

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

SUPERFÍCIES MAGNÉTICAS DE
CAMPOS HELICOIDAIS TOROIDAIS
EM TOKAMAKS

Luiz Henrique Alves Monteiro



Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Dissertação de Mestrado
apresentada no Instituto
de Física da Universidade
de São Paulo.



SÃO PAULO
Outubro de 1990

[Handwritten signature]
Kulinski
Iberê Luiz Caldas

530.44

M7750

M

e. 2

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Monteiro, Luiz Henrique Alves

Superfícies magnéticas de campos helicoidais toroidais em tokamaks. São Paulo, 1990.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Experimental.

Área de Concentração: Física Nuclear

Orientador: Prof^o Dr. Iberê Luiz Caldas

Unitermos: 1. Física de plasmas; 2. Superfícies magnéticas; 3. Campos magnéticos helicoidais ressonantes; 4. Ilhas magnéticas.

USP/IF/SBI - 38/90

pág. 24 - ... onde R_0 , é o raio maior da origem O' das coordenadas toroidais; ξ é a ...

pág. 29 -
$$\frac{dF(\Psi_P)}{d\Psi_P} \cong \frac{dF(\Psi_0)}{d\Psi_0} + \frac{d^2F(\Psi_0)}{d\Psi_0^2} \Psi_1 \cos \theta_t$$

pág. 36 - ... Estes fios conduzem correntes $\pm I_H$ nos condutores adjacentes ...

pág. 50 -
$$\frac{dx_t^{-k}}{d\theta_t} = \bar{f}_k(\bar{x}^i) + \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial \bar{x}_j^{-j}} \hat{f}_j(\bar{x}^i) + \dots$$

pág. 65 - ... Desprezando termos da ordem de grandeza ou menores que $(\tilde{b}/R_0)^2$ na expressão anterior ...

pág. 83 - ... Comparando (X-6) com (X-7), são obtidas ...

RESUMO

Propõe-se analisar teoricamente a instabilidade disruptora que ocorre em plasmas confinados em tokamaks, investigando-se a influência de campos helicoidais ressonantes em seu equilíbrio. Para isso, considerou-se a superposição do campo magnético do plasma em equilíbrio MHD estático com o campo associado às ressonâncias, levando-se em conta a geometria toroidal do tokamak. Devido à falta de simetria, as linhas do campo magnético total resultante desta superposição devem formar superfícies magnéticas apenas em algumas regiões do plasma. Usando o método da média, foram obtidas (analiticamente) funções de superfícies aproximadas que contém, em torno das regiões de ressonância do plasma, as linhas deste campo magnético total. Verificou-se que estas superfícies aproximadas têm estruturas de ilhas magnéticas.

ABSTRACT

It is proposed to analyse teoretically the disruptive instability that occurs in confined plasmas in tokamaks, through investigation of the influence of resonant helical fields on their equilibrium. With this aim, a superposition of the magnetic field of the plasma in static MHD equilibrium with the field associated with the resonances is considered, taking into account the toroidal geometry of the tokamak. Due to the lack of symmetry, the lines of the total magnetic field resulting from this superposition must form magnetic surfaces only around some regions of the plasma. Using the averaging method, functions of approximate magnetic surfaces are obtained (analitically) around the regions of resonances of the plasma (they contain the lines of this total magnetic field). It was verified that these approximate surfaces have structures of magnetic islands.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE SUPERFÍCIES MAGNÉTICAS	
II-a) Introdução	5
II-b) Definições de Superfície Magnética	5
II-c) Equação de Equilíbrio MHD em Coordenadas Curvilíneas Generalizadas	7
CAPÍTULO III - INVESTIGAÇÃO SOBRE A EXISTÊNCIA DE ILHAS MAGNÉTICAS - CASO CILÍNDRICO	
III-a) Introdução	10
III-b) Plasma em Equilíbrio num Tokamak com Grande Razão de Aspecto	10
III-c) Superposição dos Campos Magnéticos de Equilíbrio e Perturbativo	13
III-d) Condição para a Função de Fluxo ψ_H^{cil}	15
III-e) Análise Qualitativa do Problema	17
CAPÍTULO IV - EQUILÍBRIO DE PLASMAS TOROIDAIS	
IV-a) Introdução	23
IV-b) Sistema de Coordenadas Toroidais Polares	24
IV-c) Método para a Obtenção da Função de Fluxo Poloidal	28
IV-d) Função de Fluxo Poloidal e Campo Magnético Baseados no Modelo de Equilíbrio de Egorov	31

CAPÍTULO V - CAMPO MAGNÉTICO DAS CORRENTES HELICOIDAIS EXTERNAS

V-a) Introdução	36
V-b) Componentes Toroidais de \vec{b}	37

CAPÍTULO VI - INVESTIGAÇÃO SOBRE A EXISTÊNCIA DE ILHAS MAGNÉTICAS - CASO TOROIDAL

VI-a) Introdução	38
VI-b) Condição para a Função de Fluxo Ψ_H	38
VI-c) Expressão Analítica para o Fator de Segurança Médio Usando-se o Modelo de Equilíbrio de Egorov Adaptado	41

CAPÍTULO VII - IDENTIFICAÇÃO DE $\bar{\Psi}$ (FUNÇÃO DE SUPERFÍCIE MAGNÉTICA APROXIMADA)

VII-a) Introdução	47
VII-b) Identificação de $\bar{\Psi}$	48
VII-c) Cálculo das Correções às Coordenadas Médias	56

CAPÍTULO VIII - EXPRESSÃO ANALÍTICA DE $\bar{\Psi}$

VIII-a) Introdução	60
VIII-b) Cálculo de Ψ_H	62
VIII-c) Cálculo de $\delta\Psi_H$	64
VIII-d) Expressão para $\bar{\Psi}$	66

CAPÍTULO IX - ANÁLISE DA EXPRESSÃO DE $\bar{\Psi}$

IX-a) Introdução	68
IX-b) Análise da Expressão de $\bar{\Psi}$ (em Torno da Região de Ressonância)	68
IX-c) Método para Mapeamento de Ilhas Magnéticas	72
IX-d) Mapas das Ilhas Magnéticas (Principais)	73

CAPÍTULO X - ILHAS SATÉLITES

X-a) Introdução	79
X-b) Condição para o Surgimento de Ilhas Satélites	79
X-c) Identificação de $\bar{\Psi}^{(s)}$	81
X-d) Expressão Analítica para $\bar{\Psi}^{(s)}$	86
X-e) Análise da Expressão de $\bar{\Psi}^{(s)}$	89
X-f) Mapas de Ilhas Magnéticas Principais e Satélites	91

CAPÍTULO XI - CONCLUSÃO	97
-------------------------------	----

APÊNDICES

A - SISTEMA DE COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALIZADAS	99
B - SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS ρ, θ, φ	100
C - SISTEMA DE COORDENADAS Ψ_p^{cil}, u, θ	101
D - SISTEMA DE COORDENADAS TOROIDAIS ξ, ω, φ	102
E - SISTEMA DE COORDENADAS TOROIDAIS POLARES $\rho_t, \theta_t, \varphi$	103
F - DETERMINAÇÃO DA CONSTANTE j_0	106
G - VALORES NUMÉRICOS TÍPICOS DO TOKAMAK TBR-1	108

H - SISTEMA DE COORDENADAS Ψ_p, u, θ_t	110
J - RELAÇÃO ENTRE ρ_t E θ_t SOBRE UMA SUPERFÍCIE MAGNÉTICA DE EQUILÍBRIO $\Psi_p = \text{cte}$	111
L - MÉTODO DA MÉDIA	113
M - COMPONENTES CONTRAVARIANTES DOS CAMPOS MAGNÉTICOS DE EQUILÍBRIO (\vec{B}_0) E PERTURBATIVO (\vec{b}) NO SISTEMA DE COORDENADAS Ψ_p, u, θ_t	115
N - ANÁLISE DA EXPRESSÃO (VII-8)	119
P - SISTEMA DE COORDENADAS TOROIDAIS HELICOIDAIS POLARES ρ_t, u, θ_t	123
Q - CÁLCULO DE $\delta\Psi_H^{(s)}$ E DE $-\frac{1}{n} \frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3}$	124
BIBLIOGRAFIA	127

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A utilização prática de campos magnéticos para o confinamento de plasmas depende do conhecimento da geometria de suas linhas de campo, uma vez que partículas carregadas se movem muito mais facilmente ao longo destas linhas que na direção transversal a elas. O conceito de linha de campo é geralmente suplementado pelo de superfície magnética⁽¹⁾, sendo de grande importância, para o estudo da estabilidade do plasma, a obtenção da equação das superfícies magnéticas para um dado sistema.

A instabilidade disruptora observada em tokamaks⁽²⁻⁴⁾ é, atualmente, um dos maiores obstáculos para progressos na obtenção da fusão termonuclear controlada, pois ela limita aumentos nas magnitudes da densidade e da corrente de plasma. O surgimento desta instabilidade pode levar, às vezes, ao completo aniquilamento do plasma. Suas principais características são⁽⁵⁾: movimentos da coluna de plasma de expansão ao longo do raio menor e de contração ao longo do raio maior do tokamak, pico negativo no sinal da tensão de enlace e, freqüentemente, crescimento nas amplitudes dos modos MHD. Ainda, há uma súbita queda na corrente do plasma, o que gera grandes forças e voltagens na câmara do tokamak que, por isto, pode ser danificada.

A investigação desta instabilidade é normalmente feita através da detecção e análise de perturbações nos parâmetros macroscópicos do plasma, como, por exemplo, as oscilações do campo magnético poloidal^(5,6). No tokamak TBR-1 (Instituto de Física - USP) estas oscilações possuem amplitudes da ordem de 1% da intensidade do campo magnético poloidal de equilíbrio e números de onda $m = 2, 3, 4$ e $n = 1$ ⁽⁷⁾.

Embora não tenha causas completamente esclarecidas, verificou-se experimentalmente que esta instabilidade podia ser atenuada ou excitada por perturbações criadas por correntes elétricas helicoidais externas^(2,7-9). Com isto, a natureza desta instabilidade pode ser investigada.

No TBR-1, pares de fios, conduzindo correntes em sentidos opostos nos condutores adjacentes igualmente espaçados, foram enrolados na câmara do tokamak⁽⁷⁾. Suas helicidades podiam ser selecionadas para produzir perturbações com $m = 2, 3$ ou 4 e $n = 1$. Supõe-se que estas perturbações criam ilhas magnéticas^(10,11) nas superfícies magnéticas racionais com fator de segurança $q = 2, 3$ ou 4 , respectivamente. Uma análise teórica deste problema pode nos levar a um melhor conhecimento da instabilidade disruptora espontânea e, conseqüentemente, ao seu controle.

Neste trabalho, consideramos a superposição do campo magnético de um plasma toroidal e com simetria axial em equilíbrio MHD estático⁽¹²⁾, com o campo associado às correntes helicoidais externas descritas acima⁽¹³⁾. O modelo que foi usado para o plasma em equilíbrio fornece um fator de segurança que varia entre ≈ 1 (centro do plasma) até ≈ 4 (borda do plasma), o que é semelhante ao esperado para o TBR-1.

Devido à falta de simetria, as linhas do campo magnético total \vec{B} resultante da superposição acima descrita devem formar superfícies magnéticas apenas em determinadas regiões do plasma. Para obtermos a estrutura magnética deste campo \vec{B} , usamos um conveniente sistema não-ortogonal de coordenadas (sendo o fluxo poloidal do campo magnético do plasma em equilíbrio uma destas coordenadas) e aplicamos um método de solução aproximada para a equação diferencial das linhas de campo:

$$\vec{B} \times d\vec{\ell} = 0$$

Desenvolvido por Bogolyubov e conhecido como método da média, este método foi usado por Morozov e Solov'ev para obter superfícies magnéticas aproximadas de campos cuja simetria era quebrada por uma pequena dependência em uma coordenada⁽¹⁾. Porém, o sistema de coordenadas e as aproximações aí feitas são fundamentalmente diferentes das nossas.

Determinamos uma função de superfície magnética aproximada ($\bar{\Psi}$), após identificarmos $2\pi\bar{\Psi}$ como o fluxo de \vec{B} através de uma superfície helicoidal toroidal. A expressão de $\bar{\Psi}$ assim obtida é válida em torno da superfície magnética ressonante de equilíbrio (cujo $q = m/n$). Verificamos que, nesta região, as linhas de campo de \vec{B} estão sobre superfícies que apresentam estrutura de ilhas.

Devido à geometria toroidal, espera-se que apareçam também ilhas satélites^(14,15) sobre as superfícies magnéticas racionais de equilíbrio com $q = (m \pm 1)/n$. Com um método análogo ao usado para se obter $\bar{\Psi}$, determinamos uma outra função de superfície magnética aproximada ($\bar{\Psi}^{(s)}$), válida em torno das superfícies racionais adjacentes onde se esperam estas ilhas (satélites). $2\pi\bar{\Psi}^{(s)}$ foi também identificado como o fluxo de \vec{B} através de uma superfície helicoidal toroidal, porém o contorno externo desta superfície tem um "passo" diferente daquele usado na identificação de $\bar{\Psi}$. Verificamos que, na região em que se esperam estas ilhas satélites, as linhas de \vec{B} estão sobre superfícies que apresentam estrutura de ilhas.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo II, definiremos superfície magnética e apresentaremos, em coordenadas curvilíneas generalizadas, relações entre as funções de superfície magnética e seu respectivo campo para plasmas em equilíbrio MHD estático. Estas relações serão úteis nos capítulos seguintes, onde serão usados sistemas de coordenadas não-ortogonais. No capítulo III, analisaremos algumas condições para o surgimento de ilhas magnéticas, quando o campo do plasma em equilíbrio for superposto ao campo das correntes helicoidais externas. Neste capítulo, contudo, consideraremos o tokamak como tendo grande razão de aspecto, de tal modo que possa ser representado por um cilindro periódico (aproximação cilíndrica). Isto facilitará a compreensão dos capítulos seguintes onde faremos uma análise semelhante deste problema, considerando a forma toroidal do tokamak. No capítulo IV, descreveremos o modelo usado para o plasma toroidal em equilíbrio. No capítulo V, apresentaremos uma expressão para o campo magnético associado às correntes

helicoidais externas. No capítulo VI, obteremos uma condição para o surgimento de ilhas magnéticas, quando for feita a superposição de campos acima descrita (uma condição semelhante é obtida no capítulo III - caso cilíndrico). No capítulo VII, identificaremos $2\pi\bar{\Psi}$ como o fluxo do campo \vec{B} resultante desta superposição, através de uma superfície helicoidal toroidal. No capítulo VIII, obteremos uma expressão analítica para $\bar{\Psi}$ e, no capítulo IX, analisaremos esta expressão. Verificaremos que as linhas deste \vec{B} estão, na região da superfície ressonante de equilíbrio ($q = m/n$), sobre superfícies com estrutura de ilhas. Nas aplicações numéricas feitas, usaremos os parâmetros típicos do TBR-1. Cálculos semelhantes a estes serão feitos no capítulo X, onde obteremos uma outra função de superfície magnética aproximada $\bar{\Psi}^{(s)}$, que contém as linhas de \vec{B} nas regiões das superfícies magnéticas racionais com $q = (m \pm 1)/n$. Uma análise deste $\bar{\Psi}^{(s)}$ revelará que \vec{B} tem também, nestas regiões, estrutura de ilhas (satélites). No capítulo XI, apresentaremos as conclusões deste trabalho.

CAPÍTULO II

CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE SUPERFÍCIES MAGNÉTICAS

II-a) INTRODUÇÃO

No item b, daremos duas definições diferentes, porém equivalentes, para superfície magnética. No item c, apresentaremos relações em coordenadas curvilíneas generalizadas entre as funções de superfície magnética e seu respectivo campo para plasmas em equilíbrio MHD estático. Estas expressões serão úteis nos próximos capítulos, quando utilizaremos sistemas de coordenadas não-ortogonais para descrever o equilíbrio MHD de plasmas em tokamaks.

II-b) DEFINIÇÕES DE SUPERFÍCIE MAGNÉTICA

As equações que governam o equilíbrio estático de um plasma perfeitamente condutor são⁽¹⁰⁾:

$$\nabla P = \vec{J} \times \vec{B} \quad (\text{II-1})$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

onde P é a pressão, \vec{J} é a densidade de corrente e \vec{B} é o campo magnético.

De (II-1), obtemos:

$$\vec{B} \cdot \nabla P = 0$$

Desta equação, vemos que as linhas de \vec{B} estão sobre as superfícies de pressão constante do plasma. Uma superfície com tais características é chamada de superfície magnética. Uma equação da forma:

$$\Psi = \text{constante} = C$$

representa, para cada valor de C, uma superfície magnética, se:

$$\vec{B} \cdot \nabla \Psi = 0 \quad (\text{II-2})$$

é satisfeita.

A equação de Ψ pode ser obtida a partir de:

$$\vec{B} \times d\vec{l} = 0 \quad (\text{II-3})$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{II-4})$$

onde (II-3) é a equação diferencial das linhas de campo e \vec{A} em (II-4) é o potencial vetor de \vec{B} . Para que Ψ possa ser encontrada a partir das equações acima, o sistema deve ser simétrico, isto é, usando um sistema de coordenadas x^1, x^2, x^3 , todas as quantidades físicas são descritas por apenas duas coordenadas x^1 e x^2 . A superfície magnética terá, então, a mesma simetria e periodicidade do campo \vec{B} .

A função Ψ pode ainda ser definida em termos de um fluxo transversal do campo \vec{B} . Esta idéia foi utilizada por Kucinski e Caldas⁽¹⁶⁾ para obter, em coordenadas curvilíneas generalizadas, relações entre Ψ e seu respectivo \vec{B} , e a equação de Grad-Shafranov para plasmas em equilíbrio MHD estático. No próximo item, apresentaremos resumidamente este trabalho. Veremos que, se o sistema for simétrico, o Ψ assim definido também satisfaz a expressão (II-2).

II-c) EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO MHD EM COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALIZADAS

(Neste item são utilizados os conceitos de superfície e curva coordenadas, bases covariante e contravariante e seus respectivos tensores métricos, para um sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas. Veja apêndice A para maiores detalhes.)

Define-se $L\Psi$ como o fluxo do campo magnético \vec{B} através de uma superfície coordenada x^2 , que se estende do eixo magnético até a curva coordenada x^3 e limitada por $0 \leq x^3 \leq L$. L é a periodicidade de \vec{B} na coordenada x^3 . No eixo magnético, $x^1 = a$ e $\vec{B} = B^3 \vec{e}_3$. Então, $L\Psi$ pode ser escrito como:

$$L\Psi = \int_a^{x^1} dx^1 \int_0^L dx^3 \sqrt{g} B^2 \quad (\text{II-5})$$

de onde vemos que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^1} = \frac{1}{L} \int_0^L dx^3 \sqrt{g} B^2 \quad (\text{II-6})$$

Levando em conta a equação:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

e supondo que $B^1 = 0$ no eixo magnético, obtém-se de (II-5):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^2} = \frac{-1}{L} \int_0^L dx^3 \sqrt{g} B^1 \quad (\text{II-7})$$

Se $\sqrt{g} B^1$ e $\sqrt{g} B^2$ são independentes de x^3 , então as expressões (II-6) e (II-7) são escritas como:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^1} = \sqrt{g} B^2 \quad (\text{II-8})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^2} = -\sqrt{g} B^1 \quad (\text{II-9})$$

de onde obtemos uma expressão de \vec{B} em termos de Ψ :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_3}{g_{33}} \times \nabla \Psi + B_3 \frac{\vec{e}_3}{g_{33}}$$

$\Psi = \text{constante}$ representa uma superfície magnética, pois:

$$\vec{B} \cdot \nabla \Psi = 0 \quad (\text{II-10})$$

que é idêntica à expressão (II-2).

Ainda, no caso de sistemas simétricos, B_3 pode ser escrito como:

$$B_3(x^1, x^2) = -\mu_0 I \quad (\text{II-11})$$

onde: $L (I - I_{\text{eixo mag}})$ é a corrente transversal total.

A equação de equilíbrio de Grad-Shafranov, em coordenadas generalizadas, para um sistema simétrico em x^3 é:

$$\Delta^* \Psi = \mu_0 I \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{g_{23}}{g_{33}} - \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{g_{13}}{g_{33}} \right] + \mu_0 J_3 \quad (\text{II-12})$$

onde :

$$\Delta^* \Psi \equiv \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left[g^{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} + g^{12} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left[g^{12} \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} + g^{22} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} \right] \right\}$$

$$J_3 \equiv -g_{33} \frac{dP}{d\Psi} - \mu_0 I \frac{dI}{d\Psi}$$

Aqui é interessante ressaltar que, num mesmo problema físico, podemos encontrar diferentes funções Ψ para definir as mesmas superfícies magnéticas, dependendo do sistema de coordenadas escolhido. Isto porque, para cada sistema de coordenadas, será diferente a superfície através da qual se considerará o fluxo magnético.

CAPÍTULO III

INVESTIGAÇÃO SOBRE A EXISTÊNCIA DE ILHAS MAGNÉTICAS
-CASO CILÍNDRICO

III-a) INTRODUÇÃO

Aqui, obteremos algumas condições para o surgimento de ilhas magnéticas, quando o campo magnético do plasma em equilíbrio num tokamak com grande razão de aspecto (e representado por um cilindro periódico), for superposto ao campo magnético perturbativo associado às correntes elétricas helicoidais externas. O método apresentado será semelhante ao desenvolvido por Fernandes e Caldas⁽¹⁷⁾. Contudo, escolheremos um sistema de coordenadas que nos permitirá extrapolar o raciocínio aqui desenvolvido para o caso em que consideraremos a forma toroidal do tokamak.

Este capítulo facilitará a compreensão dos capítulos seguintes, onde trataremos o mesmo problema de uma maneira semelhante, só que considerando a forma toroidal do tokamak.

III-b) PLASMA EM EQUILÍBRIO NUM TOKAMAK COM GRANDE RAZÃO DE ASPECTO

Neste capítulo, é considerado um tokamak com grande razão de aspecto ($R_0/b \gg 1$, onde R_0 e b são, respectivamente, os raios maior e menor do tokamak), tal que os efeitos toroidais de curvatura sejam desprezíveis, podendo-se representar este tokamak por um cilindro periódico de comprimento $2\pi R_0$. A coluna de plasma confinado magneticamente neste tokamak terá raio a , conforme a figura a seguir.

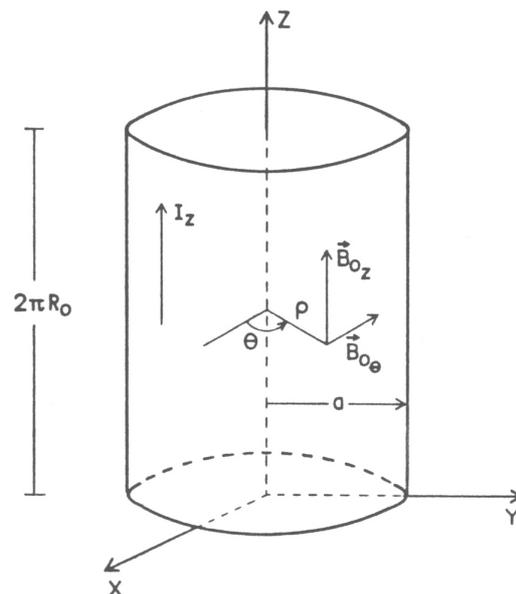


Figura III-1: Sistema de coordenadas cilíndricas ρ, θ, z e esquema do campo de equilíbrio (\vec{B}_0).

Nesta aproximação, o campo magnético do plasma em equilíbrio MHD estático é dado por:

$$\vec{B}_0 = B_{0\theta}(\rho) \vec{e}_\theta + B_{0z} \vec{e}_z \quad (\text{III-1})$$

onde $B_{0\theta}(\rho)$ representa a componente poloidal criada pela corrente do plasma I_z e B_{0z} é a componente longitudinal uniforme de origem externa. As linhas de campo de \vec{B}_0 são hélices em superfícies magnéticas cilíndricas com secções circulares.

III-c) As relações entre o campo magnético do plasma em equilíbrio (\vec{B}_0) e sua respectiva função de fluxo poloidal Ψ_P^{cil} , são obtidas escrevendo-se as expressões (II-8) e (II-9) nas coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) (ver apêndice B). Considerando que o sistema é simétrico em z (simetria translacional), tem-se:

$$\frac{\partial \Psi_P^{cil}}{\partial \rho} = B_{0\theta} \quad (III-2)$$

$$\frac{\partial \Psi_P^{cil}}{\partial \theta} = -\rho B_{0\rho} \quad (III-3)$$

Mas, para um plasma cilíndrico axialmente simétrico (ver (III-1)):

$$B_{0\rho} = 0$$

daí:

$$\frac{\partial \Psi_P^{cil}}{\partial \theta} = 0$$

Ou seja, Ψ_P^{cil} é apenas função da coordenada radial ρ e as superfícies magnéticas para o plasma em equilíbrio serão dadas por:

$$\Psi_P^{cil}(\rho) = \int_0^\rho B_{0\theta}(\rho') d\rho' = \text{constante}$$

que são superfícies cilíndricas com secções circulares, como esperávamos.

III-c) SUPERPOSIÇÃO DOS CAMPOS MAGNÉTICOS DE EQUILÍBRIO E PERTURBATIVO

Quando o plasma cilíndrico é perturbado pelo campo associado às correntes helicoidais externas (veja figura abaixo), o sistema perde a sua simetria cilíndrica e fica só com uma simetria helicoidal; ou seja, as grandezas físicas devem agora depender das coordenadas:

$$\rho \quad e \quad u \equiv m \theta - n (z/R_0)$$

onde u é a coordenada helicoidal, cujas curvas $u = \text{constante}$ têm o mesmo passo das correntes helicoidais perturbativas.

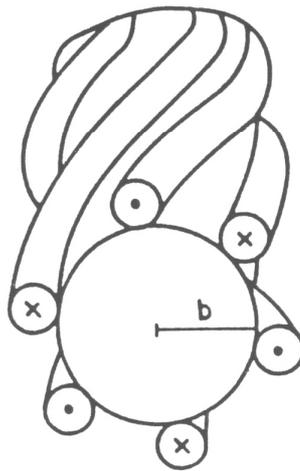


Figura III-2: Esquema das correntes helicoidais externas (enroladas na câmara do tokamak de raio b).

Levando-se em conta que o campo magnético do plasma em equilíbrio (\vec{B}_0) é pouco perturbado pelo campo associado às correntes helicoidais externas (\vec{b}), isto é:

$$|\vec{b}| \ll |\vec{B}_0|$$

podemos considerar o campo magnético total (\vec{B}) como uma superposição dos dois:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b} \quad (\text{III-4})$$

Definimos Ψ^{cil} como a função de fluxo associada a este campo \vec{B} , que satisfaz a equação de Grad-Shafranov no sistema de coordenadas helicoidais cilíndricas (ρ, u, θ). Então, $2\pi\Psi^{\text{cil}}$ é o fluxo de \vec{B} através de uma superfície cujo contorno externo é dado pela intersecção das superfícies $\rho = k_1$ e $u = k_2$ (k_1, k_2 constantes) e θ variando de 0 a 2π . Considerando-se (III-4), Ψ^{cil} pode ser escrito como:

$$\Psi^{\text{cil}} = \Psi_H^{\text{cil}} + \delta\Psi_H^{\text{cil}}$$

onde $2\pi\Psi_H^{\text{cil}}$ e $2\pi\delta\Psi_H^{\text{cil}}$ são, respectivamente, os fluxos de \vec{B}_0 e \vec{b} através da superfície helicoidal cilíndrica acima descrita.

A equação para as superfícies magnéticas do campo \vec{B} é:

$$\Psi^{\text{cil}} = \Psi_H^{\text{cil}} + \delta\Psi_H^{\text{cil}} = \text{constante} = C \quad (\text{III-5})$$

onde os diferentes valores da constante C individualizam as superfícies magnéticas.

Fernandes e Caldas ⁽¹⁷⁾ mostraram que Ψ^{cil} contém estrutura de ilhas magnéticas se:

- 1) Ψ_H^{cil} atinge um valor extremo na superfície magnética de equilíbrio ressonante, que é a superfície cujas linhas do campo de equilíbrio \vec{B}_0 têm o mesmo passo das curvas $u = cte.$
- 2) $\delta\Psi_H^{cil}$ depende das coordenadas ρ e u da seguinte forma:

$$\delta\Psi_H^{cil}(\rho, u) = f(\rho) \cos \mu u \quad (III-6)$$

No próximo item, mostraremos que a condição (1) para Ψ_H^{cil} é satisfeita.

III-d) CONDIÇÃO PARA A FUNÇÃO DE FLUXO Ψ_H^{cil}

Neste item, mostraremos que o fluxo $2\pi\Psi_H^{cil}$ do campo do plasma em equilíbrio (\vec{B}_0) através da superfície helicoidal cilíndrica descrita, atinge um valor extremo na superfície ressonante de equilíbrio.

Para este cálculo, usaremos a função de fluxo poloidal Ψ_P^{cil} como coordenada radial. Isto pode ser feito, uma vez que Ψ_P^{cil} só depende de ρ . (Uma escolha de coordenada análoga a esta será feita nos capítulos seguintes, onde o mesmo problema será analisado, considerando-se a forma toroidal do tokamak. Embora aqui esta escolha seja desnecessária, ela será, para o caso toroidal, de fundamental importância na obtenção de uma condição equivalente a esta.)

No seguinte sistema de coordenadas (ver apêndice C):

$$\Psi_P^{cil}(\rho), u = m\theta - n(z/R_0), \theta$$

são escritas as relações (II-8) e (II-9) entre as componentes contravariantes de \vec{B}_0 e a função de fluxo Ψ_H^{cil} , obtendo:

$$\frac{\partial \Psi_H^{cil}}{\partial \Psi_P^{cil}} = \frac{\rho R_0}{n B_{0\theta}} \left[m \frac{B_{0\theta}}{\rho} - n \frac{B_{0z}}{R_0} \right] \quad (\text{III-7})$$

$$\frac{\partial \Psi_H^{cil}}{\partial u} = - \frac{\rho R_0}{n B_{0\theta}} \vec{B}_0 \cdot \nabla \Psi_P^{cil} = 0$$

pois $\vec{B}_0 \cdot \nabla \Psi_P^{cil} = 0$ pela equação (II-10). Vemos que Ψ_H^{cil} é função apenas de $\Psi_P^{cil}(\rho)$. Rearranjando (III-7):

$$\frac{d\Psi_H^{cil}}{d\Psi_P^{cil}} = R_0 \left[\frac{m}{n} - q(\rho) \right] \quad (\text{III-8})$$

onde $q(\rho)$ é definido como:

$$q(\rho) = \frac{\rho}{R_0} \frac{B_{0z}}{B_{0\theta}}$$

(III-8) representa a condição procurada para Ψ_H^{cil} , pois (Ψ_H^{cil}), se anula na superfície em que $q(\rho = \rho_{res}) = m/n$ (então Ψ_H^{cil} tem aí um extremo - um máximo, no caso), que é a superfície ressonante de equilíbrio.

No próximo item, mostraremos qualitativamente que se Ψ^{cil} dado por (III-5) satisfaz às condições (III-6) e (III-8), então ela deve conter, em torno da superfície ressonante de equilíbrio, a estrutura de ilhas procurada.

III-e) ANÁLISE QUALITATIVA DO PROBLEMA

Aqui, analisaremos qualitativamente a estrutura magnética esperada para o campo \vec{B} ($= \vec{B}_0 + \vec{b}$) em torno da região de ressonância.

A intersecção das superfícies magnéticas do campo \vec{B} com o plano $z = 0$ (escolhido por simplicidade) e para $m = 2$ e $n = 1$ é obtida de (III-5):

$$\Psi^{\text{cil}} = \Psi_{\text{H}}^{\text{cil}}(\rho) + f(\rho) \cos 2\theta = C \quad (\text{III-9})$$

onde usou-se (III-6).

Vimos, que $\Psi_{\text{H}}^{\text{cil}}(\rho)$ apresenta um máximo na superfície magnética ressonante de equilíbrio ($\rho = \rho_{\text{res}}$) (expressão (III-8)). Daí, $\Psi_{\text{H}}^{\text{cil}}$ deve ter um perfil do seguinte tipo:

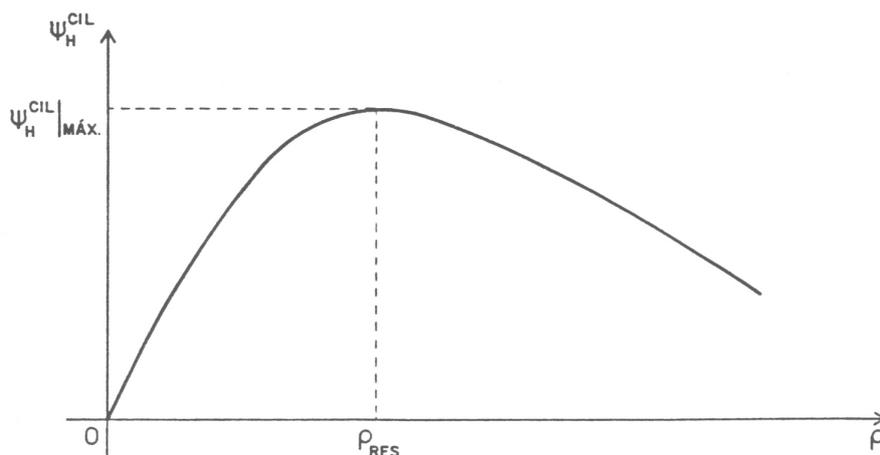


Figura III-3: Perfil esperado de $\Psi_{\text{H}}^{\text{cil}} \times \rho$.

($\Psi_{\text{H}}^{\text{cil}}$ se anula na origem, pois não há superfície através da qual se calculará o fluxo de \vec{B}_0).

Como o campo das correntes helicoidais externas (\vec{b}) é muito menor (em módulo) que o campo do plasma em equilíbrio (\vec{B}_0), espera-se que:

$$\left| \frac{f}{\Psi_H^{cil}} \right| \ll 1$$

seja satisfeita.

Então, o perfil de Ψ^{cil} deve ser, aproximadamente, o mesmo de Ψ_H^{cil} . Para diferentes valores de $\theta = \theta_0$, tem-se diferentes curvas para $\Psi^{cil}(\rho, \theta_0) \times \rho$ todas próximas da curva $\Psi_H^{cil}(\rho) \times \rho$, como na figura abaixo:

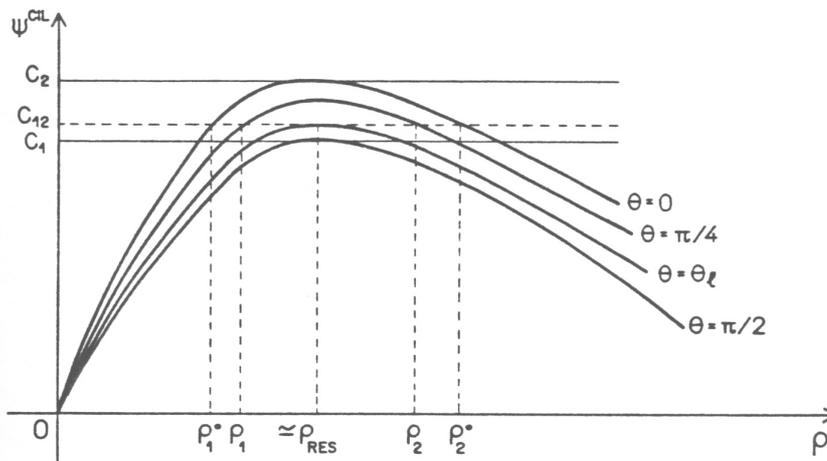


Figura III-4: Perfis de $\Psi^{cil}(\rho, \theta_0)$ para diferentes valores de θ_0 (sendo $f(\rho)$ uma função positiva).

A estrutura do campo magnético total \vec{B} é dada pela equação (III-9). Pela figura anterior, vemos que para cada valor da constante C compreendida no intervalo:

$$C_1 \leq C \leq C_2$$

a cada valor de θ corresponde nenhum, um ou dois valores de ρ . Por exemplo, para $C = C_{12}$:

valor de θ	valor de ρ correspondente
0	ρ_1^0, ρ_2^0
$\pi/4$	ρ_1, ρ_2
$\pi/4 \leq \theta_1 \leq \pi/2$	$\approx \rho_{res}$
$\pi/2$	nenhum

Estes pontos podem ser mapeados do seguinte modo:

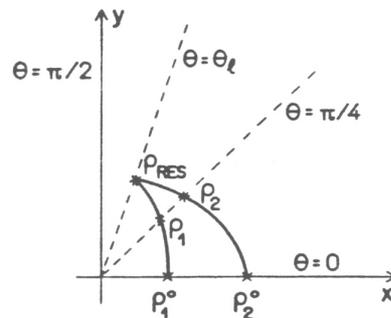


Figura III-5: Mapeamento de alguns pontos obtidos da equação $\psi^{cil} = C_{12}$, para diferentes valores de θ .

Fazendo esta análise para θ variando de 0 até 2π ,
obtem-se a seguinte figura:

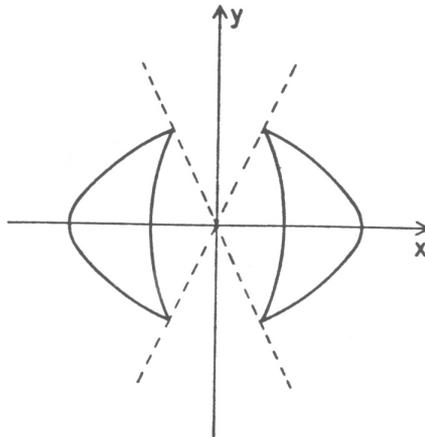


Figura III-6: Mapeamento da equação $\Psi^{cil} = C_{12}$ para θ variando de 0 a 2π .

Concluimos que a superfície magnética do campo \vec{B} que corresponde ao valor da constante $C = C_{12}$ (ou seja, $\Psi^{cil} = C_{12}$) tem estrutura de ilha magnética.

Se C variar discretamente de C_1 até C_2 , obteremos uma figura do seguinte tipo:

como +

desenho:

função:

gráfico:

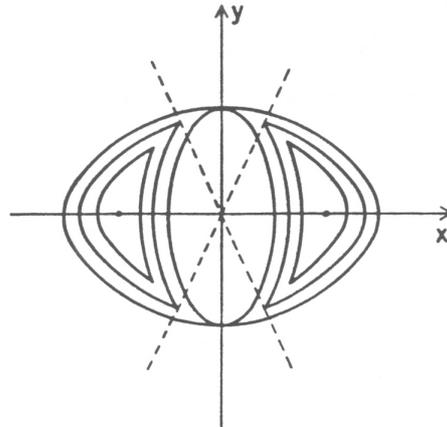


Figura III-7: Mapeamento da estrutura de \vec{B} obtida da equação $\Psi^{cil} = C$ para θ variando de 0 a 2π e C variando discretamente entre C_1 e C_2 .

Neste item, analisamos qualitativamente a expressão (III-5) para a função de superfície Ψ^{cil} associada ao campo magnético total \vec{B} ($= \vec{B}_0 + \vec{b}$). Usou-se que:

- 1) O fluxo $2\pi\Psi_H^{cil}$ do campo magnético do plasma em equilíbrio (\vec{B}_0) através de uma superfície helicoidal cilíndrica é máximo na superfície ressonante de equilíbrio (condição (III-8)).
- 2) O fluxo $2\pi\delta\Psi_H^{cil}$ do campo perturbativo (\vec{b}) através da mesma superfície dependia das coordenadas ρ e u da forma dada pela expressão (III-6).

Com isso, concluímos que este campo \vec{B} tem estrutura de ilhas, em torno da superfície magnética ressonante de equilíbrio, como esperado.

No capítulo seguinte, apresentaremos o método desenvolvido para se obter o campo magnético (e sua respectiva função de fluxo poloidal) de plasmas em equilíbrio MHD estático, na geometria toroidal.

IV-

MHD

des

gla

gra

con

des

asa

Por

us

apr

da

cal

res

cll

Ego

do

J (r

exp

CAPÍTULO IV

EQUILÍBRIO DE PLASMAS TOROIDAIS

IV-a) INTRODUÇÃO

Neste capítulo, consideraremos um plasma em equilíbrio MHD estático confinado magneticamente num tokamak toroidal. Para descrever este equilíbrio introduziremos, no item b, um novo sistema de coordenadas chamado de toroidal polar. No limite de grande razão de aspecto, este sistema torna-se o sistema de coordenadas polares locais.

No item c apresentaremos, sucintamente, o método desenvolvido ⁽¹²⁾ para se obter a função de fluxo poloidal Ψ_p associada ao campo magnético do plasma toroidal em equilíbrio (\vec{B}_0). Por este método, a obtenção de Ψ_p depende apenas do conhecimento de um perfil de densidade de corrente longitudinal $J_z(\rho)$ na aproximação cilíndrica.

Egorov ⁽¹⁸⁾ desenvolveu um método para se medir a direção da linha magnética no tokamak T-10, que podia ser usado para se calcular o perfil experimental do fator de segurança q . Deste resultado, a densidade de corrente $J_z(\rho)$ (na aproximação cilíndrica) podia ser inferida. Como o perfil de q obtido por Egorov para o T-10 é semelhante ao esperado para o TBR-1 ($q(\text{centro do plasma}) \approx 1$ e $q(\text{borda do plasma}) \approx 4$), utilizaremos o perfil de $J_z(\rho)$ por ele fornecido para obtermos, no item d, as nossas expressões de Ψ_p e de \vec{B}_0 .

IV-b) SISTEMA DE COORDENADAS TOROIDAIS POLARES

As coordenadas toroidais (apêndice D) denotadas aqui por (ξ, ω, φ) , são definidas em termos das coordenadas cilíndricas circulares (R, φ, Z) por (veja figura abaixo):

$$R = \frac{R_0}{\cosh \xi - \cos \omega} \sinh \xi \quad (IV-1)$$

$$Z = \frac{R_0}{\cosh \xi - \cos \omega} \sin \omega$$

onde R_0 , é o raio maior da origem O' , que é comum a estes dois sistemas de coordenadas; ξ é a coordenada relacionada com a distância (do ponto P) à origem O' e ω e φ são as coordenadas angulares poloidal e toroidal, respectivamente.

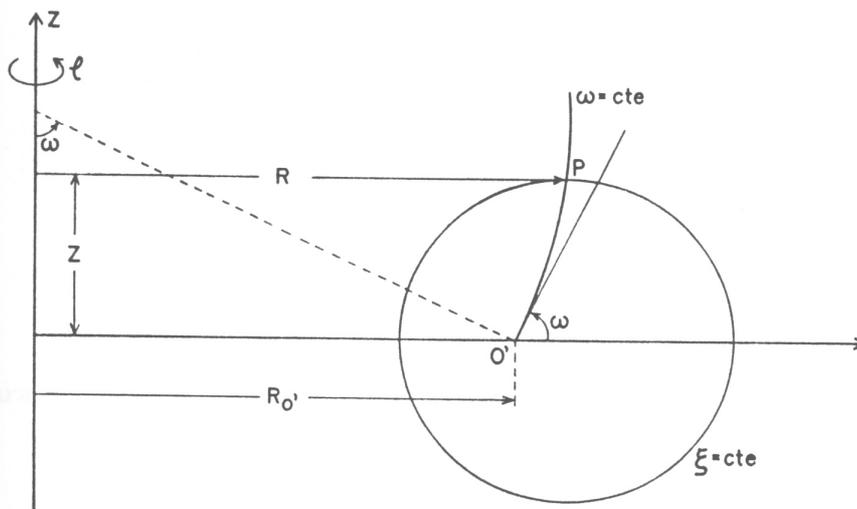


Figura IV-1: Sistemas de coordenadas toroidais (ξ, ω, φ) e cilíndricas circulares (R, φ, Z) .

Definimos uma nova série de coordenadas $(\rho_t, \theta_t, \varphi)$, em termos das coordenadas toroidais por:

$$\rho_t \equiv \frac{R_0}{\cosh \xi - \cos \omega} \quad (\text{IV-2})$$

$$\theta_t \equiv \pi - \omega$$

O significado das coordenadas ρ_t e θ_t pode ser percebido observando a figura abaixo:

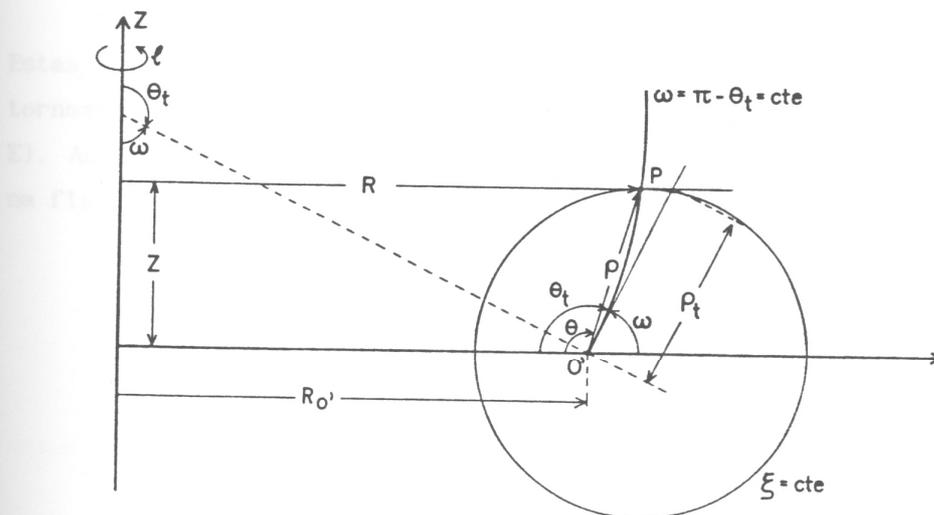


Figura IV-2: Sistemas de coordenadas toroidais polares $(\rho_t, \theta_t, \varphi)$, polares locais (ρ, θ, φ) , toroidais (ξ, ω, φ) e cilíndricas circulares (R, φ, Z) .

Podemos relacionar este novo sistema de coordenadas, que chamaremos de toroidal polar, com o sistema de coordenadas polares locais (ρ, θ, φ) com a mesma origem O' , obtendo-se:

$$\rho_t = \rho \left[1 - \left[\frac{\rho}{R_{0'}} \right] \cos \theta + \left[\frac{\rho}{2R_{0'}} \right]^2 \right]^{1/2}$$

(IV-3)

$$\text{sen } \theta_t = \text{sen } \theta \left[1 - \left[\frac{\rho}{R_{0'}} \right] \cos \theta + \left[\frac{\rho}{2R_{0'}} \right]^2 \right]^{-1/2}$$

Estas relações mostram que, no limite $(\rho/R_{0'}) \ll 1$, ρ_t e θ_t tornam-se ρ e θ , respectivamente (veja maiores detalhes no apêndice E). As superfícies coordenadas destes dois sistemas são mostradas na figura a seguir.

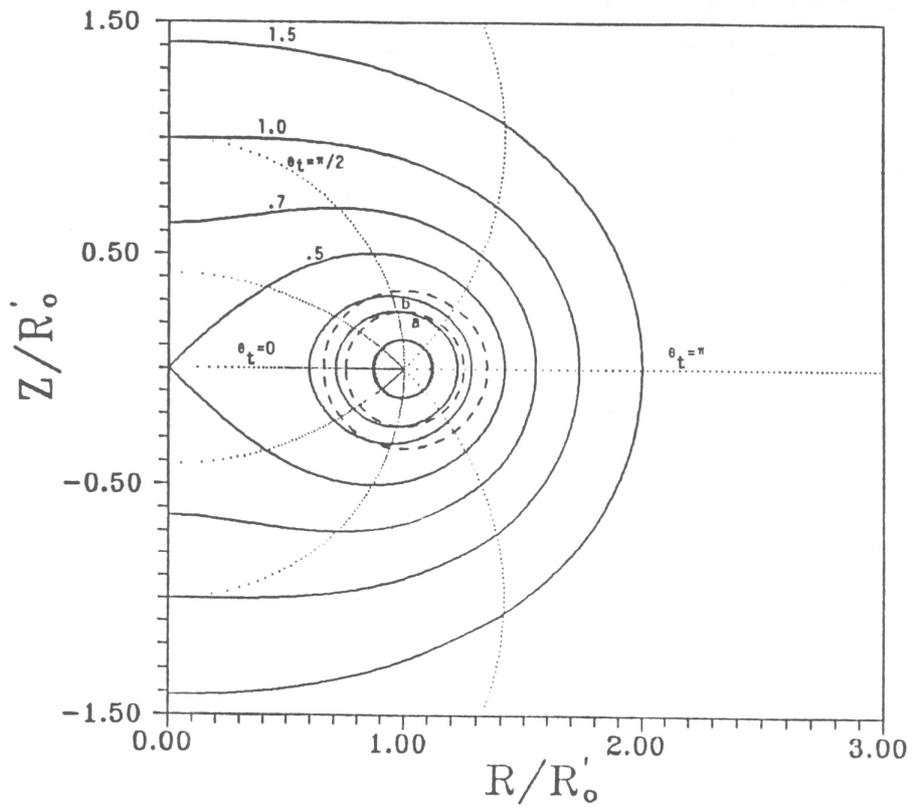


Figura IV-3: As linhas pontilhadas passando pelo centro são as superfícies $\theta_t = \text{cte}$; as linhas tracajadas são as superfícies $\rho = \text{cte}$ e as linhas sólidas representam as superfícies $\rho_t = \text{cte}$. Os números próximos das curvas são os valores de (ρ_t/R_0) ; a é a posição da borda do plasma no TBR-1 ($\rho_t \cong 0,25 R_0$) e b é a posição da câmara ($\rho_t \cong 0,32 R_0$).

IV-c) MÉTODO PARA A OBTENÇÃO DA FUNÇÃO DE FLUXO POLOIDAL

A principal dificuldade de se encontrar (analiticamente) uma expressão coerente com os dados experimentais para uma função de fluxo Ψ que satisfaz a uma equação de Grad-Shafranov, está no fato de que para se solucionar esta equação, deve-se conhecer antecipadamente a dependência de J_3 (ou de P e I) com esta função Ψ (que ainda não foi determinada).

Pelo método mostrado neste item ⁽¹²⁾, podemos obter uma expressão para uma função de fluxo poloidal Ψ_P , a partir de um perfil de densidade de corrente longitudinal $J_z(\rho)$ na aproximação cilíndrica.

A equação de equilíbrio de Grad-Shafranov (expressão (II-12)) escrita em termos das coordenadas toroidais polares (apêndice E), torna-se:

$$\left[1 - \frac{2 \rho_t}{R_0} \cos \theta_t \right] \frac{\partial^2 \Psi_P}{\partial \rho_t^2} + \frac{1}{\rho_t} \left[1 - \frac{\rho_t}{R_0} \cos \theta_t \right] \frac{\partial \Psi_P}{\partial \rho_t} + \frac{1}{\rho_t^2} \frac{\partial^2 \Psi_P}{\partial \theta_t^2} - \frac{\sin \theta_t}{\rho_t R_0} \frac{\partial \Psi_P}{\partial \theta_t} + \frac{2 \sin \theta_t}{R_0} \frac{\partial^2 \Psi_P}{\partial \rho_t \partial \theta_t} = \mu_0 J_3$$

onde:

$$J_3 = J_{30} + R_0^2 \left[2 \frac{\rho_t}{R_0} \cos \theta_t + \left(\frac{\rho_t}{R_0} \sin \theta_t \right)^2 \right] \frac{dP}{d\Psi_P}$$

e:

$$J_{30} = - R_0^2 \frac{dP}{d\Psi_P} - \mu_0 I \frac{dI}{d\Psi_P}$$

A solução de equilíbrio é escrita da seguinte forma:

$$\Psi_P(\rho_t, \theta_t) \cong \Psi_0(\rho_t) + \Psi_1(\rho_t) \cos \theta_t \quad (\text{IV-4})$$

onde:

$$\left| \frac{\Psi_1}{\Psi_0} \right| \approx 0 \left[\frac{\rho_t}{R_0} \right]$$

Usando-se que:

- i) $\frac{dF(\Psi_P)}{d\Psi_P} \cong \frac{dF(\Psi_0)}{d\Psi_0} + \frac{d^2F(\Psi_0)}{d\Psi_0^2} \Psi_1 \cos \theta_t$
- ii) $\rho_t = \tilde{a}$ define a borda do plasma
- iii) $P(\tilde{a}) = 0$ pressão na borda do plasma é nula
- iv) $-\frac{d}{d\Psi_0} \frac{\mu_0 I^2}{2} = (1 - \beta_p) J_{30}(\Psi_0)$ (IV-5)
- (onde β_p é o beta poloidal)

obtem-se:

$$\frac{1}{\rho_t} \frac{d}{d\rho_t} \left[\rho_t \frac{d\Psi_0(\rho_t)}{d\rho_t} \right] = \mu_0 J_{30}(\Psi_0(\rho_t)) \quad (\text{IV-6})$$

$$\Psi_1 = \Psi_0' \int_{\rho_t}^{\tilde{a}} F(\rho_t) d\rho_t \quad (\text{IV-7})$$

onde:

$$F(\rho_t) = \frac{\rho_t}{R_0} \Lambda(\rho_t) \quad (\text{IV-8})$$

e:

$$\Lambda(\rho_t) = \left[\frac{1}{\rho_t^2 \Psi_0'^2} \int_0^{\rho_t} \rho_t \Psi_0'^2 d\rho_t \right] + \beta_P - 1 \quad (\text{IV-9})$$

sendo que para $\rho_t = \tilde{a}$

$$\Lambda(\tilde{a}) = \frac{\ell_1}{2} + \beta_P - 1$$

(onde ℓ_1 é a indutância interna normalizada por unidade de comprimento)

Analisando a equação (IV-6), vemos que ela tem a mesma forma da equação de Grad-Shafranov nas coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) (considerando o tokamak como um cilindro periódico), que é:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{d\Psi_P^{\text{cil}}(\rho)}{d\rho} \right] = \mu_0 J_{30}(\rho) = \mu_0 J_Z(\rho)$$

Estas equações idênticas, com idênticas condições de contorno, devem fornecer soluções idênticas. Ou seja, a função $\Psi_P^{\text{cil}}(\rho)$ é a mesma que $\Psi_0(\rho_t)$; apenas os argumentos são diferentes.

Então, para se obter uma expressão para a função de fluxo poloidal Ψ_P para plasmas toroidais, basta encontrar um $J_{30}(\rho) = J_Z(\rho)$ no modelo cilíndrico, que descreva satisfatoriamente o equilíbrio do plasma. O próximo passo é adaptar esta expressão de $J_{30}(\rho)$ para as coordenadas $\rho_t, \theta_t, \varphi$, simplesmente substituindo ρ por ρ_t . Daí, resolve-se (IV-6), obtendo-se Ψ_0 . Com Ψ_0 , obtém-se Ψ_1 a partir de (IV-7) e, conseqüentemente, Ψ_P usando-se a expressão (IV-4). Da mesma forma, I pode ser obtido da expressão (IV-5).

IV-d) FUNÇÃO DE FLUXO POLOIDAL E CAMPO MAGNÉTICO BASEADOS NO MODELO DE EQUILÍBRIO DE EGOROV

A expressão para a densidade de corrente longitudinal (modelo cilíndrico) fornecida por Egorov⁽¹⁸⁾ é:

$$J_{30}(\rho) = J_z(\rho) = j_0 \left[1 - \left[\frac{\rho}{a} \right]^2 \right]^3 \quad 0 \leq \rho \leq a$$

que, adaptada para as coordenadas toroidais polares $\rho_t, \theta_t, \varphi$ torna-se:

$$J_{30}(\rho_t) = j_0 \left[1 - \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^2 \right]^3 \quad (\text{IV-10})$$

onde j_0 é determinado de modo que a corrente longitudinal do plasma em equilíbrio seja I_p (ver apêndice F).

É com este perfil de densidade de corrente longitudinal que obteremos as expressões para Ψ_p e \vec{B}_0 para o equilíbrio de plasmas toroidais.

1) FUNÇÃO DE FLUXO POLOIDAL Ψ_P

Substituindo este $J_{30}(\rho)$ em (IV-6) e resolvendo-se a equação diferencial para $\Psi_0(\rho_t)$, obtemos:

$$\Psi_0(\rho_t) = \frac{\mu_0 I_P R_0}{2\pi} \sum_{m=1}^4 \frac{(-1)^{m+1}}{2m} \binom{4}{m} \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^{2m}$$

ou, mais explicitamente:

$$\Psi_0(\rho_t) = \frac{\mu_0 I_P R_0}{2\pi} \left[2 \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^2 - 3 \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^4 + 2 \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^6 - \frac{1}{8} \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^8 \right] \quad (\text{IV-11})$$

Com esta expressão de $\Psi_0(\rho_t)$ podemos obter $\Lambda(\rho_t)$, usando-se (IV-9):

$$\Lambda(\rho_t) = \frac{\sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 \frac{(-1)^{m+n}}{2^{m+n}} \binom{4}{m} \binom{4}{n} \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^{2(m+n)}}{\sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 (-1)^{m+n} \binom{4}{m} \binom{4}{n} \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^{2(m+n)}} + \beta_P - 1$$

e daí podemos calcular $\Psi_1(\rho_t)$, a partir de (IV-7).

2) FUNÇÃO DE CORRENTE POLOIDAL I

Usando-se que:

$$\frac{dI^2}{d\Psi_0} = \frac{dI^2}{d\rho_t} \frac{d\rho_t}{d\Psi_0}$$

e substituindo-se em (IV-5) as expressões: (IV-10) para $J_{30}(\rho_t)$, (IV-11) para $\Psi_0(\rho_t)$, e integrando de ρ_t até \tilde{a} , obtemos:

$$I^2 = \frac{I_E^2}{4\pi^2} + (1-\beta_P) \left[\frac{2 R_0 I_P}{\pi \tilde{a}} \right]^2 W(\rho_t) \quad (\text{IV-12})$$

onde:

$$W(\rho_t) = \frac{319}{840} - 2 \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^2 + \frac{9}{2} \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^4 - \frac{17}{3} \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^6 + \frac{35}{8} \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^8 \\ - \frac{21}{10} \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^{10} + \frac{7}{12} \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^{12} - \frac{1}{14} \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^{14}$$

(Para $\rho_t = \tilde{a}$, temos $W(\tilde{a}) = 0$, isto é, há apenas a contribuição da corrente externa I_E que produz o campo toroidal)

Tomando os valores numéricos típicos do TBR-1 (apêndice G), vemos que o termo que contém $W(\rho_t)$ em (IV-12) é da ordem de grandeza de 1% do termo constante, o que o torna desprezível. Daí:

$$I^2 \cong \frac{I_E^2}{4\pi^2}$$

então:

$$I \cong - \frac{I_E}{2\pi} \quad (\text{IV-13})$$

(I é tomado negativo para que $B_{0\varphi}$ seja positivo - ver (II-11)).

3) CAMPO MAGNÉTICO DE EQUILÍBRIO \vec{B}_0

Considerando que o sistema é simétrico na coordenada φ (simetria axial), pode-se escrever as relações (II-8) e (II-9) entre as componentes contravariantes de \vec{B}_0 e a função de fluxo Ψ_p nas coordenadas toroidais polares, obtendo-se:

$$\frac{\partial \Psi_p}{\partial \rho_t} = R_0 B_{0\theta_t} \quad (\text{IV-14})$$

$$\frac{\partial \Psi_p}{\partial \theta_t} = \rho_t^2 (\sinh \xi B_{0\xi} - \sin \theta_t B_{0\theta_t})$$

onde notamos que Ψ_p é função das coordenadas ρ_t e θ_t .

As componentes poloidal ($B_{0\theta_t}$) e toroidal ($B_{0\varphi}$) de \vec{B}_0 são dadas por (IV-14) e (II-11) respectivamente, ou seja:

$$B_{0\theta_t} = \frac{1}{R_0} (\Psi_0' + \Psi_1' \cos \theta_t) \quad (\text{IV-15})$$

$$B_{0\varphi} = - \frac{\mu_0 I}{\rho_t \sinh \xi} \quad (\text{IV-16})$$

onde Ψ_0 , Ψ_1 e I são dadas acima.

No capítulo seguinte, apresentaremos uma expressão para o campo magnético associado às correntes helicoidais externas.

CAPÍTULO V

CAMPO MAGNÉTICO DAS CORRENTES HELICOIDAIS EXTERNAS

V-a) INTRODUÇÃO

Kucinski e Caldas obtiveram, nas coordenadas helicoidais toroidais polares ρ_t , $u = m \theta_t - n \varphi$, θ_t , o potencial escalar Φ de pares de fios condutores enrolados helicoidalmente numa câmara, cuja secção transversal é descrita pela curva $\rho_t = \tilde{b}$ (que é aproximadamente circular - figura G-2). Estes fios conduzem correntes I_H nos condutores adjacentes igualmente espaçados. A solução foi obtida na forma de uma série infinita convergente:

$$\Phi = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i$$

O campo magnético \vec{b} associado a esta distribuição de correntes, pode ser obtido aproximadamente de:

$$\vec{b} = \nabla \Phi_0 \quad (V-1)$$

onde tomamos apenas o primeiro (e maior) termo de Φ (termos da ordem de grandeza de \tilde{b}/R_0 , ou menores foram desprezados).

Φ_0 é dado por:

$$\Phi_0 = - \frac{\mu_0 I_H}{\pi N} \left[\frac{\rho_t}{\tilde{b}} \right]^{mN} \text{sen } Nu$$

V-b) COMPONENTES TOROIDAIS DE \vec{b}

Pode-se calcular as componentes toroidais de \vec{b} , a partir de (V-1), obtendo:

$$\begin{aligned}
 b_{\xi} &= \frac{\mu_0 I_H m}{\pi \tilde{b}} \left(\frac{\rho_t}{\tilde{b}} \right)^{mN-1} \text{sen } Nu \\
 b_{\omega} &= \frac{\mu_0 I_H m}{\pi \tilde{b}} \left(\frac{\rho_t}{\tilde{b}} \right)^{mN-1} \text{cos } Nu \\
 b_{\varphi} &= \frac{\mu_0 I_H n}{\pi R_0} \left(\frac{\rho_t}{\tilde{b}} \right)^{mN} \text{cos } Nu
 \end{aligned} \tag{V-2}$$

(veja maiores detalhes a respeito das coordenadas toroidais no apêndice D)

OBSERVAÇÃO: um cálculo muito semelhante pode ser encontrado na referência (13). A única diferença é que, aí, os fios estão enrolados numa câmara com secção transversal perfeitamente circular. As coordenadas utilizadas foram as toroidais convencionais (ξ, ω, φ) .

No próximo capítulo, obteremos uma condição para o surgimento de ilhas magnéticas, quando o campo \vec{b} aqui calculado for superposto ao campo do plasma em equilíbrio \vec{B}_0 (obtido no capítulo anterior).

CAPÍTULO VI

INVESTIGAÇÃO SOBRE A EXISTÊNCIA DE ILHAS MAGNÉTICAS
- CASO TOROIDAL

VI-a) INTRODUÇÃO

No item b, mostraremos que o fluxo $2\pi\Psi_H$ do campo magnético do plasma em equilíbrio (\vec{B}_0) através de uma superfície helicoidal toroidal será um extremo na superfície magnética ressonante de equilíbrio. O método e o sistema de coordenadas utilizados serão semelhante aos apresentados no item III-d (caso cilíndrico).

No item c, obteremos uma expressão analítica para um fator de segurança médio \bar{q} , aplicando-se o modelo de equilíbrio adaptado de Egorov. Verificaremos que o perfil para o \bar{q} , assim obtido, é semelhante ao esperado para o TBR-1.

VI-b) CONDIÇÃO PARA A FUNÇÃO DE FLUXO Ψ_H

Em analogia ao caso cilíndrico, usamos o seguinte sistema de coordenadas para descrever o campo \vec{B}_0 (ver apêndice H):

$$\Psi_p, \quad u \equiv m \theta_t - n \varphi, \quad \theta_t$$

onde Ψ_p é a função de fluxo poloidal de \vec{B}_0 . Podemos mostrar que $2\pi\Psi_H$ definido como o fluxo de \vec{B}_0 através de uma superfície cujo contorno externo é dado pela intersecção das superfícies $\Psi_p = c_1$ e $u = c_2$ (c_1, c_2 constantes), é um extremo na superfície ressonante de equilíbrio; escrevendo-se as relações (II-6) e (II-7) neste sistema de coordenadas (note que agora o sistema não é simétrico na terceira coordenada, que é θ_t):

$$\frac{\partial\Psi_H}{\partial\Psi_p} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \left[\frac{\rho_t}{n B_{0\theta_t}} \right] \left[B_{0\theta_t} \frac{m}{h_\omega} - B_{0\varphi} \frac{n}{h_\varphi} \right] \quad (\text{VI-1})$$

$$\frac{\partial\Psi_H}{\partial u} = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \left[\frac{\rho_t}{n B_{0\theta_t}} \right] \vec{B}_0 \cdot \nabla\Psi_p = 0 \quad (\text{VI-2})$$

onde:

$$h_\omega = \rho_t$$

$$h_\varphi = \rho_t \sinh \xi$$

(ver expressões (IV-1) e (D-1)).

(VI-2) se anula, pois $\vec{B}_0 \cdot \nabla\Psi_p = 0$ (expressão (II-10)).

Definimos o fator de segurança médio (\bar{q}) sobre uma superfície magnética como:

$$\bar{q}(\Psi_p) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \frac{h_\omega}{h_\varphi} \frac{B_{0\varphi}}{B_{0\theta_t}} \quad (\text{VI-3})$$

($\Psi_p = \text{constante}$)

\bar{q} dá a inclinação média das linhas de campo de \vec{B}_0 sobre uma superfície $\Psi_p = \text{constante}$.

Rearranjando (VI-1):

$$\frac{d\Psi_H}{d\Psi_P} = \frac{m}{n} - \bar{q}(\Psi_P) \quad (\text{VI-4})$$

onde notamos que Ψ_H é função de Ψ_P e $(\Psi_H)'$ se anula na superfície em que $\bar{q} = m/n$ (que é a superfície ressonante de equilíbrio).

É muito conveniente Ψ_H poder ser escrito em termos de uma única coordenada (expressão (VI-4)). Note que uma expressão análoga foi obtida para o caso cilíndrico, adotando um sistema de coordenadas semelhante (expressão (III-8)). No caso cilíndrico, porém, podíamos tomar tanto ρ como Ψ_P^{cil} como coordenada radial, pois Ψ_P^{cil} é apenas função de ρ . Contudo, no caso toroidal tratado acima, a escolha de Ψ_P como "coordenada radial" foi essencial na obtenção da condição (VI-4) de uma forma tão simples.

VI-c) EXPRESSÃO ANALÍTICA PARA O FATOR DE SEGURANÇA MÉDIO
USANDO-SE O MODELO DE EQUILÍBRIO DE EGOROV ADAPTADO

Escrevendo \bar{q} definido por (VI-3) em termos das coordenadas toroidais polares (usando-se (IV-15) para B_{θ_t} , (IV-16) para B_{ϕ_t} , (D-1) (apêndice D) para h_ω e h_ϕ e (E-5) (apêndice E)), obtém-se:

$$\bar{q}(\Psi_P) \cong - \frac{\mu_0 I(\Psi_P)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_t}{\left[\frac{R_0}{\rho_t} - 2\cos\theta_t - \frac{\rho_t}{R_0} \sin^2\theta_t \right] \left[\Psi_0' + \Psi_1' \cos\theta_t \right]} (\Psi_P = \text{cte})$$

Tomando-se apenas os termos de primeira e segunda ordens de grandeza, podemos simplificar a expressão anterior para:

$$\bar{q}(\Psi_P) \cong - \frac{\mu_0 I(\Psi_P)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_t}{\frac{R_0}{\rho_t} \left[\Psi_0' + \Psi_1' \cos\theta_t \right] - 2\cos\theta_t \Psi_0'} (\Psi_P = \text{cte}) \quad (\text{VI-5})$$

Esta integral é calculada mantendo-se $\Psi_p(\rho_t, \theta_t) = \text{constante}$. Portanto, antes de integrar (VI-5) em θ_t , é necessário escrever explicitamente a dependência de ρ_t com θ_t sobre a superfície $\Psi_p = \text{cte}$. As coordenadas ρ_t e θ_t estão relacionadas sobre esta superfície por:

$$\rho_t \cong \rho_t^* + \Delta\rho_t(\rho_t^*, \theta_t) \quad (\text{VI-6})$$

onde:

$$\Delta\rho_t = - \frac{\Psi_1(\rho_t^*)}{\Psi_0'(\rho_t^*)} \cos \theta_t$$

Sobre uma superfície $\Psi_p = \text{cte}$, $\rho_t = \rho_t^*$ para $\theta_t = \pi/2$ e $\Delta\rho_t$ é uma correção a $\rho_t = \rho_t^*$ para os demais valores de θ_t (note que ρ_t^* é único para cada superfície $\Psi_p = \text{cte}$). Veja maiores detalhes no apêndice J.

Substituindo (VI-6) nas funções de ρ_t em (VI-5), considerando novamente os termos de primeira e segunda ordens de grandeza e usando a expressão (IV-7) para Ψ_1 , obtém-se que:

$$\bar{q}(\Psi_0(\rho_t^*)) \cong - \frac{\mu_0 I(\Psi_0(\rho_t^*))}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_t}{\frac{R_{0'}^*}{\rho_t} \Psi_0'(\rho_t^*) \left[1 - H(\rho_t^*) \cos \theta_t \right]} \quad (\Psi_p = \text{cte})$$

onde:

$$H(\rho_t^*) = 2 \frac{\rho_t^*}{R_{0'}} + F(\rho_t^*) - \frac{1}{\rho_t^*} \int_{\rho_t^*}^{\tilde{a}} d\rho_t F(\rho_t) \quad (\text{VI-7})$$

(ver definição de $F(\rho_t)$ na expressão (IV-8))

Como:

$$| H | \approx 0 \left[\frac{\rho_t}{R_0} \right]$$

pode-se escrever a expressão de \bar{q} acima como:

$$\bar{q}(\Psi_0(\rho_t^*)) \cong - \frac{\mu_0 I(\Psi_0(\rho_t^*))}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \frac{\rho_t^*}{R_0, \Psi_0'(\rho_t^*)} (1 + H(\rho_t^*) \cos\theta_t)$$

$(\Psi_p = \text{cte})$

de onde se obtém:

$$\bar{q}(\rho_t^*) \cong - \frac{\rho_t^*}{R_0} \frac{\mu_0 I(\rho_t^*)}{\Psi_0'(\rho_t^*)} \quad (\text{VI-8})$$

ANALOGIA COM O CASO CILÍNDRICO

Esta expressão de \bar{q} é muito semelhante à expressão de q nas coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) , pois esta última é:

$$q = \frac{\rho}{R_0} \frac{B_{0z}}{B_{0\theta}}$$

onde $B_{0\theta}$ e B_{0z} podem ser obtidas de (II-8) e (II-11) respectivamente, ou seja:

$$B_{0z} = -\mu_0 I(\Psi_P^{cil}(\rho))$$

$$B_{0\theta} = \Psi_P^{cil}{}',(\rho)$$

Então, $q(\rho)$ pode ser escrito como:

$$q(\rho) = -\frac{\rho}{R_0} \frac{\mu_0 I(\rho)}{\Psi_P^{cil}{}',(\rho)}$$

que é análoga a (VI-8).

Obteremos o perfil de \bar{q} para o modelo de equilíbrio de Egorov adaptado, substituindo as expressões de Ψ_0 e I calculadas no capítulo anterior (expressões (IV-11) e (IV-13), respectivamente) na expressão (VI-8) para \bar{q} . Com isso:

$$\bar{q}(\rho_t^*) \approx \frac{I_E}{I_P} \left[\frac{\rho_t^*}{R_0} \right]^2 \frac{1}{1 - \left[1 - \left(\frac{\rho_t^*}{a} \right)^2 \right]^4} \quad (\text{VI-9})$$

cujo gráfico para os valores típicos do TBR-1 (apêndice G) é:

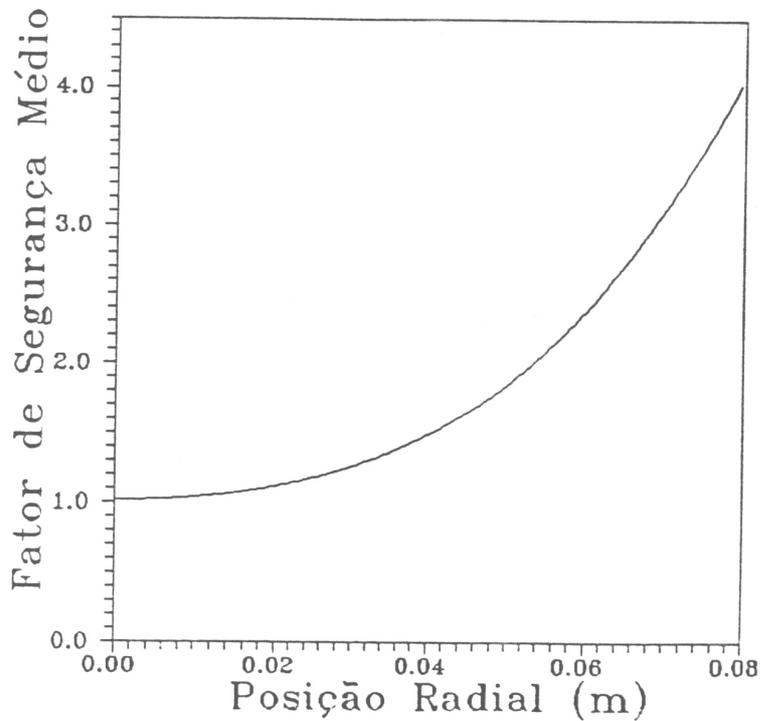


Figura VI-1: Perfil do fator de segurança médio \bar{q} em função de ρ (coordenada radial polar local) para o TBR-1.

(Das expressões (IV-3) e (VI-6), temos que $\rho_t^* \approx \rho$)

Observando este gráfico, vê-se que:

$$\bar{q} \text{ (centro do plasma)} \approx 1$$

$$\bar{q} \text{ (borda do plasma)} \approx 4$$

que são valores semelhantes ao esperado para o TBR-1. Então, as expressões de equilíbrio obtidas, usando-se o modelo de Egorov adaptado, devem ser adequadas ao TBR-1.

A figura abaixo representa as curvas $\Psi_p = \text{cte}$ das superfícies magnéticas racionais de equilíbrio do TBR-1 correspondentes a $\bar{q} = 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2, 4$. As outras curvas são a borda do plasma ($\rho_t = \tilde{a}$) e a borda da câmara ($\rho_t = \tilde{b}$).

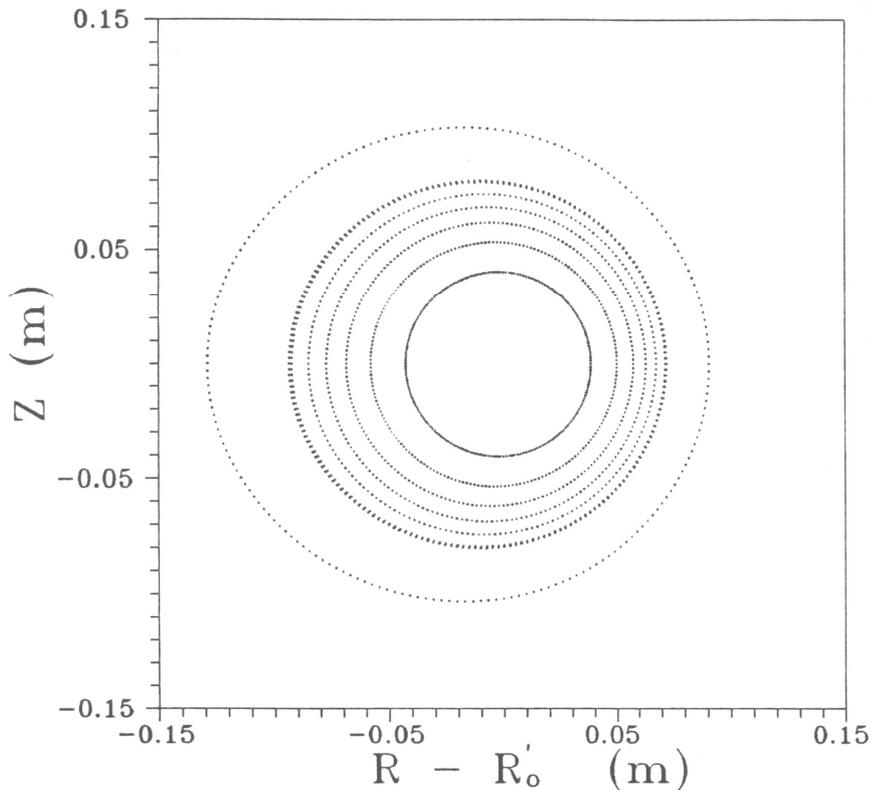


Figura VI-2: Superfícies magnéticas para o plasma em equilíbrio no TBR-1 (usando-se o modelo de Egorov adaptado).

IDENTIFICAÇÃO DE $\bar{\Psi}$ (FUNÇÃO DE SUPERFÍCIE MAGNÉTICA APROXIMADA)

VII-a) INTRODUÇÃO

Neste capítulo, consideraremos a superposição do campo magnético do plasma toroidal em equilíbrio (\vec{B}_0) com o campo perturbativo associado às correntes helicoidais externas (\vec{b}). Como o campo magnético total resultante desta superposição \vec{B} ($= \vec{B}_0 + \vec{b}$) não apresenta simetria, suas linhas de campo devem formar superfícies magnéticas apenas em determinadas regiões do plasma.

Utilizando o método da média ⁽¹⁾ desenvolvido por Bogolyubov (ver apêndice L), calcularemos uma função de superfície magnética aproximada $\bar{\Psi}$ que contenha as linhas de \vec{B} em torno da região da superfície ressonante de equilíbrio.

O sistema de coordenadas utilizado para descrever \vec{B} será $x^1 = \Psi_p$, $x^2 = u$, $x^3 = \theta_t$ e a média tomada ao longo de uma curva helicoidal toroidal, variando-se θ_t de 0 a 2π . $2\pi\bar{\Psi}$ será identificado como o fluxo de \vec{B} através de uma superfície cujo contorno externo é uma hélice toroidal.

VII-b) IDENTIFICAÇÃO DE $\bar{\Psi}$

Usamos a seguinte notação:

\vec{B}_0 : campo magnético do plasma em equilíbrio

\vec{b} : campo magnético das correntes helicoidais externas

\vec{B} : campo magnético total

e supomos que:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b} \quad (\text{VII-1})$$

Se $|\vec{b}| \ll |\vec{B}_0|$, o campo das hélices pouco altera o campo do plasma em equilíbrio, podendo-se considerar o campo magnético total como uma superposição dos dois.

Da equação diferencial das linhas de campo de \vec{B} :

$$\vec{B} \times d\vec{\ell} = 0$$

tira-se a seguinte relação:

$$\frac{dx^1}{B^1} = \frac{dx^2}{B^2} = \frac{dx^3}{B^3} \quad (\text{VII-2})$$

Usando o sistema de coordenadas já utilizado no capítulo VI (ver apêndice H):

$$\begin{aligned}x^1 &= \Psi_P(\rho_t, \theta_t) \\x^2 &= u = m \theta_t - n \varphi \\x^3 &= \theta_t\end{aligned}$$

pode-se escrever (VII-2) como:

$$\frac{d\Psi_P}{d\theta_t} = \frac{B^1}{B^3} = \frac{b^1}{B_0^3 + b^3} \cong \frac{b^1}{B_0^3}$$

(VII-3)

$$\frac{du}{d\theta_t} = \frac{B^2}{B^3} = \frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3 + b^3} \cong \frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3} - \frac{B_0^2 b^3}{(B_0^3)^2}$$

onde desprezaram-se termos da ordem de grandeza ou menores que $(b/B_0)^2$. Isto consiste numa boa aproximação, pois para o TBR-1 $(b/B_0) \approx 1\%$. Ainda, usou-se que $B_0^1 = \vec{B}_0$. $\nabla\Psi_P = 0$ (ver (II-10)).

O sistema acima de equações diferenciais é periódico na terceira coordenada $x^3 = \theta_t$. Então, podemos aplicar o método da média para solucioná-lo.

Por este método, as equações não-autônomas das linhas de campo (sistema (VII-3)):

$$\frac{dx^k}{d\theta_t} = f_k(x^1, \theta_t) \quad (1, k = 1, 2)$$

são transformadas em equações autônomas para novas coordenadas médias:

$$\frac{d\bar{x}^{-k}}{d\theta_t} = \bar{f}_k(\bar{x}^{-k}) + \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial x^1} \hat{f}_1(\bar{x}^{-1}) + \dots$$

Os sinais de $\bar{\quad}$ e $\hat{\quad}$ denotam as operações de média e integração na variável θ_t , mantendo-se $\bar{x}^{-1} = \text{constante}$:

$$\bar{A} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \, d\theta_t \quad \hat{A} = \int_0^{2\pi} \tilde{A} \, d\theta_t \quad \text{onde: } \tilde{A} = A - \bar{A}$$

A solução para as equações originais são obtidas a partir das coordenadas médias por:

$$x^k = \bar{x}^{-k} + \hat{f}_k + \dots$$

Aplicando-se este método (veja maiores detalhes no apêndice L) para solucionar o sistema (VII-3), obtém-se o seguinte sistema de equações para as novas variáveis médias:

$$\frac{d\bar{\Psi}_P}{d\theta_t} \cong \left[\frac{\widehat{b^1}}{B_0^3} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left(\frac{\widehat{b^1}}{B_0^3} \right) \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{\widehat{b}}{B_0} \right)^2 \quad (\text{VII-4})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{d\theta_t} \cong & \left[\frac{\widehat{B_0^2 + b^2}}{B_0^3} \right] - \left[\frac{\widehat{B_0^2 b^3}}{(B_0^3)^2} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}_P} \left(\frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \right) \frac{\widehat{b^1}}{B_0^3} \right] \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left(\frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \right) \left(\frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} + \frac{\widehat{b^2}}{B_0^3} - \frac{\widehat{B_0^2 b^3}}{(B_0^3)^2} \right) \right] \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left(\frac{\widehat{b^2}}{B_0^3} - \frac{\widehat{B_0^2 b^3}}{(B_0^3)^2} \right) \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{\widehat{b}}{B_0} \right)^2 \end{aligned}$$

onde $\bar{\Psi}_P$ e \bar{u} são novas coordenadas médias introduzidas pelo método da média e se relacionam com as coordenadas originais pelas seguintes expressões:

$$\Psi_P = \bar{\Psi}_P + \Delta\Psi_P \quad \text{onde :} \quad \Delta\Psi_P = \frac{\widehat{b^1}}{B_0^3} \quad (\text{VII-5})$$

$$u = \bar{u} + \Delta u \quad \text{onde:} \quad \Delta u = \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} + \frac{\widehat{b^2}}{B_0^3} - \frac{\widehat{B_0^2 b^3}}{(B_0^3)^2} \quad (\text{VII-6})$$

Os sinais de $\overline{\quad}$ e $\widehat{\quad}$ aqui usados denotam as operações de média e integração na variável θ_t , mantendo-se $\overline{\Psi}_P = c_1$ e $\overline{u} = c_2$ (c_1, c_2 constantes).

O sistema de equações (VII-4) pode ser simplificado, usando-se:

$$i) \nabla \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad \nabla \cdot \vec{b} = 0 \quad (VII-7)$$

$$\text{onde, em coordenadas generalizadas: } \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} A^1)$$

$$\text{e para o sistema de coordenadas usado (apêndice F): } \sqrt{g} = \frac{1}{n B_0^3}$$

e levando-se em conta as identidades:

$$ii) \frac{\partial}{\partial \theta_t} \widehat{A} = \widetilde{A}$$

$$iii) \overline{\widehat{A} B} = - \overline{A \widehat{B}}$$

Com isso, simplifica-se (VII-4) para:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\Psi}_P}{d\theta_t} &\cong \left[\frac{b^1}{B_0^3} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial \overline{u}} \left(\frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B}_0^2}{B_0^3} \right) \right] \\ \frac{d\overline{u}}{d\theta_t} &\cong \left[\frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3} \right] - \left[\frac{B_0^2}{B_0^3} \frac{b^3}{B_0^3} \right] - \left[\frac{\partial}{\partial \overline{u}} \left(\frac{b^3}{B_0^3} \right) \frac{B_0^2}{B_0^3} \frac{\widehat{B}_0^2}{B_0^3} \right] \\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial \overline{\Psi}_P} \left(\frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B}_0^2}{B_0^3} \right) \right] \end{aligned}$$

Agora, serão desprezados termos da ordem de grandeza ou menores que $(b/B_0)(\rho_t/R_0)^2$ (ver as componentes contravariantes de \vec{B}_0 e \vec{b} acima usadas no apêndice M). Para o TBR-1, $0 \leq (\rho_t/R_0)^2 \leq 6\%$, para $0 \leq \rho_t \leq \tilde{a}$. Feito isto, obtém-se do sistema acima:

$$\frac{d\bar{\Psi}_p}{d\theta_t} \cong \left[\frac{b^1}{B_0^3} \right] \quad (\text{VII-7})$$

$$\frac{d\bar{u}}{d\theta_t} \cong \left[\frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3} \right] - \frac{B_0^2}{B_0^3} \left[\frac{b^3}{B_0^3} + \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left(\frac{b^3}{B_0^3} \right) \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \right] \quad (\text{VII-8})$$

onde (ver expressão (M-4)) - apêndice M):

$$\frac{B_0^2}{B_0^3} = m - n \bar{q}$$

Pode-se mostrar que o primeiro termo da expressão (VII-8) é sempre maior que o segundo, tanto para regiões próximas da superfície ressonante de equilíbrio ($\bar{q} = m/n$), como para regiões afastadas desta (detalhes no apêndice N). Daí, o sistema de equações (VII-7) e (VII-8) se reduz simplesmente a:

$$\frac{d\bar{\Psi}_P}{d\theta_t} \cong \frac{\overline{b^1}}{B_0^3} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \frac{b^1}{B_0^3} \quad (\text{VII-9})$$

$$\frac{d\bar{u}}{d\theta_t} \cong \frac{\overline{B_0^2 + b^2}}{B_0^3} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3}$$

O lado direito das equações (VII-9) pode ser escrito em termos de um fluxo $2\pi F$ de \vec{B} através de uma superfície cujo contorno externo é uma hélice toroidal, dada pela intersecção das superfícies $\bar{\Psi}_P = c_1$ e $\bar{u} = c_2$ (c_1, c_2 constantes). Ou seja, usando-se (II-6) e (II-7):

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\Psi}_P} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \sqrt{g} B^2 = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} d\theta_t \frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3} \quad (\text{VII-10})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{u}} = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \sqrt{g} B^1 = - \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} d\theta_t \frac{b^1}{B_0^3}$$

Comparando (VII-9) com (VII-10), são obtidas as seguintes relações:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\Psi}_p} \cong \frac{1}{n} \frac{d\bar{u}}{d\theta_t} \quad (\text{VII-11})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{u}} \cong - \frac{1}{n} \frac{d\bar{\Psi}_p}{d\theta_t}$$

Definindo $\bar{\Psi}$ como:

$$\bar{\Psi} \equiv F$$

vemos que as equações (VII-11) equivalem a:

$$\nabla \bar{\Psi}(\bar{\Psi}_p, \bar{u}) \cdot d\vec{\ell} \cong 0$$

de modo que:

$$\bar{\Psi}(\bar{\Psi}_p, \bar{u}) = \text{constante}$$

representa a equação procurada das superfícies magnéticas aproximadas. Então, identificamos $2\pi\bar{\Psi}$ como o fluxo de \vec{B} através da superfície helicoidal toroidal já descrita, podendo ser obtido de:

$$\bar{\Psi} \equiv F = \frac{1}{2\pi} \int \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$$

onde $d\vec{\sigma}$ é o elemento de área da superfície helicoidal toroidal.

Uma observação deve aqui ser feita. $\bar{\Psi}$ está em função das coordenadas médias $\bar{\Psi}_p, \bar{u}$, isto é: $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(\bar{\Psi}_p, \bar{u})$. Então, este $\bar{\Psi}$ dá a posição "média" das linhas de campo de \vec{B} . O comportamento "real" destas linhas é dado pelas fórmulas (VII-5) e (VII-6), levando-se em conta correções periódicas de primeira ordem. Estas correções serão calculadas a seguir.

VII-c) CÁLCULO DAS CORREÇÕES ÀS COORDENADAS MÉDIAS

CÁLCULO DE $\Delta\Psi_p$

Neste cálculo, desprezaremos termos da ordem de grandeza ou menores que $(\Psi_p (\rho_t/R_0)^2)$. Lembramos que a operação de integração ($\hat{\ }$) em θ_t é feita:

- i) mantendo-se $\bar{\Psi}_p = c_1$ e $\bar{u} = c_2$ (c_1, c_2 constantes);
- ii) sobre a parte da função que depende explicitamente de θ_t .

$\Delta\Psi_p$ é obtido da expressão (VII-5), que é:

$$\Delta\Psi_p = \frac{\hat{b}^1}{B_0^3}$$

onde (expressão (M-6)):

$$\frac{b^1}{B_0^3} = - \frac{\mu_0 I_H R_0 m}{\pi} \left[\frac{\rho_t}{\tilde{b}} \right]^{mN} \text{sen } Nu$$

(note que esta relação tem dimensão de fluxo magnético). Na operação \wedge , temos que seguir as duas condições i) e ii) descritas acima. Utilizando a expressão que relaciona ρ_t e θ_t sobre uma superfície magnética de equilíbrio (expressão (VI-6)), obtemos que:

$$\widetilde{\frac{b^1}{B_0^3}} = 0$$

pois, segundo a aproximação usada, os termos que dependem explicitamente de θ_t são de uma ordem de grandeza desprezível. Daí:

$$\widehat{\frac{b^1}{B_0^3}} = 0$$

isto é, a correção à coordenada média $\bar{\Psi}_P$ é nula. Então:

$$\Psi_P^*(\rho_t^*) = \bar{\Psi}_P(\bar{\rho}_t^*) \quad (\text{VII-12})$$

(veja (VII-5) e (J-2)) de onde concluímos que:

$$\rho_t^* = \bar{\rho}_t^* \quad (\text{VII-13})$$

CÁLCULO DE Δu

Neste cálculo, desprezaremos termos da ordem de grandeza ou menores que $(\rho_t/R_0)^2$.

Δu é obtido da expressão (VII-6), que é:

$$\Delta u = \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} + \frac{\widehat{b^2}}{B_0^3} - \frac{\widehat{B_0^2 b^3}}{(B_0^3)^2}$$

onde (expressão (M-7)):

$$\frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3} - \frac{B_0^2 b^3}{(B_0^3)^2} \cong m - n \frac{h_\omega}{h_\varphi} \frac{B_{0\varphi}}{B_{0\theta_t}} \left[1 + \frac{b_\omega}{B_{0\theta_t}} \right]$$

Usando as expressões (IV-15) e (IV-16) para as componentes poloidal e toroidal de \vec{B}_0 e (V-2) para a componente poloidal de \vec{b} , e seguindo-se as condições i) e ii) para a operação de integração em θ_t , obtém-se:

$$\Delta u = \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} + \frac{\widehat{b^2}}{B_0^3} - \frac{\widehat{B_0^2 b^3}}{(B_0^3)^2} \approx \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \approx -n \bar{q}(\rho_t^*) H(\rho_t^*) \sin \theta_t$$

(veja expressão (M-5) onde a função H é dada por (VI-7).

Substituindo a expressão acima em (VII-6), encontramos a correção à coordenada \bar{u} :

$$u = \bar{u} - n \bar{q}(\rho_t^*) H(\rho_t^*) \text{sen } \theta_t \quad (\text{VII-14})$$

ou:

$$\bar{u} = u + n \bar{q}(\rho_t^*) H(\rho_t^*) \text{sen } \theta_t \quad (\text{VII-15})$$

As superfícies magnéticas aproximadas $\bar{\Psi}(\bar{\Psi}_p, \bar{u})$ podem ser achadas com uma precisão de $(\rho_t/R_0)^2$, substituindo-se as coordenadas médias $\bar{\Psi}_p$ e \bar{u} pelas expressões (VII-12) e (VII-15). Isto é:

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(\bar{\Psi}_p(\rho_t^*), u + n \bar{q}(\rho_t^*) H(\rho_t^*) \text{sen } \theta_t) = \text{constante} \quad (\text{VII-16})$$

Na próxima seção, obteremos explicitamente a expressão para $\bar{\Psi}$, a partir de sua identificação como fluxo magnético de \vec{B} através da superfície helicoidal toroidal descrita.

CAPÍTULO VIII

EXPRESSÃO ANALÍTICA DE $\bar{\Psi}$

VIII-a) INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, $2\pi\bar{\Psi}$ foi identificado como o fluxo do campo magnético total \vec{B} através de uma superfície cujo contorno externo é uma hélice toroidal, dada pela intersecção das superfícies $\bar{\Psi}_p = c_1$ e $\bar{u} = c_2$ (c_1, c_2 constantes). Isto é:

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{2\pi} \int_{(u=cte)} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$$

onde $d\vec{\sigma}$ é o elemento de área da hélice toroidal acima descrita. Como este campo total \vec{B} é dado pela soma dos campos de equilíbrio (\vec{B}_0) e perturbativo (\vec{b}) (ver (VII-1)), pode-se escrever a expressão acima como:

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{2\pi} \int_{(u=cte)} \vec{B}_0 \cdot d\vec{\sigma} + \frac{1}{2\pi} \int_{(u=cte)} \vec{b} \cdot d\vec{\sigma}$$

Aqui, usamos uma notação análoga a do caso cilíndrico (item III-c):

$$\Psi_H = \frac{1}{2\pi} \int_{(u=cte)} \vec{B}_0 \cdot d\vec{\sigma} \quad (\text{VIII-1})$$

$$\delta\Psi_H = \frac{1}{2\pi} \int_{(u=cte)} \vec{b} \cdot d\vec{\sigma} \quad (\text{VIII-2})$$

onde $2\pi\Psi_H$ e $2\pi\delta\Psi_H$ são, respectivamente, os fluxos dos campos \vec{B}_0 e \vec{b} através da superfície helicoidal toroidal descrita. Então:

$$\bar{\Psi} = \Psi_H + \delta\Psi_H \quad (\text{VIII-3})$$

A seguir, calculamos Ψ_H e $\delta\Psi_H$, obtendo a expressão procurada para $\bar{\Psi}$.

VIII-b) CÁLCULO DE Ψ_H

Ψ_H é calculado a partir da expressão (VI-4) (por ser mais simples que (VIII-1)), usando-se que:

$$\Psi_P(\rho_t, \theta_t) = \Psi_P(\rho_t^*, \pi/2) = \Psi_0(\rho_t^*)$$

(ver apêndice J). Obtém-se:

$$\frac{d\Psi_H}{d\rho_t^*} = \frac{d\bar{\Psi}_0}{d\rho_t^*} \left[\frac{m}{n} - \bar{q}(\rho_t^*) \right]$$

Substituindo a expressão para \bar{q} dada por (VI-8):

$$\frac{d\Psi_H}{d\rho_t^*} = \frac{m}{n} \bar{\Psi}_0' + \mu_0 I \frac{\rho_t^*}{R_0}$$

e integrando-se em ρ_t^* :

$$\Psi_H(\rho_t^*) = \frac{m}{n} \bar{\Psi}_0(\rho_t^*) + \mu_0 I \frac{\rho_t^{*2}}{2R_0} \quad (\text{VIII-4})$$

ou, substituindo-se as expressões (IV-11) para Ψ_0 e (IV-13) para I:

$$\Psi_H(\rho_t^*) = \frac{m}{n} \frac{\mu_0 I_P R_0}{2\pi} \left[2 \left(\frac{\rho_t^*}{\tilde{a}} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\rho_t^*}{\tilde{a}} \right)^4 + \frac{2}{3} \left(\frac{\rho_t^*}{\tilde{a}} \right)^6 - \frac{1}{8} \left(\frac{\rho_t^*}{\tilde{a}} \right)^8 \right] - \frac{\mu_0}{4\pi} I_E \frac{\rho_t^{*2}}{R_0} \quad (\text{VIII-5})$$

Utilizando os valores numéricos típicos do TBR-1 (apêndice G) e escolhendo-se $m = 2$ e $n = 1$, apresentamos abaixo o gráfico de $\Psi_H \times \rho_t^*$:

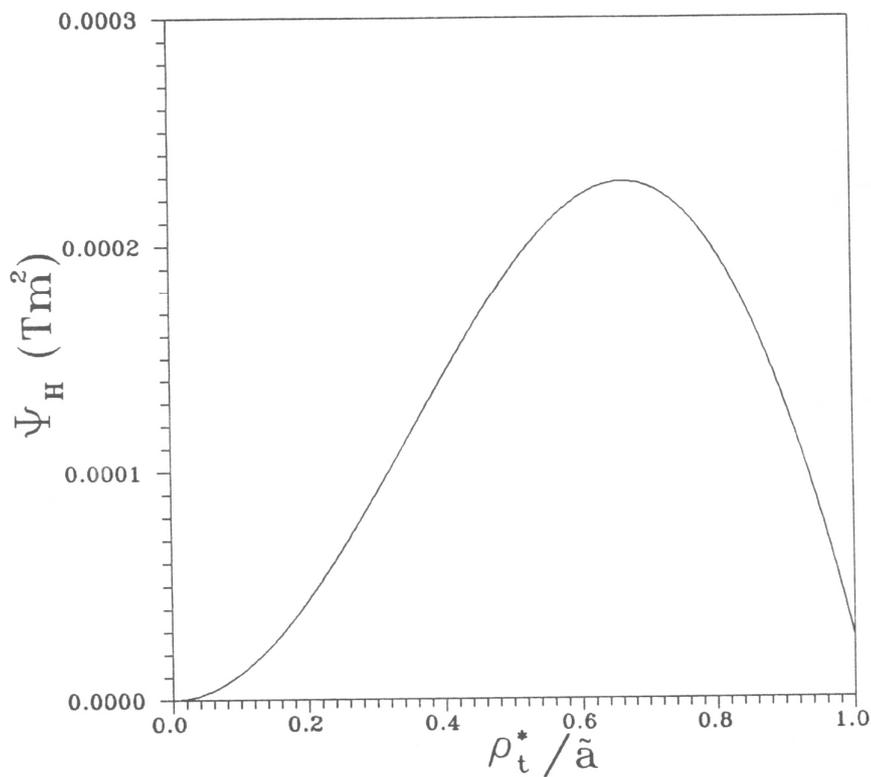


Figura VIII-1: $\Psi_H \times \rho_t^*$ para $m = 2$, $n = 1$.

Pode-se notar que Ψ_H apresenta um máximo (na superfície magnética ressonante de equilíbrio - $\bar{q} = m/n$).

VIII-c) CÁLCULO DE $\delta\Psi_H$

Substituindo na definição de $\delta\Psi_H$ (expressão (VIII-2)) o elemento de área da hélice toroidal $d\vec{\sigma}$ (dado no apêndice P - expressão (P-1)) e os extremos de integração, temos:

$$\delta\Psi_H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \int_0^{\overline{\rho_t^*} + \overline{\Delta\rho_t(\rho_t^*, \theta_t^*)}} d\rho_t \frac{R_0, \rho_t}{n} \left[-\frac{m}{\rho_t} \vec{e}_\omega - \frac{n}{\rho_t \sinh \xi} \vec{e}_\varphi \right] \cdot \vec{b}$$

($\overline{u=cte}$)

A expressão acima pode ser reescrita como:

$$\delta\Psi_H = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \int_0^{\overline{\rho_t^*}} d\rho_t R_0, \frac{m}{n} b_\omega \left[1 + \frac{n}{m} \frac{1}{\sinh \xi} \frac{b_\varphi}{b_\omega} \right]$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \int_{\overline{\rho_t^*}}^{\overline{\rho_t^*} + \overline{\Delta\rho_t(\rho_t^*, \theta_t^*)}} d\rho_t R_0, \frac{m}{n} b_\omega \left[1 + \frac{n}{m} \frac{1}{\sinh \xi} \frac{b_\varphi}{b_\omega} \right]$$

($\overline{u=cte}$)

onde:

$$\frac{1}{\sinh \xi} \approx \mathcal{O} \left[\frac{\rho_t}{R_0} \right] \quad (\text{ver (E-5)})$$

$$\frac{b_\varphi}{b_\omega} \approx \mathcal{O} \left[\frac{\tilde{b}}{R_0} \right] \quad (\text{ver (V-2)})$$

Desprezando termos da ordem de grandeza ou menores que (\tilde{b}/R_0) na expressão anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta\Psi_H \cong & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \int_0^{\overline{\rho}_t^*} d\rho_t R_0, \frac{m}{n} b_\omega \\ & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \int_{\overline{\rho}_t^*}^{\overline{\rho}_t^* + \overline{\Delta\rho}_t(\rho_t^*, \theta_t^*)} d\rho_t R_0, \frac{m}{n} b_\omega \end{aligned} \quad (\text{VIII-6})$$

A primeira integral representa uma correção ao fluxo do campo do plasma em equilíbrio, devido às correntes helicoidais externas. A segunda integral deve ser de uma ordem de grandeza muito menor, pois $\overline{\Delta\rho}_t/\overline{\rho}_t^* \ll 1$. Então:

$$\delta\Psi_H \cong -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \int_0^{\overline{\rho}_t^*} d\rho_t R_0, \frac{m}{n} b_\omega$$

Usando a expressão de b_ω dada no capítulo V, obtém-se:

$$\delta\Psi_H(\overline{\rho}_t^*, \overline{u}) \cong -\frac{m}{\pi n N} \mu_0 I_H R_0, \left[\frac{\overline{\rho}_t^*}{\tilde{b}} \right]^{mN} \cos N\overline{u} \quad (\text{VIII-7})$$

Notamos que esta expressão para $\delta\Psi_H$ é da seguinte forma:

$$\delta\Psi_H = f(\rho_t^*) \cos N\bar{u} \quad (\text{VIII-8})$$

que é semelhante a expressão (III-6) para o caso cilíndrico.

VIII-d) EXPRESSÃO PARA $\bar{\Psi}$

$\bar{\Psi}$ é dado pela soma de Ψ_H (VIII-5) com $\delta\Psi_H$ (VIII-7). Substituindo as correções às coordenadas médias ρ_t^*, \bar{u} (expressões (VII-13) e (VII-15)), obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(\rho_t^*, u, \theta_t) &= \\ &= \frac{m}{n} \frac{\mu_0 I_P R_0}{2\pi} \left[2 \left(\frac{\rho_t^*}{\bar{a}} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\rho_t^*}{\bar{a}} \right)^4 + \frac{2}{3} \left(\frac{\rho_t^*}{\bar{a}} \right)^6 - \frac{1}{8} \left(\frac{\rho_t^*}{\bar{a}} \right)^8 \right] \\ &\quad - \frac{\mu_0}{4\pi} I_E \frac{\rho_t^{*2}}{R}, \\ &\quad - \frac{m}{\pi n N} \mu_0 I_H R_0 \left(\frac{\rho_t^*}{\tilde{b}} \right)^{mN} \cos N(u + n \bar{q}(\rho_t^*)) H(\rho_t^*) \sin \theta_t \end{aligned} \quad (\text{VIII-9})$$

No capítulo seguinte, analisaremos esta expressão para $\bar{\Psi}$. Notamos que esta tem as características suficientes para apresentar estrutura de ilhas, que são:

i) Ψ_H atinge um valor máximo na superfície magnética ressonante (ver (VI-4));

ii) $\delta\Psi_H$ é da forma: $\delta\Psi_H(\rho_t^*, \bar{u}) = f(\rho_t^*) \cos N\bar{u}$.

CAPÍTULO IX

ANÁLISE DA EXPRESSÃO DE $\bar{\Psi}$

IX-a) INTRODUÇÃO

Aqui, analisaremos a expressão obtida para $\bar{\Psi}$ no capítulo anterior. Mostraremos que, na região de ressonância, ela apresenta estrutura de ilhas magnéticas. Apresentaremos também alguns mapas destas ilhas, para valores numéricos típicos do TBR-1.

IX-b) ANÁLISE DA EXPRESSÃO DE $\bar{\Psi}$ (EM TORNO DA REGIÃO DE RESSONÂNCIA)

Vimos que a expressão procurada para $\bar{\Psi}$ é da seguinte forma (ver (VII-13), (VII-15), (VIII-3) e (VIII-8)):

$$\bar{\Psi} = \Psi_H(\rho_t^*) + f(\rho_t^*) \cos N(u + n \bar{q}(\rho_t^*) H(\rho_t^*) \sin \theta_t) = \text{constante} = C_T \quad (\text{IX-1})$$

onde os diferentes valores da constante C_T individualizam as superfícies magnéticas.

Expandindo (IX-1) em torno de $\rho_t^* = \rho_t^* \text{ RES}$, tal que $\bar{q}(\rho_t^* = \rho_t^* \text{ RES}) = m/n$ caracteriza a superfície magnética ressonante de equilíbrio, temos:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \cong & \Psi_H(\rho_t^* \text{ RES}) + \Psi_H'(\rho_t^* \text{ RES})(\rho_t^* - \rho_t^* \text{ RES}) \\ & + \Psi_H''(\rho_t^* \text{ RES})(\rho_t^* - \rho_t^* \text{ RES})^2/2 \\ & + f(\rho_t^* \text{ RES}) \cos N(u + n \bar{q}(\rho_t^* \text{ RES}) H(\rho_t^* \text{ RES}) \text{ sen } \theta_t) = C_T \end{aligned} \quad (\text{IX-2})$$

onde:

$$\begin{aligned} \Psi_H(\rho_t^* \text{ RES}) &= \text{constante} \\ \Psi_H'(\rho_t^* \text{ RES}) &= 0 \quad (\text{ver (VI-4)}) \end{aligned}$$

Definindo-se a constante K como:

$$K \equiv \frac{C_T - \Psi_H(\rho_t^* \text{ RES})}{f(\rho_t^* \text{ RES})}$$

e escolhendo-se um plano φ :

$$\varphi = \phi = \text{constante}$$

obtém-se de (IX-2):

$$\rho_t^* = \rho_t^* \text{RES} \pm \Delta(\theta_t) \quad (\text{IX-3})$$

onde:

$$\Delta(\theta_t) = \left[\frac{2f(\rho_t^* \text{RES})}{\Psi_H''(\rho_t^* \text{RES})} \left(K - \cos N(m\theta_t - n\phi + mH(\rho_t^* \text{RES})\text{sen } \theta_t) \right) \right]^{1/2}$$

Esta equação (IX-3) descreve as intersecções das superfícies magnéticas aproximadas com o plano $\varphi = \phi = \text{constante}$. Podemos distinguir três configurações distintas de superfícies, dependendo do valor da constante K:

- 1) $K = -1$: onde $\rho_t^* = \rho_t^* \text{ RES}$ para os m valores de θ_t que satisfazem a $\Delta(\theta_t) = 0$. Nos demais valores de θ_t , não existirão ρ_t^* correspondentes. Este valor de K descreve o que chamaremos de eixo magnético das ilhas ($K = -1$ equivale a $C = C_2$ no caso cilíndrico - ver item III-d, onde um problema análogo a este foi analisado qualitativamente);
- 2) $K = 1$: aqui, a quase todos os valores de θ_t correspondem dois valores distintos de ρ_t^* . Existem apenas m valores de θ_t que satisfazem a $\Delta(\theta_t) = 0$ e que correspondem a um único ρ_t^* ($= \rho_t^* \text{ RES}$). Este valor de K descreve a ilha mais externa possível que se forma sobre a superfície magnética ressonante de equilíbrio, quando adiciona-se a perturbação helicoidal. A variação da constante K entre -1 e 1 descreve as ilhas compreendidas entre o eixo magnético das ilhas e esta ilha mais externa ($-1 \leq K \leq 1$ equivale a $C_1 \leq C \leq C_2$ no caso cilíndrico - ver item III-d).
- 3) $K > 1$: vemos que para todo θ_t , tem-se sempre dois valores correspondentes de ρ_t^* , um maior que $\rho_t^* \text{ RES}$ e outro menor. Esta constante descreve duas superfícies magnéticas, uma interna ($\rho_t^* < \rho_t^* \text{ RES}$) e outra externa ($\rho_t^* > \rho_t^* \text{ RES}$) à superfície ressonante ($K > 1$ equivale a $C < C_1$ no caso cilíndrico).

A seguir, apresentamos o método que foi utilizado no mapeamento das ilhas magnéticas, que se obtém da expressão (IX-3).

IX-c) MÉTODO PARA MAPEAMENTO DAS ILHAS MAGNÉTICAS

- 1) Escolhe-se os valores de m , n (que caracterizam a superfície ressonante), de I_H (corrente nos condutores helicoidais externos), da constante K (escolha da ilha magnética) e do plano $\varphi = \phi$, para os quais se desejam mapear a ilha.
- 2) Fazendo-se $\bar{q}(\rho_t^* = \rho_t^* \text{ RES}) = m/n$ (expressão (VI-9)), determina-se numericamente o valor de $\rho_t^* \text{ RES}$.
- 3) Com este $\rho_t^* \text{ RES}$, calcula-se $f(\rho_t^* \text{ RES})$ (a partir de (VIII-7) e (VIII-8)), $\Psi_H''(\rho_t^* \text{ RES})$ (a partir de (VIII-5)) e $H(\rho_t^* \text{ RES})$ (a partir de (VI-7)), substituindo-se estes resultados em (IX-3).
- 4) Usando-se a expressão (IX-3) obtém-se, para cada valor de θ_t (com θ_t variando de 0 até 2π), o(s) correspondente(s) valor(es) de ρ_t^* , quando este(s) existir(em).
- 5) Com um par ρ_t^* , θ_t , utiliza-se a expressão abaixo (expressão (J-2)) para se determinar o valor de ρ_t correspondente:

$$\Psi_0(\rho_t^*) = \Psi_0(\rho_t) + \Psi_1(\rho_t) \cos \theta_t$$

- 6) Com este ρ_t e seu respectivo θ_t , obtém-se a posição deste ponto em coordenadas cilíndricas circulares, usando-se as expressões (ver (IV-1) e (IV-2)):

$$R = \rho_t \sinh \xi \quad \text{onde: } \xi = \operatorname{arccosh} \left[\frac{R_0}{\rho_t} - \cos \theta_t \right]$$

$$Z = \rho_t \sin \theta_t$$

- 7) O processo é repetido para os outros valores de θ_t .

IX-d) MAPAS DAS ILHAS MAGNÉTICAS (PRINCIPAIS)

Nos mapas apresentados a seguir, foram usados os valores numéricos típicos do TBR-1 (apresentados no apêndice G). Ainda, usou-se que:

- 1) O ângulo poloidal θ_t varia de 0 até 2π com um passo de $2\pi/200$.
- 2) $K = -1,0 ; -0,3 ; 0,3 ; 1,0$ - onde K é a constante que, caracteriza a escolha das ilhas magnéticas.
- 3) As curvas mais externas são, de fora para dentro, a borda da câmara ($\rho_t = \tilde{b}$) e a borda do plasma ($\rho_t = \tilde{a}$).
- 4) $N = 1$ - perto do eixo, a maior contribuição para o campo magnético perturbativo (\vec{b}) vem do termo de mais baixo N (ver capítulo V).

Os parâmetros escritos abaixo de cada gráfico são:

- 5) m, n - números inteiros, onde $\bar{q}(\rho_t^* = \rho_t^* \text{ RES}) = m/n$ caracteriza a superfície ressonante de equilíbrio.
- 6) I_H - corrente nos condutores helicoidais externos.
- 7) ϕ - constante que caracteriza o plano φ escolhido para o mapeamento da ilha ($\varphi = \phi$).

Estes três últimos parâmetros variam de um mapa para outro.

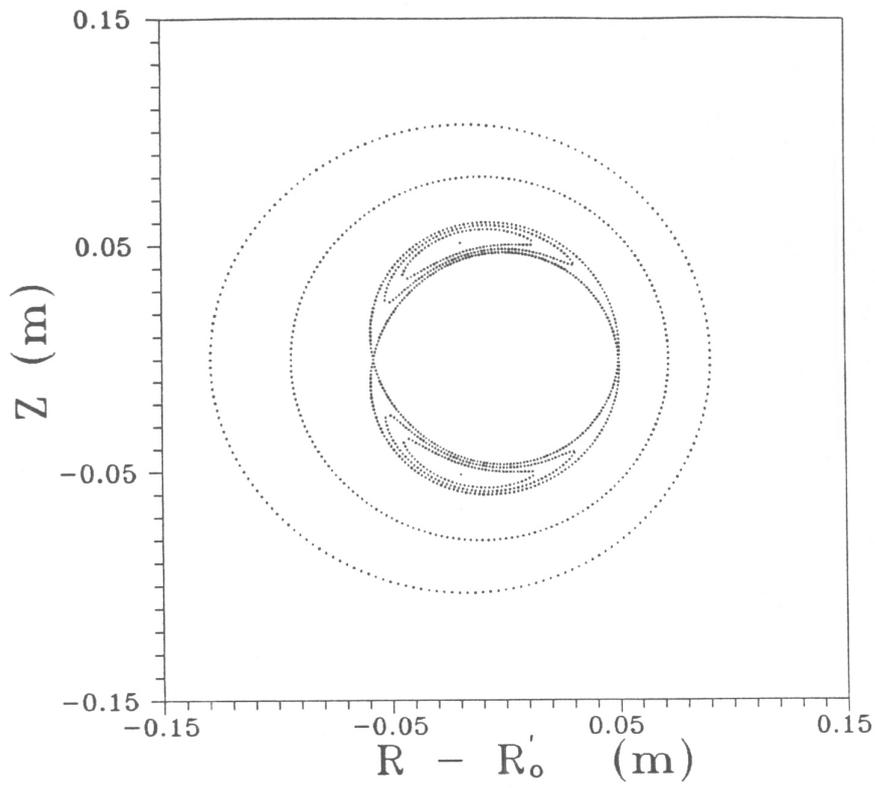


Figura IX-1: Ilhas para $m = 2$, $n = 1$, $I_H = 90$ A, $\phi = 0$.

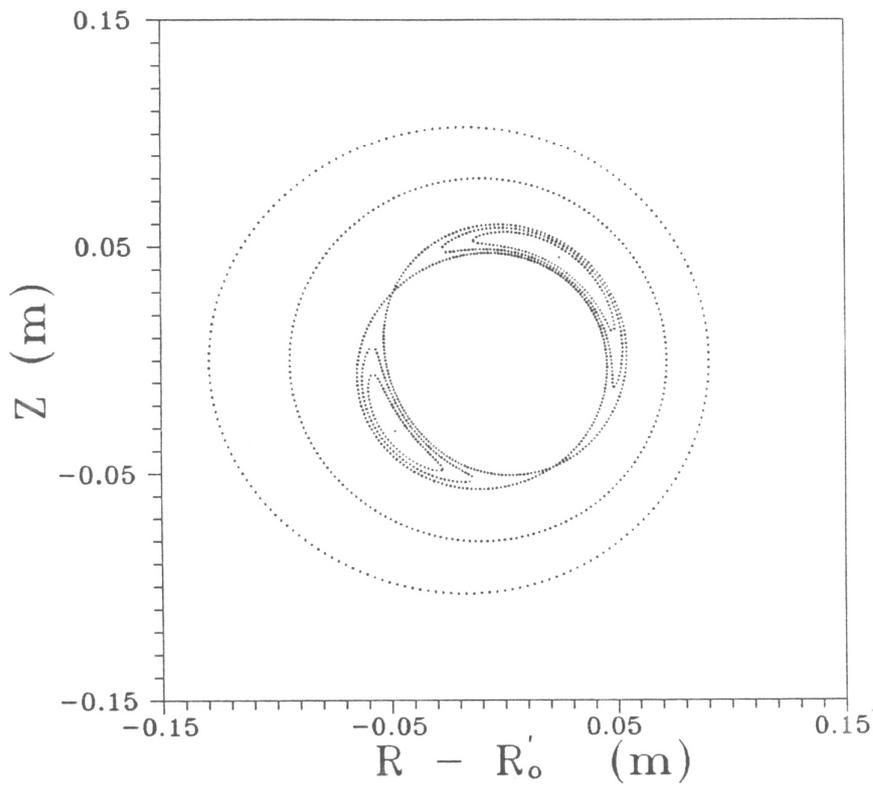


Figura IX-2: Ilhas para $m = 2$, $n = 1$, $I_H = 90$ A, $\phi = \pi/2$.

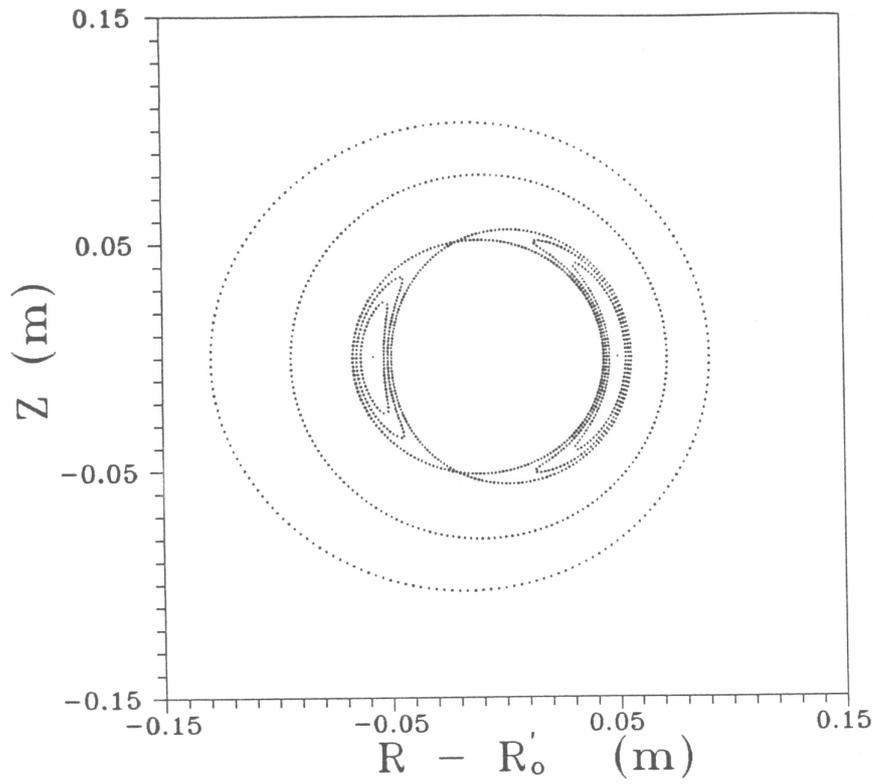


Figura IX-3: Ilhas para $m = 2$, $n = 1$, $I_H = 90$ A, $\phi = \pi$.

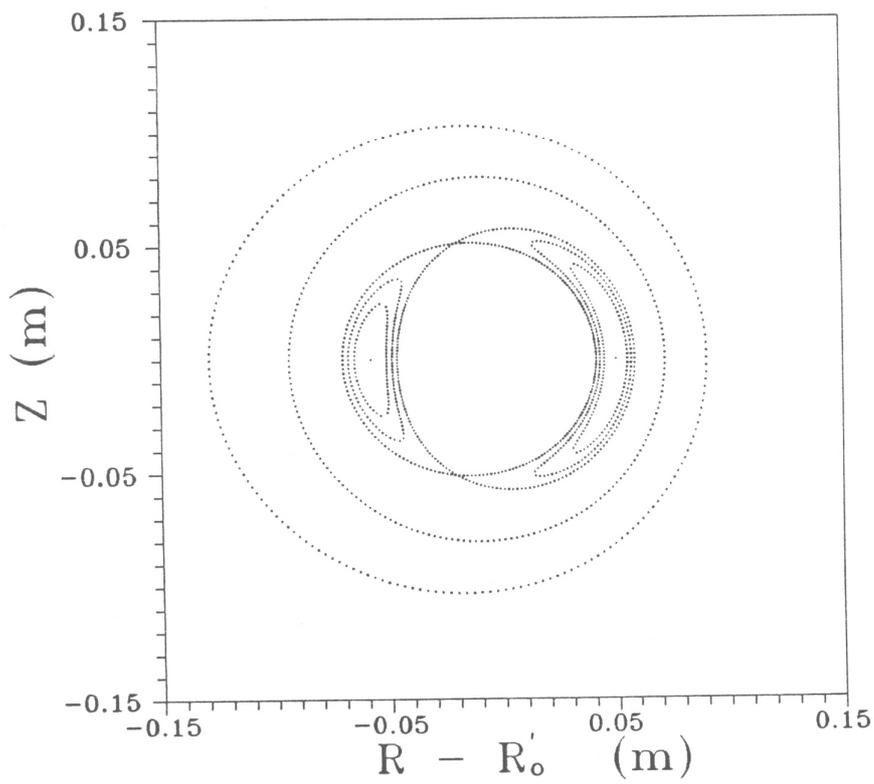


Figura IX-4: Ilhas para $m = 2$, $n = 1$, $I_H = 180$ A, $\phi = \pi$.

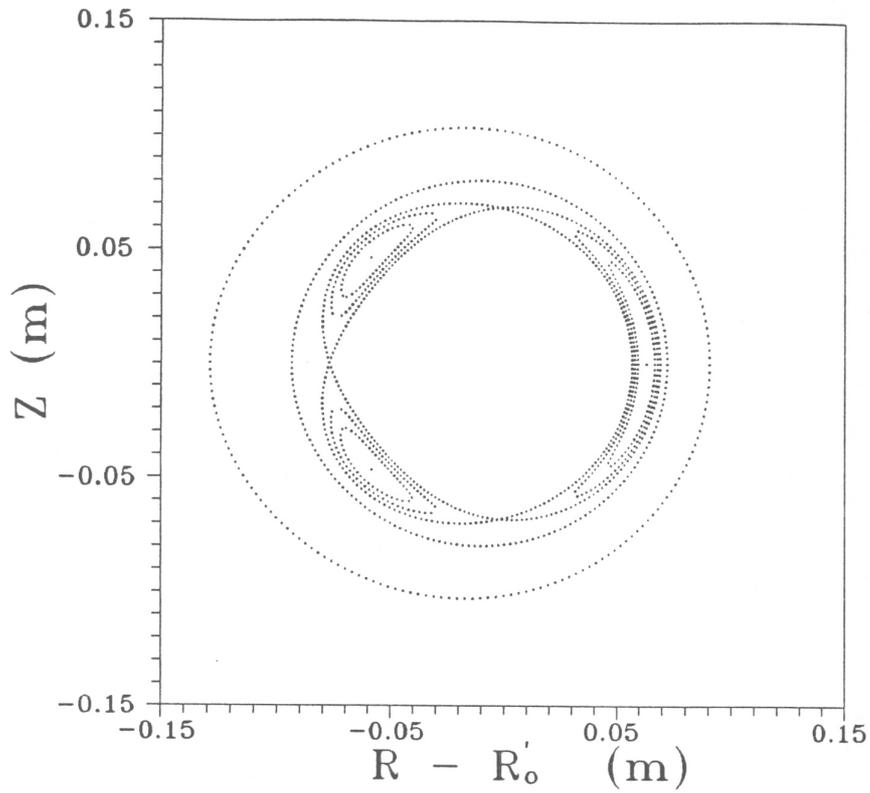


Figura IX-5: Ilhas para $m = 3$, $n = 1$, $I_H = 90$ A, $\phi = 0$.

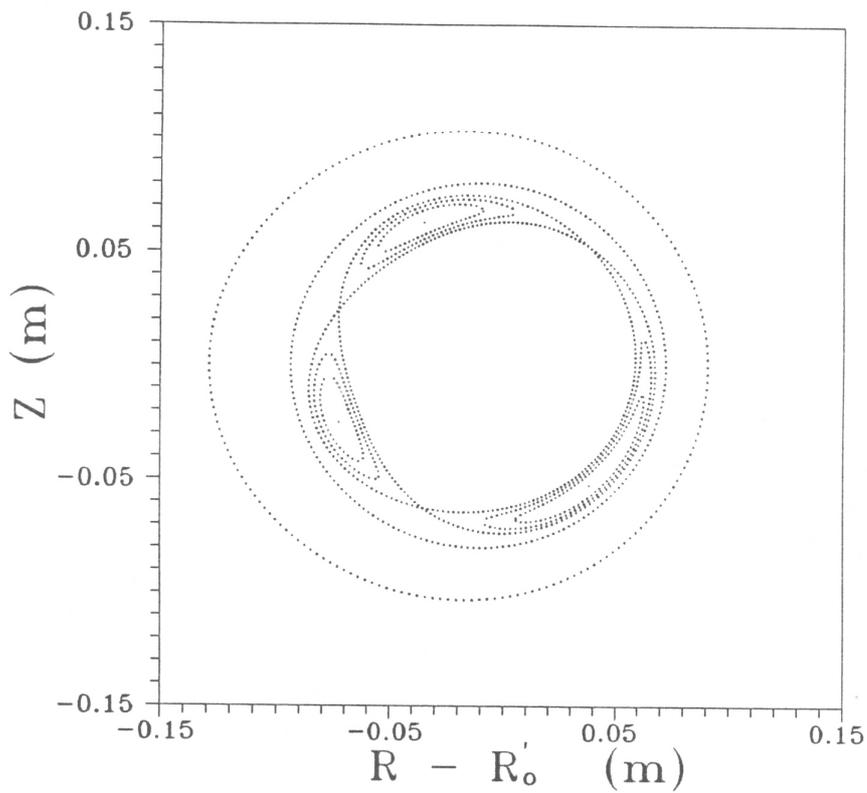


Figura IX-6: Ilhas para $m = 3$, $n = 1$, $I_H = 90$ A, $\phi = \pi/2$.

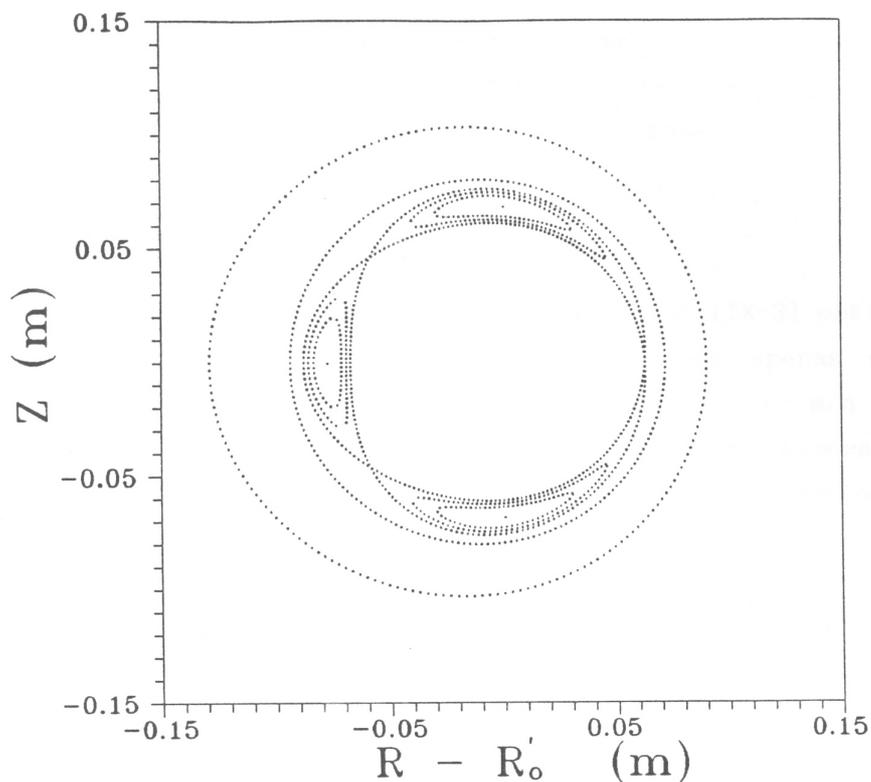


Figura IX-7: Ilhas para $m = 3$, $n = 1$, $I_H = 90$ A, $\phi = \pi$.

Analisando estes mapas, pode-se tirar algumas conclusões a respeito das estruturas das ilhas:

- 1) Ao considerarmos a forma toroidal do tokamak, obtivemos que as ilhas próximas da borda interna são menores e mais largas que as próximas a borda externa. No caso cilíndrico⁽¹⁷⁾, não havia esta assimetria.
- 2) As ilhas magnéticas giram com o mesmo "passo" da respectiva superfície ressonante de equilíbrio m/n , conforme varia-se a secção transversal ($\psi = \phi$) na qual se fazem os mapeamentos (ver as seqüências de figuras IX-1, IX-2, IX-3 e IX-5, IX-6, IX-7).
- 3) Para uma mesma corrente helicoidal externa, a largura das ilhas aumenta com m (ver, por exemplo, figuras IX-3 e IX-7), isto é, quanto mais externa for a superfície ressonante, maior as ilhas que se formam sobre ela.

- 4) Mesmo para pequenas correntes helicoidais externas ($I_H = 90 \text{ A} \cong 1\% I_p$), vemos que a largura das ilhas são grandes, se comparadas com as dimensões da borda do plasma.

Aqui cabe uma observação: da expressão (IX-3) obtida para $\bar{\Psi}$ vemos que, para m e n dados, existem ilhas apenas sobre a superfície ressonante de equilíbrio, com $\bar{q} = m/n$ (ilhas principais). Contudo, devido à geometria toroidal, esperamos que hajam também ilhas satélites sobre as superfícies racionais de equilíbrio com $\bar{q} = (m \pm 1)/n$.

Estas ilhas satélites não apareceram em nossas expressões, devido às coordenadas $\Psi_p, u = m \theta_t - n \varphi, \theta_t$ usadas na identificação de $2\pi\bar{\Psi}$ como fluxo de \vec{B} . Isto é, pelo método da média utilizado nesta identificação, tiramos o valor médio (em θ_t) da equação diferencial das linhas de campo de \vec{B} (ver (VII-2)), ao longo da curva definida pela intersecção das superfícies $\bar{\Psi}_p = c_1, \bar{u} = c_2$ (c_1, c_2 constantes). Como na região das ilhas satélites as linhas de \vec{B} têm um "passo" diferente desta curva (ao longo da qual se tirou a média), o valor de \vec{B} nesta região resultou nulo. Ou seja, a média, como foi feita, eliminou as ilhas satélites.

No próximo capítulo, adaptaremos o método utilizado no cálculo de $\bar{\Psi}$ para obtermos uma outra função de superfície aproximada ($\bar{\Psi}^{(s)}$) que contenha as linhas de \vec{B} na região das ilhas satélites, usando o seguinte sistema de coordenadas:

$$\Psi_p, u^{(s)} = m' \theta_t - n \varphi, \theta_t$$

onde $m' = m \pm 1$. Esperamos que este $\bar{\Psi}^{(s)}$ contenha as ilhas satélites.

CAPÍTULO X

ILHAS SATÉLITES

X-a) INTRODUÇÃO

Neste capítulo, calcularemos a estrutura das ilhas satélites de modo análogo ao desenvolvido para as ilhas principais.

No item b, será obtida uma condição semelhante a (VI-4), para o surgimento de ilhas satélites sobre as superfícies racionais de equilíbrio com $\bar{q} = (m \pm 1)/n$. No item c, $2\pi\bar{\Psi}^{(s)}$ (função de superfície aproximada que contém as linhas de campo de \vec{B} na região das ressonâncias satélites) será identificado como o fluxo de \vec{B} através de uma superfície helicoidal toroidal diferente daquela usada nos cálculos de $\bar{\Psi}$. No item d, obteremos uma expressão analítica para $\bar{\Psi}^{(s)}$ e, no item e, analisaremos esta expressão, verificando que ela contém a estrutura das ilhas satélites. Finalmente, no item f, apresentaremos alguns mapas destas ilhas para valores numéricos típicos do TBR-1.

X-b) CONDIÇÃO PARA O SURGIMENTO DE ILHAS SATÉLITES

Neste capítulo, usamos o seguinte sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned} x^1 &= \Psi_p(\rho_t, \theta_t) \\ x^2 &= u^{(s)} = m' \theta_t - n \varphi \quad (m' = m \pm 1) \\ x^3 &= \theta_t \end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga ao item VI-b, mostraremos que $2\pi\Psi_H^{(s)}$, definido como o fluxo de \vec{B}_0 através de uma superfície helicoidal toroidal cujo contorno externo é dado pela intersecção das superfícies $\Psi_P = c_1$ e $u^{(s)} = c_2$ (c_1, c_2 constantes), é um extremo na superfície racional de equilíbrio cujo $\bar{q} = m'/n$.

Então, escrevendo as relações (II-6) e (II-7) entre as componentes contravariantes de \vec{B}_0 (no sistema de coordenadas dado acima) e sua respectiva função de fluxo $\Psi_H^{(s)}$, tem-se (note que o sistema não é simétrico na terceira coordenada, que é θ_t):

$$\frac{\partial\Psi_H^{(s)}}{\partial\Psi_P} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \left[\frac{\rho_t}{n B_{0\theta_t}} \right] \left[B_{0\theta_t} \frac{m'}{h_\omega} - B_{0\varphi} \frac{n}{h_\varphi} \right] \quad (X-1)$$

$$\frac{\partial\Psi_H^{(s)}}{\partial u^{(s)}} = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_t \left[\frac{\rho_t}{n B_{0\theta_t}} \right] \vec{B}_0 \cdot \nabla\Psi_P = 0 \quad (X-2)$$

onde (X-2) se anula devido a (II-10), como no capítulo VI. Reescrevendo (X-1), usando a definição de \bar{q} dada por (VI-3):

$$\frac{d\Psi_H^{(s)}}{d\Psi_P} = \frac{m'}{n} - \bar{q}(\Psi_P) \quad (X-3)$$

Esta expressão (X-3) é análoga a (VI-4), obtida no caso da ilha principal.

No item seguinte, consideramos a superposição do campo do plasma em equilíbrio (\vec{B}_0) com o campo associado às correntes helicoidais externas (\vec{b}). Como o campo magnético total \vec{B} ($= \vec{B}_0 + \vec{b}$) não apresenta simetria, obteremos uma função de superfície magnética aproximada $\bar{\Psi}^{(s)}$, que contém as linhas do campo \vec{B} na região das ilhas satélites.

X-c) IDENTIFICAÇÃO DE $\bar{\Psi}^{(s)}$

Escrevendo a equação diferencial das linhas de \vec{B} no sistema de coordenadas dado no item b e desprezando termos da ordem de grandeza ou menores que $(b/B_0)^2$:

$$\frac{d\bar{\Psi}_P}{d\theta_t} \cong \frac{b^1}{B_0^3}$$

$$\frac{d\bar{u}^{(s)}}{d\theta_t} \cong \frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3} - \frac{B_0^2 b^3}{(B_0^3)^2}$$

que é um sistema análogo ao (VII-3).

Como o sistema acima de equações diferenciais é periódico na coordenada θ_t , pode-se aplicar o método da média para solucioná-lo. Desprezando termos da ordem de grandeza ou menores que $(b/B_0)(\rho_t/R_0)^2$, tem-se o seguinte sistema de equações diferenciais para as coordenadas médias (introduzidas pelo método da média utilizado - ver item VII-b):

$$\frac{d\bar{\Psi}_P}{d\theta_t} \cong \left[\frac{b^1}{B_0^3} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial \bar{u}^{(s)}} \left(\frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \right) \right]$$

(X-4)

$$\frac{d\bar{u}^{(s)}}{d\theta_t} \cong \left[\frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3} \right] - \frac{B_0^2}{B_0^3} \left[\frac{b^3}{B_0^3} + \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{(s)}} \left(\frac{b^3}{B_0^3} \right) \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \right]$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}_P} \left(\frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \right) \right]$$

(X-5)

Note que aqui há uma diferença fundamental em relação as expressões (VII-7) e (VII-8), obtidas no item VII-b (ilhas principais). Enquanto lá os termos equivalentes aos dois últimos termos das expressões (X-4) e (X-5) eram da ordem de grandeza de $(b/B_0)(\rho_t/R_0)^2$, e portanto foram desprezados, aqui eles são da ordem de grandeza de $(b/B_0)(\rho_t/R_0)$ e então, segundo a aproximação usada, devem ser considerados. Esta diferença se deve ao fato de que, no capítulo VII, as operações de média (—) e integração (^) em θ_t eram feitas mantendo-se $\bar{u} = m \theta_t - n \varphi = \text{constante}$, enquanto aqui estas operações são feitas mantendo-se $\bar{u}^{(s)} = (m \pm 1) \theta_t - n \varphi = \text{constante}$. Ainda, podemos notar que o segundo termo em (X-5) é desprezível em relação aos outros dois (um cálculo semelhante foi feito no apêndice N). Daí, o sistema de equações acima se reduz a:

$$\frac{d\bar{\Psi}_P}{d\theta_t} \cong \left[\frac{b^1}{B_0^3} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial \bar{u}^{(s)}} \left(\frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \right) \right]$$

(X-6)

$$\frac{d\bar{u}^{(s)}}{d\theta_t} \cong \left[\frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3} \right] - \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}_P} \left(\frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \right) \right]$$

Definindo $2\pi F$ como o fluxo do campo magnético total \vec{B} através da superfície helicoidal toroidal cujo contorno externo é dado pela intersecção das superfícies $\bar{\Psi}_P = c_1$ e $\bar{u}^{(s)} = c_2$ (c_1, c_2 constantes), obtém-se de (II-6) e (II-7):

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\Psi}_P} = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} d\theta_t \frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3} = \frac{1}{n} \frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3} \quad (X-7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{u}^{(s)}} = - \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} d\theta_t \frac{b^1}{B_0^3} = - \frac{1}{n} \frac{b^1}{B_0^3}$$

Comparando (IX-6) com (IX-7), são obtidas as seguintes relações:

$$\frac{d\bar{\Psi}_P}{d\theta_t} \cong - n \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{(s)}} \left[F - \frac{1}{n} \frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \right] \quad (X-8)$$

$$\frac{d\bar{u}^{(s)}}{d\theta_t} \cong n \frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}_P} \left[F - \frac{1}{n} \frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \right]$$

Definindo $\bar{\Psi}^{(s)}$ como:

$$\bar{\Psi}^{(s)} \equiv F - \frac{1}{n} \frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \quad (X-9)$$

vemos que as equações (X-8) equivalem a:

$$\nabla \bar{\Psi}^{(s)}(\bar{\Psi}_p, \bar{u}^{(s)}) \cdot d\vec{\ell} \cong 0 \quad (X-12)$$

de modo que:

$$\bar{\Psi}^{(s)}(\bar{\Psi}_p, \bar{u}^{(s)}) = \text{constante} \quad (X-10)$$

representa a equação procurada para as superfícies magnéticas aproximadas, que devem conter as ilhas satélites. $\bar{\Psi}^{(s)}$ pode ser obtida de (X-9), ou mais explicitamente:

$$\bar{\Psi}^{(s)} = \frac{1}{2\pi} \int_{(\bar{u}^{(s)} = \text{cte})} \vec{B}_0 \cdot d\vec{\sigma} + \frac{1}{2\pi} \int_{(\bar{u}^{(s)} = \text{cte})} \vec{b} \cdot d\vec{\sigma} - \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} d\theta_t \frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \quad (X-11)$$

$(\bar{\Psi}_p = \text{cte}), (\bar{u}^{(s)} = \text{cte})$

onde $d\vec{\sigma}$ é o elemento de área da superfície helicoidal toroidal acima definida. De (X-10), vemos que $\bar{\Psi}^{(s)}$ está em função das coordenadas médias $\bar{\Psi}_p$ e $\bar{u}^{(s)}$. As correções a estas coordenadas médias podem ser obtidas de maneira análoga a feita no capítulo VII, a partir de (VII-5) e (VII-6), obtendo-se (veja (VII-12) e (VII-14)):

$$\Psi_p(\rho_t^*) = \bar{\Psi}_p(\bar{\rho}_t^*)$$

(X-12)

$$u^{(s)} = \bar{u}^{(s)} - n \bar{q}(\bar{\rho}_t^*) H(\bar{\rho}_t^*) \text{ sen } \theta_t$$

No próximo item, obtemos uma expressão analítica para $\bar{\Psi}^{(s)}$, a partir de (X-11).

X-d) EXPRESSÃO ANALÍTICA PARA $\bar{\Psi}^{(s)}$

Usando a seguinte notação:

$$\Psi_H^{(s)} = \frac{1}{2\pi} \int_{(\bar{u}^{(s)} = cte)} \vec{B}_0 \cdot d\vec{\sigma} \quad (X-13)$$

$$\delta\Psi_H^{(s)} = \frac{1}{2\pi} \int_{(\bar{u}^{(s)} = cte)} \vec{b} \cdot d\vec{\sigma} \quad (X-14)$$

pode-se reescrever a expressão (X-11) para $\bar{\Psi}^{(s)}$ da seguinte forma:

$$\bar{\Psi}^{(s)} = \Psi_H^{(s)} + \delta\Psi_H^{(s)} - \frac{1}{n} \frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \quad (X-15)$$

onde $2\pi\Psi_H^{(s)}$ e $2\pi\delta\Psi_H^{(s)}$ são, respectivamente, os fluxos de \vec{B}_0 e \vec{b} através da superfície helicoidal toroidal cujo contorno externo é dado pela intersecção das superfícies $\bar{\Psi}_P = c_1$ e $\bar{u}^{(s)} = c_2$ (c_1, c_2 constantes).

$\Psi_H^{(s)}$ é calculado mais facilmente a partir da expressão (X-3). Desta, obtemos que (ver cálculo análogo no item IX-b):

$$\Psi_H^{(s)}(\bar{\rho}_t^*) = \frac{m' \mu_0 I_P R_0}{n} \left[2 \left(\frac{\bar{\rho}_t^*}{\tilde{a}} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\bar{\rho}_t^*}{\tilde{a}} \right)^4 + \frac{2}{3} \left(\frac{\bar{\rho}_t^*}{\tilde{a}} \right)^6 - \frac{1}{8} \left(\frac{\bar{\rho}_t^*}{\tilde{a}} \right)^8 \right] - \frac{\mu_0}{4\pi} I_E \frac{\bar{\rho}_t^{*2}}{R_0}, \quad (X-16)$$

$\delta\Psi_H^{(s)}$ é obtido de sua definição (X-14). Note que esta integral de superfície é feita mantendo-se $\bar{u}^{(s)} = \text{cte}$. Veja maiores detalhes deste cálculo no apêndice Q :

$$\delta\Psi_H^{(s)}(\bar{\rho}_t^*, \bar{u}^{(s)}) \cong \frac{m m' \mu_0 I_H R_0}{n} \frac{1}{2\pi \tilde{b}} \left[\frac{\bar{\rho}_t^*}{\tilde{b}} \right]^{m-1} \frac{\Psi_1(\bar{\rho}_t^*)}{\Psi_0(\bar{\rho}_t^*)} \cos \bar{u}^{(s)} \quad (X-17)$$

$$- \frac{1}{n} \frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \quad \text{é calculado mantendo-se } \bar{\Psi}_P = c_1 \text{ e } \bar{u}^{(s)} = c_2 \text{ (} c_1, c_2 \text{ constantes).}$$

Ver maiores detalhes no apêndice Q :

$$- \frac{1}{n} \frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \cong g(\bar{\rho}_t^*) \cos \bar{u}^{(s)} \quad (X-18)$$

onde:

$$g(\bar{\rho}_t^*) \cong \pm m \frac{\mu_0 I_H R_0}{2\pi} \left[\frac{\bar{\rho}_t^*}{\tilde{b}} \right]^m \bar{q}(\bar{\rho}_t^*) H(\bar{\rho}_t^*) \quad \text{para: } m' = m \pm 1$$

Antes de escrevermos a expressão procurada de $\bar{\Psi}^{(s)}$, observamos que para valores numéricos típicos do TBR-1 (apêndice G):

$$\left| \delta \Psi_H^{(s)} \right| \approx 1\% \left| - \frac{1}{n} \frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} \right| \approx 1\% \times 1\% \left| \Psi_H^{(s)} \right|$$

de modo que $\delta \Psi_H^{(s)}$ pode ser desprezado. Somando-se (X-16) e (X-18) e substituindo as correções para as coordenadas médias dadas por (X-12), escrevemos $\bar{\Psi}^{(s)}$ como:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^{(s)}(\rho_t^*, u^{(s)}, \theta_t) = & \\ = \frac{m'}{n} \frac{\mu_0 I_P R_0}{2\pi} & \left[2 \left(\frac{\rho_t^*}{\tilde{a}} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\rho_t^*}{\tilde{a}} \right)^4 + \frac{2}{3} \left(\frac{\rho_t^*}{\tilde{a}} \right)^6 - \frac{1}{8} \left(\frac{\rho_t^*}{\tilde{a}} \right)^8 \right] \\ - \frac{\mu_0}{4\pi} I_E \frac{\rho_t^{*2}}{R_0} & \pm m \frac{\mu_0 I_H R_0}{2\pi} \left(\frac{\rho_t^*}{\tilde{b}} \right)^m \bar{q}(\rho_t^*) H(\rho_t^*) \times \\ \times \cos N(u^{(s)} + n \bar{q}(\rho_t^*) H(\rho_t^*) \sin \theta_t) & \quad \text{para: } m' = m \pm 1 \end{aligned}$$

(X-19)

No próximo item, analisamos a expressão acima em torno das superfícies racionais de equilíbrio com $\bar{q} = (m \pm 1)/n$.

X-e) ANÁLISE DA EXPRESSÃO DE $\bar{\Psi}^{(s)}$

O método aqui apresentado é análogo ao do capítulo IX, onde analisou-se a expressão para $\bar{\Psi}$ que continha as ilhas principais.

Vimos, no item anterior, que a expressão procurada para $\bar{\Psi}^{(s)}$ é da seguinte forma:

$$\bar{\Psi}^{(s)} = \Psi_H^{(s)}(\rho_t^*) + g(\rho_t^*) \cos N(u^{(s)} + n \bar{q}(\rho_t^*) H(\rho_t^*) \text{ sen } \theta_t) = C_T^{(s)} \quad (\text{X-20})$$

onde os diferentes valores da constante $C_T^{(s)}$ individualizam as superfícies magnéticas.

Expandindo (X-20) em torno de $\rho_t^* = \rho_t^* \text{ RES}^{(s)}$, tal que $\bar{q}(\rho_t^* = \rho_t^* \text{ RES}^{(s)}) = m'/n$, e definindo a constante KS como:

$$KS \equiv \frac{-C_T^{(s)} + \Psi_H^{(s)}(\rho_t^* \text{ RES}^{(s)})}{|g(\rho_t^* \text{ RES}^{(s)})|}$$

obtem-se:

$$\rho_t^* = \rho_t^* \text{RES}^{(s)} \pm \Delta^{(s)}(\theta_t) \quad (\text{X-21})$$

onde:

$$\Delta^{(s)}(\theta_t) = \left[\frac{2 |g(\rho_t^* \text{RES}^{(s)})|}{|\Psi_H''(\rho_t^* \text{RES}^{(s)})|} \times \right. \\ \left. \times \left[KS \pm \cos(m'\theta_t - n\phi + m'H(\rho_t^* \text{RES}^{(s)}) \text{sen } \theta_t) \right] \right]^{1/2}$$

para: $m' = m \pm 1$

Esta equação descreve as intersecções das superfícies magnéticas aproximadas, na região das ilhas satélites, com o plano $\varphi = \phi$ escolhido.

Pode-se mapear as ilhas satélites de um modo análogo ao que foi feito para as ilhas principais (item IX-c).

IX-f) MAPAS DAS ILHAS MAGNÉTICAS PRINCIPAIS E SATÉLITES

Nos mapas apresentados abaixo, foram usados os valores numéricos típicos do TBR-1, apresentados no apêndice G.

Ainda, em todos os gráficos:

- 1) O ângulo poloidal θ_t varia de 0 a 2π com um passo de $2\pi/200$.
- 2) $KS = -1,0 ; -0,3 ; 0,3 ; 1,0$ - onde KS é a constante que caracteriza as ilhas satélites.

Os parâmetros escritos abaixo de cada gráfico são:

- 3) m', m, n - números inteiros, onde $\bar{q}(\rho_t^* = \rho_t^*_{RES}) = m/n$ e $\bar{q}(\rho_t^* = \rho_t^*_{RES}^{(s)}) = m'/n$ caracterizam, respectivamente, as superfícies magnéticas racionais sobre as quais se formam as ilhas principais e as ilhas satélites, quando a perturbação externa é superposta ao equilíbrio.
- 4) I_H - corrente nos condutores helicoidais externos.
- 5) ϕ - constante que caracteriza o plano φ escolhido para o mapeamento das ilhas ($\varphi = \phi$).

Observação: junto com os mapas das ilhas satélites, apresentamos os mapas das ilhas principais correspondentes (veja figuras IX-1 a IX-7).

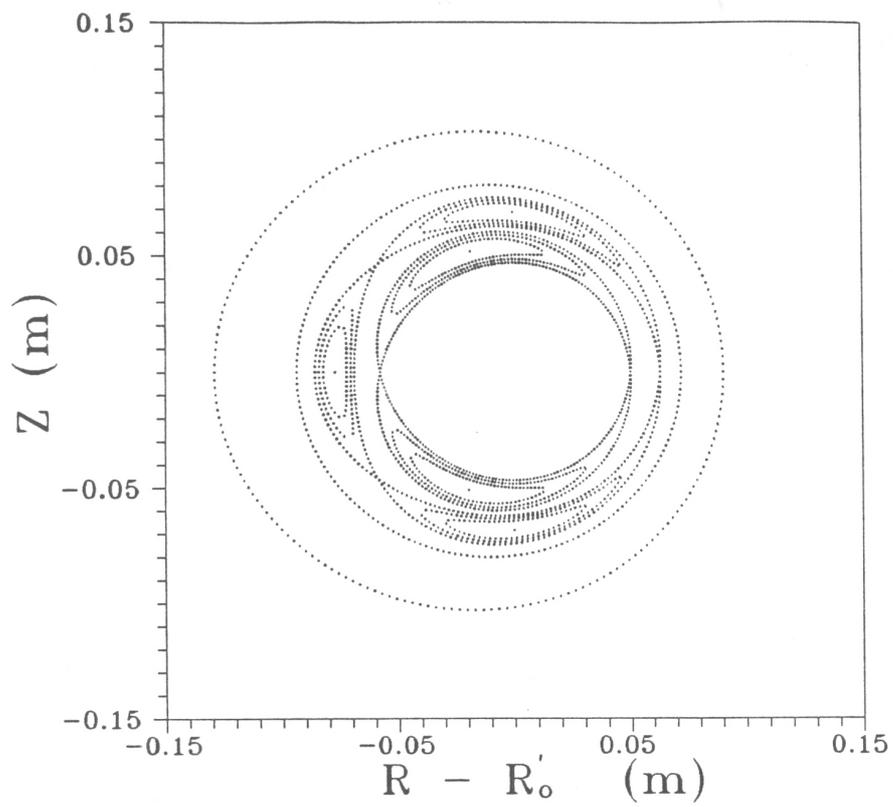


Figura X-1: $m = 2$, $m' = 3$, $n = 1$, $I_H = 90$ A, $\phi = 0$.

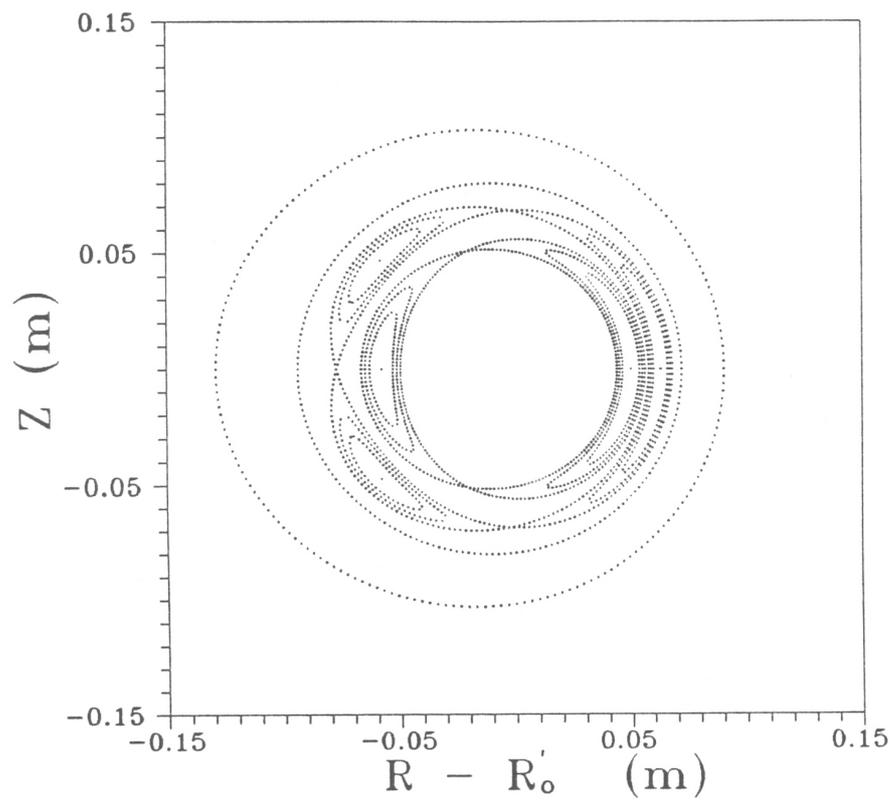


Figura X-2: $m = 2$, $m' = 3$, $n = 1$, $I_H = 90$ A, $\phi = \pi$.

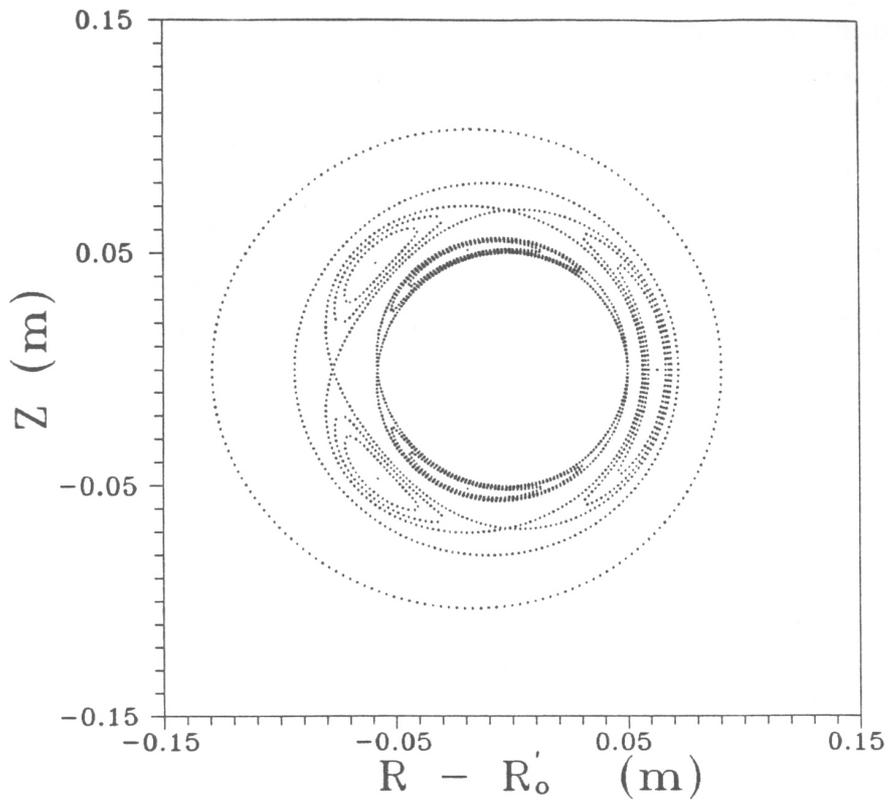


Figura X-3: $m = 3$, $m' = 2$, $n = 1$, $I_H = 90$ A, $\phi = 0$.

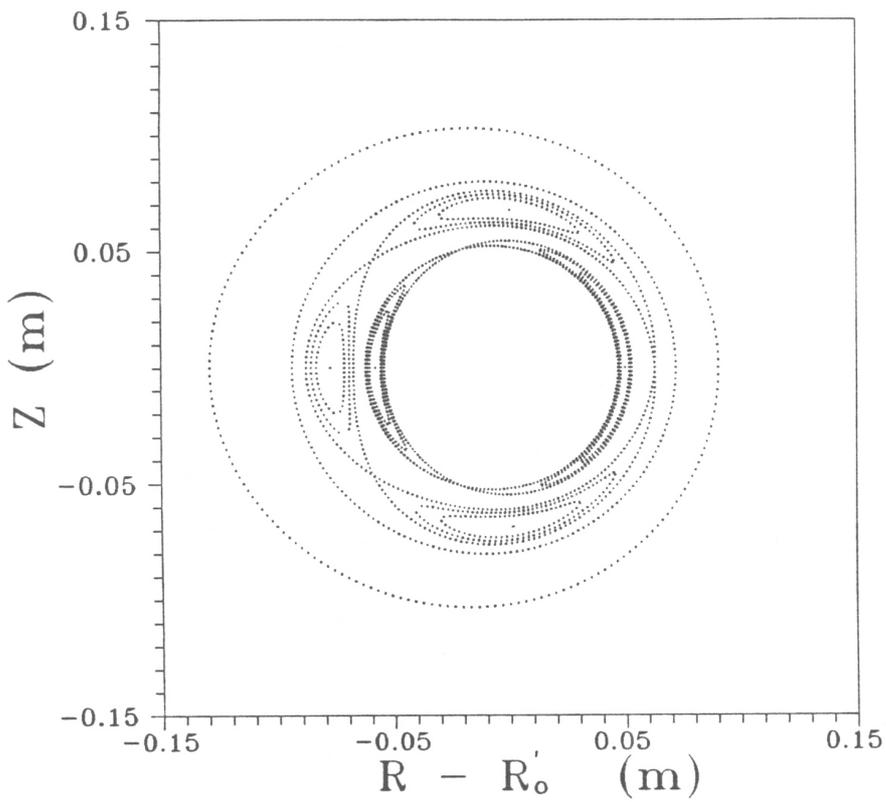


Figura X-4: $m = 3$, $m' = 2$, $n = 1$, $I_H = 90$ A, $\phi = \pi$.

Algumas conclusões podem ser tiradas a respeito das estruturas das ilhas satélites, analisando-se estes mapas:

- 1) As larguras das ilhas que se formam sobre a superfície racional de equilíbrio $m = 3/n = 1$, são aproximadamente iguais, tanto para o caso destas ilhas serem principais ($m = 3$ - figuras X-3 e X-4), quanto para o caso de serem satélites ($m' = 3$, $m = 2$ - figuras X-1 e X-2).
- 2) As ilhas que se formam sobre a superfície racional de equilíbrio $m = 2/n = 1$, são nitidamente maiores para o caso de serem principais ($m = 2$ - figuras X-1 e X-2), do que para o caso de serem satélites ($m' = 2$, $m = 3$ - figuras X-3 e X-4).
- 3) As posições dos nós das ilhas que se formam sobre a superfície racional $m = 2/n = 1$ são as mesmas, tanto para o caso destas ilhas serem principais ($m = 2$), quanto para o caso de serem satélites ($m' = 2$, $m = 3$).
- 4) As posições dos nós das ilhas principais ($m = 3$) que se formam sobre a superfície racional $m = 3/n = 1$, estão giradas de 180° em relação às posições dos nós das ilhas satélites ($m' = 3$, $m = 2$) que se formam sobre esta mesma superfície.

Estas estruturas de ilhas que apresentamos acima são semelhantes às obtidas por Okano^(14,15) através da integração numérica da equação diferencial das linhas de campo de \vec{B} . Abaixo são apresentados dois de seus mapeamentos numéricos.

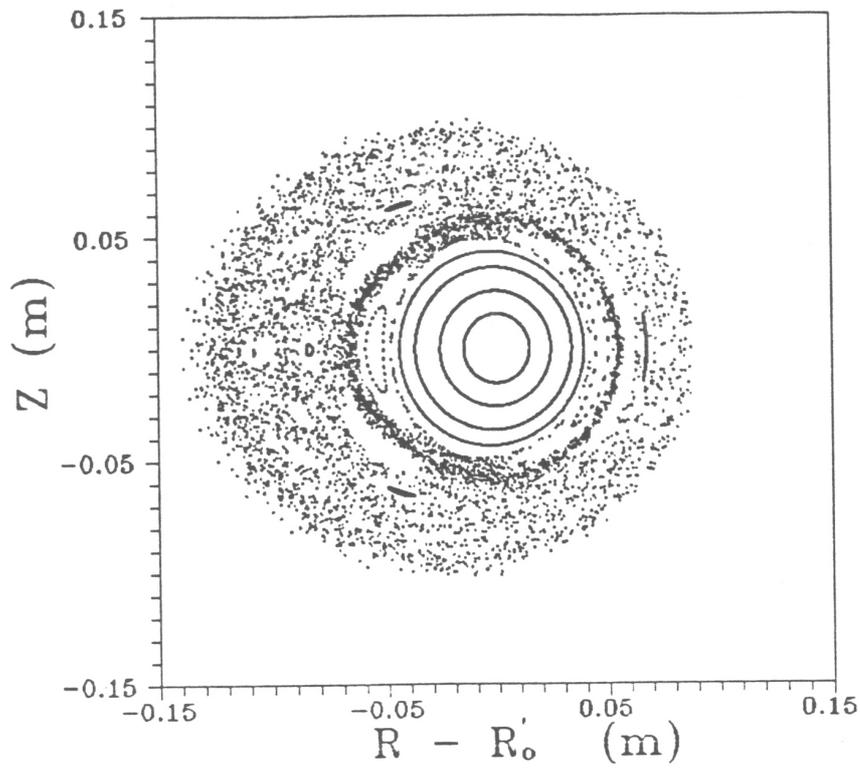


Figura X-5: $m = 2$, $n = 1$, $I_H = 90$ A, $\phi = \pi$.

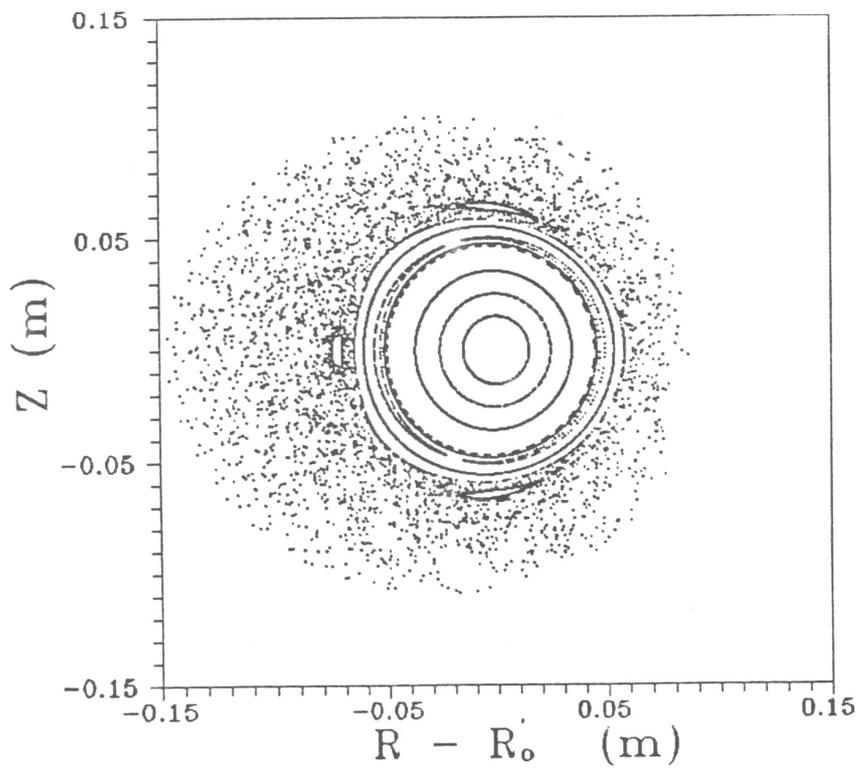


Figura X-6: $m = 3$, $n = 1$, $I_H = 90$ A, $\phi = \pi$.

Ao se comparar as figuras X-5 com X-2 e X-6 com X-4, concluímos que deve ser válido o método analítico por nós desenvolvido para a obtenção da estrutura do campo \vec{B} (equilíbrio + perturbação) em torno das superfícies racionais com $\bar{q} = m/n$ (ilhas principais) e $\bar{q} = (m \pm 1)/n$ (ilhas satélites).

CAPÍTULO XI

CONCLUSÃO

O nosso objetivo, neste trabalho, era analisar teoricamente a instabilidade disruptora que ocorre em plasmas confinados em tokamaks, investigando-se a influência de campos ressonantes em seu equilíbrio. Para isso, consideramos a superposição do campo magnético do plasma em equilíbrio MHD estático axialmente simétrico com o campo associado às correntes helicoidais externas, levando-se em conta a geometria toroidal do tokamak. Devido à adição desta perturbação helicoidal, o sistema perde sua simetria axial. Esta quebra de simetria faz com que seja possível calcular analiticamente apenas funções de superfícies magnéticas aproximadas para o campo magnético total (\vec{B}) resultante desta superposição. Este campo \vec{B} foi escrito num sistema de coordenadas especialmente por nós escolhido (Ψ_p, u, θ_t) e utilizamos o método da média para solucionar a equação diferencial de suas linhas de campo. Com isso, calculamos uma função de superfície aproximada ($\bar{\Psi}$) que continha as linhas de \vec{B} em torno da região da superfície ressonante de equilíbrio ($\bar{q} = m/n$), após identificarmos $2\pi\bar{\Psi}$ como o fluxo de \vec{B} através de uma superfície helicoidal toroidal. Verificamos que \vec{B} apresentava, nesta região de ressonância, estrutura de ilhas magnéticas. Com um método análogo, calculamos uma outra função de superfície aproximada ($\bar{\Psi}^{(s)}$), que continha as linhas de \vec{B} em torno das superfícies racionais de equilíbrio com $\bar{q} = (m \pm 1)/n$. Verificamos que também nestas regiões, \vec{B} apresentava estrutura de ilhas (satélites), apesar da perturbação externa considerada ter um único modo. Utilizando valores numéricos típicos do tokamak TBR-1, fizemos alguns mapas para estas superfícies magnéticas aproximadas ($\bar{\Psi}$ e $\bar{\Psi}^{(s)}$). Por estes mapas, podemos avaliar o valor da corrente helicoidal externa (I_H) para que haja superposição de ilhas de modos diferentes. Por exemplo, para $I_H \cong 1\% I_p$, as ilhas principais e satélites quase se

cruzavam; e as ilhas que se formavam sobre a superfície de equilíbrio com $\bar{q} = 3$ quase tocavam o limitador. Podemos concluir que mesmo pequenas perturbações externas podem produzir a disruptura.

Observamos ainda que esta estrutura de ilhas que obtivemos é semelhante à calculada numericamente por Okano, o que deve validar o método analítico aqui desenvolvido.

Como última observação ressaltamos que, embora nas nossas aplicações numéricas utilizamos valores típicos do TBR-1, as expressões analíticas obtidas e o método desenvolvido podem ser aplicados para outros tokamaks.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Mutsuko Y. Kucinski e a Iberê L. Caldas pelo interesse e dedicação com que me orientaram neste trabalho, e a Valdir Okano, pela disposição em sempre me ajudar.

Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro.

COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALIZADAS

- A-1) Dado um sistema de coordenadas x^1, x^2, x^3 , as superfícies $x^i = c_i$, onde c_i são constantes, são chamadas de superfícies coordenadas.
- A-2) A curva coordenada x^i é uma curva ao longo da qual x^j e x^k são constantes ($i \neq j \neq k$).
- A-3) Os vetores da base covariante são dados por $\vec{e}_i = \partial \vec{r} / \partial x^i$, \vec{e}_i tangente à curva x^i .
- A-4) O tensor métrico covariante é dado por $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, onde $\det g_{ij} = g$.
- A-5) Os vetores da base contravariante são definidos como os vetores normais às superfícies coordenadas x^i : $\vec{e}^i = \nabla x^i$.
- A-6) O tensor métrico contravariante é dado por: $g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j$, onde $\det g^{ij} = 1/g$.
- A-7) As coordenadas x^1, x^2, x^3 são definidas numa ordem tal que: $\vec{e}_i = \sqrt{g} (\vec{e}^j \times \vec{e}^k)$, para qualquer permutação cíclica i, j, k .
- A-8) $\vec{e}_i = g_{ij} \vec{e}^j$; $\vec{e}^i = g^{ij} \vec{e}_j$
 $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_{ij}$ (δ_{ij} : delta de Kronecker).
- A-9) Um vetor \vec{A} qualquer pode ser escrito como:
 $\vec{A} = A_i \vec{e}^i = A^i \vec{e}_i$ onde: $A^i = \vec{A} \cdot \vec{e}^i$; $A_i = \vec{A} \cdot \vec{e}_i$
 sendo os coeficientes A_i e A^i as componentes covariante e contravariante do vetor \vec{A} , respectivamente.
- A-10) O elemento de área $d\vec{\sigma}$ normal à superfície coordenada $x^i = cte$ é dado por: $d\vec{\sigma} = \sqrt{g} \vec{e}^i dx^j dx^k$.

APÊNDICE B

SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS ρ, θ, z

1) Base contravariante (obtida de (A-5) - apêndice A):

$$\begin{aligned}\vec{e}^1 &= \nabla\rho = \vec{e}_\rho \\ \vec{e}^2 &= \nabla\theta = \vec{e}_\theta / \rho \\ \vec{e}^3 &= \nabla z = \vec{e}_z\end{aligned}$$

2) Elementos do tensor métrico contravariante (obtidos de (A-6)):

$$g^{11} = g^{33} = 1 \quad , \quad g^{22} = 1/\rho^2$$

e:

$$\sqrt{g} = \rho$$

3) Base covariante (de (A-3)):

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_2 &= \rho \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_z\end{aligned}$$



APÊNDICE C

SISTEMA DE COORDENADAS Ψ_P^{cil} , u , θ

$2\pi\Psi_P^{cil}$ é o fluxo poloidal do campo magnético do plasma em equilíbrio (na aproximação cilíndrica) e u é definido como:

$$u = m\theta - n(z/R_0)$$

com m, n sendo números inteiros.

A base contravariante é dada por (levando-se em conta (III-2) e (III-3)):

$$\begin{aligned}\vec{e}^1 &= \nabla\Psi_P^{cil} = \frac{\partial\Psi_P^{cil}}{\partial\rho} \vec{e}_\rho = B_{0\theta} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}^2 &= \nabla u = (m/\rho) \vec{e}_\theta - (n/R_0) \vec{e}_z \\ \vec{e}^3 &= \nabla\theta = \vec{e}_\theta / \rho\end{aligned}$$

Como:

$$\sqrt{g} = 1 / (\vec{e}^1 \cdot \vec{e}^2 \times \vec{e}^3)$$

(ver (A-7)), obtém-se para este sistema de coordenadas:

$$\sqrt{g} = (\rho R_0) / (n B_{0\theta})$$

APÉNDICE D

SISTEMA DE COORDENADAS TOROIDAIS ξ, ω, φ

Base contravariante:

$$\vec{e}^1 = \nabla \xi = \vec{e}_\xi / h_\xi$$

$$\vec{e}^2 = \nabla \omega = \vec{e}_\omega / h_\omega$$

$$\vec{e}^3 = \nabla \varphi = \vec{e}_\varphi / h_\varphi$$

onde:

$$h_\xi = h_\omega = \frac{R_0}{\cosh \xi - \cos \omega}$$

(D-1)

$$h_\varphi = \frac{R_0}{\cosh \xi - \cos \omega} \sinh \xi$$

APÊNDICE E

SISTEMA DE COORDENADAS TOROIDAIS POLARES $\rho_t, \theta_t, \varphi$

1) Relações com o sistema de coordenadas polares locais:

Definimos as coordenadas polares locais centradas em O' :

$$x^1 = \rho, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi$$

em termos das coordenadas cilíndricas circulares R, φ, Z por (ver figura abaixo):

$$R = R_0 - \rho \cos \theta$$

(E-1)

$$Z = \rho \sin \theta$$

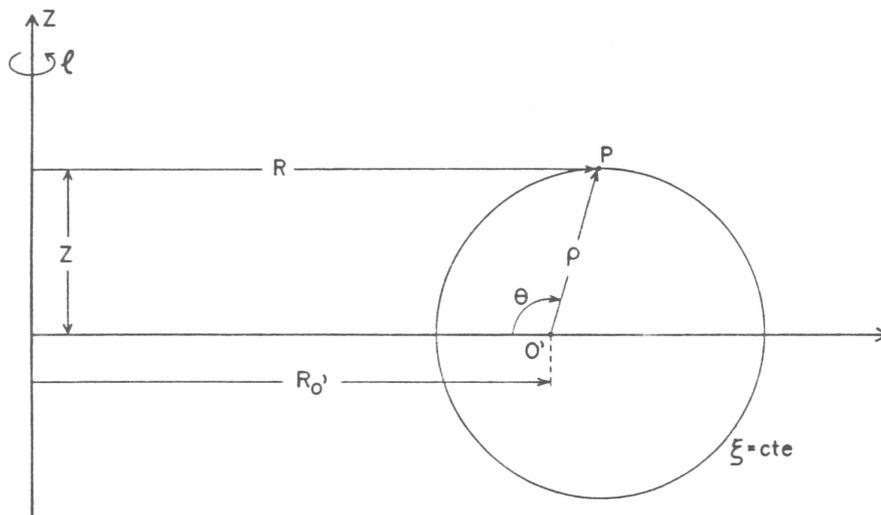


Figura E-1: Sistemas de coordenadas polares locais (ρ, θ, φ) e cilíndricas circulares (R, φ, Z) .

Podemos relacionar ρ_t, θ_t com as coordenadas polares locais ρ, θ usando as expressões (IV-1), (IV-2) e (E-1). Obtém-se:

$$\rho_t = \rho \left[1 - \left(\frac{\rho}{R_0} \right) \cos \theta + \left(\frac{\rho}{2R_0} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\text{sen } \theta_t = \text{sen } \theta \left[1 - \left(\frac{\rho}{R_0} \right) \cos \theta + \left(\frac{\rho}{2R_0} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

Estas relações mostram que, no limite $(\rho/R_0) \ll 1$, ρ_t e θ_t tornam-se ρ e θ , respectivamente.

2) Base contravariante:

$$\begin{aligned} \vec{e}^1 &= \nabla \rho_t = -(\rho_t/R_0) \text{senh } \xi \vec{e}_\xi + (\rho_t/R_0) \text{sen } \theta_t \vec{e}_{\theta_t} \\ \vec{e}^2 &= \nabla \theta_t = \vec{e}_{\theta_t} / \rho_t \\ \vec{e}^3 &= \nabla \varphi = \vec{e}_\varphi / (\rho_t \text{senh } \xi) \end{aligned} \quad (\text{E-2})$$

e:

$$\sqrt{g} = R_0 \rho_t \quad (\text{E-3})$$

3) Base covariante:

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_1 &= -R_{0,t} / (\rho_t \sinh \xi) \vec{e}_\xi \\
 \vec{e}_2 &= \rho_t (\sin \theta_t / \sinh \xi) \vec{e}_\xi + \rho_t \vec{e}_{\theta_t} \\
 \vec{e}_3 &= \rho_t \sinh \xi \vec{e}_\varphi
 \end{aligned}
 \tag{E-4}$$

4) Relação útil:

Partindo de (IV-2) e usando que $\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$, temos:

$$\sinh \xi = \frac{R_{0,t}}{\rho_t} \left[1 - \left[\frac{2\rho_t}{R_{0,t}} \right] \cos \theta_t - \left[\frac{\rho_t}{R_{0,t}} \sin \theta_t \right]^2 \right]^{1/2}$$

(E-5)

Observação:

$$\begin{aligned}
 h_\xi &= h_\omega = \rho_t \\
 h_\varphi &= \rho_t \sinh \xi
 \end{aligned}$$

(veja expressões (D-1) e (IV-2)).

APÊNDICE F

DETERMINAÇÃO DA CONSTANTE J_0

Qualquer que seja a distribuição de corrente considerada, a corrente longitudinal do plasma em equilíbrio deve ter o valor medido I_p , isto é, deve satisfazer a:

$$I_p = \int_{(\text{PLASMA})} \vec{J} \cdot d\vec{\sigma}$$

onde: \vec{J} é a densidade de corrente do plasma em equilíbrio,

$d\vec{\sigma}$ é o elemento de área da secção $\varphi = \text{cte}$, nas coordenadas $\rho_t, \theta_t, \varphi$ e é dado por (veja expressões (A-10) e (E-3)):

$$d\vec{\sigma} = R_0, \rho_t \vec{e}^3 d\rho_t d\theta_t$$

Usando a aproximação:

$$J_3 \approx J_{30}$$

I_p é dado por:

$$I_p = \int \vec{J} \cdot d\vec{\sigma} \approx \int J_{30} \vec{e}^3 R_0, \rho_t \vec{e}^3 d\rho_t d\theta_t$$

Substituindo-se nesta última integral a expressão de J_{30} fornecida por Egorov (veja (IV-10)), então:

$$I_P \approx \int_0^{\tilde{a}} d\rho_t \int_0^{2\pi} d\theta_t j_0 \left[1 - \left[\frac{\rho_t}{\tilde{a}} \right]^2 \right]^3 \frac{R_0}{\rho_t \sinh^2 \xi}$$

Se $(\rho_t/R_0) \ll 1$, temos (ver (E-5)):

$$\sinh \xi = (R_0/\rho_t)$$

Daí, I_P pode ser escrito como:

$$I_P = \frac{\pi \tilde{a}^2}{4R_0} j_0$$

Com isso, calculou-se j_0 em função da corrente longitudinal do plasma em equilíbrio I_P :

$$j_0 = \frac{4R_0}{\pi \tilde{a}^2} I_P \quad (F-1)$$

APÊNDICE G

VALORES NUMÉRICOS TÍPICOS DO TBR-1

$a = 0,08$ m - raio do limitador

$b = 0,11$ m - raio menor do TBR-1

$R_0 = 0,30$ m - raio maior do TBR-1

$I_p = 9,2$ kA - corrente longitudinal do plasma

$I_E = 600$ kA - corrente externa que produz o campo toroidal

$\Lambda(a) \cong 0,28$ - parâmetro adimensional que se relaciona com β_p pela expressão: $\Lambda(a) = \ell_1/2 + \beta_p - 1$. (Para o modelo de Egorov, $\ell_1/2 \cong 0,72$; então $\beta_p \cong 0,56$.)

OBSERVAÇÃO: As curvas $\rho_t = \tilde{a}$, $\rho_t = \tilde{b}$ representam a borda do plasma e a borda da câmara do TBR-1, respectivamente, se se tomar:

$$\tilde{a} \approx 0,08 \text{ m}$$

$$\tilde{b} \approx 0,103 \text{ m}$$

$$R_{0'} \approx 0,32 \text{ m}$$

onde $R_{0'}$ é o raio maior da origem O' das coordenadas ρ_t, θ_t (veja figura (IV-1)).

A figura G-1 a seguir representa o tokamak e a figura G-2 mostra as curvas $\rho_t = 0,08$ m, $\rho_t = 0,103$ m. Vemos que há uma boa concordância entre as duas configurações, usando-se os valores numéricos citados acima.

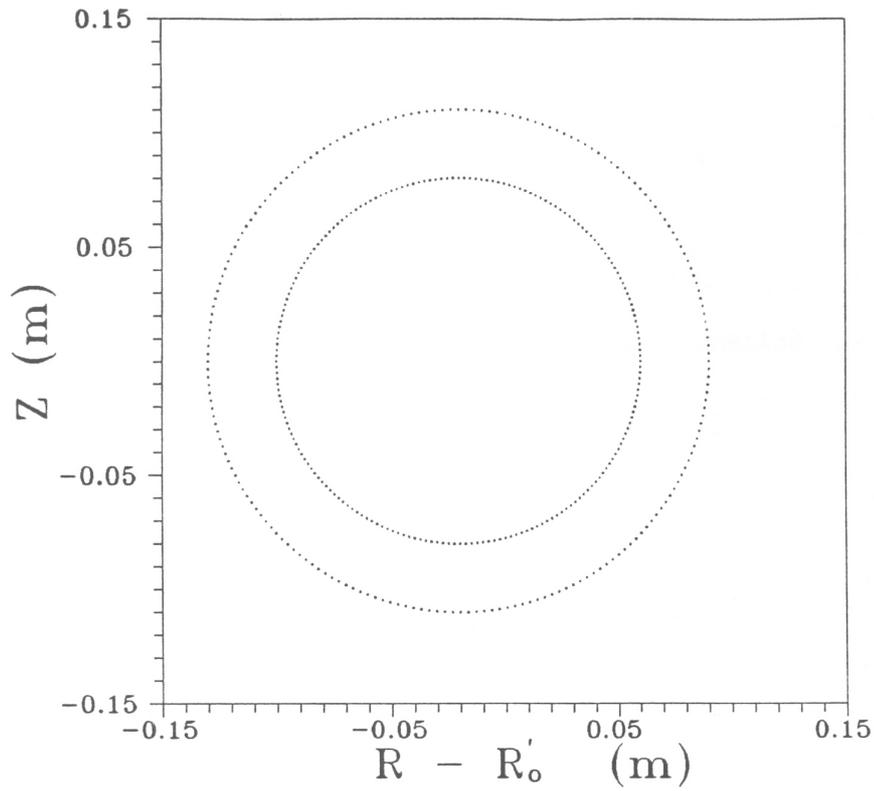


Figura G-1: Bordas do plasma e da câmara do tokamak TBR-1.

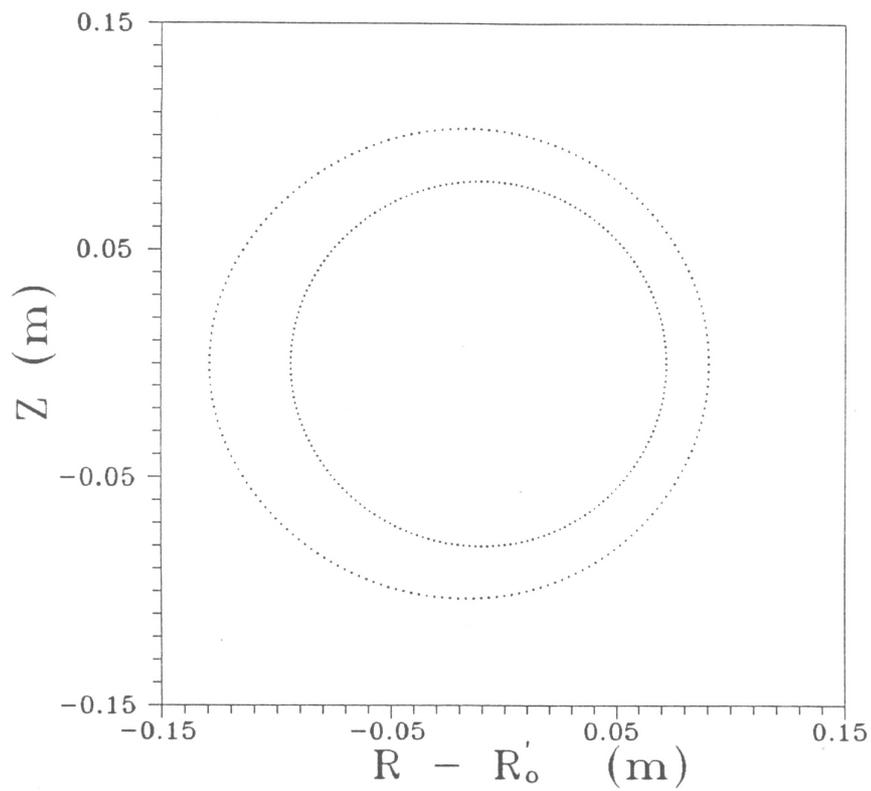


Figura G-2: Curvas $\rho_t = \tilde{a} \cong 0,08$ m, $\rho_t = \tilde{b} \cong 0,103$ m, com $R_o, \cong 0,32$ m.

APÊNDICE H

SISTEMA DE COORDENADAS Ψ_p, u, θ_t

$2\pi\Psi_p$ é o fluxo poloidal do campo magnético do plasma toroidal em equilíbrio e u é definido como:

$$u = m \theta_t - n \varphi$$

com m, n sendo números inteiros (em analogia com o caso cilíndrico - apêndice C).

A base contravariante é dada por:

$$\begin{aligned} \vec{e}^1 &= \nabla_{\Psi_p}(\rho_t, \theta_t) = \left[-\rho_t \frac{\sinh \xi}{R_0} \vec{e}_{\xi} + \rho_t \frac{\sin \theta_t}{R_0} \vec{e}_{\theta_t} \right] \frac{\partial \Psi_p}{\partial \rho_t} + \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \Psi_p}{\partial \theta_t} \vec{e}_{\theta_t} \\ \vec{e}^2 &= \nabla u = (m/\rho_t) \vec{e}_{\theta_t} - (n/(\rho_t \sinh \xi)) \vec{e}_{\varphi} \\ \vec{e}^3 &= \nabla \theta_t = (1/\rho_t) \vec{e}_{\theta_t} \end{aligned} \quad (\text{H-1})$$

e:

$$\sqrt{g} = \frac{1}{n (B_{0\theta_t} / \rho_t)} = \frac{1}{n B_0^3} \quad (\text{H-2})$$

onde usou-se (IV-14).

APÊNDICE J

RELAÇÃO ENTRE ρ_t E θ_t SOBRE UMA SUPERFÍCIE MAGNÉTICA
DE EQUILÍBRIO $\Psi_p = \text{cte}$

A equação para as superfícies magnéticas de equilíbrio é da seguinte forma:

$$\Psi_p(\rho_t, \theta_t) = \Psi_0(\rho_t) + \Psi_1(\rho_t) \cos \theta_t = \text{constante} \quad (\text{J-1})$$

onde os diferentes valores da constante individualizam estas superfícies (ver (IV-5)).

Se para $\theta_t = \pi/2$ a superfície magnética passa por $\rho_t = \rho_t^*$, então:

$$\Psi_p(\rho_t, \theta_t) = \Psi_p(\rho_t^*, \pi/2) = \Psi_0(\rho_t^*) = \text{constante} \quad (\text{J-2})$$

Para os outros valores de θ_t , ρ_t pode ser escrito como:

$$\rho_t = \rho_t^* + \Delta\rho_t(\rho_t^*, \theta_t) \quad (\text{J-3})$$

DETERMINAÇÃO DE $\Delta\rho_t$

As funções $\Psi_0(\rho_t)$ e $\Psi_1(\rho_t)$ podem ser aproximadas em torno de $\rho_t = \rho_t^*$ por:

$$\Psi_0(\rho_t) \cong \Psi_0(\rho_t^*) + \Psi_0'(\rho_t^*) \Delta\rho_t$$

$$\Psi_1(\rho_t) \cong \Psi_1(\rho_t^*) + \Psi_1'(\rho_t^*) \Delta\rho_t$$

Substituindo-se estas expressões em (J-1) e levando em conta (J-2), obtém-se uma expressão para $\Delta\rho_t$:

$$\Delta\rho_t(\rho_t^*, \theta_t) \cong - \frac{\Psi_1(\rho_t^*)}{\Psi_0'(\rho_t^*)} \cos \theta_t \quad (J-4)$$

onde usou-se que $|\Psi_1'|/|\Psi_0'| \ll 1$. Substituindo (J-4) em (J-3):

$$\rho_t \cong \rho_t^* - \frac{\Psi_1(\rho_t^*)}{\Psi_0'(\rho_t^*)} \cos \theta_t \quad (J-5)$$

Esta expressão é, aproximadamente, a relação entre ρ_t e θ_t sobre uma superfície magnética de equilíbrio $\Psi_p = \text{cte}$. Note que para cada valor desta constante, temos um único ρ_t^* correspondente. Então, as funções de Ψ_p são funções também de ρ_t^* .

APÊNDICE L

MÉTODO DA MÉDIA

É dado um sistema de equações diferenciais de primeira ordem do seguinte tipo:

$$\frac{dx^k}{d\tau} = F_k(x^i, \varepsilon\tau, \tau) \quad (i = 1, 2, \dots, k, \dots, n) \quad (L-1)$$

onde ε é um pequeno parâmetro. A função F_k , além de depender das n variáveis x^i , é também função periódica de τ . A dependência com o termo $\varepsilon\tau$ indica que F_k pode ter um termo que varie lentamente com τ .

Fazendo-se as seguintes mudanças de variáveis em (L-1):

$$\tau = \theta$$

$$\varepsilon\tau = t$$

e tomando-se a derivada em (L-1) em relação a variável t :

$$\frac{dx^k}{dt} = f_k(x^i, t, \theta) \quad (L-2)$$

onde $\varepsilon f_k \equiv F_k$ e $x^i = x^i(t, \theta)$. Aqui, θ representa a variável em que f_k é periódica (com período L) e t a variável com que f_k varia lentamente.

Pelo método da média, a solução para o sistema (L-2) é:

$$\mathbf{x}^k = \bar{\mathbf{x}}^k + \varepsilon \hat{f}_k + \varepsilon^2(\dots) + \dots \quad (\text{L-3})$$

onde $\bar{\mathbf{x}}^k$ é uma nova variável média que difere de \mathbf{x}^k por não conter a dependência com a variável periódica θ . $\bar{\mathbf{x}}^k$ satisfaz a:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}^k}{dt} = \bar{f}_k + \varepsilon \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial \bar{\mathbf{x}}^1} \hat{f}_1 + \varepsilon^2(\dots) + \dots \quad (\text{L-4})$$

Em (L-3) e (L-4), f_k é uma função de $\bar{\mathbf{x}}^1, t, \theta$ e as operações de média ($\bar{\quad}$) e integração ($\hat{\quad}$) em θ abaixo definidas, são feitas mantendo-se $\bar{\mathbf{x}}^1$ e t constantes:

$$\bar{f} \equiv \frac{1}{L} \int_0^L f \, d\theta \quad (\bar{\mathbf{x}}^1, t = \text{cte}) \quad (\text{L-5})$$

$$\hat{f} \equiv \int_0^\theta \tilde{f} \, d\theta \quad (\bar{\mathbf{x}}^1, t = \text{cte})$$

onde \tilde{f} é a parte da função f que depende explicitamente de θ , ou seja:

$$f = \bar{f} + \tilde{f}$$

Os termos em (L-4) nos permitem determinar $\bar{\mathbf{x}}^k$ com um erro de $\approx \varepsilon$ para um intervalo de $t \approx 1/\varepsilon^2$, ou com um erro de $\approx \varepsilon^2$ para um intervalo de $t \approx 1/\varepsilon$ etc.

Na maioria dos problemas tratados por este método, os termos da ordem de grandeza de ε^2 (ou menores) podem ser desprezados.

No caso de f_k depender apenas de θ , temos $\varepsilon = 1$.

APÊNDICE M

COMPONENTES CONTRAVARIANTES DOS CAMPOS MAGNÉTICOS DE EQUILÍBRIO
E PERTURBATIVO NO SISTEMA DE COORDENADAS Ψ_p, u, θ_t

O sistema de coordenadas Ψ_p, u, θ_t está descrito no apêndice H.

1) Componentes contravariantes do campo magnético do plasma em equilíbrio (\vec{B}_0):

$$B_0^1 = \vec{B}_0 \cdot \nabla \Psi_p = 0$$

$$B_0^2 = \vec{B}_0 \cdot \nabla u = (m/h_\omega) B_{0\theta_t} - (n/h_\varphi) B_{0\varphi} \quad (M-1)$$

$$B_0^3 = \vec{B}_0 \cdot \nabla \theta_t = (B_{0\theta_t} / h_\omega)$$

2) Componentes contravariantes do campo magnético das correntes helicoidais externas (\vec{b}):

$$b^1 = \vec{b} \cdot \nabla \Psi_p = -b_\xi \frac{\rho_t}{R_0} \sinh \xi \frac{\partial \Psi_p}{\partial \rho_t} - b_\omega \left[\frac{\rho_t}{R_0} \sin \theta_t \frac{\partial \Psi_p}{\partial \rho_t} + \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \Psi_p}{\partial \theta_t} \right]$$

$$b^2 = \vec{b} \cdot \nabla u = - (m/h_\omega) b_\omega - (n/h_\varphi) b_\varphi$$

$$b^3 = \vec{b} \cdot \nabla \theta_t = - (1/h_\omega) b_\omega$$

onde (veja (IV-2)):

$$\vec{e}_\omega = - \vec{e}_{\theta_t}$$

Tomando-se apenas o termo de maior ordem de grandeza nas componentes contravariantes de \vec{b} (ver capítulo V), obtém-se:

$$\begin{aligned} b^1 &\approx - b_\xi \frac{\rho_t}{R_0} \sinh \xi \frac{\partial \Psi_P}{\partial \rho_t} \\ b^2 &\approx - (m/\rho_t) b_\omega \\ b^3 &= - (1/\rho_t) b_\omega \end{aligned} \quad (M-2)$$

3) Algumas relações úteis:

Relação A)

$$\frac{B_0^2}{B_0^3} = m - n \frac{h_\omega}{h_\varphi} \frac{B_{0\varphi}}{B_{0\theta_t}} \quad (M-3)$$

Agora, obteremos o valor de (B_0^2/B_0^3) sobre uma superfície magnética de equilíbrio, isto é:

$$\left. \frac{B_0^2}{B_0^3} \right|_{\Psi_P = \text{constante}}$$

Para isso, usamos as expressões (IV-15) para $B_{0\theta_t}$, (IV-16) para $B_{0\varphi}$, (D-1) para h_ω e h_φ , e substituiremos (VI-6) nas funções de ρ_t na expressão (M-3) acima, obtendo:

$$\left. \frac{B_0^2}{B_0^3} \right|_{\Psi_P = \text{constante}} \approx m - n \bar{q}(\rho_t^*) \left[1 + H(\rho_t^*) \cos \theta_t \right]$$

Como pode-se escrever a expressão acima como (ver (L-5)):

$$\frac{B_0^2}{B_0^3} \left| \Psi_P = \text{constante} \right. = \frac{\overline{B_0^2}}{B_0^3} + \frac{\widetilde{B_0^2}}{B_0^3}$$

identificamos:

$$\frac{\overline{B_0^2}}{B_0^3} = m - n \bar{q}(\rho_t^*) \quad (\text{M-4})$$

$$\frac{\widetilde{B_0^2}}{B_0^3} = -n \bar{q}(\rho_t^*) H(\rho_t^*) \cos \theta_t \quad (\text{M-5})$$

Relação B)

$$\frac{b^1}{B_0^3} \approx -R_0 \rho_t b_\xi$$

onde usou-se que:

$$B_{0\theta_t} = \frac{1}{R_0} \frac{\partial \Psi_P}{\partial \rho_t} \quad (\text{ver (IV-15)})$$

$$\text{senh } \xi \approx \frac{R_0}{\rho_t} \quad (\text{ver (E-5)})$$

Substituindo a expressão de b_{ξ} dada no capítulo V:

$$\frac{b^1}{B_0^3} \approx - \frac{\mu_0 I_H R_0 m}{\pi} \left(\frac{\rho_t}{\tilde{b}} \right)^{mN} \text{sen } Nu \quad (\text{M-6})$$

Relação C)

$$\frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3} - \frac{B_0^2 b^3}{(B_0^3)^2} \approx m - n \frac{h_{\omega}}{h_{\varphi}} \frac{B_{0\varphi}}{B_{0\theta_t}} \left(1 + \frac{b_{\omega}}{B_{0\theta_t}} \right) \quad (\text{M-7})$$

onde foram usadas as expressões (M-1) para as componentes de \vec{B}_0 e as expressões aproximadas (M-2) para as componentes de \vec{b} .

APÊNDICE N

ANÁLISE DA EXPRESSÃO (VII-8)

A expressão (VII-8) está abaixo repetida:

$$\frac{d\bar{u}}{d\theta_t} \approx \left[\frac{\overline{B_0^2 + b^2}}{\overline{B_0^3}} \right] - \frac{\overline{B_0^2}}{\overline{B_0^3}} \left[\frac{\overline{b^3}}{\overline{B_0^3}} + \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left[\frac{\overline{b^3}}{\overline{B_0^3}} \right] \frac{\widehat{B_0^2}}{\overline{B_0^3}} \right]$$

Analisando o segundo termo, vemos que:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \left[\frac{\overline{b^3}}{\overline{B_0^3}} \right] \frac{\widehat{B_0^2}}{\overline{B_0^3}} \right| \Bigg/ \left| \frac{\overline{b^3}}{\overline{B_0^3}} \right| \approx \mathcal{O} \left(\frac{\rho_t}{R_0} \right)$$

Portanto, pode-se escrever (VII-8) como:

$$\frac{d\bar{u}}{d\theta_t} \approx \left[\frac{\overline{B_0^2 + b^2}}{\overline{B_0^3}} \right] - \left[\frac{\overline{B_0^2}}{\overline{B_0^3}} \frac{\overline{b^3}}{\overline{B_0^3}} \right] \quad (N-1)$$

A seguir, provaremos que tanto para regiões próximas, quanto para regiões afastadas da superfície ressonante de equilíbrio ($\bar{q} = m/n$), o segundo termo da expressão (N-1) pode ser sempre desprezado (em relação ao primeiro). Usaremos que (ver expressão (M-4)):

$$\frac{\overline{B_0^2}}{\overline{B_0^3}} = m - n \bar{q}$$

1) Para regiões próximas da superfície ressonante:

$$\frac{\overline{B_0^2}}{\overline{B_0^3}} \approx 0 \quad \text{pois: } \bar{q} \approx m/n$$

então:

$$\left| \frac{\overline{b^2}}{\overline{B_0^3}} \right| > \left| \frac{\overline{B_0^2}}{\overline{B_0^3}} \right| \gg \left| \frac{\overline{B_0^2}}{\overline{B_0^3}} \frac{\overline{b^3}}{\overline{B_0^3}} \right|$$

(onde $b^3 \approx b^2/m$ - veja expressão (M-2)).

2) Para regiões afastadas da superfície ressonante:

$$\left| \frac{\overline{B_0^2}}{\overline{B_0^3}} \right| \gg \left| \frac{\overline{B_0^2} \quad \overline{b^3}}{\overline{B_0^3} \quad \overline{B_0^3}} \right| > \left| \frac{\overline{b^2}}{\overline{B_0^3}} \right|$$

Concluimos que para regiões próximas da superfície ressonante, predomina o termo:

$$\left| \frac{\overline{b^2}}{\overline{B_0^3}} \right|$$

e, para regiões afastadas, predomina:

$$\left| \frac{\overline{B_0^2}}{\overline{B_0^3}} \right|$$

Daí, sempre:

$$\left| \frac{\overline{B_0^2 + b^2}}{\overline{B_0^3}} \right| \gg \left| \frac{\overline{B_0^2} \quad \overline{b^3}}{\overline{B_0^3} \quad \overline{B_0^3}} \right|$$

para qualquer região do plasma, podendo a equação (VII-8) ser escrita simplesmente como:

$$\frac{d\bar{u}}{d\theta_t} \approx \frac{B_0^2 + b^2}{B_0^3}$$

APÊNDICE P

SISTEMA DE COORDENADAS HELICOIDAIS TOROIDAIS POLARES ρ_t, u, θ_t

1) Base contravariante:

$$\vec{e}^1 = \nabla \rho_t = -(\rho_t/R_0) \sinh \xi \vec{e}_\xi + (\rho_t/R_0) \sin \theta_t \vec{e}_{\theta_t}$$

$$\vec{e}^2 = \nabla u = (m/\rho_t) \vec{e}_{\theta_t} - (n/(\rho_t \sinh \xi)) \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}^3 = \nabla \theta_t = (1/\rho_t) \vec{e}_{\theta_t}$$

e:

$$\sqrt{g} = (R_0, \rho_t)/n$$

2) Elemento de área normal à superfície coordenada $x^2 = \text{cte}$ (ver (A-10)):

$$d\vec{\sigma} = \frac{R_0, \rho_t}{n} \left[-\frac{m}{\rho_t} \vec{e}_\omega - \frac{n}{\rho_t \sinh \xi} \vec{e}_\varphi \right] d\rho_t d\theta_t \quad (\text{P-1})$$

onde usamos que:

$$\vec{e}_\omega = -\vec{e}_{\theta_t}$$

APÊNDICE Q

$$\text{CÁLCULO DE } \delta\Psi_H^{(s)} \text{ E DE } - \frac{1}{n} \frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3}$$

CÁLCULO DE $\delta\Psi_H^{(s)}$

Vimos no item X-d que $\delta\Psi_H^{(s)}$ foi definido como:

$$\delta\Psi_H^{(s)} = \frac{1}{2\pi} \int_{(u^{(s)} = \text{cte})} \vec{b} \cdot d\vec{\sigma}$$

onde $d\vec{\sigma}$ é o elemento de área normal à superfície coordenada $u^{(s)} = \text{cte}$. Desprezando termos da ordem de grandeza ou menores que $(\tilde{b}/R_0)^2$, obtém-se (ver expressão similar (VIII-6)):

$$\begin{aligned} \delta\Psi_H^{(s)} &\cong - \frac{1}{2\pi} \int_{(u^{(s)} = \text{cte})} d\theta_t \int_0^{\rho_t^*} d\rho_t R_0 \frac{m'}{n} b_\omega \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{(u^{(s)} = \text{cte})} d\theta_t \int_{\rho_t^*}^{\rho_t^* + \Delta\rho_t(\rho_t^*, \theta_t^*)} d\rho_t R_0 \frac{m'}{n} b_\omega \end{aligned} \quad (Q-1)$$

onde $m' = m \pm 1$.

A dependência de b_ω com as coordenadas ρ_t, u é da forma (ver expressão (V-2)):

$$b_\omega(\rho_t, u) = y(\rho_t) \cos u = y(\rho_t) \cos (m \theta_t - n \varphi)$$

(onde tomamos $N = 1$). Como as integrais acima são feitas mantendo-se :

$$u^{(s)} = (m \pm 1) \theta_t - n \varphi = \text{constante}$$

então, a primeira integral em (Q-1) se anula.

Para o cálculo da segunda integral, utilizam-se as expressões (V-2) para b_ω , (J-4) para $\Delta\rho_t$ e faz-se a seguinte aproximação:

$$\left[1 + \frac{\overline{\Delta\rho_t}}{\overline{\rho_t^*}} \cos \theta_t \right]^m \approx 1 + m \frac{\overline{\Delta\rho_t}}{\overline{\rho_t^*}} \cos \theta_t$$

Com isso, obtemos $\delta\Psi_H^{(s)}$:

$$\delta\Psi_H^{(s)}(\overline{\rho_t^*}, \overline{u^{(s)}}) \cong \frac{m m' \mu_0 I_H R_0}{n 2\pi \tilde{b}} \left[\frac{\overline{\rho_t^*}}{\tilde{b}} \right]^{m-1} \frac{\overline{\Psi_1(\rho_t^*)}}{\overline{\Psi_0(\rho_t^*)}} \cos \overline{u^{(s)}}$$

(Q-2)

$$\text{CÁLCULO DE } - \frac{1}{n} \frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3}$$

Este termo é calculado mantendo-se $\bar{\Psi}_p = c_1$ e $\bar{u}^{(s)} = c_2$ (c_1, c_2 constantes). Então, usando-se as expressões de (b^1/B_0^3) e de $(\widehat{B_0^2}/B_0^3)$ dadas no apêndice M (para $N = 1$):

$$- \frac{1}{n} \frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} = - \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} d\theta_t \left(- \frac{\mu_0 I_H R_0, m}{\pi} \left[\frac{\bar{\rho}_t^*}{\tilde{b}} \right]^m \text{sen } \bar{u} \right) \times$$

$(\bar{u}^{(s)} = \text{cte})$

$$\times \left(- n \bar{q}(\bar{\rho}_t^*) H(\bar{\rho}_t^*) \text{sen } \theta_t \right)$$

Pode-se escrever o produto $(\text{sen } \bar{u})(\text{sen } \theta_t)$ como:

$$(\text{sen } \bar{u})(\text{sen } \theta_t) = \frac{1}{2} \left[\pm \cos(\bar{u}^{(s)} \mp 2\theta_t) \mp \cos \bar{u}^{(s)} \right]$$

para $m' = m \pm 1$

que substituindo-se na integral acima resulta em:

$$- \frac{1}{n} \frac{b^1}{B_0^3} \frac{\widehat{B_0^2}}{B_0^3} = \pm m \frac{\mu_0 I_H R_0, m}{2\pi} \left[\frac{\bar{\rho}_t^*}{\tilde{b}} \right]^m \bar{q}(\bar{\rho}_t^*) H(\bar{\rho}_t^*) \cos \bar{u}^{(s)}$$

para $m' = m \pm 1$

(Q-3)

BIBLIOGRAFIA

- 1 - Morozov A. I., Solov'ev L. S., "The Structure of Magnetic Fields", Reviews of Plasma Physics 2, 1 (1966) Consultants Bureau, New York.
- 2 - Karger F., Lackner K., Fussmann G., Cannici B., Engelhardt W., Gernhardt J., Glock E., Groening D. E., Klüber O., Lisitano G., Mayer H. M., Meisel D., Morandi P., Sesnic S., Wagner F., Zehrfeld H. P., "On the Origin of the Disruptive Instability in the Pulsator I Tokamak", Nuclear Fusion Supplement 1, 267 (1977).
- 3 - Mirnov S. V., Semenov I. B., "Observation of Disruptive Instability Fine Structure in a Tokamak", Nuclear Fusion Supplement 1, 291 (1977).
- 4 - Vannucci A., Nascimento I. C., Caldas I. L., "Disruptive Instabilities in the Discharges of the TBR-1 Small Tokamak", Plasma Physics and Controlled Fusion 31, 147 (1989).
- 5 - Vlasenkov V. S., Leonov V. M., Merezhkin V. G., Mukhovatov V. S., "Perturbation of a Magnetic Field During the Break-up Instability in Tokamak-6", Nuclear Fusion Supplement 1, 1 (1975).
- 6 - Morton A. H., "Disruptive Instability Mode Structure in the LT-3 Tokamak", Nuclear Fusion 16, 571 (1976).
- 7 - Vannucci A., Bender O. W., Caldas I. L., Tan I. H., Nascimento I. C., Sanada E. K., "Influence of Resonant Helical Windings on the Mirnov Oscillations in a Small Tokamak", Il Nuovo Cimento 10D, 1193 (1988).
- 8 - Pulsator Team, "The Pulsator Tokamak", Nuclear Fusion 25, 1059 (1985).

- 9 - Ellis J. J., McGuire K., Peacock R., Robinson D. C., Stares I., "Critical Beta and Magnetic Islands Studies on the Tosca Tokamak", Nuclear Fusion Supplement 1, 731 (1981).
- 10 - Bateman G., MHD Instabilities, The MIT Press (1978).
- 11 - Wesson J. A., "MHD Stability Theory" em Plasma Physics and Nuclear Fusion Research, Academic Press (1981).
- 12 - Kucinski M. Y., Caldas I. L., Monteiro L. H. A., Okano V., "Toroidal Plasma Equilibrium with Arbitrary Current Distribution" - a ser publicado em Journal of Plasma Physics.
- 13 - Kucinski M. Y., Caldas I. L., "Toroidal Helical Fields", Zeitschrift für Naturforschung 42a, 1124 (1987).
- 14 - Okano V., "Campos Helicoidais Ressonantes", tese de mestrado, IFUSP (1990).
- 15 - Kucinski M. Y., Caldas I. L., Monteiro L. H. A., Okano V., "Perturbation of Toroidal Plasmas by Helical Currents", Proceedings of the IV Latin American Workshop on Plasma Physics (Buenos Aires) 1, 19 (1990).
- 16 - Kucinski M. Y., Caldas I. L., "MHD Equilibrium Equation in Symmetric Systems", Publicações IFUSP P-817 (1990).
- 17 - Fernandes A. S., Caldas I. L., "Campos Ressonantes Criados por Correntes Elétricas Helicoidais em Tokamaks", Publicações IFUSP P-539 (1985).
- 18 - Egorov S. M., Kuteev B. V., Miroshnikov I. V., Sergeev V. Yu., "Observation of a Magnetic Field Line in the T-10 Tokamak", JETP Letters 46, 180 (1987).