# PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prof. Iberê L. Caldas

## Terceira Lista de Exercícios

2º semestre de 2020

**1.** Considere a Hamiltoniana

$$H = \frac{I^2}{2} + K\cos\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \tag{1}$$

na qual $\theta$ e $I$ representam as variáveis canônicas, ao passo que $K$ e $T$ constituem os parâmetros do sistema.

**(a)** Utilize a relação

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{2}{T}\sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) + \frac{1}{T}$$

para obter a Hamiltoniana

$$H = \frac{I^2}{2} + K\cos\theta \left[1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m t)\right],$$

na qual consideramos $T = 1$.

**(b)** Considerando a Hamiltoniana obtida no item anterior, calcule a largura das ilhas para as ressonâncias correspondentes a $m = 0$ e $m = 1$.

**(c)** Calcule a distância entre as ilhas do item anterior no espaço $I \times \theta$.

**2.** O mapa padrão

$$I_{n+1} = I_n + K\sin\theta_n, \tag{2a}$$
$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} \tag{2b}$$

constitui uma seção de Poincaré para o sistema dinâmico descrito pela Hamiltoniana (1) para $T = 1$.

Sob as transformações $I_n = 2\pi p_n$ e $\theta_n = 2\pi x_n$, o mapa padrão (2) adquire o seguinte formato:

$$p_{n+1} = p_n + \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x_n), \tag{3a}$$
$$x_{n+1} = x_n + p_{n+1}, \tag{3b}$$

no qual $x_n$ representa uma variável periódica no intervalo $[0, 1)$.

**(a)** Para $K = 0$, obtenha $p_{100}$ e $x_{100}$ a partir de $p_0$ e $x_0$.

**(b)** Também para $K = 0$, mostre que $p_0 = k/m$ para as órbitas periódicas, onde $k$ e $m$ são números inteiros. Quais os valores de $p_0$ para as órbitas quase-periódicas?

**(c)** Para um determinado valor de $K$, mostre que o mapa padrão, representado pelo operador $T_K$, pode ser escrito como o produto de dois novos mapas, representados pelos operadores $I_1$ e $I_2$, ou seja,

$$T_K \begin{pmatrix} p_n \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \tag{4a}$$
$$I_1 \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x) \\ -x \end{pmatrix}, \tag{4b}$$
$$I_2 \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ p - x \end{pmatrix}, \tag{4c}$$
$$T_K = I_2 I_1. \tag{4d}$$

**(d)** Mostre que

$$I_1^2 = I_2^2 = 1 \quad \text{e} \quad \det I_1 = \det I_2 = -1.$$

**(e)** Mostre que os pontos fixos do mapa $I_1$ ocorrem para $x = 0$ e $x = 1/2$. Lembre-se que $x$ representa uma variável periódica, de maneira que podemos nos restringir ao intervalo $[0, 1)$.

**(f)** Mostre que os pontos fixos do mapa $I_2$ ocorrem para $x = p/2 + k_1$ e $x = (p+1)/2 + k_2$, onde $k_1$ e $k_2$ representam números inteiros tais que $x \in [0, 1)$.

**(g)** A partir dos resultados dos itens **(e)** e **(f)**, mostre que $(x = 0, p = n)$ e $(x = 1/2, p = n)$, para $n$ inteiro, são os pontos fixos do mapa padrão.

**(h)** Considerando *diretamente* as equações (3) para valores arbitrários do parâmetro $K$, encontre novamente os pontos fixos do mapa padrão. Ou seja, sem o auxílio da decomposição (4d), obtenha o resultado do item **(g)** .

**3.** Considere novamente o mapa padrão no formato descrito pelas equações (3).

**(a)** Mostre que o mapa padrão é simplético.

**(b)** Obtenha o mapa padrão linearizado $F_K$. Ou seja, obtenha o mapa tal que

$$\begin{pmatrix} \delta p_{n+1} \\ \delta x_{n+1} \end{pmatrix} = F_K \begin{pmatrix} \delta p_n \\ \delta x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} p_n \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_e + \delta p_n \\ x_e + \delta x_n \end{pmatrix},$$

onde $(x_e, p_e)$ representa um ponto de equilíbrio.

**(c)** Calcule os autovalores da matriz $F_K$ nos pontos fixos $A = (x = 0, p = 1)$ e $B = (1/2, 1)$.

**(d)** Verifique se os pontos fixos $A$ e $B$ são elípticos ou hiperbólicos. No caso de um ponto de equilíbrio elíptico, os autovalores de $F_K$ possuem valores complexos e satisfazem a relação $\lambda_1 = \lambda_2^*$. Em um ponto fixo hiperbólico, os autovalores de $F_K$ são reais e estão sujeitos à identidade $\lambda_1 = 1/\lambda_2$.

**4.** Considere as equações de movimento correspondentes à dinâmica Hamiltoniana de um sistema periodicamente impulsionado:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p, \\ \dot{p} &= -\alpha \sin q \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j), \end{aligned}$$

no qual $q$ e $p$ são, respectivamente, a posição e o momento canônicos do sistema, enquanto $\alpha$ representa um parâmetro real positivo.

**(a)** Considere a notação definida pelas equações

$$\begin{aligned} q_j &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} q(j + \varepsilon), \\ p_j &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} p(j + \varepsilon), \\ q_j' &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} q(j - \varepsilon), \\ p_j' &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} p(j - \varepsilon), \end{aligned}$$

que representam os valores das coordenadas canônicas em instantes de tempo imediatamente posteriores e anteriores ao $j$-ésimo impulso sobre o sistema. Utilizando a notação definida acima, integre as equações de movimento nos intervalos de tempo entre dois impulsos consecutivos. Deste modo, mostre que

$$\begin{aligned} q_{j+1}' &= q_j + p_j, \\ p_{j+1}' &= p_j. \end{aligned}$$

**(b)** Integrando as equações de movimento sobre um único impulso, mostre que

$$\begin{aligned} q_j &= q_j', \\ p_j &= p_j' - \alpha \sin q_j. \end{aligned}$$

**(c)** Empregue os resultados dos itens (a) e (b) para mostrar que o movimento do sistema periodicamente impulsionado é descrito pelo mapa padrão:

$$q_{j+1} = q_j + p_j,$$
$$p_{j+1} = p_j - \alpha \sin(q_j + p_j).$$

**5.** Considere o mapa padrão não twist no seguinte formato:

$$y_{n+1} = y_n - b \sin(2\pi x_n),$$
$$x_{n+1} = x_n + a(1 - y_{n+1}^2).$$

**(a)** Verifique que os pontos $A$ e $B$, para $A = (x = 0, y = 1)$ e $B = (1/2, 1)$, são pontos fixos do mapa padrão não twist.

**(b)** Obtenha a linearização do mapa padrão não twist em torno dos pontos fixos, ou seja, obtenha a matriz Jacobiana $J$ tal que

$$\begin{pmatrix} \delta y_{n+1} \\ \delta x_{n+1} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \delta y_n \\ \delta x_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \delta y_n \\ \delta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n - y^* \\ x_n - x^* \end{pmatrix},$$

onde $x^*$ e $y^*$ indicam as coordenadas de um ponto fixo.

**(c)** Para quais valores dos parâmetros $a$ e $b$ ocorre uma bifurcação no ponto fixo $B$?