Seminário - Controle de Oscilações

Instituto de Física - IFUSP

Escape de partículas em bilhares clássicos

Matheus Hansen Francisco

mathehansen@gmail.com

Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Co-orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

30 de Março de 2017.

Introdução

- Os bilhares são sistemas em que uma partícula é confinada a se mover em uma fronteira, sendo essa fixa ou móvel [1,2].
- A partícula é lançada em uma determinada posição na região delimitada pela fronteira com uma velocidade definida.
- A partícula viaja ao longo de uma trajetória, geralmente retilínea, até sofrer uma colisão com a fronteira do bilhar. Essa colisão pode ser elásticas ou inelásticas.

- Após a colisão, a partícula sofre uma reflexão especular com a fronteira, ou seja, o ângulo de incidência da colisão com a fronteira do bilhar é igual ao ângulo de reflexão em relação à superfície normal da fronteira, desta forma dando origem a uma nova direção por onde a partícula deve seguir.

- A velocidade da partícula, após a colisão se mantém constante, caso a fronteira seja estática, porém, se a fronteira tiver uma dependência temporal, é possível observar o crescimento ou decaimento da velocidade.

Mapeamento

- Para iniciar a contrução do mapeamento que descreve o bilhar ovóide, primeiramente, devemos definir a expressão para o raio da frontera, que é dada por [3]

$$R(\theta, \epsilon, p) = 1 + \epsilon \cos(p\theta). \quad (1)$$

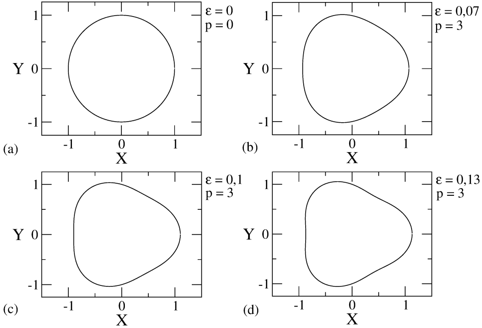

Figura 1: Esboço de diferente geometrias da fronteira, para as combinações de parâmetros: (a) $\epsilon = 0$ e $p = 0$; (b) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (d) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$.

- A dinâmica apresentada é descrita por um mapeamento discreto, bidimensional, não linear, em termos de duas variáveis dinâmicas, denominadas por θ_n e α_n.
- θ_n representa a posição angular da partícula e α_n é o ângulo que a trajetória da partícula faz com o vetor tangente à fronteira na posição angular θ_n.

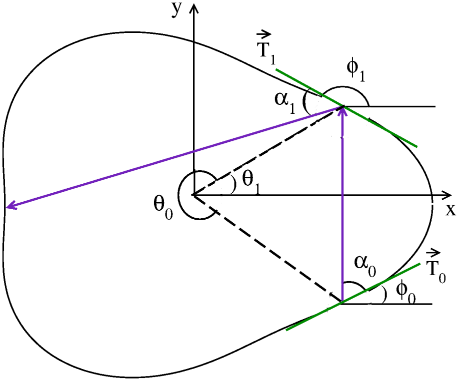

Figura 2: Ilustração da descrição dos ângulos feitos pela partícula e sua trajetória.

- Com isso podemos escrever o mapeamento que modela a dinâmica como sendo

$$P : \begin{cases} F(\theta_{n+1}) & = R(\theta_{n+1})\sin(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n) - \tan(\alpha_n + \phi_n)\times \\ & \times[R(\theta_{n+1})\cos(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)] \\ \alpha_{n+1} & = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n) \end{cases}, \tag{2}$$

com

$$\phi_n = \arctan\left[\frac{Y'(\theta_n)}{X'(\theta_n)}\right], \tag{3}$$

onde $X'(\theta_n)$ e $Y'(\theta_n)$ são as derivadas de $X(\theta_n)$ e $Y(\theta_n)$ respectivamente em relação a θ_n.

- Podemos obter θ_{n+1} usando o método da bisseção, fazendo $F(\theta_{n+1}) = 0$.

Espaço de fases

- Para o mapeamento dada pela Eq.(2), temos o seguinte espaço de fases

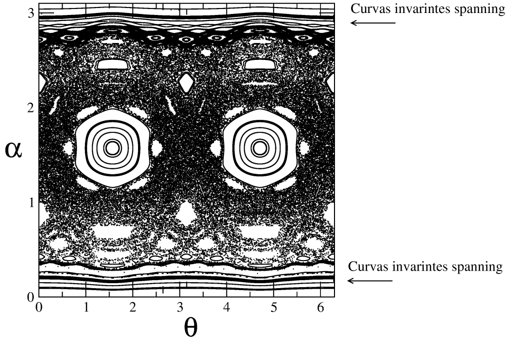

Figura 3: Espaço de fases gerado pela Eq.(2), para os parâmetros $\epsilon = 0,1$ e $p = 2$.

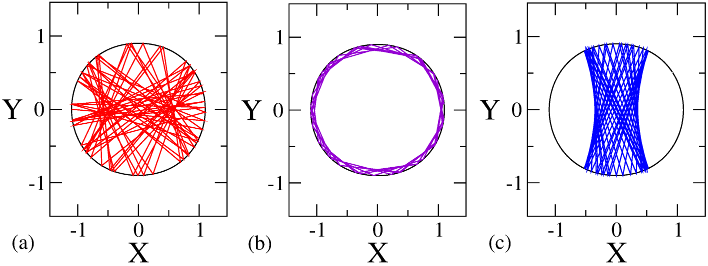

Figura 4: Ilustração de uma órbita (a) caótica; (b) na região das *whispering gallery orbits* e (c) na ilha de estabilidade colidindo com a fronteira do bilhar.

- Dado que o raio da fronteira do bilhar é dado por $R(\theta, \epsilon, p) = 1 + \epsilon \cos(p\theta)$.

- Ao variarmos o parâmetro ϵ de maneira que assuma um valor maior ou igual a um ϵ_c acarreta na destruição de todas as curvas invariantes *spanning* do espaço de fases [4]. A expressão para ϵ_c é dada por

$$\epsilon_c = \frac{1}{1 + p^2}, \qquad p \geq 1. \tag{4}$$

- A explicação para essa destruição das curvas invariantes pode ser dada pela questão da curvatura da fronteira do bilhar, podemos ver por exemplo, na Fig.(1), que o parâmetro ϵ é responsável por variar a forma geométrica da fronteira. Desta forma, uma região com um $\epsilon \leq \epsilon_c$, tem forma côncova para a fronteira, enquanto que para valores de $\epsilon > \epsilon_c$ implica em uma curvatura negativa, ou seja, convexa.

- Para $p = 2$ temos que $\epsilon_c = 0.2$.

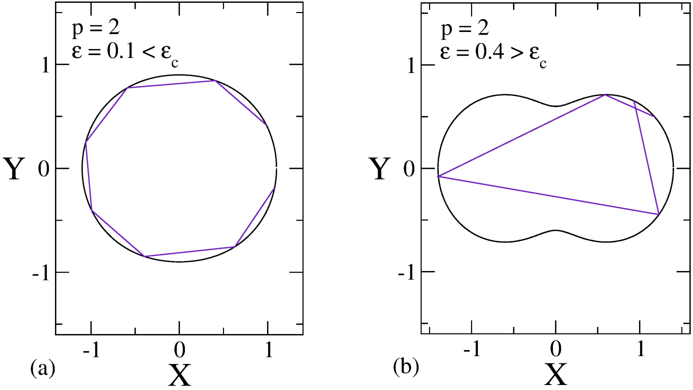

Figura 5: Ilustração de uma *whispering gallery orbit* para ; (a) $\epsilon < \epsilon_c$ e (b) $\epsilon > \epsilon_c$.

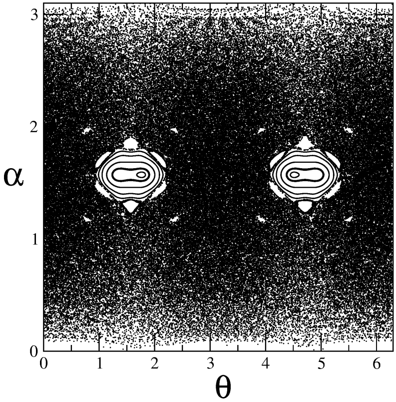

Figura 6: Espaço de fases gerado pela Eq.(2), para os parâmetros $\epsilon = 0,21$ e $p = 2$.

Escape de partículas

- Vamos observar a probabilidade das partículas sobreviverem, ou seja, permanecerem no interior do bilhar após a introdução de um orifício na fronteira.
- O orifício nada mais é que um determinado deslocamento angular medido em relação ao ângulo θ.
- A extensão do orifício será $h = 0,2$.

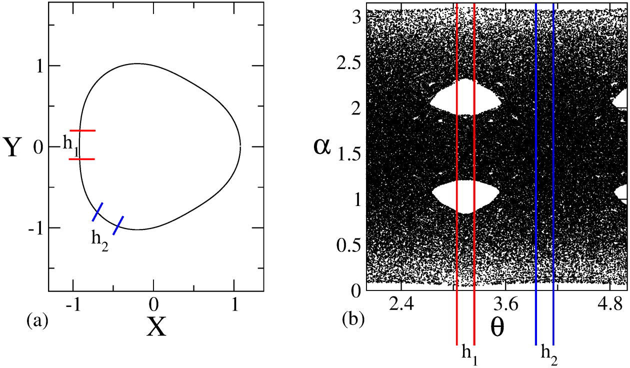

Figura 7: Ilustração dos orifícios $h_1 \in (3,04;3,24)$ e $h_2 \in (3,95;4,15)$ na (a) fronteira do bilhar e (b) no espaço de fases. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$ e $p = 3$.

- Um ensemble de 10^4 partículas não interagentes é injetado através do orifício.

- Cada partícula pode colidir até 10^6 vezes com a fronteira, caso não escape antes.

- A probabilidade de sobrevivência é calculada como

$$P(n) = \frac{1}{N} N_{sur}(n) \tag{5}$$

  onde N é o número condições iniciais do ensemble e $N_{sur}(n)$ representa o número de condições iniciais que sobreviveram dentro do bilhar na iterada n.

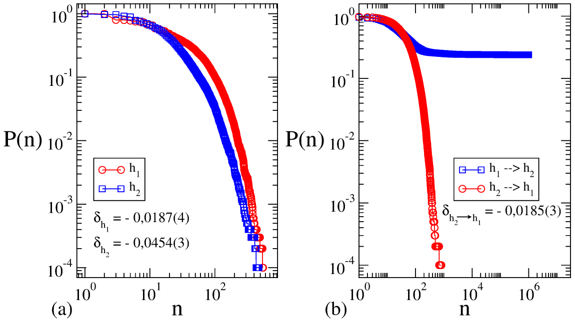

Figura 8: Probabilidade de sobrevivência quando (a) As partículas são injetadas e escapam através de h_1 (curva vermelha) e h_2 (curva azul); (b) As partículas são lançadas da região de h_1 e escapam em h_2 (curva azul) e quando as partículas lançadas de h_2 escapam por h_1 (curva vermelha). Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$ e $p = 3$.

Bacias de escape

- Dejamos estudar as bacias de escape para h_1 e h_2 para a configuração que privilegia o escape [5]. Assim, redefinimos a posição do buraco h_1, de forma que ele também esteja em uma região que apenas é visitada por órbitas caóticas.
- As posições para os orifícios são $h_1 \in (0,1; 0,3)$ e $h_2 \in (3,95; 4,15)$.
- São injetadas 4×10^6 partículas do mar caótico evoluíndo a dinâmica de cada uma delas até 10^6 caso não escapem antes.

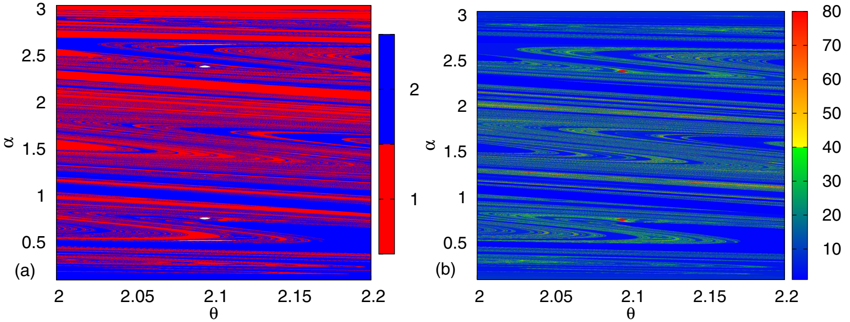

Figura 9: Bacias de escape: (a) para as partículas que escaparam por h_1, representada pela cor vermelha e por h_2, representada pela cor azul; (b) para a mesma figura em (a), mas agora utilizando como escala de cor, o número de colisões que cada partícula gastou até o escape. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$ e $p = 3$.

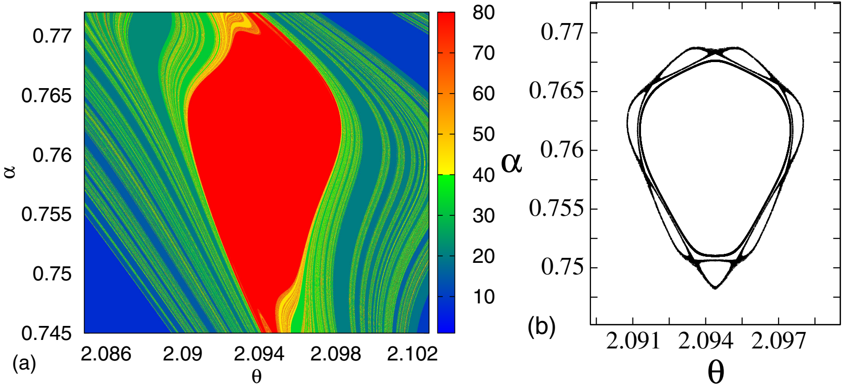

Figura 10: (a) Ampliação da cadeia de ilhas encontradas; (b) a representação da cadeia de ilhas no espaço de fases. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$ e $p = 3$.

Sela Caótica

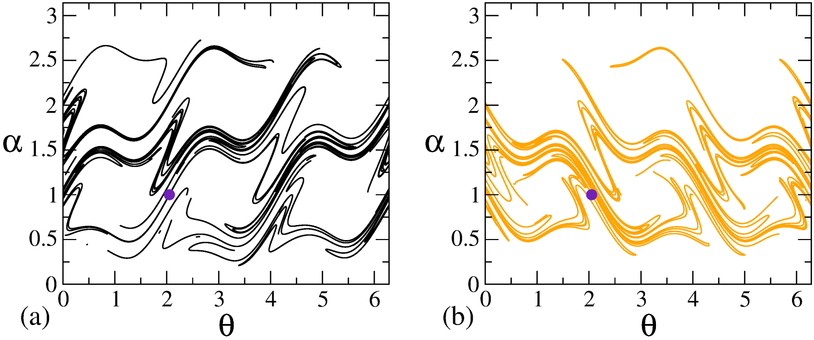

Figura 11: (a) A variedade instável e (b) a variedade estável, para o ponto hiperbólico ($\theta^* \approx 2,0522, \alpha^* \approx 0,9997$) (roxo) demonstrado na figura. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$ e $p = 3$.

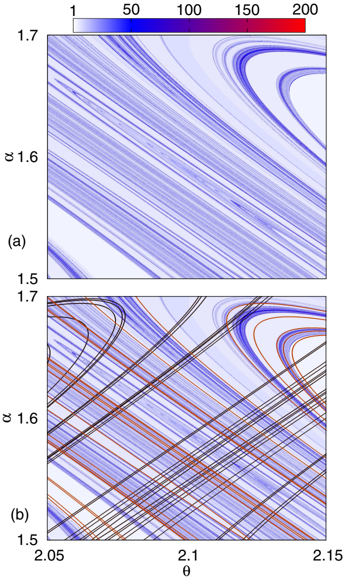

Figura 12: (a) As partículas que tiveram entre 1 e 200 colisões com a fronteira até escapar; (b) A influencia da sela caótica [6] sobre as condições iniciais.

Expoente de incerteza

- Devido a complexidade das bacias de escape, é possível que exista uma incerteza sobre os pontos das fronteiras das bacias de h_1 e h_2.

- Para verificar essa incerteza, utilizamos um método chamado uncertain fraction method [7]. Esse método consiste em seguir uma condição inicial (θ_0, α_0) e verificar por qual orifício a partícula escapa. Após isso, uma pequena perturbaçã ζ é adicionada na condição inicial, tal que $(\theta_0 + \zeta, \alpha_0)$ e $(\theta_0 - \zeta, \alpha_0)$. Seguindo essa condição inicial perturbada, verificamos que se ela continua a escapar pelo mesmo orifício, essa condição é dita certa, caso contrário, incerta.

- O processo é repetido para um grande número de condições iniciais N_T. Definindo que N_u são o número de condições incertas, podemos escrever a fração de incerteza como $f(\zeta) \approx N_u/N_T$.

- Para diferentes valores de ζ, esperamos que $f(\zeta) \sim \zeta^{\mu}$, onde μ é o expoente de incerteza.

- Para $0 < \mu < 1$ temos que a fronteira é fractal.

- Sendo $f(\zeta) \approx N_u/N_T$.

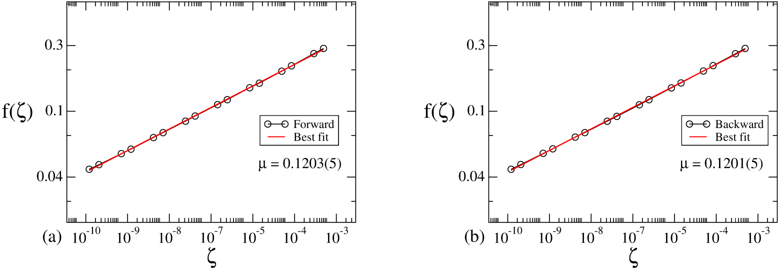

Figura 13: O gráfico de $f(\zeta)$ vs ζ para (a) iteração para frente, com expoente de incerteza $\mu = 0,1203(5)$; (b) iteração para trás, com expoente de incerteza $\mu = 0,1201(5)$. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$ e $p = 3$.

- O expoente de incerteza μ, pode ser relacionado com a dimensão fractal da fronteira D_0 [8], usando a expressão

$$\mu = D - D_0, \tag{6}$$

onde D é a dimensão do espaço de fases, que nesse caso é $D = 2$.

- Através da Eq.(6), podemos encontrar que a dimensão da fronteira das bacias de escape para iteradas para frente igual a $D_0 = 1,8797(5)$ e para o caso de iteradas para trás, temos $D_0 = 1,8799(5)$, o que nos leva a observar que as fronteiras das bacias de escape tem uma dimensão fractal $D_0 = 1,8798(5)$.

[1] L. A. Bunimovich, On Ergodic Properties of Certain Billiards. *Funct. Anal. Appl.*, **8**, 254 (1974).

[2] L. G. Akinshin, A. Loskutov, Dynamical properties of some two-dimensional billiards with perturbed boundaries. *Physical Ideas of Russia*, **2**, 67 (1997).

[3] E. D. Leonel, C. P. Dettmann, Recurrence of particles in static and time varying oval billiards. *Phys. Lett. A.* **376**, 1669 (2012).

[4] D.F.M. Oliveira, E.D. Leonel, On the dynamical properties of an elliptical-oval billiard with static boundary. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **15**, 1092 (2010).

[5] M. Hansen, R. Egydio de Carvalho and E. D. Leonel, Phys. Lett. A. **380**, 3634 (2016).

[6] E. C, da Silva, I. L. Caldas, R. L. Viana and M. A. F. Sanjuán, Phys. Plasmas. **9**, 4917 (2002).

[7] K. T. Alliggod, T. D. Sauer and J. A. Yorke, *CHAOS An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, (2012)..

[8] S. W. Mcdonald, C. Grebogi, E. Ott and J. A. Yorke, Physica D. **17**, 125 (1985).

[9] E. Fermi, On the origins of the cosmic Radiation, *Phy. Rev.* **75**, 1169 (1949).

CAPES