère, $j_\phi = \mu_0^{-1}(\nabla_{tor} \times \vec{B}_0)_\phi$. O perfil para pressão cinética do plasma (P), apresentado na figura 2.6 (linha continua), é derivado a partir da integração do lado direito da equação de Grad-Shafranov, isto é, não sofre influência da correção de 1ª ordem :

$$\frac{dP(\rho_t)}{d\Psi_0} = R_0' J_{\phi 0}(\rho_t) \qquad 2.34$$

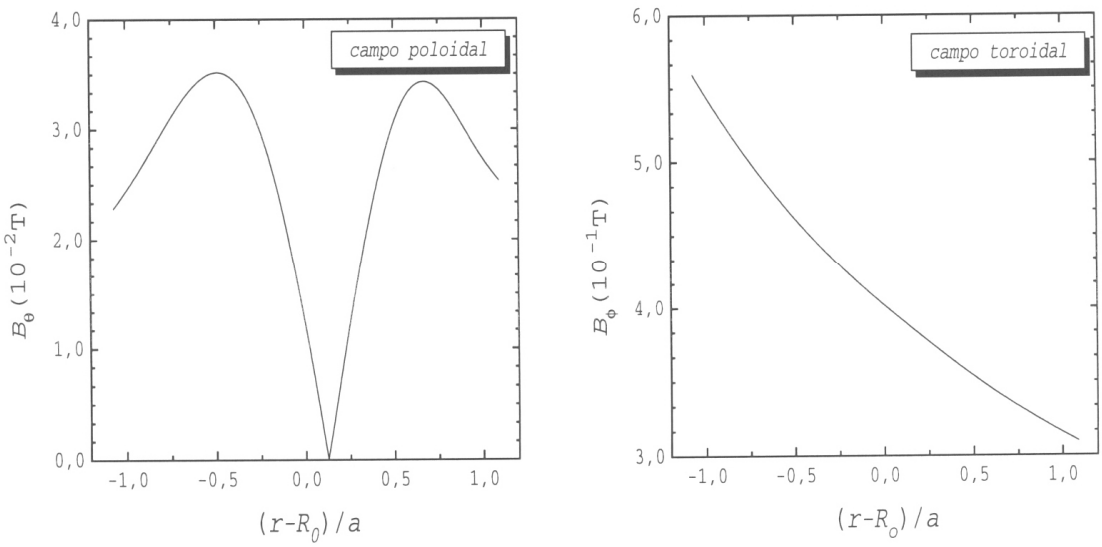


Figura 2.5 : Perfis radiais de campo magnético poloidal, $B_{\theta_t 0}$, e toroidal $B_{\phi 0}$ na direção radial.

A influência da correção de 1ª ordem sobre o perfil de pressão pode ser obtido integrando-se a própria equação de equilíbrio (2.7), na qual, os campos são expressos em termos de $\Psi(\rho_t, \theta_t) \cong \Psi_0(\rho_t) + \Psi_1(\rho_t, \theta_t)$, figura 2.6 (linha pontilhada).

Mesmo a solução de ordem zero da equação de Grad-Shafranov, $\Psi_0(\rho_t)$, apresenta efeitos toroidais. Tais efeitos são atribuidos ao acoplamento das coordenadas ρ_t, θ_t com as coordenadas polares ρ, θ (apêndice a).

De acordo com o primeiro mapa de Poincaré, estes perfis apontam um deslocamento do eixo magnético em relação ao centro geométrico ($r = R_0$) da câmara de vácuo, de aproximadamente $0,01m$. Este deslocamento, promovido pelo desequilíbrio de pressão cinética, se deve a efeitos geométricos do toro, isto é, devido a

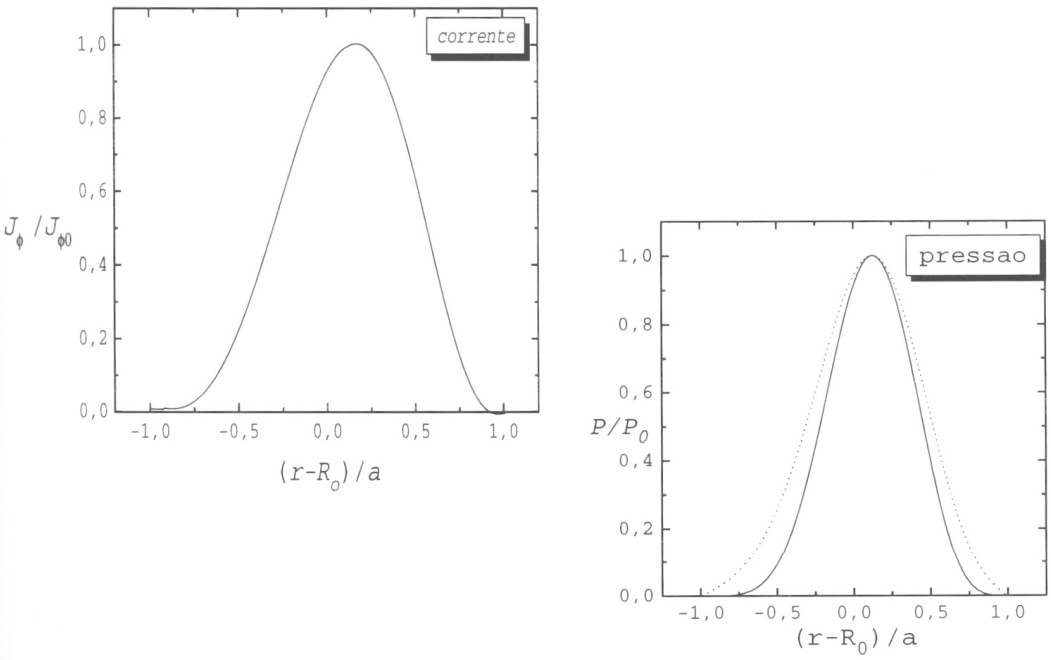


Figura 2.6 : Perfis radiais da densidade de corrente toroidal de plasma, J_ϕ, e pressão, P, para o equilíbrio (o perfil pontilhado indica a influência da correção de 1ª ordem).

curvatura toroidal as linhas de campo são mais densas do lado interno do toro, e portanto, a pressão magnética é maior nessa região. Com isso, a coluna de plasma será deslocada do centro geométrico da câmara de vácuo; embora em tokamaks, com seção reta circular, tal parâmetro assuma pequenos valores, pois a diferença de pressão magnética do lado interno e externo do toro geralmente é pouco expressiva, este deslocamento desempenha um importante papel no equilíbrio MHD, Freidberg [82].

Representando $\Psi_0(\rho_t)$ em termos dessas coordenadas, podemos obter uma previsão para o deslocamento Δ_s, de acordo com o trabalho original original de Shafranov [66].

Assim,

$$\Psi_0(\rho_t) = \psi_0(\rho) + \psi_1(\rho)\cos\theta \qquad 2.35$$

onde $\psi_0(\rho)$ assume a mesma forma que $\Psi_0(\rho_t)$, equação 2.28, e

$$\psi_1(\rho) = -\frac{\mu_0 I_p \rho^3}{4\pi a^2}\left\{1 + y + y^2 + ... + y^\gamma\right\} \qquad 2.36$$

com $y = 1 - \frac{\rho^2}{a^2}$.

Da aplicação dos parâmetros do TBR-1 sobre a condição do deslocamento, determina-se a posição do eixo magnético ($\nabla\psi = 0$) como a posição de máximo no perfil de pressão, calcula-se Δ_s a partir da condição $\psi(\rho_a(\theta), \theta) = \Psi(\rho_t = a) = cte$ ou:

$$\Delta_s \sim -\frac{\psi_1(a)}{\psi_0'(a)} = \frac{a^2}{2R_0'} = 0,011m$$

Determinado o mapa para o campo de equilíbrio, podemos superpor a este, o campo magnético gerado pelas bobinas externas [cap.3]. Dessa forma conseguimos os mapas de Poincaré para o caso perturbado [cap.4].

Capítulo 3

Perturbação do Equilíbrio MHD por Correntes Helicoidais Ressonantes

3.1. Espectro dos Modos Gerados pela Atuação do RHW

Desde sua aplicação pela primeira vez no Tokamak Pulsator-I (Instituto Max-Planck de Física de Plasma), os campos produzidos por hélices ressonantes têm mostrado forte influência sobre a instabilidade disruptora, antecipando ou postergando o término da corrente de plasma, Karger *et al.* [74], Vannucci *et al.* [88]. Tal campo é gerado por enrolamentos condutores devidamente fixados à parte externa da câmara de vácuo.

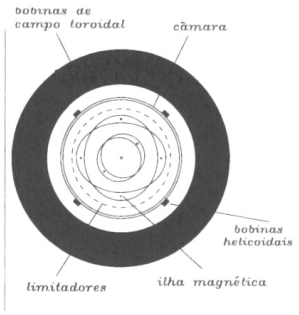


Figura 3.1 : Diagrama com as bobinas helicoidais ressonantes e ilhas magnéticas formadas no tokamak.

Tendo uma influência local sobre o plasma, a perturbação gerada por essas bobinas produz, sobre as superfícies magnéticas racionais de equilíbrio, uma estrutura de ilhas magnéticas cujas linhas de campo apresentam passos helicoidais iguais aos dos enrolamentos externos. Portanto a simetria toroidal das superfícies magnéticas (independência em ϕ) é destruida por perturbações dependentes de $m_0\theta_t - n_0\phi$, onde m_0 é o número de onda poloidal e n_0 o número de onda toroidal dos modos excitados.

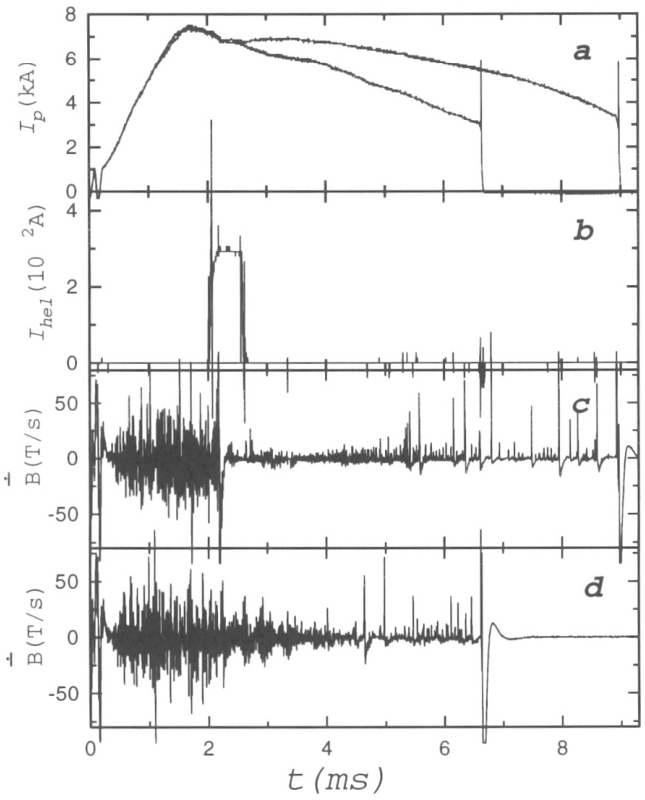


Figura 3.2 : Perfis experimentais do TBR-1.
a) Perfis temporais de corrente de plasma c/s atuação do **rhw** .
b) Corrente helicoidal de perturbação.
c) Flutuação de campo magnético poloidal com atuação do **rhw**.
d) Flutuação de campo magnético poloidal sem atuação do **rhw**.
Tais perfis foram obtidos por Araujo [91].

Intensos efeitos foram observados a partir de correntes helicoidais externas da ordem de $\frac{I_p}{100}$. Uma corrente helicoidal acima de uma determinada intensidade, I^*_{hel} (corrente crítica), induz a disruptura em tempo menor que a disruptura expontânea, enquanto que, para valores de corrente próximos de I^*_{hel}, leva a efeitos estabilizadores como o amortecimento da amplitude do modo MHD $m = 2$, Karger [77]. Esses efeitos são originários da ressonância entre o campo magnético de equilíbrio e o de perturbação . No tokamak **TBR-1**, o resultado da aplicação de correntes helicoidais externas, mostrou exercer forte efeito sobre a estabilidade do plasma, dependendo da corrente aplicada para perturbação, Araujo [91].

Nos perfis experimentais apresentados acima, figura 3.2, pode-se comparar o tempo de corrente de plasma ($I_p \sim 8kA$) para dois disparos do tokamak TBR-1 (disparos u165,u166). O tempo de duração da corrente de plasma (a) passou de 6,6 ms para 9 ms, com a atuação da corrente helicoidal, $I_{hel} \sim 300A$. Esta foi acionada, com duração de 1 ms, 2 ms após o início da descarga (b).

Nos dois últimos módulos da figura 3.2 (c,d), observa-se o amortecimento da flutuação de campo magnético poloidal, $\dot{\tilde{B}}_{\theta_t}$, a partir do início da perturbação.

Nas bobinas helicoidais ressonantes, condutores adjacentes são portadores de correntes helicoidais em sentidos opostos. Nessa configuração não há corrente líquida circulando sobre a superfície do vaso, há configurações com diferentes disposições da corrente de perturbação, por exemplo, Karger *et al.* [77], utilizaram correntes no mesmo sentido formando campos de octopolo no interior da câmara, Finn [75], em seu trabalho, experimenta dois perfis de corrente (um parabólico e o outro com um pico de corrente no centro do vaso) gerados internamente ao plasma, formando modos tearing superpostos. Freis [73] utiliza, como fonte de perturbação, um anel portador de correntes dentro da câmara de vácuo.

Pode-se obter uma expressão para o campo magnético, interno à câmara, gerado pelas bobinas de perturbação a partir da solução da equação de Laplace para o potencial escalar Φ. Esta solução foi calculada por Kucinski e Caldas [87] nas coordenadas (ρ_t, θ_t, u_t); $u_t = m\theta_t - n\phi$. Assim, pode ser determinado o campo de

perturbação

$$\vec{b} = \nabla \Phi_0 \qquad 3.1$$

usando apenas o primeiro termo da série que representa a solução, Solove'ev [66], ou seja:

$$\Phi_0 = -\frac{\mu_0 I_{hel}}{\pi N}(\frac{\rho_t}{b})^{m_0 N} sen N u_t \qquad 3.2$$

onde I_{hel} é a corrente helicoidal. Para superpormos numericamente este campo ao descrito pelas equações 2.31-33 escolhemos a forma apresentada por Okano [91]:

$$b_\xi = \frac{\mu_0 I_{hel} m_0}{\pi R_0'} senh\xi \ (\frac{\rho_t}{b})^{m_0 N} sen N u_t \qquad 3.3$$

$$b_{\theta_t} = -\frac{\mu_0 I_{hel} m_0}{\pi b} \ (\frac{\rho_t}{b})^{m_0 N - 1} cos N u_t \qquad 3.4$$

$$b_\phi = -\frac{\mu_0 I_{hel} m_0}{\pi b senh\xi} \ (\frac{\rho_t}{b})^{m_0 N - 1} cos N u_t \qquad 3.5$$

A atuação dos campos helicoidais ressonantes pode ser melhor analisada ao examinarmos o espectro da perturbação poloidal, gerado ao calcular-se a transformada rápida de Fourier (FFT) da componente b_{θ_t} do campo de perturbação, os coeficientes dessa série de Fourier são dados por b_{θ_m} ($b_{\theta_t} = \sum_m b_{\theta_m} \cos m u_t$).

Apresentamos tal espectro para os parâmetros do TBR-1 ($R_0 = 0.30m, b = 0.11m, a = 0.08m$) em três regiões radiais do toro; em $\rho_t = a$ (limitador), mais internamente, $\rho_t = \frac{a}{2}$, e $\rho_t = \frac{a}{3}$ e a corrente de perturbação, I_{hel} igual a $90A$.

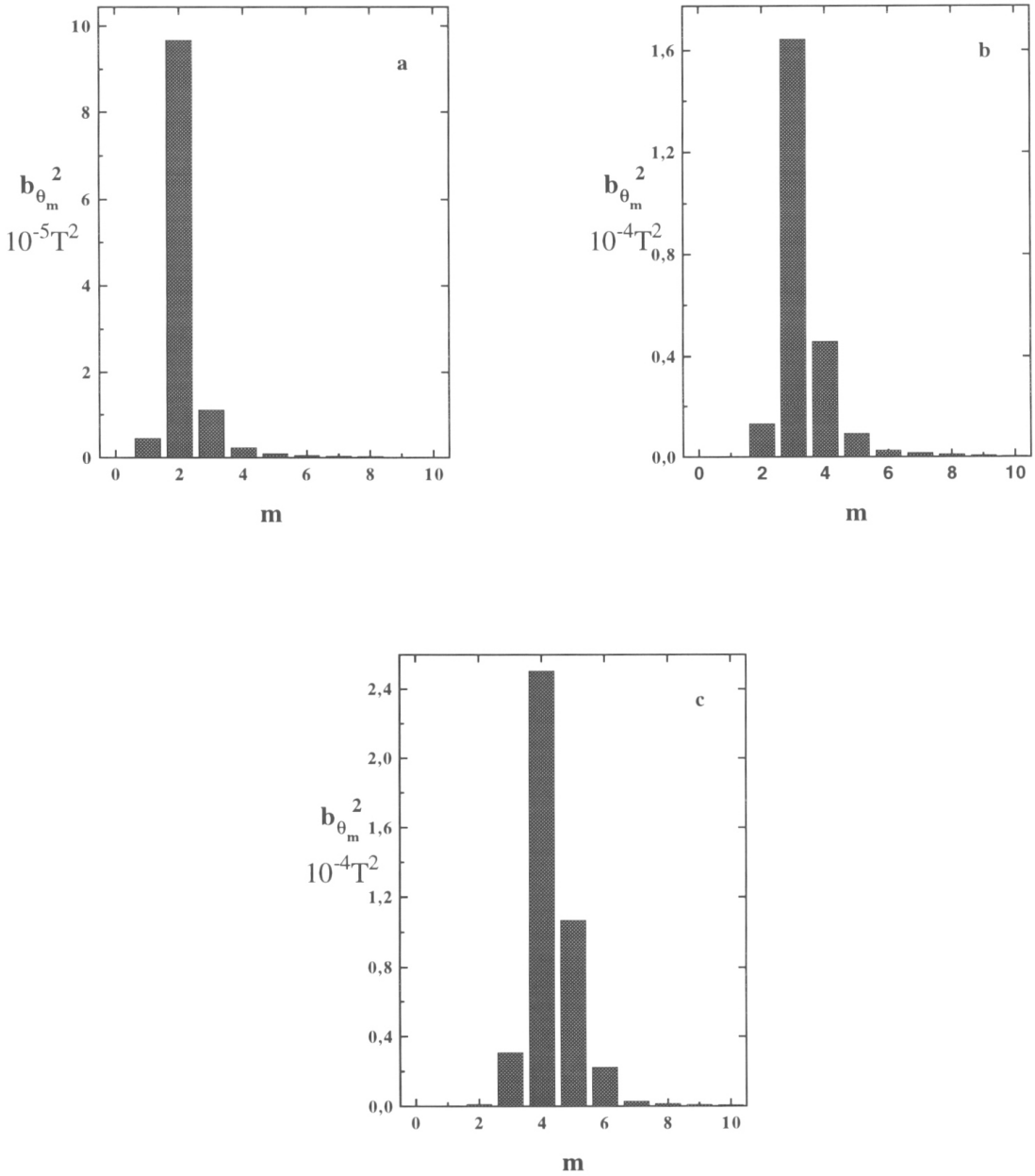


Figura 3.3 : Espectro criado pelas disposições do **rhw**
a) $m_0/n_0 = 2/1$, b) $m_0/n_0 = 3/1$, c) $m_0/n_0 = 4/1$; na região do do limitador, $\rho_t = a$, com $I_{hel} = 90A$.

Devido ao acoplamento da perturbação com a curvatura toroidal, vários modos com amplitudes menores que a do modo principal (m_0, n_0), aparecem nos espectros

analisados. Esses modos criam ressonâncias em torno das superfícies com $q = \frac{m}{n}$.

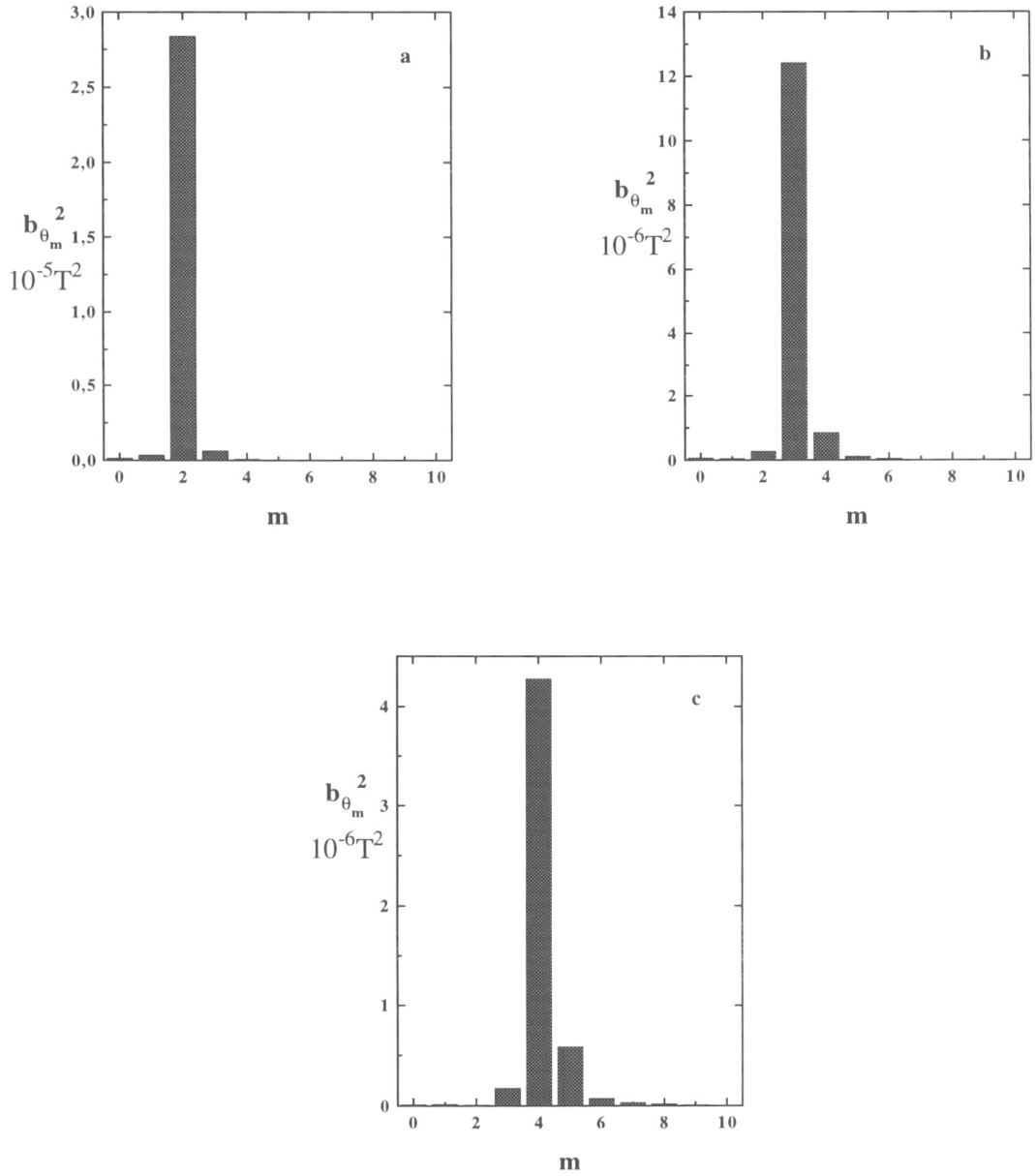


Figura 3.4 : Espectro criado pelas disposições do **rhw**
a) $m_0/n_0 = 2/1$, b) $m_0/n_0 = 3/1$, c) $m_0/n_0 = 4/1$; na região intermediária, $\rho_t = \frac{a}{2}$, com $I_{hel} = 90A$.

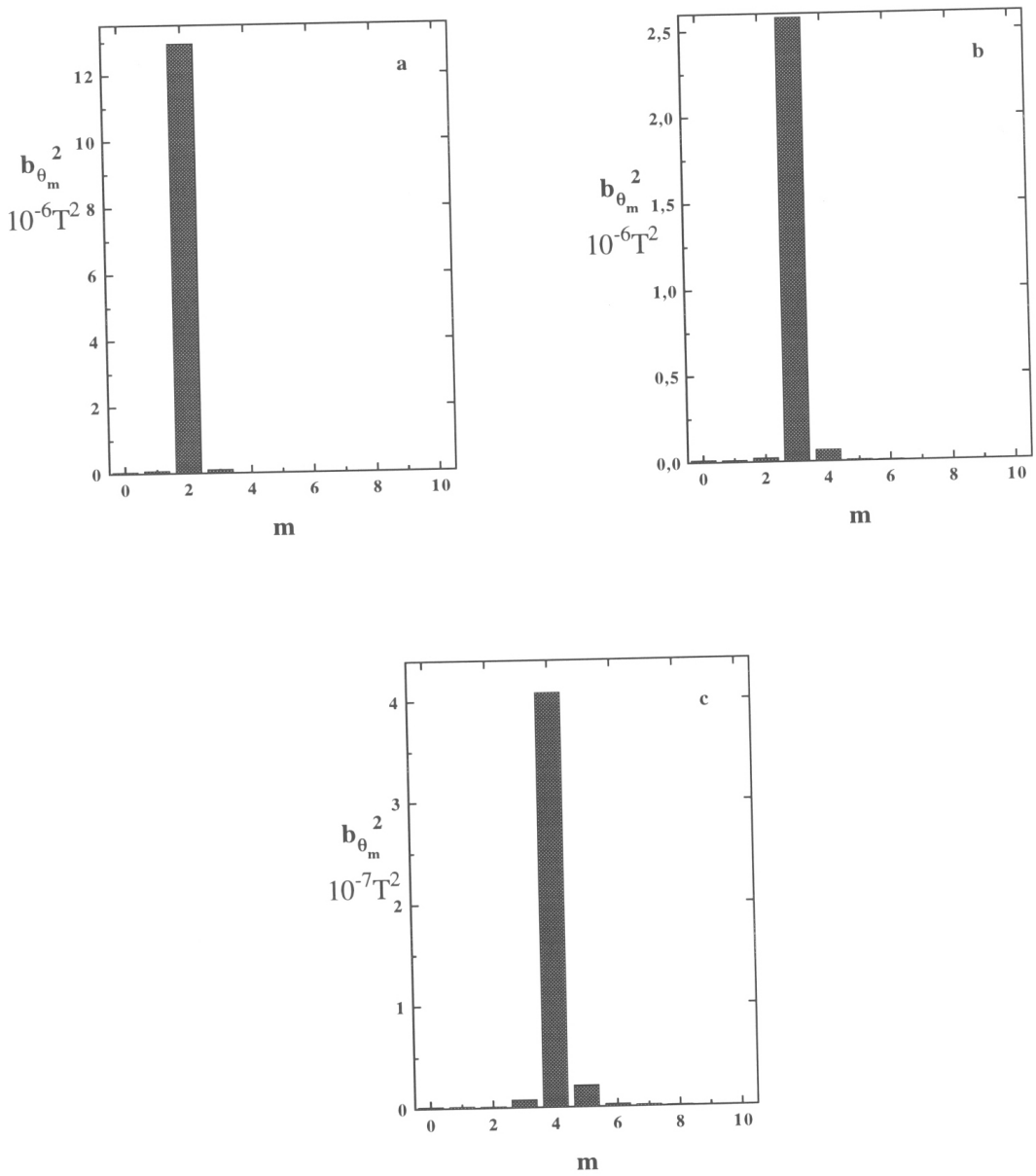


Figura 3.5 : Espectro criado pelas disposições do **rhw**
a) $m_0/n_0 = 2/1$, b) $m_0/n_0 = 3/1$, c) $m_0/n_0 = 4/1$; no interior da câmara, $\rho_t = \frac{a}{3}$, com $I_{hel} = 90A$.

Observamos que os harmônicos mais altos são previlegiados na borda do plasma devido a própria dependência radial da perturbação helicoidal, Feneberg

[77]. Assim a variação radial da perturbação diminui mais rapidamente, em direção ao centro do plasma, para configurações de alto **m** ($m/n = 4/1$ por exemplo). Dessa forma, há uma destruição mais efetiva das superfícies na borda, onde se encontra a ressonância principal, isolando a região central em equilíbrio. Por esses motivos essa configuração está sendo usada no **TBR-1** em experiências de controle sobre as instabilidades e oscilações na borda do plasma, Castro R.M.("Turbulência Eletrostática e Magnética em Tokamaks").

No próximo capítulo, a partir do perfil do fator q, para o caso perturbado, podemos verificar a diferença de amplitudes entre os modos primários e secundários, expressos por meio de **platôs** nestes perfis. Verificaremos, também, o surgimento de regiões caóticas no plasma, devido a superposição desses modos. Através da corrente I_{hel}, usada como parâmetro de perturbação, pode-se controlar as larguras das ilhas e a extensão das regiões caóticas.

Capítulo 4

Mapeamento Magnético do Campo Resultante

4.1. Trajetória das Linhas de Campo

Neste capítulo apresentaremos os resultados numéricos obtidos ao considerarmos o campo resultante da superposição linear do campo de perturbação, gerado pelas correntes nas bobinas helicoidais ressonantes (**rhw**), ao campo de equilíbrio (escrito em termos da solução da equação de Grad-Shafranov, cap. 2). Assim,

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b} \qquad 4.1$$

cujas expressões são dadas pelas equações 2.31-33 e 3.3-5 respectivamente.

Mapeamos as linhas de campo magnético, partindo da própria definição de linha de campo, tangente à $\vec{B}$ sobre a trajetória

$$\vec{B} \propto d\vec{L} \qquad 4.2$$

sendo, então, nula sua projeção na direção perpendicular à $\vec{B}$, ou seja:

$$\vec{B} \times d\vec{L} = 0 \qquad 4.3$$

As trajetórias são determinadas a partir da equação acima expressa por intermédio das coordenadas (ξ, θ_t, ϕ)

$$\frac{d\xi}{\vec{B}\cdot\nabla\xi} = \frac{d\theta_t}{\vec{B}\cdot\nabla\theta_t} = \frac{d\phi}{\vec{B}\cdot\nabla\phi} \qquad 4.4$$

Dessa forma, conhecido $\vec{B}$, podemos associar as coordenadas ξ e θ_t aos passos da coordenada de integração ϕ ao longo do toro:

$$d\theta_t = \frac{\vec{B}\cdot\nabla\theta_t}{\vec{B}\cdot\nabla\phi}d\phi \qquad 4.5$$

$$d\xi = \frac{\vec{B}\cdot\nabla\xi}{\vec{B}\cdot\nabla\phi}d\phi \qquad 4.6$$

Ao procedermos a integração numérica, tratamos a evolução desse sistema de equações como sendo um problema de valor inicial (as condições de contorno foram aplicadas na solução da equação de Grad-Shafranov, assim como na solução da equação de Laplace para o campo perturbativo) e damos à coordenada ϕ o papel de parâmetro de evolução.

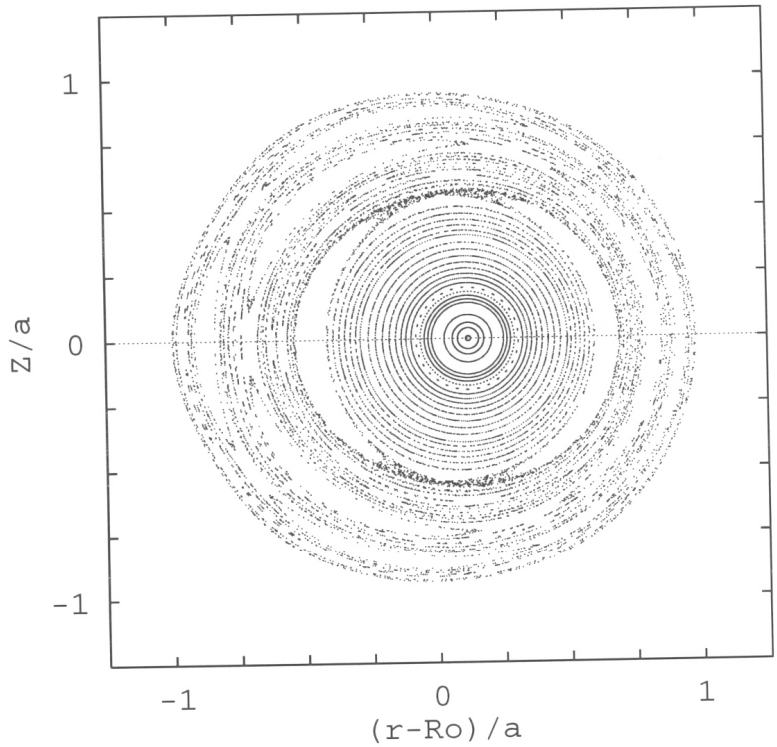
Tal tratamento é equivalente a considerarmos o campo de equilíbrio $\vec{B}_0$ como um campo estacionário, no sentido em que este não depende do parâmetro de evolução, que será somado a uma pequena perturbação não estacionária $\vec{b}(\xi, \theta_t, u_t)$. Então, escolhemos o ponto inicial (ξ_0, θ_{t0}) e o número de circuitos toroidais, calculando numéricamente as intersecções da linha de campo considerada com um plano poloidal $\phi_0 = 0$. Para isso, acompanhamos uma linha de campo, calculando a sequência de variações $\delta\theta_t$ e $\delta\phi$. Após N trânsitos toroidais, escolhemos um novo ponto inicial, mais interno, repetindo o processo até alcançarmos o eixo magnético. Os detalhes do método numérico empregado estão no apêndice b.

4.2. Mapeamento Magnético

Para construirmos um mapa de Poincaré, escolhemos um determinado ângulo ϕ_0 para que sejam tomadas as coordenadas ξ e θ_t a cada ciclo toroidal. Os mapas apresentados a seguir foram construidos integrando-se varias vezes ao redor do toro. A partir de 800 voltas o fator **q**, para um mesmo mapa, não apresenta diferenças. Por isso usamos tal valor em torno de 1.000 voltas para cada condição inicial, como resultado um mapa comporta um número entre 20.000 e 40.000 pontos.

Além do mapa apresentado, calculamos também o perfil do fator **q** (determinado ao longo da região equatorial interna, $\theta_t = 0$, para $0 \leq r - R_0 \leq a$), usando sempre parâmetros do **TBR-1** e o equilíbrio descrito no capítulo 2, correspondente ao campo da figura 2.4. Entretanto, apesar dos valores de **q** do campo não perturbado serem os mesmos em todos os os mapas mostrados a seguir, o valor de **q(a)** do campo perturbado é alterado de forma não uniforme pela perturbação.

Para o cálculo dos perfis radiais do fator **q** de segurança, procuramos escolher trajetórias regulares de modo a obtermos a variação radial do valor médio de **q** em cada região. Para ilustrar esse comentário, apresentamos o mesmo perfil de **q** calculado com esse critério e outro perfil obtido com trajetórias caóticas (a partir da figura 4.3). Com o perfil das trajetórias regulares, tentamos controlar o valor de **q** na borda do plasma, bem como determinar a largura dos principais modos surgidos (resultado expresso ao final deste capítulo, fig. 4.15), para tanto, partimos de pontos iniciais no plano $\phi = 0$ (plano escolhido para montarmos os mapas de Poincaré). No perfil de **q** para as trajetórias caóticas partimos de pontos iniciais no plano $\phi = \pi$, neste plano passamos justamente por pontos instáveis (estrangulamento dos modos exibidos no plano $\phi = 0$), como efeito observa-se que os platôs no perfil de trajetórias regulares estão associados a picos no valor de **q** dos perfis para trajetórias caóticas. É importante ressaltar que, para órbitas caóticas, a transformada rotacional ι (eq. 2.15) não está definida, uma vez que, para uma mesma órbita, o valor numérico calculado depende de **N**, conforme indicado na figura 4.4(b). Por outro lado, pode-se encontrar órbitas regulares, mesmo em regiões caóticas, podendo-se calcular ι para essas órbitas, o que foi feito para o cálculo do perfil radial do fator **q** ($q = \frac{2\pi}{\iota}$).



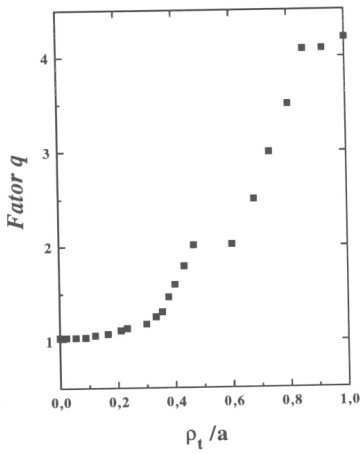
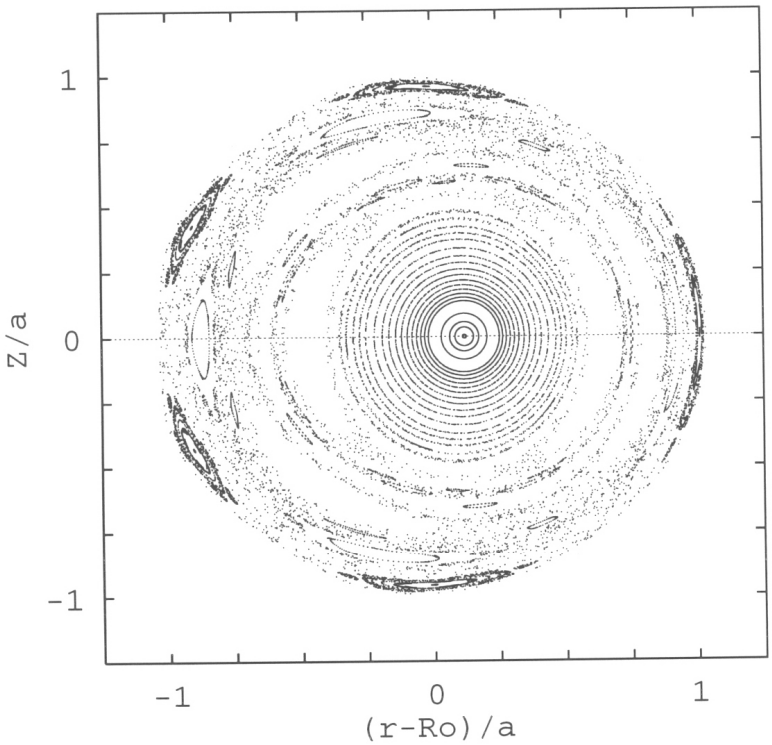


Figura 4.1 : Mapa de Poincaré do campo $\vec{B}$.Resultado da superposição do campo de perturbação, com $m_0/n_0 = 2/1$ e $I_{hel} = 45A$, ao campo de equilíbrio $\vec{B}_0$, figura 2.4, as ilhas magnéticas formadas, provocam platos no perfil do fator q de segurança, o qual exibe valores na borda e no centro, respectivamente $q(a) = 4,2$ e $q(0) = 1$.



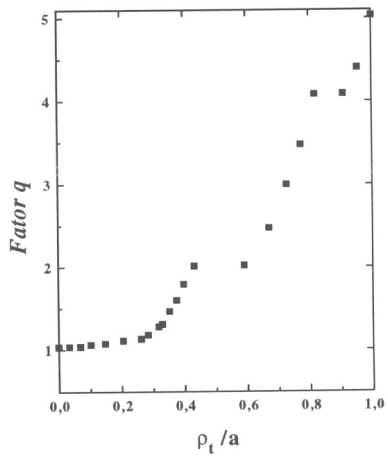


Figura 4.2 : Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 2/1$ e $I_{hel} = 105A$. O fator q assume valores $q(a) = 5,03$ e $q(0) = 1$.

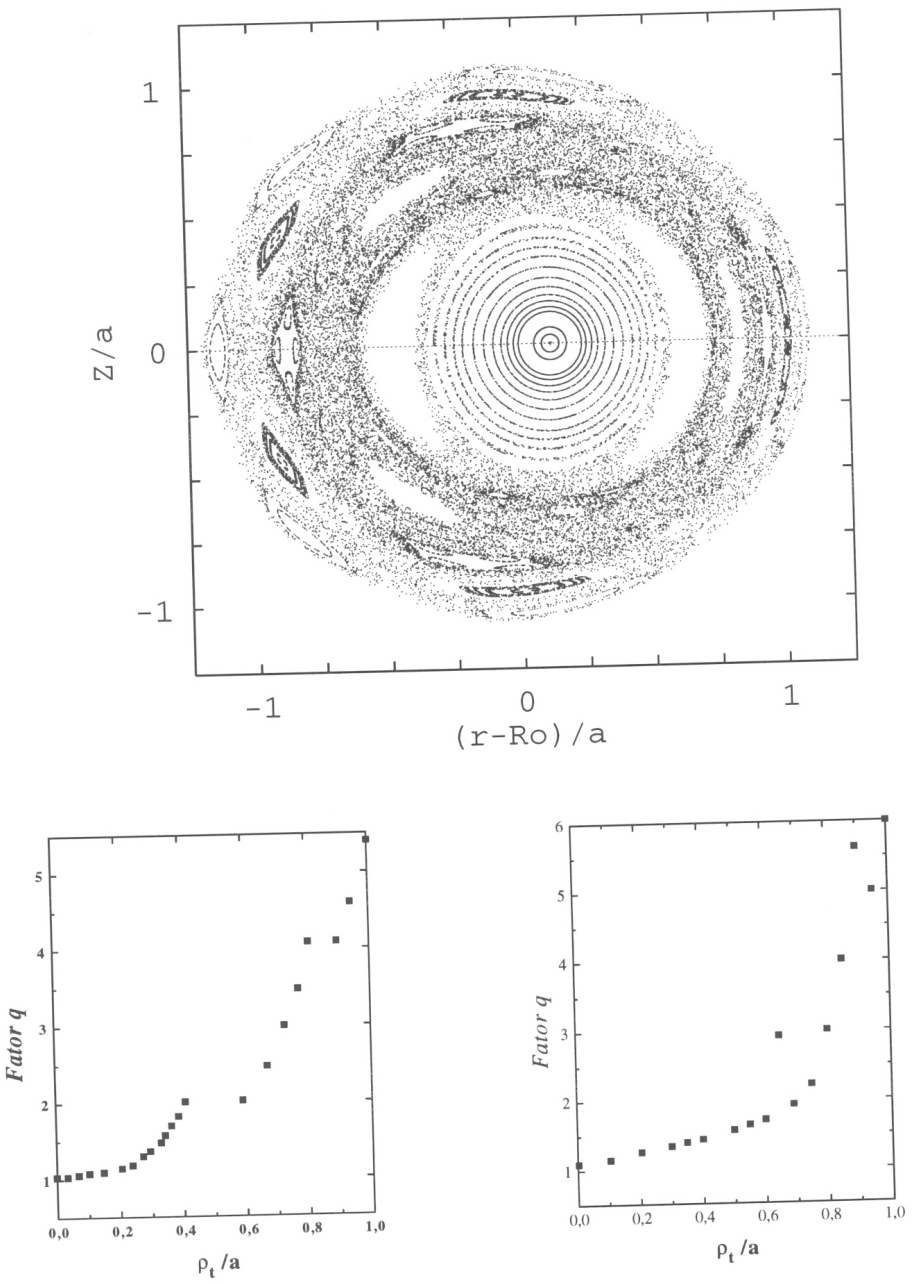


Figura 4.3 : Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 2/1$ e $I_{hel} = 145A$. O fator q assume valores $q(a) = 5,4$ e $q(0) = 1$, exibindo, ainda, um comportamento regular (a). Em (b) este perfil mostra que tais perturbações deslocam as trajetórias regulares formando uma região caótica, na borda do plasma.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2266 e.2
INSTITUTO DE FÍSICA

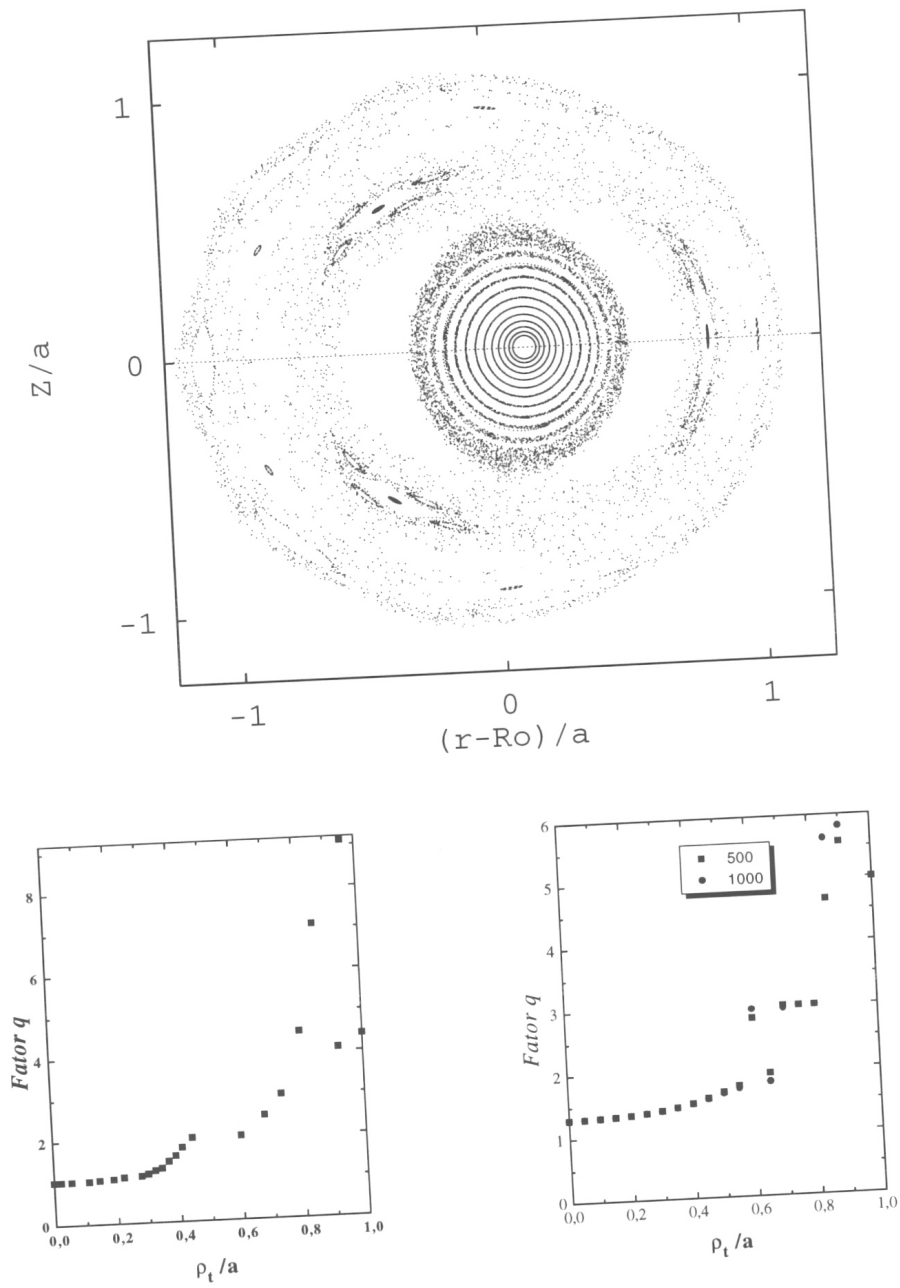


Figura 4.4 : Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 2/1$ e $I_{hel} = 185A$. O fator q, neste mapa, mostra a ocorrência de superposição dos modos na borda do plasma, $q(a) \sim 4,4$ e $q(0) = 1$, isto é, em ambos os perfis de q temos trajetórias caóticas (em (b) testamos a convergência de q com diferentes números de voltas no toro).

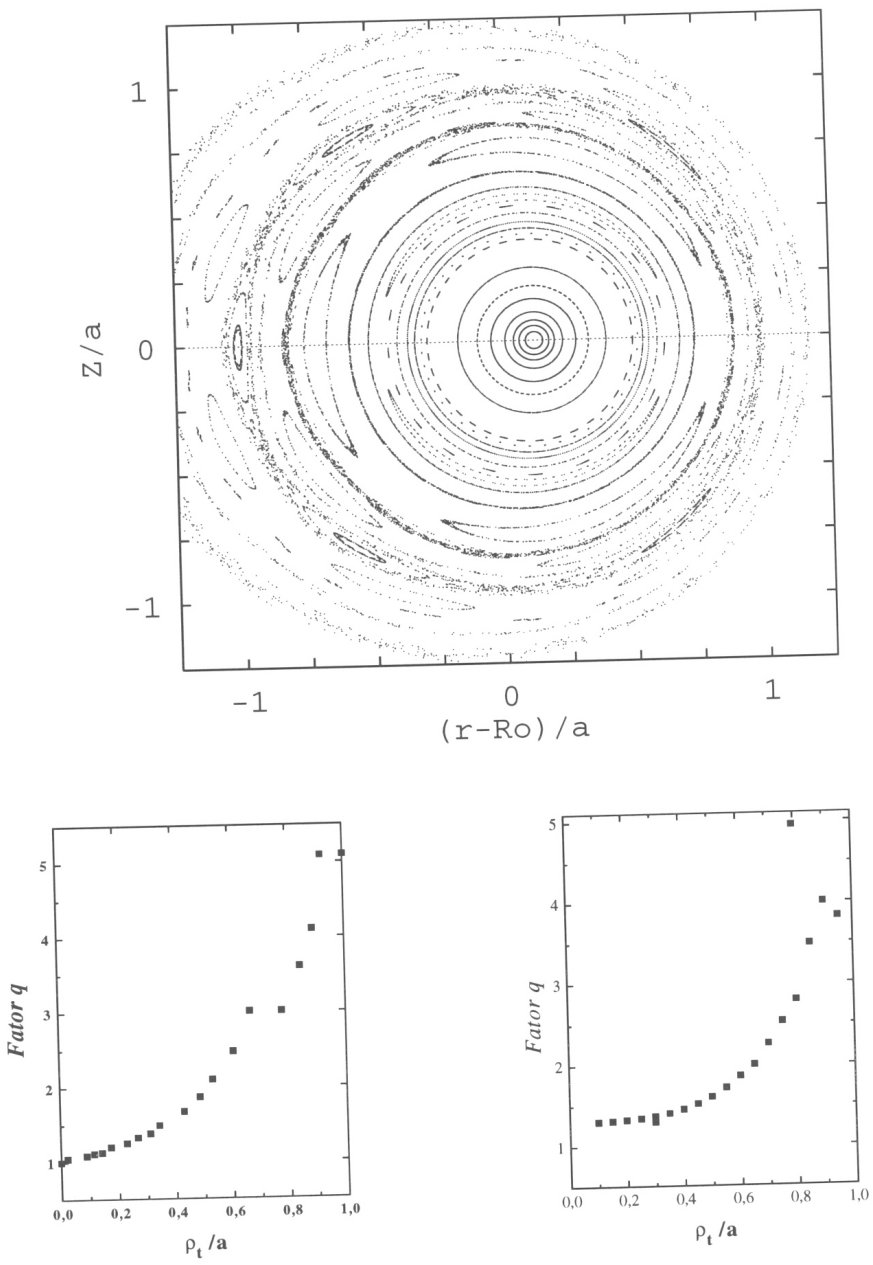
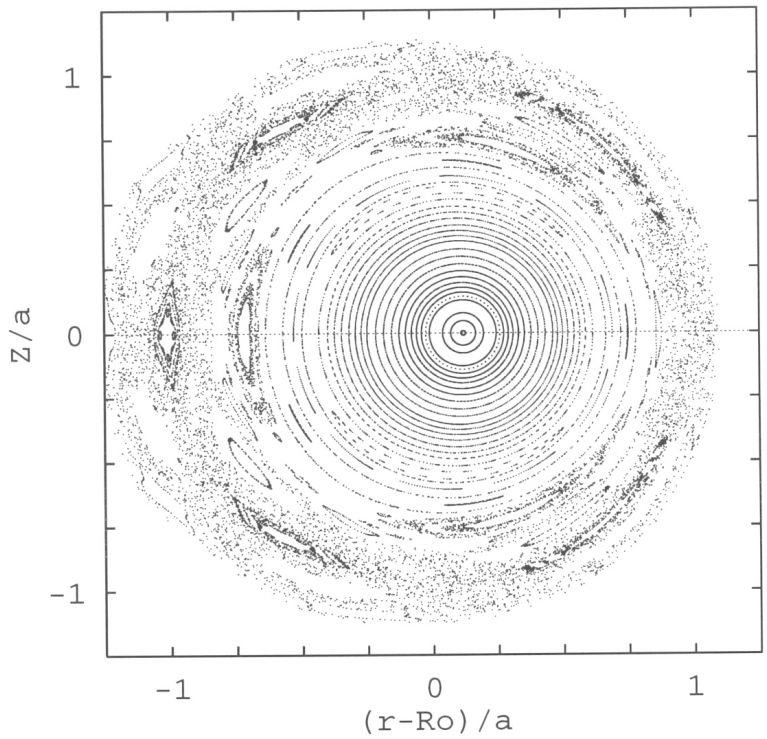


Figura 4.5 : Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 3/1$ e $I_{hel} = 45A$. O fator q (trajetórias regulares (a)) assume valores $q(a) = 5,08$ e $q(0) = 1$.
O fator q expresso em (b) exibe trajetórias caóticas a partir de $q > 3$.



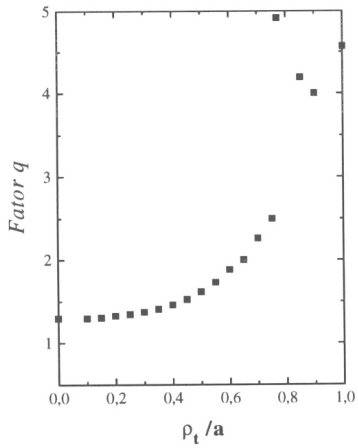
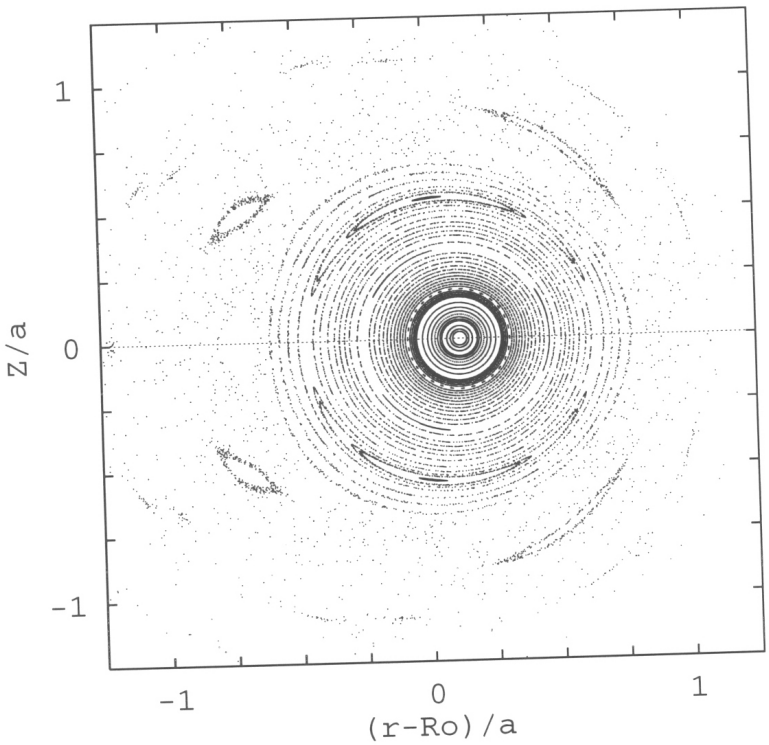


Figura 4.6 : Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 3/1$ e $I_{hel} = 60A$. A partir desta figura passamos a exibir, na região da borda do plasma, apenas os perfis do fator q para as trajetórias caóticas, uma vez que na periferia do mapa são encontradas poucas trajetórias regulares.



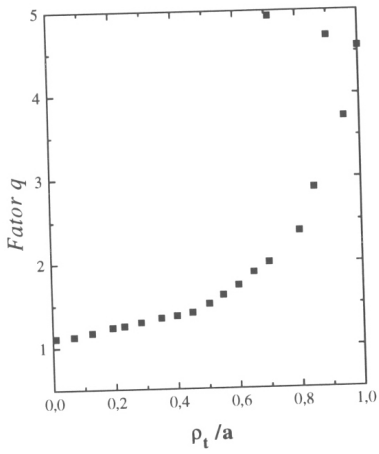


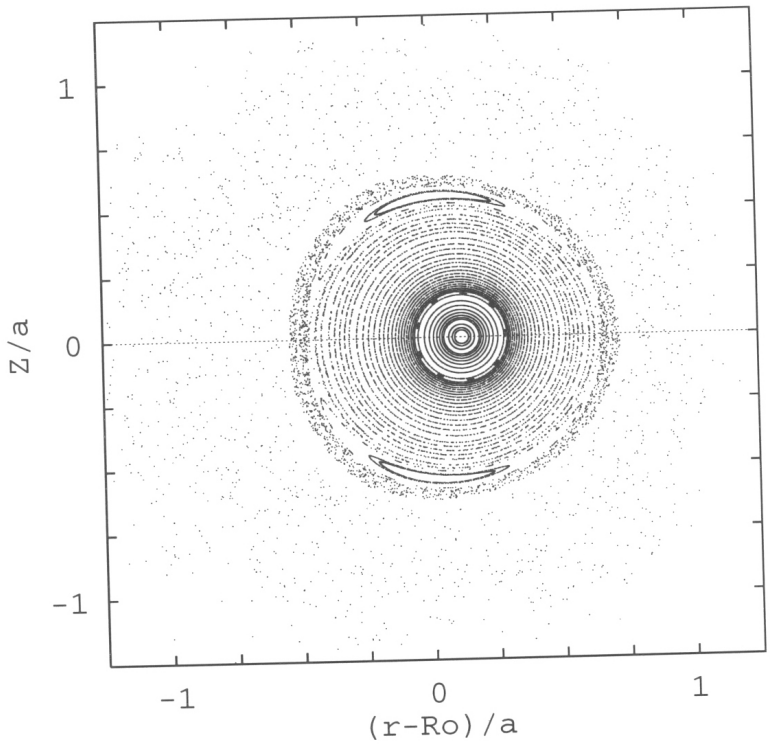
Figura 4.7 : Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 3/1$ e $I_{hel} = 105A$. Neste mapeamento, o fator q colabora na identificação dos modos ainda existentes na borda do plasma.

Ao introduzirmos o campo perturbativo observamos a formação de ilhas magnéticas com efeito toroidal evidente, uma vez que, para uma mesma cadeia de ilhas, aquelas que estão do lado interno do toro (próximas ao eixo maior) são mais largas que as externas. Modos ressonantes em plasmas cilíndricos apresentam-se completamente simétricos e de mesma largura, Oda [93]. As ilhas observadas exibem contornos fechados contendo **novos eixos magnéticos**; estes contornos em ilhas magnéticas adjacentes pertencentes a um mesmo modo são conectadas por uma separatriz intercalando dessa forma pontos de estabilidade (**o**) e instabilidade (**x**).

Os mapas observados são típicos de sistemas Hamiltonianos quase integráveis. Os **novos eixos magnéticos** periféricos estão associados a pontos elipticos de estabilidade, enquanto que aos pontos de encontro das separatrizes (pontos **x**) associamos os pontos hiperbólicos de instabilidade.

Com o acréscimo da corrente helicoidal (I_{hel}) observa-se o aumento da área caótica na região periférica do plasma (onde atuam os modos com m maiores).

Ao continuarmos as trajetórias em uma mesma cadeia de ilhas observamos o seguinte comportamento. Entre cada uma das ilhas, para um mesmo modo (m=4 por exemplo), existe um ponto fixo (ponto x), cujos pontos das linhas de campo se comportam como variedades estáveis (chegando) e instáveis (partindo), Sagadeev [88]. Com o aumento da corrente helicoidal, pontos de uma variedade acabam por ser mapeadas sobre outras variedades pertencentes a modos distintos (m=5, m=6) do modo de partida (m=4), o que acaba por misturar as trajetórias em tal região, Hamzeh [74].



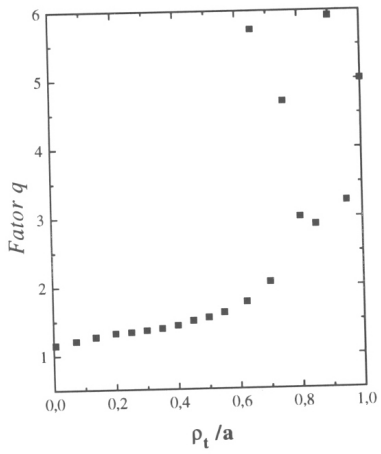
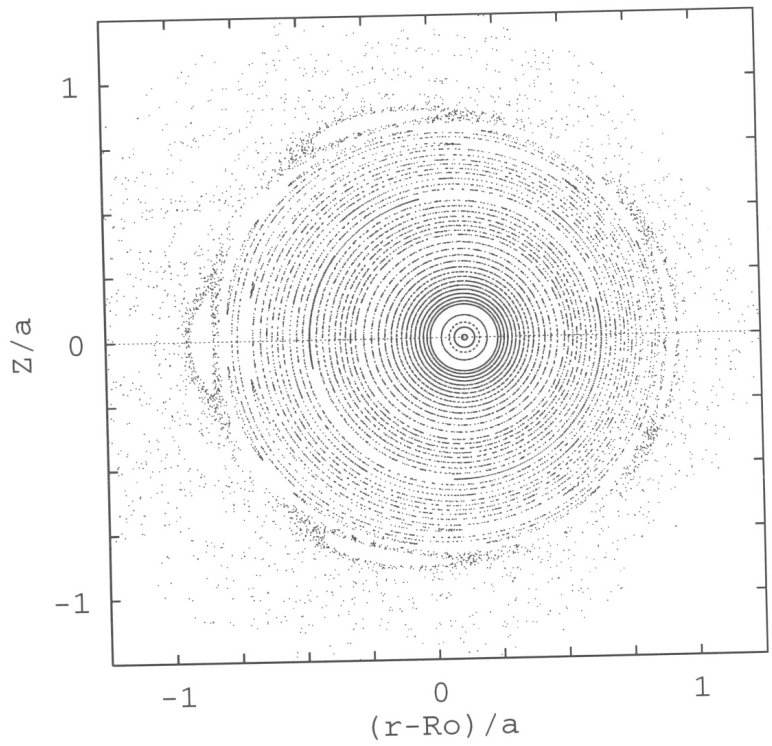


Figura 4.8 : Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 3/1$ e $I_{hel} = 205A$. O perfil de q apresenta regiões caóticas além da superfície onde $q = 2$.



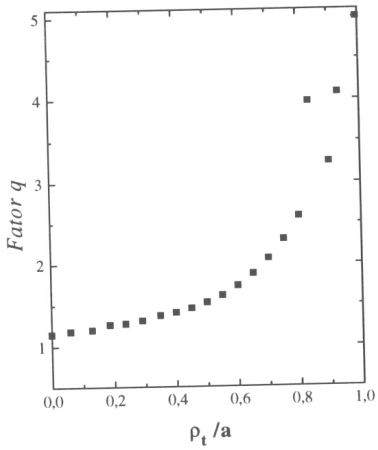
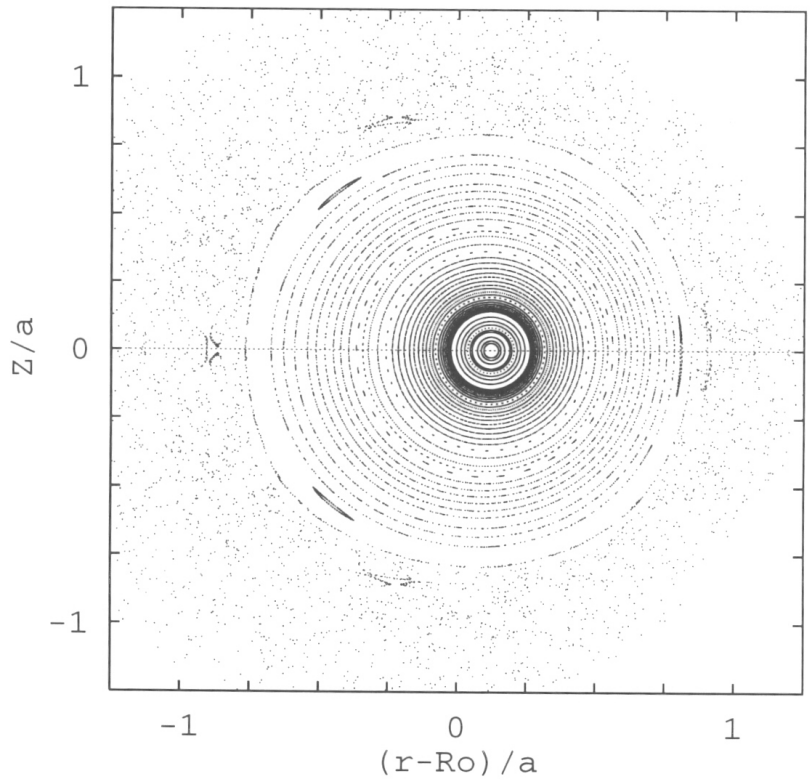


Figura 4.9 : Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 4/1$ e $I_{hel} = 45A$. Este mapa exibe, uma região de equilíbrio mais extensa.



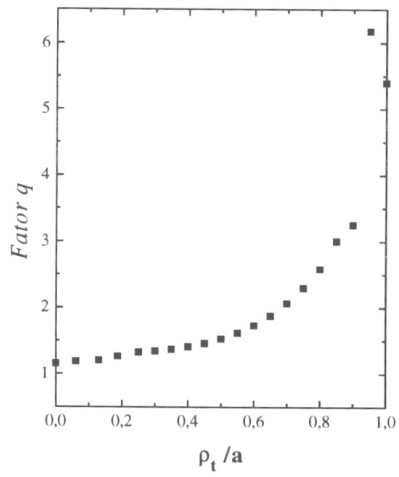


Figura 4.10 : Mapa de Poincaré com $m_0/n_0 = 4/1$ e $I_{hel} = 90A$. Neste mapa percebe-se o aumento da região destruida pela perturbação.

Examinando em detalhe o comportamento de tais trajetórias, separamos uma porção menor do mapa (1° quadrante) e aumentamos gradativamente a influência de I_{hel} para hélice $m_0/n_0 = 2/1$ e correntes helicoidais de 45 até $205A$.

Observa-se que, para valores de perturbação acima de $120A$, alguns contornos internos das ilhas magnéticas são transformados em novas cadeias de ilhas, ainda menores, contornando o eixo magnético associado àquele modo (figuras 4.12-13). Mesmo este comportamento não resiste a perturbações onde $I_{hel} = 250A$, destruindo quase que por completo os contornos dos modos surgidos e atingindo regiões de equilíbrio, próximas ao eixo magnético principal (figura 4.14).

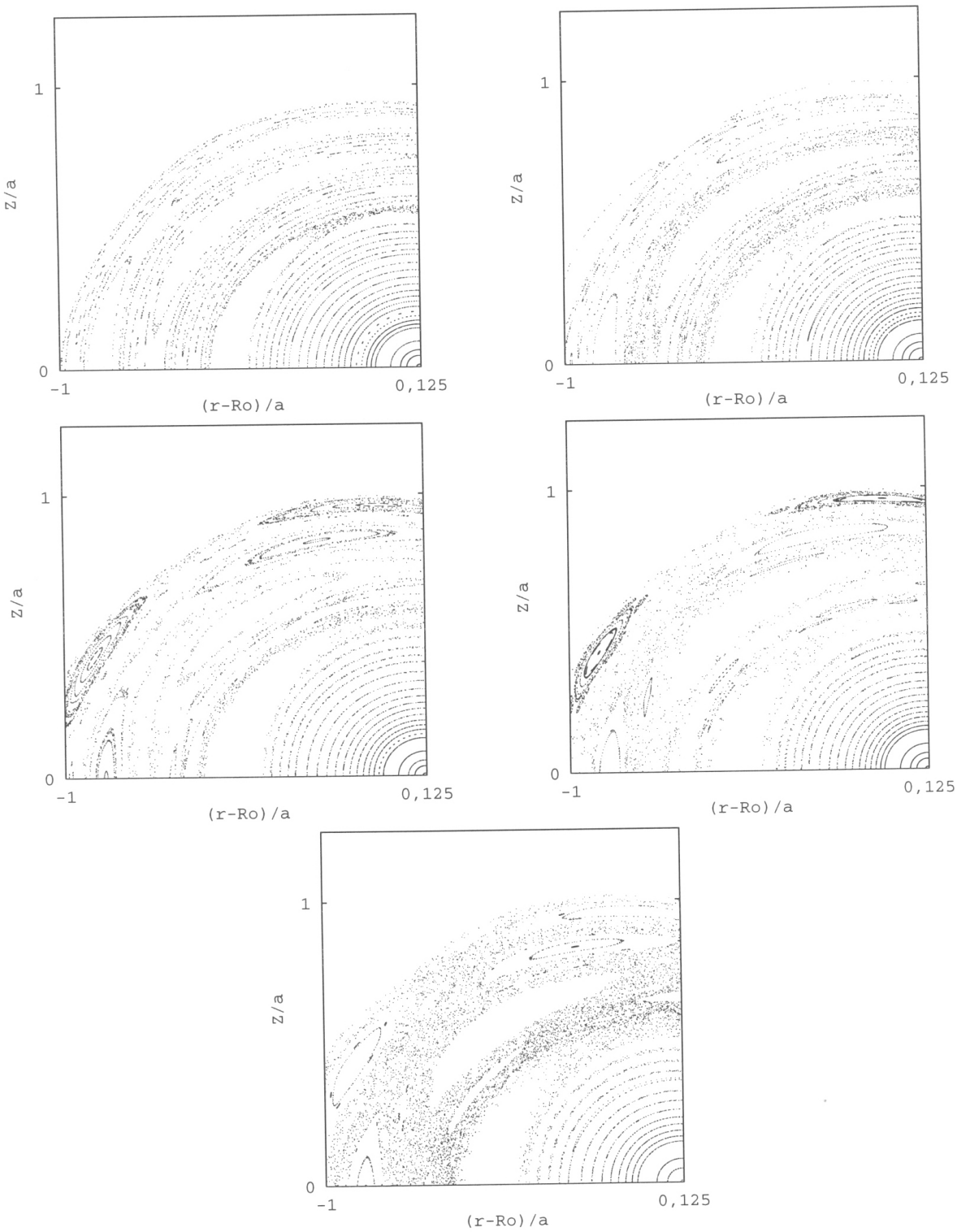


Figura 4.11 : Resultado do aumento de $I_{hel} = 45A$ até $125A$ com $m_0/n_0 = 2/1$

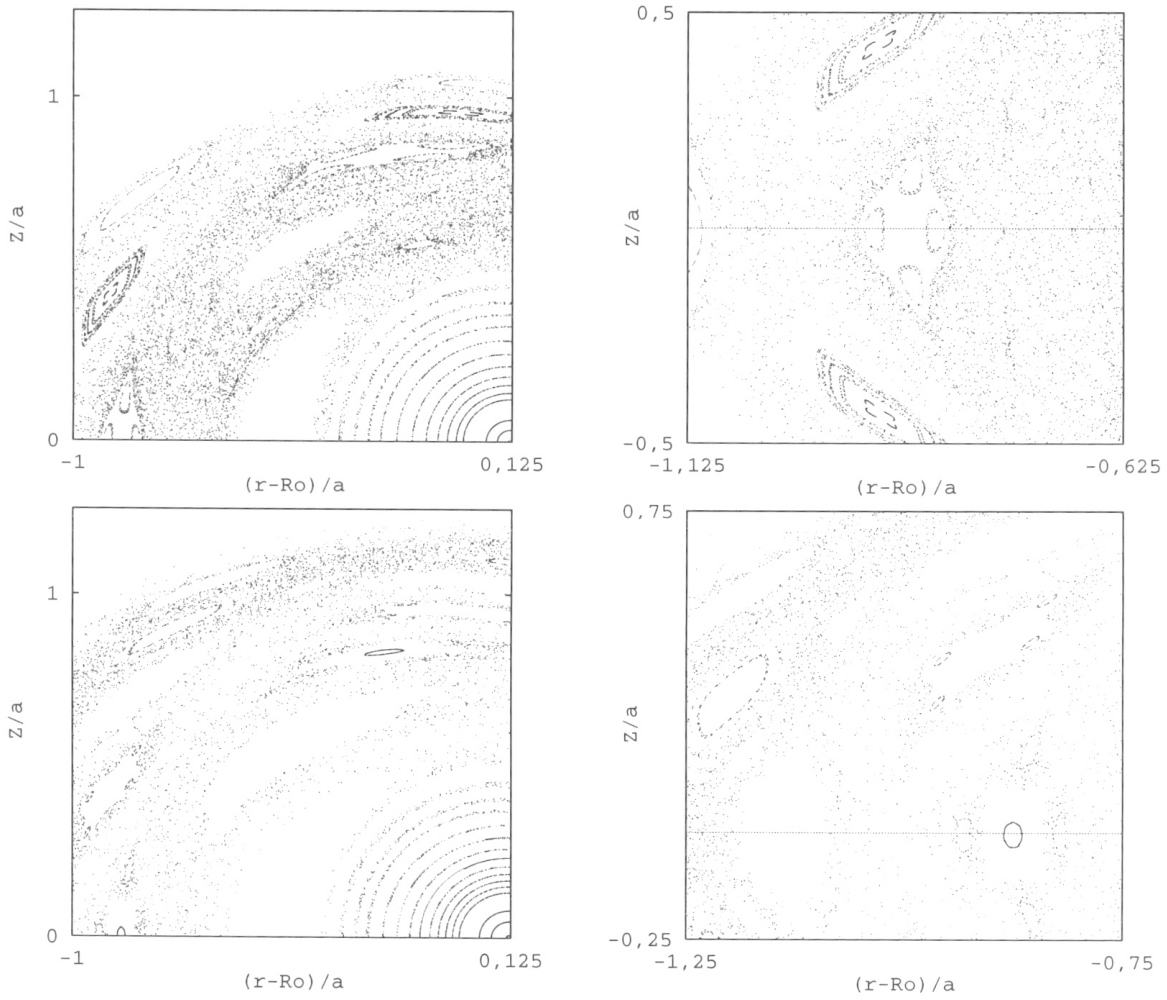


Figura 4.12 : Estrutura de modos surgidos dentro das ilhas magnéticas

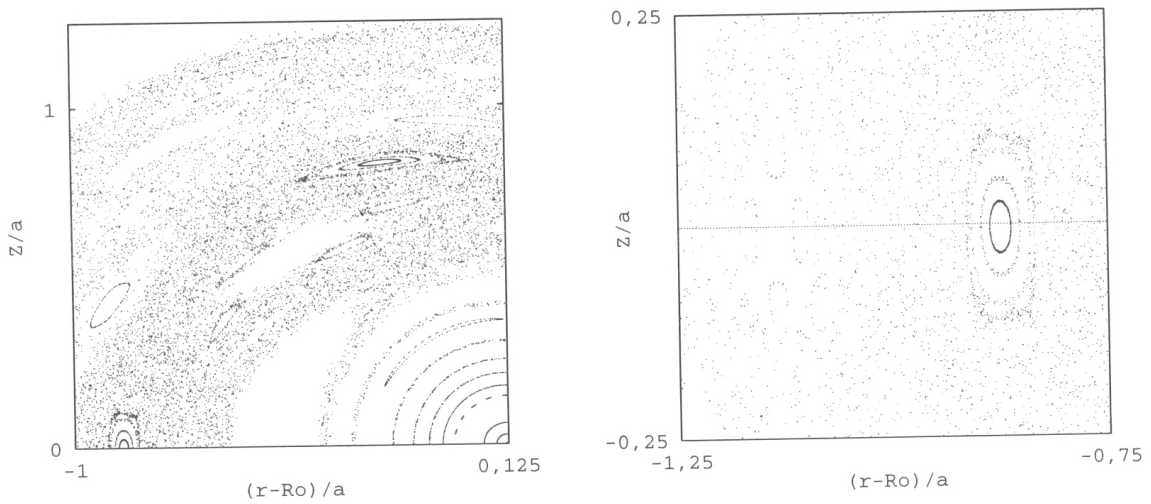


Figura 4.13 : Sequência de ampliações do mapa, figura 4.4, $m_0/n_0 = 2/1$ e $I_{hel} = 185A$.

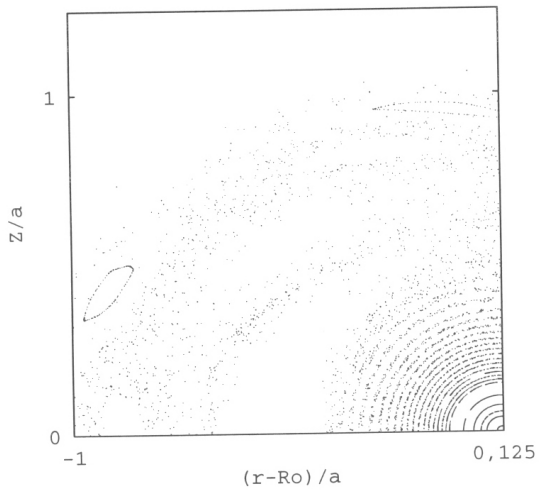


Figura 4.14 : Estrutura de modos surgidos para $I_{hel} = 250A$, exibindo a perturbação das superfícies mais internas.

Nos ultimos mapeamentos, a região caótica alcança regiões bem internas, onde $q \sim 2$, destruindo quase que por completo a estrutura inicial de ilhas. O exame destes mapas demonstrou haver uma dependência da largura da separatriz (determinada sobre o contorno mais externo de uma ilha magnética), δ_{mn}, com a raiz da corrente de perturbação, $\sqrt{I_{hel}}$. Tal relação, aproximada, foi inicialmente obtida por Feneberg *et al.* [79]. Na figura 4.15 é mostrada a variação da largura do modo $m = 2/n = 1$ com o aumento gradativo da corrente helicoidal, para I_{hel} entre $45A$ e $145A$ e $m_0 = 2/n_0 = 1$. Os valores foram tomados sobre o equador do mapa, no lado interno do toro ($\theta_t = 0$).

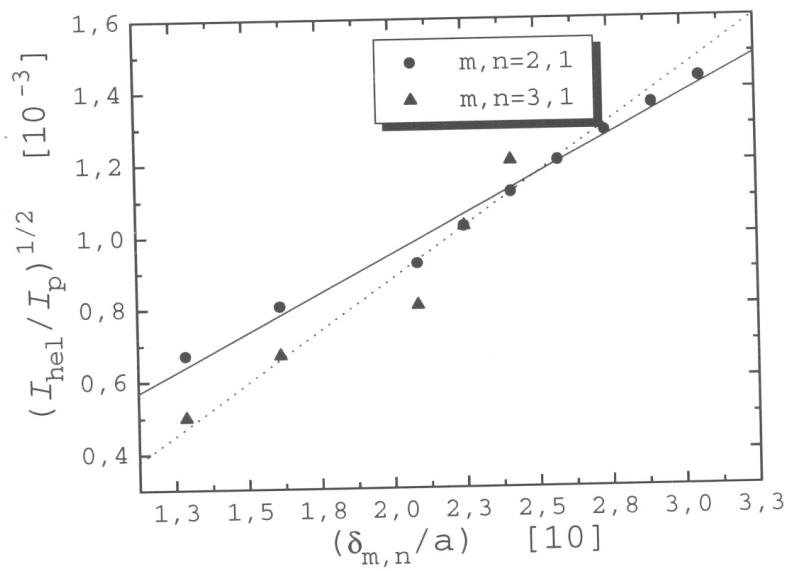


Figura 4.15 : Evolução dos modos com o acréscimo da corrente helicoidal para perturbações com $m_0 = 2$ e 3

No comportamento do conjunto de modos que surgem nos mapas, denotamos a diferença de percurso executado por diferentes modos, ao redor do eixo maior. A largura das ilhas nos indica regiões formadas por helices de mesmo passo ao longo do toro, por isso o fator **q** exibe platôs no seu perfil.

Na figura (4.16) explicitamos quatro faces no toro para $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ e $\frac{3\pi}{2}$ onde o modo principal é $m = 2$ com $I_h = 45A$. Por serem hélices de número de onda poloidal distintos do modo principal excitado, elas possuem passos helicoidais também diferentes.

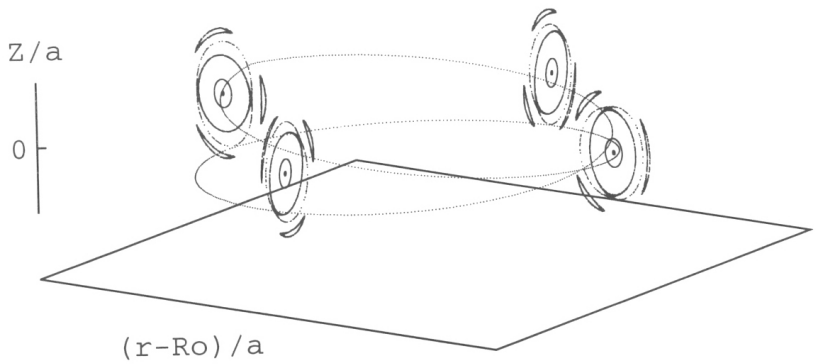


Figura 4.16 : Comportamento das linhas de campo ao redor do toro

Ao comparar as quatro faces, tomando os ângulos iniciais no mapa A da evolução até o mapa B, vemos que o par de ilhas para $m = 2$ percorre um deslocamento angular de 45 graus, enquanto que $m = 3$ percorre 30 graus, do mapa B para C, a hélice com $m = 2$ completa 90 graus em relação a A e $m = 3$ completa 60 graus e assim por diante. Em tais mapas o eixo magnético e representado no ponto central de cada plano, a trajetória exibida (linha pontilhada), pertence à superfície com $q = m_0/n_0 = 2/1$

Capítulo 5

Discussões

Iniciamos nossa discussão lembrando que a análise considerada nesta dissertação corresponde a um determinado intervalo de tempo durante a descarga elétrica de um plasma dentro de um tokamak. Tentamos examinar o comportamento das linhas de campo magnético nesse intervalo, a partir do conhecimento prévio dos campos medidos durante a descarga considerada. Devido à observação do amortecimento das instabilidades MHD, identificado em diagnósticos magnéticos como (bobinas de Mirnov) e em medidas de temperatura eletrônica, acredita-se que as bobinas de campos helicoidais ressonantes podem exercer efeitos estabilizadores sobre o plasma, aumentando o tempo de confinamento do mesmo. O exame das observações experimentais permite supor que, nesse intervalo, o campo magnético do plasma é uma superposição do campo de equilíbrio e dos campos criados por perturbações. Exibimos perfis experimentais da corrente de plasma sem a atuação do campo helicoidal e com seu acionamento no tokamak **TBR-1** (disp. u165,u166). Estes disparos foram apresentados por Araujo [92] em seu trabalho sobre oscilações de Mirnov. Nosso principal objetivo foi apresentar o mapeamento magnético produzido pela atuação desses campos ressonantes no **TBR-1**.

Relacionamos os campos magnéticos, que representam o equilíbrio no **TBR-1**, à corrente de plasma e pressão, por intermédio das soluções MHD (eq. 2.27) da equação de equilíbrio, escritas no sistema de coordenadas polares toroidais

(ρ_t, θ_t, ϕ). O perfil de corrente toroidal calculado, J_ϕ, resultante da expressão dos campos de equilíbrio, $\vec{B}_0$, exibe concordância com a distribuição de corrente (2.26) admitida para solução, $\Psi(\rho_t, \theta_t)$, da equação de Grad-Safranov, o que bem avalia a precisão das soluções encontradas dessa equação. Derivamos perfis de pressão cinética, em termos de solução de ordem zero $\Psi_0(\rho_t)$, usando-se a equação 2.34, e comparamos com o resultado, do mesmo perfil, obtido pela integração da equação de equilíbrio, $\nabla P = \vec{J} \times \vec{B}_0$, incluindo a contribuição de primeira ordem, $\Psi_1(\rho_t, \theta_t)$. A posição do eixo magnético, obtida a partir desses perfis, está de acordo com a previsão analítica [cap. 2]. Essas comparações mostram a importância das correções provenientes do termo de primeira ordem, Ψ_1 na solução da equação de Grad-Shafranov.

Da integração numérica das linhas de campo do equilíbrio, obtivemos mapas de Poincaré a partir da intersecção dessas trajetórias com um determinado plano poloidal ($\phi = cte$). A utilização de um sistema toroidal de coordenadas mostrou-se eficiente, pois a solução de ordem zero já exibe o deslocamento do eixo magnético, além de simplificar a expressão da própria equação de Grad-Shafranov, Okano [91].

Da integração numérica para o campo perturbado, os mapas de Poincaré apresentaram cadeias de ilhas magnéticas, geradas por ressonâncias entre o campo magnético de equilíbrio e o campo de perturbação. Associamos a corrente de perturbação, I_{hel}, à largura das ilhas formadas. O comportamento exibido nos mostra que o crescimento desses modos acompanha, aproximadamente, a raiz quadrada da corrente aplicada nas bobinas. Sendo as ilhas de uma mesma superfície magnética mais largas no lado interno do tokamak (próximo ao eixo maior), resultado do efeito toroidal expresso no sistema de coordenadas, escolhemos, portanto, essa região para avaliarmos o crescimento desses modos, uma vez que essa escolha permite a observação de ilhas pequenas (ressonancias de amplitudes menores).

Analisando os mapas de Poincaré obtidos [cap.4], ao aumentarmos o valor da corrente que percorre as bobinas ressonantes helicoidais, I_{hel}, observamos a destruição de superfícies magnéticas mais externas, onde localizam-se modos com números poloidais $m > 3$, que provocam ressonâncias localizadas a partir de

regiões com $q = 4$, de acordo com os resultados da decomposição, em série de Fourier, dos modos formados por essa perturbação [cap.3]. Essa mesma perturbação altera, a partir de certos valores críticos de I_{hel}, a estrutura interna das ilhas já formadas, com a ocorrência de bifurcações, que dão origem a novas ilhas. As ilhas criadas por ressonâncias de ordem superior ocupam todo o mapa, porém, conforme aumentam as amplitudes dos modos, aparecem superposições das ilhas, o que forma uma região caótica em que os contornos e separatrizes são completamente destruidos. Estes efeitos não alcançam superfícies mais internas, isto é, seus contornos, nos mapas analisados, permanecem circulares, como no equilíbrio. A posição do eixo magnético principal também se mostrou inalterada. Tais efeitos ocorrem devido ao fato da amplitude dos modos excitados diminuir com a distância ao centro do plasma, isto é, $b_i \sim \rho_t^{m_0}$ (eq. 3.3-5).

Ao avaliarmos os sistemas perturbados, os perfis radiais das transformadas rotacionais também apresentam a largura das ilhas magnéticas, na forma de platôs, regiões de mesmo valor da helicidade das linhas magnéticas. No perfil do fator q ($q = \frac{\iota}{2\pi}$) percebemos a diferença dessas amplitudes para modos distintos, ressonâcias primárias ($q = \frac{m}{n}$) e secundárias ($q = m \pm \frac{1}{n}$).

Esta análise poderá ser aplicada aos resultados experimentais que estão sendo obtidos no **TBR-1**, com a utilização de campos ressonantes, para controlar oscilações MHD, em projetos de teses de doutoramento, Araujo M.S.T. ("Atuação de um Limitador ergódico Magnético no Tokamak **TBR-1**"), e turbulência, Castro R.M. ("Turbulência Eletrostática e Magnética em Tokamaks").

Apêndice A - Sistemas de Coordenadas

As coordenadas toroidais (3D) têm sua origem nas coordenadas bipolares (2D) da mesma forma com que obtemos as coordenadas esféricas a partir das coordenadas polares.

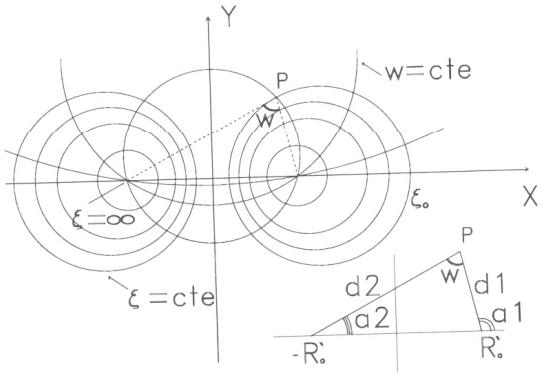


Figura A: Coordenadas Bipolares

As coordenadas do ponto **P** são dadas por:

$$\omega = \alpha_1 - \alpha_2 \qquad \xi = \ln \frac{d_2}{d_1} \qquad A.1$$

A relação entre as coordenadas bipolares e cartesianas são facilmente derivadas, Callen [90].

$$x = \frac{R_0' \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \omega} \qquad y = \frac{R_0' \sin \omega}{\cosh \xi - \cos \omega} \qquad A.2$$

Para obtermos um sistema tridimensional substituimos y por z e rodamos o sistema ao redor desse eixo (coordenada ϕ)

$$u_1 = \xi \qquad u_2 = \omega \qquad u_3 = \phi \tag{A.3}$$

$$x = \frac{R_0' \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \omega} \cos \phi \qquad \xi = \frac{1}{2} \ln \frac{[\sqrt{x^2 + y^2} + R_0']^2 + z^2}{[\sqrt{x^2 + y^2} - R_0']^2 + z^2}$$

$$y = \frac{R_0' \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \omega} \sin \phi \qquad \omega = \frac{i}{2} \ln \frac{x^2 + y^2 + (z - iR_0')^2}{x^2 + y^2 + (z + iR_0')^2}$$

$$z = \frac{R_0' \sin \omega}{\cosh \xi - \cos \omega} \qquad \phi = \arctan \frac{y}{x} \tag{A.4}$$

A métrica e a base contravariante nesse sistema de coordenadas são dadas por:

$$g_{11} = g_{22} = \frac{R_0'^2}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} \qquad g_{33} = \frac{R_0'^2 \sinh^2 \xi}{(\cosh \xi - \cos \omega)^2} \tag{A.5}$$

$$\nabla \xi = \frac{\hat{e}_\xi}{\sqrt{g_\xi}} \qquad \nabla \omega = \frac{\hat{e}_\omega}{\sqrt{g_\omega}} \qquad \nabla \phi = \frac{\hat{e}_\phi}{\sqrt{g_\phi}} \tag{A.6}$$

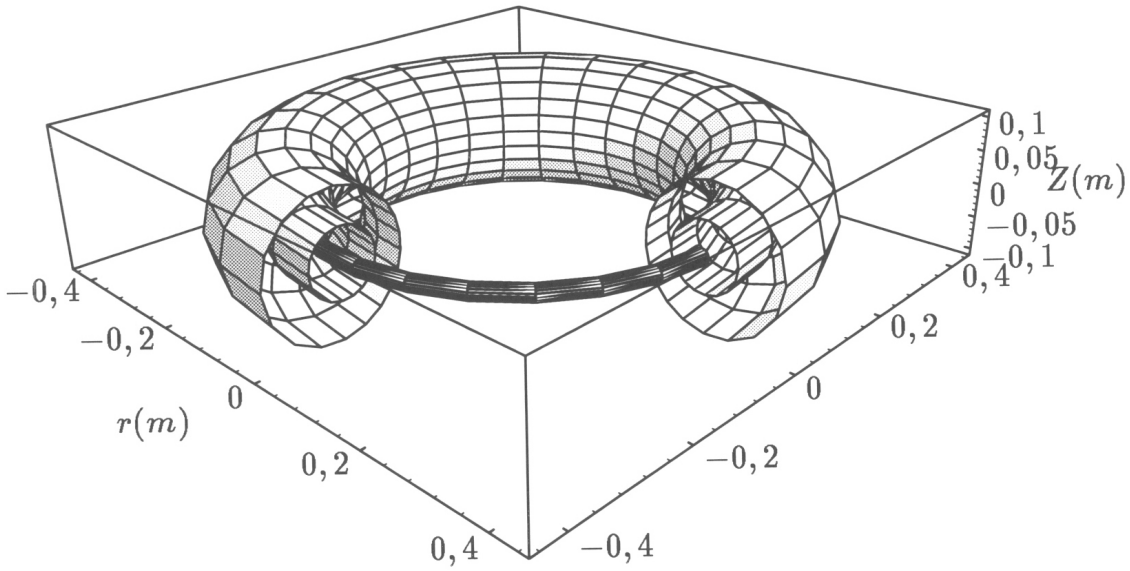


Figura B: Superfícies toroidais, onde $\xi = cte$

A condição $\xi = cte$ descreve superfícies que são toros de seção reta circular, figura 2. Sobre a seção reta de um determinado toro, de coordenada ξ_0, relaciona-se os raios maior e menor (R_0, b), expressões A.7-9, Moon [60]. O raio maior é a distância do eixo z ao centro do círculo (de raio b) limitado pela superfície com $\xi_0 = cte$.

$$b \cosh \xi_0 = R_0 \qquad A.7$$

$$b \sinh \xi_0 = R_0^{'} \qquad A.8$$

$$R_0^{'} = R_0 \sqrt{1 - \frac{b^2}{R_0^2}} \qquad A.9$$

Onde $R_0^{'}$ é a distância do eixo z ao ponto onde $\xi \to \infty$. A coordenada ω é formada por seções tranversais de esféras (círculos) que passam por $(-R_0^{'}, 0)$ e $(R_0^{'}, 0)$. Portanto superfícies de $\xi = cte$ e $\omega = cte$ são ortogonais em todos os pontos. A transformação desse sistema de coordenadas,(ξ, ω, ϕ), para o sistema de coordenadas cilíndricas é dada por:

$$r = \frac{R_0^{'} \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \omega} \qquad z = \frac{R_0^{'} \sin \omega}{\cosh \xi - \cos \omega} \qquad \phi = \phi \qquad A.10$$

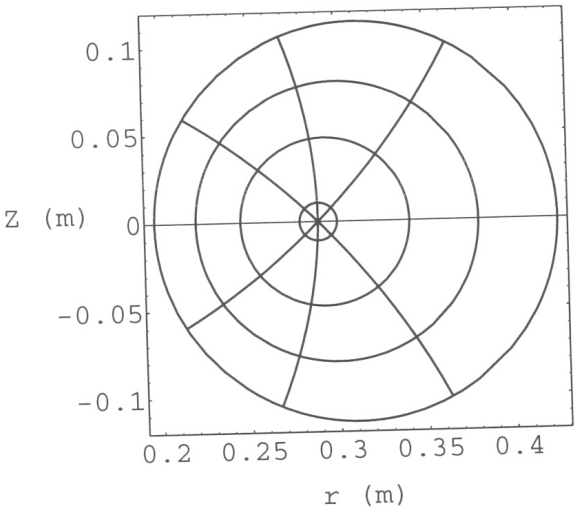


Figura C: Plano poloidal denotando a coordenada $\omega = cte$

Os sistemas de coordenadas polares locais, (ρ, θ, ϕ), e polares toroidais, (ρ_t, θ_t, ϕ), Caldas e Kucinsck [90], também podem ser associadas às coordenadas cilíndricas na seguinte forma

Coord. polares locais:

$$u_1 = r \qquad u_2 = z \qquad u_3 = \phi \tag{A.11}$$

$$r = R_0 - \rho\cos\theta \qquad z = \rho\sin\theta \qquad \phi = \phi \tag{A.12}$$

Coord. polares toroidais:

$$u_1 = \rho_t \qquad u_2 = \theta_t \qquad u_3 = \phi \tag{A.13}$$

$$\rho_t = \rho\sqrt{1 - \frac{\rho\cos\theta}{R_0'} + \frac{\rho^2}{4R_0'^2}} \qquad \sin\theta_t = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 - \frac{\rho\cos\theta}{R_0'} + \frac{\rho^2}{4R_0'^2}}} \tag{A.14}$$

A métrica relaciona as coordenadas não ortogonais desse sistema.

$$g_{11} = 1 - \frac{2\rho_t}{R_0'}\cos\theta_t \qquad g_{22} = \frac{1}{\rho_t^2}$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{\sin\theta_t}{R_0'} \qquad g_{33} = \frac{1}{\rho_t^2 \sinh^2\xi} \tag{A.15}$$

Sua base contravariante:

$$\nabla\rho_t = -\frac{\rho_t \sinh\xi}{R_0'}\hat{e}_\xi - \frac{\rho_t \sin\theta_t}{R_0'}\hat{e}_\omega$$

$$\nabla\theta_t = -\frac{\hat{e}_\omega}{\rho_t} \qquad \nabla\phi = \frac{\hat{e}_\phi}{\rho_t \sinh\xi} \tag{A.16}$$

Devido à sua não ortogonalidade, esse sistema requer cuidados ao trata-lo, seu principal resultado é a simplificação na forma da equação de Grad-Shafranov.

A partir da métrica dos sistemas de coordenadas, obtemos a expressão para as componentes do campo magnético nas relações:

$$B^1 = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\Psi}{\partial u_2}$$

$$B^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}$$

$$B^1 = -\mu_0 I \tag{A.17}$$

Parâmetros do Tokamak TBR-1

$$R_0 = 0.30m \quad \text{(raio maior)}$$

$$a = 0.08m \quad \text{(limitador)}$$

$$b = 0.11m \quad \text{(câmara de vácuo)}$$

$$I_p = 10kA \quad \text{(corrente de plasma)}$$

$$I_e = 6 \times 10^5 A \quad \text{(corrente nas bobinas de campo toroidail)}$$

$$\lambda(a) = 0.28 \quad \text{(assimetria do campo poloidal)}$$

Apêndice B - Integração Numérica

Tendo as equações que descrevem o comportamento das linhas de campo (equações 4.5,6), processamos a integração numérica tratando estas equações como um problema de valor inicial. Essas equações são do tipo:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i'(x, y_1, y_2, ..., y_n); i = 1, ..., n \qquad B.1$$

Damos as coordenadas, $y_i(x_s)$, da equação diferencial ordinaria em um determinado instante inicial, x_s, da variável independente. Reescrevendo dy e dx como passos finitos δy, δx, isto nos dá formas algébricas para tratarmos as funções quando a variável x é incrementada.

Dentre os métodos existentes escolhemos um método de multiplos passos do tipo PREDITOR-CORRETOR, Dorn [66]. Este método guarda a solução, em vários pontos, ao longo da trajetória, usando estes resultados para extrapolar (por extrapolação polinomial) a solução num novo ponto avançado. Este método é composto na verdade por três etapas

- O passo preditor (P)
- O cálculo da derivada y_1' a partir do último valor de y (E)
- O passo corretor (C)

O preditor consiste em achar a inclinação da reta que passa pelo ponto corrente (x_m, y_m). De acordo com a informação contida em (x_{m-1}, y_{m-1}) determinamos um primeiro valor y_{m+1}^0, previsto o ponto (x_{m+1}, y_{m+1}^0), calculamos a inclinação da reta que passa por esse ponto para que tenhamos o primeiro valor corrigido, por exemplo

$$y_{m+1}^{(1)} = y_m + \frac{h}{2}(f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(0)})) \qquad B.2$$

Podemos retornar o valor $y_{m+1}^{(1)}$ e recorrigi-lo várias vezes (m vezes $P[EC]^m$).

$$y_{m+1}^{(i)} = y_m + \frac{h}{2}(f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i-1)})) \qquad B.3$$

A diferença entre os passos corretor e preditor fornece informações sobre o erro local de truncamento. Caso a diferença [P-C] exceda a tolerância requerida, voltamos à interpolação com um passo menor.

$$y_{m+1}^{(i+1)} - y_{m+1}^{(i)} = \frac{h}{2}[f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i)}) - f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i-1)})] \qquad B.4$$

Usando o teorema do valor médio ($f(x, y)$ suave)

$$y_{m+1}^{(i+1)} - y_{m+1}^{(i)} = \frac{h}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)[y_{m+1}^{(i)} - y_{m+1}^{(i-1)}] \qquad B.5$$

desde que $(\frac{\partial f}{\partial y})$ seja limitado em x_{m+1} com $y_{m+1}^{(i)} \leq y_{m+1} \leq y_{m+1}^{(i+1)}$; $\mid \frac{\partial f}{\partial y} \mid \leq M$ do passo anterior temos $y_{m+1}^{(i)} - y_{m+1}^{(i-1)} = \frac{hM}{2}[y_{m+1}^{(i-1)} - y_{m+1}^{(i-2)}]$, $y_{m+1}^{(i+1)} - y_{m+1}^{(i)} = (\frac{hM}{2})^2[y_{m+1}^{(i-1)} - y_{m+1}^{(i-2)}]$, assim por diante:

$$y_{m+1}^{(i+1)} - y_{m+1}^{(i)} = \left(\frac{hM}{2}\right)^i [y_{m+1}^{(1)} - y_{m+1}^{(0)}] \qquad B.6$$

o que determina o tamanho do passo ($h < \frac{2}{M}$); caso $(y_{m+1}^{(i+1)} - y_{m+1}^{(i)}) \rightarrow 0$, então o método converge.

No tratamento das equações 4.5-6 teremos um corretor que expressa o acoplamento visível da EDO, isto é, a equação para ξ apresenta ambos ξ e θ_t e o mesmo para a equação de θ_t.

$$\xi_{m+1}^{(i)} = \xi_m + \frac{h}{2}[F(\xi_m, \theta_{tm}) + F(\xi_{m+1}^{(i-1)}, \theta_{tm+1}^{(i-1)})] \qquad B.7$$

$$\theta_{tm+1}^{(i)} = \theta_{tm} + \frac{h}{2}[G(\xi_m, \theta_{tm}) + G(\xi_{m+1}^{(i-1)}, \theta_{tm+1}^{(i-1)})] \qquad B.8$$

o que significa que as equações interagem e deve-se portanto aplica-las alternadamente, o sistema de equações é **simultâneo**.

Nos métodos de um passo, cada novo passo é tomado como uma nova condição inicial. Pelo fato de fazer uso de resultados anteriores ao passo tratado, os métodos de multiplos passos pagam o preço de não serem auto-iniciáveis, tendo de ser iniciados por outro método (de um passo).

Na biblioteca IMSL (rotinas em FORTRAN) instalada no VAX-6330, do IFUSP, são oferecidos os métodos de Adams-Bashforth-Moulton na forma:

- Preditor Adams-Bashforth

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{24}(55y_0' - 59y_{-1}' + 37y_{-2}' - 9y_{-3}') + O(h^5) \qquad B.9$$

- Corretor Adams-Moulton

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{24}(9y_1' + 19y_0' - 5y_{-1}' + y_{-2}') + O(h^5) \qquad B.10$$

onde $O(h^5)$ informa a ordem que será considerada para a extrapolação polinomial (4ª ordem). A utilização dessas rotinas requer a escolha da tolerância (TOL$\sim 10^{-9}$), pontos iniciais e finais para a variável independente, tamanho inicial do passo na integração e as equações diferenciais a serem tratadas.

Referências

Artsimovich L.A.:"Survey on Closed Plasma Systems", Conference Proceedings, IAEA (Novosibirsk) 1, 11 [68].

Araujo M.S.T.:"Investigação da Atuação de Campos Helicoidais Ressonantes na Ativação/Inibição das Oscilações MHD no TBR-1", Dissertação de mestrado - IFUSP [91].

Araujo M.S.T.:"Atuação de um Limitador Hergodico Magnético no Tokamak **TBR-1**", Tese de doutorado a ser apresentada - IFUSP.

Callen J.D., Dory R.A.:"Magnetohydrodynamic Equilibria in Sharply Curved Axisymmetric Devices", The Physics of Fluids 15, 1523 [72].

Callen J.D., D'Haeseleer W.D., Hitchon W.N.G., Shohet J.L.:"Flux Coordinates and Magnetic Field Structere", Springer-Verlag, N.Y. [90].

Castro R. M.:"Turbulência Eletrostática e Magnética em Tokamaks",Tese de doutorado a ser apresentada - IFUSP.

Dolan T.J.:"Fusion Research", Pergamon Press Comp., N.Y. [82].

Dorn W.S.,McCracken D.D.:"Numerical Methods and Fortran Programming", John Willey and Sons, Inc., N.Y. [66]

Feneberg W.:"The Use of External Helical Windings for the Production of a Screening Layer in Asdex and a Tokamak with Material Limiter", 8th European Conference on Cotrolled Fusion and Plasma Physics, (Praga) 1, 4 [77].

Fernandes A.S., Caldas I.L., Heller M.V.A.P.:"The Destruction of Magnetic Surfaces by Resonantes Helical Fields", Plasma Physics and Controlled Fusion 30, 1203 [88].

Finn J.M.:"The Destruction of Magnetic Surfaces in Tokamaks by Current Perturbation", Nuclear Fusion 15, 845 [75].

Freidberg J.P.:"Ideal Magnetohydrodynamic Theory of Magnetic Fusion Systems", Review of Modern Physics 54, 801 [82].

Freis R.P., Hartman C.W.:"Magnetic-Island Formation and Destruction in a Levitron", Nuclear Fusion 13, 533 [73].

Glasser A.H., Furth H.P., Rutherford P.H.:"Stabilization of Resistive Kink Modes in the Tokamak", Physical Review Letters 38, 234 [77].

Hamzeh F.M.:"Magnetic-Surface Destruction in Toroidal Systems", Nuclear Fusion 14, 523 [74].

Heller M.V.A.P., Caldas I.L.:"Onset of Choatic Field Line Trajectories in Tokamaks", Il Nuovo Cimento 14*D*, 695 [92].

Karger F., Wobig H., Corti S.:"Influence of Resonant Helical Fields on Tokamak Discharges", 6th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, IAEA, (Tokyo) 1, 207 [74].

Karger F., Feneberg W., Meisel D., Murmann H., Gernhardt J., Kluber O., Lackner K.:"Influence of Resonante Helical Octopole Field on the Pulsator Tokamak Plasma", 8th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, (Praga) 1, 3 [77].

Kruskal M.D., Kulsrud R.M.:"Equilibrium of Magnetically Confined Plasma in a Toroid", The Physics of Fluids 1, 265 [58].

Kucinsk M.Y.,Caldas I.L.:"Toroidal Helical Fields", Zeitschrift Naturforschung 42, 1124 [87].

Kucinsk M.Y.,Caldas I.L., Monteiro L.H.A., Okano V.:"Magnetic Surfaces in Non-Symmetric Plasmas", Plasma Physics and Controlled Fusion 34, 1067 [92].

Laing E.W., Roberts S.J., Whipple R.T.P.:"Equilibrium Configurations of a Toroidal Plasma", Plasma Physics 1, 49 [54].

Lackner K., Karger F.:"Models for the Influence of Resonantes Helical Windings on Tokamak Discharges and for the Current Decay Following the Disruptive Instability", 8th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, (Praga) 1, 5 [77].

Manheimer W.M., Lashmore-Davies C.N.:"MHD and Microinstabilities in Confined Plasmas", Adam Hilger Press, N.Y. [89].

Mirnov S.V., Semenov I.B.:"Observation of Disruptive-Instability Fine Structure in a Tokamak", Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, IAEA, (Viena), 1 32 [77]

Moon P., Spencer D.E.:"Field Theory for Engineers", D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton [60].

Oda G.A.:"Reconexão de Linhas de Campo em Tokamaks", Dissertação de Mestrado - IFUSP [93].

Oda G.A., Caldas I.L.:"Dimerezed Magnetic Island ", Solitons Chaos and Fractals,**a ser publicada.**

Okano V."Campos Ressonantes Helicoidais em Tokamaks", Dissertação de Mestrado - IFUSP [90].

Sagadeev R.Z., Usikov P.A., Zaslavsky G.M.,"Nonlinear Physics, From Pendulum to Turbulence and Chaos", Harward Academic Publishers, Moscow [88].

Shafranov V.D.:"Plasma Equilibrium in a Magnetic Field", Review of Plasma Physics (edited by Acad. M.A. Leontovich) 2, 103 [66].

Skornyakov G.V.:"Magnetic Field Topology and the Problem of Plasma Containment", Plasma Physics 8, 561 [66].

Solov'ev L.S., Morozov A.I.:"The Structure of Magnetic Fields", Reviews of Plasma Physics 2, 163 [66].

Vannucci A., Bender O.W., Caldas I.L., Tau I.H., Nascimento I.C., Sanada E.K.:"Influence of Resonante Helical Windings on Mirnov Oscilations", Il Nuovo Cimento 10*D*, 1193 [88].

Vannucci A., Nascimento I.C., Caldas I.L.:"Disruptive Instabilities in the Discharges of the TBR-1 Small Tokamak", Plasma Physics and Controlled Fusion 31, 147 [89].

von Goeler S., Stodiek W., Sauthoff N.:"Studies of Internal Disruptions and

$m = 1$ Oscilations in Tokamak Discharges with Soft **x-ray**Techiniques", Physics Review Letters 33, 1201 [74].

Wesson J.A.:"Hidromagnetic Stability of Tokamaks", Nuclear Fusion 18, 231 [87].

Yoshikawa S.:"Toroidal Equilibrium of Current-Carrying Plasmas", The Physics of Fluids 17, 178 [74].