UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

SBI-IFUSP
305M810T1589

FORMULAÇÃO HAMILTONIANA PARA SUPERFÍCIES MAGNÉTICAS

MARIA CÉLIA RAMOS DE ANDRADE

Dissertação de mestrado apresentada no Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1589
ex.2
INSTITUTO DE FÍSICA

orientador: PROF. DR. IBERÊ LUIZ CALDAS

SETEMBRO - 1989

Data de Defesa 03/10/89

530.44
A553f
M
ex 2

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Andrade, Maria Célia Ramos de
Formulação Hamiltoniana para superfícies magnéticas. São Paulo, 1989.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Experimental.
Área de Concentração: Física Nuclear
Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Unitermos: 1.Física de plasmas; 2.Superfícies magnéticas; 3.Campos magnéticos helicoidais ressonantes; 4.Campos magnéticos não-integráveis.

USP/IF/SBI - 41/89

Aos meus pais,
pelo apoio e carinho.
Ao Júnior,
pelo que você é.

"Sonhar mais um sonho impossível.
Lutar, quando é fácil ceder.
Vencer o inimigo invencível.
Negar, quando a regra é vender.
Sofrer a tortura implacável.
Romper a incabível prisão.
Voar, num limite improvável.
Tocar o inacessível chão..."

(J. Darion e M. Leigh)

AGRADECIMENTOS

Agradecer alguém por alguma coisa nunca é uma tarefa muito fácil. Acredito que os agradecimentos se fazem muito mais por atitudes do que propriamente por palavras. Mas aqui, no momento, deixo registrado meu agradecimento em palavras que com o tempo espero poder confirmar através da minha convivência com estas pessoas.

Agradeço ao Iberê pela orientação cuidadosa deste trabalho. Agradeço por seu interesse e dedicação, pelo exemplo profissional e pela amizade que cultivamos durante estes anos.

À Maria Vittoria pelo trabalho computacional desta dissertação. Por sua determinação em fazer sempre o melhor, pela paciência dispensada e pela amiga que ganhei, obrigada.

À Suzana pelas valiosas discussões, pela leitura da tese e sugestões, pela companheira de sala e companheira de estudos em longos fins-de-semana e pelo incentivo que recebi em momentos importantes, meu sincero agradecimento.

Ao Wanderley pela "produção artística" da tese feita com incrível dedicação. Agradeço acima de tudo pela amizade e espírito positivo que você sempre transmite.

Ao Ricardo e ao Celso pelas discussões no desenvolvimento deste trabalho e pelo companheirismo.

Ao Delfin, pela impressão desta tese. Agradeço sua dedicação, apoio e compreensão durante este período.

A todos os bolsistas, técnicos e professores do grupo, em especial ao Tadeu pela paciência em sempre me ceder o "micro" e ao Cristóvão e Banzai por alguns "auxílios técnicos".

À Sylvia pela disposição em sempre querer ajudar.

Ao João e ao Carlos pelo excelente trabalho na reprodução de gráficos e mapeamentos desta dissertação.

À Márcia por sua presença de espírito. Acho que devo agradecer simplesmente por sua presença. Obrigada realmente por tudo.

Ao Munir pela incrível pessoa, ao Johnny, à Lúcia, à Marina e ao Maurício pelos momentos bons e verdadeiros que temos compartilhado.

Ao Ayrton, Pablo, Fernando e Vera pelo apoio e incentivo que me fizeram chegar até aqui.

Aos amigos do IFUSP e do IFT.

Aos meus pais por muito do que sou e do que sei. Agradeço pela dedicação de todos estes anos e pelo firme incentivo em todos os meus projetos.

Ao Júnior por nossa convivência.

À minha família por tantos exemplos e pelo espírito de união que me foi transmitido.

A você.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho investigamos, inicialmente, a distribuição de linhas de campo para um plasma em equilíbrio MHD estático com simetria axial perturbado por correntes helicoidais ressonantes e confinado num tokamak de grande razão-de-aspecto. Esse sistema possui simetria helicoidal e é integrável, com invariantes que descrevem superfícies magnéticas cilíndricas e ilhas magnéticas. Para descrever tal configuração introduzimos um formalismo Hamiltoniano com variáveis de ângulo-ação a partir do qual estabelecemos as equações de evolução para as trajetórias das linhas de campo. Estas equações se modificam ao considerarmos o efeito toroidal que quebra a simetria do sistema em questão. Afim de descrever o campo não-integrável utilizamos um método de perturbação para obter equações diferenciais aproximadas que, quando integradas numericamente, fornecem o mapa de Poincaré das linhas de campo caracterizando superfícies magnéticas, ilhas magnéticas (principais e secundárias) e regiões caóticas. A partir deste mapeamento analisamos a expansão das regiões caóticas entre superfícies ressonantes devido ao aumento das correntes helicoidais e à diminuição da razão-de-aspecto do tokamak.

ABSTRACT

In this work we initially investigate the distribution of magnetic field lines for a plasma in MHD static equilibrium in an axial symmetry perturbed by resonant helical currents and confined in a tokamak of large aspect-ratio. This system is in a helical symmetry and it is integrable with invariants describing cilindrical magnetic surfaces and magnetic islands. In order to describe such a configuration we introduce a Hamiltonian formalism with action-angle variables from which we establish the evolution equations for the trajectories of the field lines. These equations are altered when we consider the toroidal effect that breaks the system symmetry in question. In order to describe the non-integrable field we use a perturbation method for obtaining approximate differential equations which, when nummerically integrated, supply the map of Poincaré of the field lines which characterizes the magnetic surfaces, magnetic islands (primary and secondary) and chaotic regions. Starting from this mapping we analyse the expansion of the chaotic regions between resonant surfaces due to the increase of the helical currents and the dicrease of the aspect-ratio of the tokamak.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - **INTRODUÇÃO**.....1

CAPÍTULO II - **CAMPOS MAGNÉTICOS HELICOIDAIS**

II.a - Introdução.....5
II.b - Plasma em Equilíbrio num Tokamak com Grande Razão-de-Aspecto..6
II.c - Campos Magnéticos com Simetria Helicoidal.....10
II.d - Pares de Correntes Helicoidais de Sentidos Opostos.....14
II.e - Ilhas Magnéticas.....21
II.f - Correção Toroidal.....27

CAPÍTULO III - **FORMULAÇÃO HAMILTONIANA PARA SUPERFÍCIES MAGNÉTICAS**

III.a - Introdução.....36
III.b - Representação para um Campo com Simetria Helicoidal.....36
III.c - Formalismo Hamiltoniano para um Campo Magnético Helicoidal..39

CAPÍTULO IV - **FORMALISMO HAMILTONIANO PARA O CAMPO MAGNÉTICO NO TBR-1**

IV.a - Introdução.....47
IV.b - Descrição Hamiltoniana para Superfícies Magnéticas.....48
IV.c - Correção Toroidal.....62

CAPÍTULO V - **RESULTADOS NUMÉRICOS**

V.a - Introdução.....69
V.b - Sistema - Integrável.....69
1 - Os Invariantes ψ 69
2 - Espaço de Fase.....72
3 - Hamiltoniana.....74
4 - Ação.....76
5 - Freqüência (ω).....78

V.c - Sistema Não - Integrável.....80
1 - Mapeamento Numérico para as Linhas de Campo.....80
2 - Variação de J e ϑ.....81
3 - Mapeamento das Linhas de Campo no Plano (J × ϑ).....86

CAPÍTULO VI - **CONCLUSÕES E SUGESTÕES**.....89

APÊNDICE

A.1 - Solução da Equação de Laplace.....96
A.2 - Campo Magnético de Pares de Correntes Helicoidais.....101
A.3 - Determinação do Potencial Vetor A Correspondente ao Campo Gerado pelos Condutores Helicoidais.....103

REFERÊNCIAS.....110

CAPÍTULO I

I N T R O D U Ç Ã O

As tentativas para obter a fusão nuclear controlada têm levado vários cientistas a estudar as condições de confinamento de plasmas que propiciem as reações de fusão. Estas condições implicam, essencialmente, em estabelecer determinados níveis de densidade e temperatura do plasma em um tempo de confinamento suficiente para que a quantidade de energia obtida seja maior que a utilizada no desencadeamento do processo de fusão.

O confinamento de plasmas, através de campos magnéticos em máquinas toroidais, tem sido um dos principais objetos de estudo para que a fusão controlada possa ser alcançada.

Uma condição necessária, para que um plasma possa ser confinado magneticamente, consiste na existência de superfícies magnéticas na região em que o plasma se estabelece (Morozov e Solov'ev 66). Baseados neste fato consideramos, neste trabalho, um plasma em equilíbrio Magnetohidrodinâmico (MHD) estático (Freidberg 82), e investigamos as condições de confinamento do mesmo num tokamak, através do estudo destas superfícies.

As equações do equilíbrio MHD ideal implicam, através da equação:

$$\mathbb{B} \cdot \nabla P = 0 \qquad (I\text{-}1)$$

que a pressão é constante ao longo das linhas de força do campo magnético (Greene e Johnson 65). As soluções da equação (I-1) fornecem as superfícies de pressão constante sobre as quais repousam as linhas de campo magnético (Freidberg 82). Estas superfícies são também denominadas superfícies magnéticas. Assim, como o movimento principal das partículas carregadas ocorre ao longo de uma linha de campo, concluímos que estas superfícies condicionam o comportamento do plasma.

Conforme já mencionamos, as superfícies magnéticas são estabelecidas como soluções das equações MHD referentes ao equilíbrio estático (onde consideramos as derivadas temporais e a velocidade de um elemento do fluido nulas). Estas soluções existem quando uma dada configuração de campos possui simetria translacional, rotacional ou helicoidal (Grad 85) e, neste caso, dizemos que o sistema é integrável.

As equações das linhas de campo podem ser descritas por uma formulação Hamiltoniana, analogamente ao que se faz no tratamento de trajetórias de partículas em um sistema dinâmico (Liechtenberg e Liebermann 83). Assim, podemos obter o mapa de Poincaré, referente às trajetórias das linhas de campo, assinalando as intersecções das mesmas em um plano perpendicular ao eixo magnético, também denominado plano poloidal do tokamak (Vannucci *et. al.* 89).

Ao introduzirmos a um sistema MHD em equilíbrio, uma perturbação advinda de correntes helicoidais externas (Karger *et. al.* 75), de oscilações do próprio plasma (Robinson 85) ou provenientes do efeito toroidal que se considera na geometria do problema (Fernandes *et. al.* 89), as superfícies ressonantes podem ser alteradas com a formação de ilhas magnéticas e as superfícies não ressonantes podem ser destruídas, caso o sistema resultante não seja simétrico. Quando estas superfícies são destruídas, as linhas de campo passam a ter uma distribuição caótica, que pode ser observada através da análise do mapa de Poincaré de uma dada configuração (Vannucci *et. al.* 89).

Nesta dissertação, estamos interessados em analisar o sistema composto pelo tokamak TBR-1, no qual está enrolado um conjunto de condutores helicoidais adjacentes. O campo gerado pelas hélices assume um caráter perturbativo em relação ao campo de equilíbrio MHD e assim, ocorre quebra de simetria do sistema. Neste trabalho, analisaremos a destruição das superfícies magnéticas, num tokamak de grande razão-de-aspecto, devido às perturbações helicoidais externas. Utilizaremos, para tanto, a teoria de perturbações para sistemas Hamiltonianos, análogo ao proposto por Filonenko (Filonenko *et. al.* 67) ao descrever o comportamento das superfícies magnéticas num stellarator de grande razão-de-aspecto.

Inicialmente, no capítulo II, exporemos as equações que determinam a configuração de campos do sistema em questão, considerado na aproximação cilíndrica. Esta configuração será analisada em partes, através do sistema de equilíbrio, do conjunto de hélices e da superposição de ambos. Estabeleceremos as equações dos invariantes que descrevem as superfícies magnéticas associadas a cada um destes sistemas e obteremos os mapeamentos analíticos dos mesmos. O sistema dado pela composição plasma em equilíbrio e hélices é integrável e será descrito por uma formulação Hamiltoniana. Nas superfícies magnéticas ressonantes surgem as chamadas ilhas magnéticas devido à pertubação proveniente dos condutores helicoidais. Ao considerarmos a correção tororoidal sobre esta composição, veremos que ocorre quebra de simetria e o sistema deixa de ser integrável. Este efeito de curvatura do campo gera as ilhas satélites em torno das ilhas principais. Apesar da perda de integrabilidade do sistema, ainda podemos determinar um invariante local aproximado que nos permite controlar as condições para as quais as linhas de campo têm uma distribuição caótica no espaço de fase. Como em outros sistemas dinâmicos (Chirikov 79), estas condições podem ser obtidas através da análise das semi-larguras destas ilhas satélites e da posição das superfícies ressonantes (Fernandes e Caldas 85).

Em seguida, no capítulo III, apresentaremos a Hamiltoniana obtida para um sistema com simetria helicoidal, utilizando um formalismo proposto por Turner (Turner 85). Nesta formulação, Turner representa um campo magnético de simetria helicoidal através de duas funções, e conclui que a Hamiltoniana do sistema pode ser representada por uma destas funções. Esta Hamiltoniana será identificada com o invariante estabelecido no capítulo II.

No capítulo IV, introduziremos uma nova formulação Hamiltoniana, para descrever o mesmo sistema composto pelo plasma em equilíbrio perturbado pelo campo gerado por condutores helicoidais externos. Para tanto, descreveremos as equações das linhas do campo magnético de um sistema integrável, num tokamak de grande razão-de-aspecto, através das variáveis de ângulo-ação (ϑ, J). Em seguida, utilizando a teoria de perturbações, veremos como estas equações se

modificam quando consideramos o efeito toroidal e, através destas equações, obteremos o mapa de Poincaré das linhas de campo no plano (J,ϑ). As análises numéricas, com os respectivos gráficos e mapeamentos são apresentados no capítulo V e as conclusões e sugestões no capítulo VI. Foram utilizados os parâmetros do TBR-1. O apêndice A se refere a alguns cálculos apresentados no decorrer do trabalho.

CAPÍTULO II

CAMPOS MAGNÉTICOS HELICOIDAIS

II.a) - INTRODUÇÃO

As superfícies magnéticas, essenciais ao confinamento do plasma, existem quando um sistema apresenta simetria translacional, rotacional ou helicoidal. Isto advém do fato de que as equações MHD, que determinam o comportamento do plasma, têm solução apenas quando tais simetrias existem. Caso contrário, há evidências baseadas na teoria KAM para sistemas Hamiltonianos (Lichtemberg e Liberman 83), de que estas soluções não existem e o sistema não tem uma distribuição de tais superfícies (Grad 85).

Quando há superfícies magnéticas dizemos que o sistema é integrável, pois podemos determinar o comportamento das linhas do campo magnético $\mathbb{B}$ que se distribuem sobre essas superfícies. Caso haja quebra de simetria na configuração do sistema devido à presença de campos perturbativos, poderá haver a destruição de algumas superfícies magnéticas, originando uma distribuição caótica das linhas de campo, com a conseqüente modificação no equilíbrio ou perda do plasma. Estes campos perturbativos podem ser causados por oscilações espontâneas do plasma (Robinson 85), por correntes externas (Karger *et. al.* 75), ou ainda por correções que introduzimos na geometria do problema (Morozov e Solov'ev 66).

As superfícies magnéticas são caracterizadas por valores constantes de uma função Ψ dada por:

$$\mathbb{B} \cdot \nabla \Psi = 0 \qquad \text{(II-1)}$$

Quando um sistema não apresenta simetria, não existe tal função Ψ que satisfaça a equação (II-1).

II.b) - PLASMA EM EQUILÍBRIO NUM TOKAMAK COM GRANDE RAZÃO-DE-ASPECTO.

Consideremos um plasma em equilíbrio com seção circular de raio a, confinado magneticamente num tokamak de grande razão-de-aspecto (R/a >> 1, onde R é o raio maior do tokamak) de tal maneira que podemos desprezar os efeitos toroidais de curvatura, representando o tokamak por um cilindro periódico com comprimento $2\pi R$ conforme a fig. II-1.

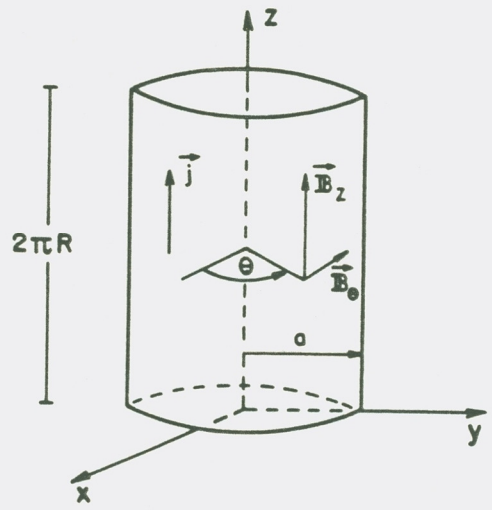

fig. II-1: Sistema de coordenadas e esquema dos campos de equilíbrio.

Nessa aproximação, para um plasma em equilíbrio MHD estático o campo magnético é dado por:

$$\mathbb{B}^0 = \mathbb{B}_z^0 \ \hat{e}_z + \mathbb{B}_\theta^0(r) \ \hat{e}_\theta \qquad \text{(II-2)}$$

onde r, θ e z são as coordenadas cilíndricas, B_z^0 é um campo uniforme de origem externa correspondente à componente toroidal, e $B_\theta^0(r)$ é o campo poloidal gerado pelo seguinte perfil de corrente:

$$\vec{J} = j_0 \left[1 - \frac{r^2}{a^2} \right]^{\gamma} \hat{e}_z \qquad \text{(II-3)}$$

sendo γ um número positivo e j_0 igual a:

$$j_0 = \frac{I_p}{\pi a^2} \ (\gamma + 1) \qquad \text{(II-4)}$$

onde I_p é a corrente do plasma.

O campo poloidal, obtido através da lei de Ampére é:

$$\mathbb{B}_\theta^0(r) = \frac{\mu_0 \ j_0 \ a^2}{2(\gamma + 1)r} \left[1 - \left[1 - \frac{r^2}{a^2} \right]^{\gamma + 1} \right] \qquad \text{(II-5)}$$

Tomando a equação (II-4) e lembrando que:

$$\mathbb{B}_\theta^0(a) = \frac{\mu_0 \ I_p}{2\pi a} \qquad \text{(II-6)}$$

podemos reescrever (II-5) como:

$$B_\theta^0(r) = \frac{a\, B_\theta^0(a)}{r} \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\gamma + 1} \right] \qquad \text{(II-7)}$$

que será, posteriormente, uma forma mais conveniente.

As superfícies magnéticas de equilíbrio compreendem um sistema de cilindros concêntricos (fig.II-2), e são caracterizadas pelo fator de segurança:

$$q = \frac{r\, B_z^0}{R\, B_\theta^0(r)} \qquad \text{(II-8)}$$

As linhas de campo que repousam sobre uma superfície com um dado $q = m/n$ (sendo m e n números inteiros), fecham-se sobre si mesmas após terem percorrido m voltas poloidais e n voltas toroidais.

Lembrando que:

$$q(0) = \lim_{r \to 0} \frac{r\, B_z^0}{R\, B_\theta^0(r)} \qquad \text{(II-9)}$$

podemos escrever:

$$q(a) = q(0)\ (\gamma + 1) \qquad \text{(II-10)}$$

Levando-se em conta que as equações para as linhas de campo são:

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r\, d\theta}{B_\theta} = \frac{dz}{B_z} \qquad \text{(II-11)}$$

podemos determinar as superfícies magnéticas do equilíbrio através do invariante:

$$\psi_0(r) = \frac{k\, B_z^0\, r^2}{2} - m \int^r B_\theta^0(r')\, dr' \qquad \text{(II-12)}$$

que satisfaz a equação (II-1). A fig.II-2 fornece o mapeamento analítico do invariante ψ_0 num plano poloidal. Este mapeamento fornece as superfícies magnéticas correspondentes à configuração do plasma em equilíbrio na aproximação cilíndrica. As superfícies, neste caso, são círculos concêntricos ao eixo geométrico do sistema.

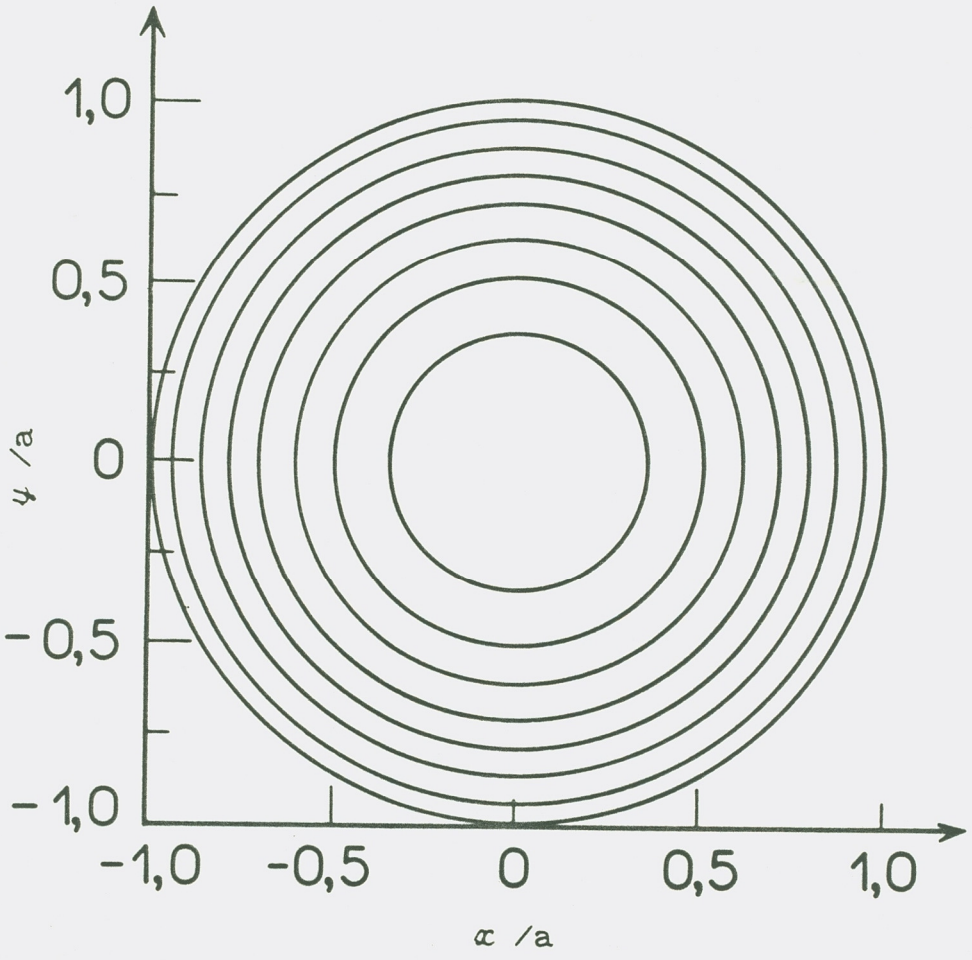

fig II-2: Curvas de ψ_0 constante para o sistema de equilíbrio na aproximação cilíndrica. A figura foi obtida para m = 3, n = 1, q(a) = 5, q(0) = 1, I_p = 10 kA e parâmetros do TBR-1.

Podemos determinar o raio $r_{m,n}$ da superfície racional caracterizada por um fator de segurança $q = m/n$, em torno da qual poderão surgir ilhas magnéticas caso o sistema seja perturbado. Tomando as equações (II-7) e (II-8), vem:

$$q(r_{m,n}) = \frac{m}{n} = \frac{r_{m,n}^2 \; B_z^0}{R\, a\, B_\theta^0(a) \left[1 - \left(1 - \frac{r_{m,n}^2}{a^2} \right)^{\gamma + 1} \right]} \qquad \text{(II-13)}$$

Rearranjando a equação (II-13) e tomando:

$$q(a) = \frac{a\, B_z^0}{R\, B_\theta^0(a)} \qquad \text{(II-14)}$$

obtemos finalmente:

$$\left[1 - \frac{r_{m,n}^2}{a^2} \right]^{\gamma + 1} + \frac{n}{m}\, q(a)\, \frac{r_{m,n}^2}{a^2} - 1 = 0 \qquad \text{(II-15)}$$

A equação (II-15) nos permite determinar $r_{m,n}$ numericamente.

II.c) - CAMPOS MAGNÉTICOS COM SIMETRIA HELICOIDAL

Introduziremos agora configurações cujos campos magnéticos apresentam simetria helicoidal, ou seja, campos que dependem das variáveis r e $u = m\theta - kz$, onde $k = n/R$ é o módulo da componente z do vetor de onda, e m e n são números inteiros que determinam a helicidade do campo.

As superfícies magnéticas, associadas a esta configuração, possuem a mesma simetria e periodicidade que o campo $\mathbb{B}(r,u)$ e são determinadas por valores constantes da função $\Psi = \Psi(r,u)$.

Neste trabalho, o campo magnético helicoidal, que é superposto ao campo de equilíbrio em um tokamak (equação II-2), assume um caráter perturbativo. Suas componentes radiais, mesmo as de pequena intensidade, podem produzir efeitos ressonantes em torno de uma particular superfície racional com $q = m/n$, desde que as helicidades dessas perturbações coincidam com as da superfície mencionada. Neste caso as superfícies magnéticas do sistema são dadas, aproximadamente, por uma superposição linear das superfícies do equilíbrio com as superfícies provenientes do campo perturbativo, e podemos escrever:

$$\Psi(r,u) \cong \psi_0(r) + \psi_1(r,u) \qquad \text{(II-16)}$$

de maneira a que a equação (II-1) é ainda satisfeita.

A função $\Psi(r,u)$ pode ser interpretada como sendo o fluxo magnético através da superfície de um helicóide de raio r e altura unitária, associado a um valor connstante da variável $u = m\theta - kz = cte$. O passo deste helicóide é $2\pi/\alpha$ onde $\alpha = k/m$. A perturbação descrita por $\psi_1(r,u)$ dá origem a m ilhas magnéticas em torno da superfície magnética não perturbada com helicidade caracterizada pelo fator de segurança:

$$q = \frac{r\, B_z^0}{R\, B_\theta^0(r)} = \frac{m}{n}$$

Caso ocorram campos com simetrias helicoidais diferentes do campo já existente, ou seja, descritos pela variável $u' = m'\theta - k'z$ ($u' \neq u$), superpostos ao sistema descrito pela equação (II-16), há quebra de simetria e por este motivo passa a existir no plasma uma região sem superfícies magnéticas (Greene 84).

As componentes do campo magnético $\mathbb{B}(r,u)$ obtidas quando introduzimos o potencial vetor $\mathbb{A}(r,u)$ através de:

$$\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A} \qquad \text{(II-17)}$$

e considerando por argumentos de simetria que:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = m \frac{\partial}{\partial u} \qquad \text{(II-18.a)}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} = - k \frac{\partial}{\partial u} \qquad \text{(II-18.b)}$$

são dadas por:

$$B_r = \frac{m}{r} \frac{\partial A_z}{\partial u} + k \frac{\partial A_\theta}{\partial u} \qquad \text{(II-19.a)}$$

$$B_\theta = - k \frac{\partial A_r}{\partial u} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \qquad \text{(II-19.b)}$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{m}{r} \frac{\partial A_r}{\partial u} \qquad \text{(II-19.c)}$$

A partir das equações (II-19) e das equações para as linhas de campo definidas por (II-11), obtemos um invariante ao longo de uma linha de campo que, para cada valor constante, representa uma

superfície magnética com a mesma simetria e periodicidade que $\mathbb{B}(r,u)$ e que é dado por:

$$\Psi(r,u) = m\, A_z(r,u) + k\, r\, A_\theta(r,u) \qquad \text{(II-20)}$$

Podemos verificar que o invariante $\psi_0(r)$ apresentado na equação (II-12) pode ser obtido de (II-20) uma vez que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = m \frac{\partial A_z}{\partial r} + k \left[A_\theta + r \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right] \qquad \text{(II-21)}$$

Utilizando (II-19.b) e (II-19.c), reescrevemos (II-21) como:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = k\, r\, B_z(r,u) - m\, B_\theta(r,u) \qquad \text{(II-22)}$$

Para o equilíbrio, a equação acima se reduz a:

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial r} = k\, r\, B_z^0 - m\, B_\theta^0(r)$$

que integrada nos fornece o invariante expresso por (II-12).

II.d) - PARES DE CORRENTES HELICOIDAIS DE SENTIDOS OPOSTOS.

Neste trabalho, estaremos interessados no campo externo gerado por pares de condutores enrolados helicoidalmente, percorridos por correntes de sentidos opostos I_h. Queremos estudar, em particular, o caso do tokamak onde se encontra um conjunto de condutores enrolado helicoidalmente com um passo caracterizado pelos números inteiros m e n.

Experimentos realizados com estes campos helicoidais (karger 75 e Robinson 85), que assumem um caráter perturbativo pois suas amplitudes são bem menores que as do campo de equilíbrio, mostram que as oscilações no plasma podem ser controladas e que a atividade MHD pode ser atenuada para certos valores de corrente I_h (Vannucci *et. al.* 89). Além disso, há evidências experimentais de que as disrupturas em tokamaks podem ser uma conseqüência da superposição de ilhas magnéticas que se estabelecem no plasma devido às correntes helicoidais (Karger 75).

A superposição de um plasma em equilíbrio com simetria axial e um campo perturbativo helicoidal, nos fornece um sistema com simetria helicoidal que é integrável, ou seja, podemos estabelecer as trajetórias da linhas de campo desta configuração.

Tomaremos, inicialmente, o campo gerado por uma corrente helicoidal.

O campo magnético $\mathbb{B}^1(r,u)$ pode ser descrito por um potencial escalar $\phi(r,u)$ tal que:

$$\mathbb{B}^1 = \nabla \phi \qquad \text{(II-23)}$$

pois na ausência de correntes elétricas temos, a partir das equações de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbb{B}^1 = 0 \qquad \text{(II-24)}$$

Levando-se em conta que:

$$\nabla \cdot \mathbb{B}^1 = 0 \qquad \text{(II-25)}$$

concluímos que o potencial $\phi(r,u)$ deve satisfazer a equação de Laplace:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + \left[\frac{m^2}{r} + k^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} = 0 \qquad \text{(II-26)}$$

onde utilizamos a simetria helicoidal do sistema.

A solução geral da equação (II-26) é dada por (Morozov e Solov'ev 66):

$$\phi = B_0 z + \sum_{mN=1}^{\infty} \left[A_{mN} K_{mN}(Nkr) + B_{mN} I_{mN}(Nkr) \right] \text{sen } Nu \qquad \text{(II-27)}$$

sendo I_{mN} e K_{mN} as funções modificadas de Bessel de primeira e segunda espécies, respectivamente, (Butkov 78) e $u = m\theta - kz$. O primeiro termo representa um campo uniforme na direção z.

Para termos a convergência da solução em $r = 0$, devemos considerar como nulos os coeficientes A_{mN} da somatória na equação (II-27). Levando-se em conta as condições de contorno para o campo magnético em $r = b$, onde b é o raio da hélice pela qual a corrente I_h é transportada, obtemos que o potencial (II-27) toma a forma:

$$\phi = \frac{\mu_0 I_h k}{2\pi m} \left[z + 2b \sum_{mN=1}^{\infty} K'_{mN}(Nkb) \; I_{mN}(Nkr) \text{ sen } Nu \right] \qquad \text{(II-28)}$$

$$\text{para} \quad 0 \leq r \leq b$$

sendo $K'_{mN}(Nkr)$ a derivada em relação ao argumento (Nkr).

Consideraremos agora o campo criado pela superposição de m pares de fios finos adjacentes, enrolados helicoidalmente numa superfície ciliíndrica de raio b, com correntes de sentidos opostos I_h (fig. II-3).

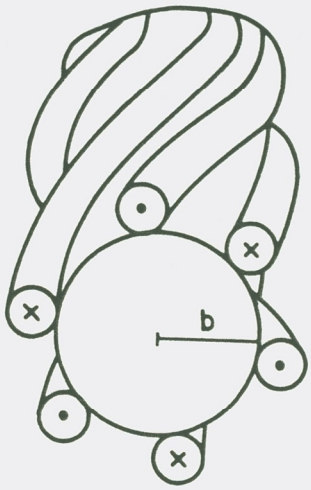

fig II-3: Três pares de condutores helicoidais adjacentes.

Neste caso, o primeiro termo da equação (II-28) se anula e o potencial torna-se, depois de considerações em relação à geometria do problema:

$$\phi = \frac{2\,\mu_0\, b\, I_h\, k}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} K'_{mN}(Nkb)\;\; I_{mN}(Nkr)\;\text{sen}\;Nu \qquad \text{(II-29)}$$

para $0 \leq r \leq b$

sendo

$$N = 2p + 1 \qquad \text{(II-30)}$$

Estes cálculos podem ser vistos em detalhes no apêndice A. Perto do eixo magnético, o campo pode ser aproximado por um único harmônico, de modo que tomaremos o termo em que p = 0 (N = 1), na somatória da equação (II-29).

Assim, o potencial será escrito como:

$$\phi = \frac{2\,\mu_0\, b\, I_h\, k}{\pi}\; K'_m\,(kb)\; I_m(kr)\; \text{sen}\; u \qquad \text{(II-31)}$$

Desde que estamos interessados em regiões em que as condições,

$$k\,b \ll 1 \quad , \quad k\,r \ll 1 \quad \text{e} \quad r < b \qquad \text{(II-32)}$$

sejam satisfeitas simultaneamente, tomaremos as expansões para as funções de Bessel quando os argumentos tendem a zero. Assim, as funções modificadas de Bessel podem ser aproximadas por (Butkov 78):

$$I_m(x) \approx \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^m \qquad \text{(II-33.a)}$$

e

$$K_m(x) \approx \frac{\Gamma(m)}{2} \left(\frac{2}{x} \right)^m \qquad \text{(II-33.b)}$$

A aproximação é razoável, pois o maior erro que poderíamos cometer ao considerarmos r ≈ 8cm (raio menor do TBR-1), seria inferior a 1% .

Substituindo-se as equações (II-33) em (II-31) vem:

$$\phi \approx - \frac{\mu_0 I_h}{\pi} \left[\frac{r}{b} \right]^m \text{sen } u \qquad 0 \leq r \leq b \qquad \text{(II-34)}$$

e as componentes do campo magnético que este potencial gera são dadas por:

$$B_r^1 = \frac{\partial \phi}{\partial r} = - \frac{\mu_0 I_h m}{\pi} \frac{r^{m-1}}{b^m} \text{sen } u \qquad \text{(II-35.a)}$$

$$B_\theta^1 = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - \frac{\mu_0 I_h m}{\pi} \frac{r^{m-1}}{b^m} \cos u \qquad \text{(II-35.b)}$$

$$B_z^1 = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\mu_0 I_h k}{\pi} \frac{r^m}{b^m} \cos u \qquad \text{(II-35.c)}$$

Utilizando as equações (II-22) e (II-35), podemos estabelecer a equação para as superfícies magnéticas do campo perturbativo. Assim temos:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \cong \frac{\mu_0 I_h k^2}{\pi} \frac{r^{m+1}}{b^m} \cos u + \frac{\mu_o I_h m^2}{\pi} \frac{r^{m-1}}{b^m} \cos u \qquad \text{(II-36)}$$

Integrando (II-36) vem:

$$\psi_1 \cong \frac{\mu_0 I_h k^2}{\pi (m+2)} \frac{r^{m+2}}{b^m} \cos u + \frac{\mu_0 I_h m}{\pi} \frac{r^m}{b^m} \cos u \qquad \text{(II-37)}$$

O primeiro termo da equação (II-37) é menor que o segundo termo na ordem de $(r/R)^2$. Deste modo, desprezaremos este termo e consideraremos:

$$\psi_1(r,u) \approx \frac{\mu_0 I_h m}{\pi} \left[\frac{r}{b} \right]^m \cos u \qquad \text{(II-38)}$$

Podemos observar a forma destas superfícies na fig. II-4 .

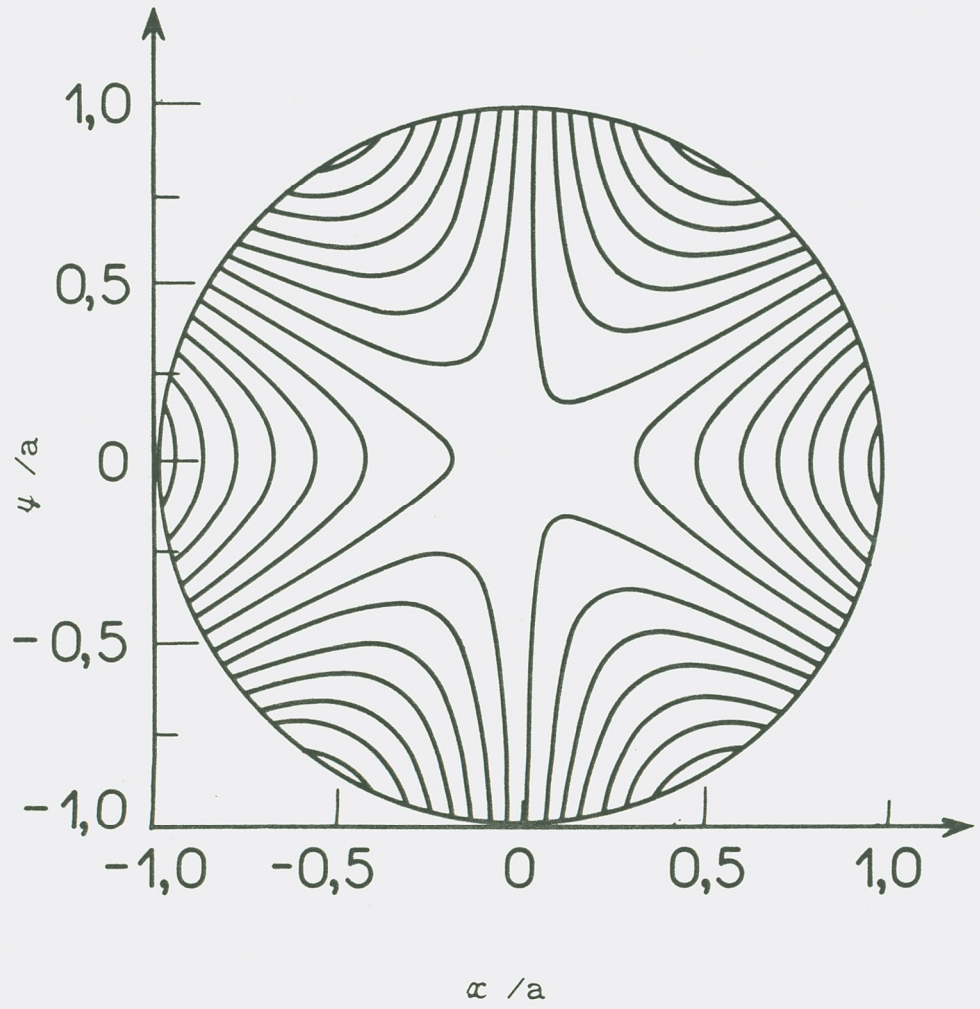

fig. II-4: Curvas de ψ_1 constante para o sistema composto por três pares de condutores helicoidais enrolados numa superfície cilíndrica. As superfícies foram obtidas para $q(a) = 5$, $q(0) = 1$, $I_p = 10$ kA, $I_h = 100$ A $m = 3$, $n = 1$ e parâmetros do TBR-1.

II-e) - ILHAS MAGNÉTICAS

Vimos que, ao considerarmos a superposição de um campo de simetria helicoidal ao campo de equilíbrio, as superfícies magnéticas podem ser descritas pela equação (II-16), onde $| \psi_1 | \ll | \psi_0 |$.

Além disso, a perturbação correspondente a $\psi_1(r,u)$ pode criar efeitos ressonantes em torno da superfície racional com $q = m/n$, desde que a helicidade desta perturbação coincida com a da superfície mencionada. Estes efeitos ressonantes dão origem às chamadas ilhas magnéticas. O aparecimento destas ilhas pode ser explicado pela superposição da componente helicoidal do campo magnético de equilíbrio com a componente radial do campo criado pelos condutores helicoidais (Fernandes e Caldas 85), dada pela equação (II-35.a).

Podemos fazer uma estimativa da largura dessas ilhas, expandindo a equação (II-16) até segunda ordem, em torno do raio da superfície racional com $q(r_{m,n}) = m/n$. Assim, podemos escrever:

$$\Psi(r,u) = \psi_0(r_{m,n}) + \psi_0'(r_{m,n})\,(r-r_{m,n}) + \frac{1}{2}\,\psi_0''(r_{m,n})\,(r - r_{m,n})^2 +$$

$$+ \psi_1(r_{m,n},u)$$

A partir de (II-22) vem:

$$\psi_0'(r_{m,n}) = k\, r_{m,n}\, B_z^0(r_{m,n}) - m\, B_\theta^0(r_{m,n}) \qquad \text{(II-40)}$$

Tomando a equação (II-8) e usando o fato que k = n/R , obtemos:

$$\psi_0'(r_{m,n}) = \frac{m\, B_z^0\, r_{m,n}}{R}\left[\frac{n}{m} - \frac{1}{q(r_{m,n})}\right] = 0 \qquad \text{(II-41)}$$

Deste modo, a equação (II-39) reduz-se a:

$$\Psi(r,u) = \frac{1}{2}(r-r_{m,n})^2\,\psi_0''(r_{m,n}) + \psi_1(r_{m,n}\,,\ u) = \text{cte} = C \qquad \text{(II-42)}$$

Ainda a partir da equação (II-22) e da equação (II-7) vem:

$$\psi_0''(r_{m,n}) = \frac{B_z^0\, m}{R}\left[\frac{a}{r_{m,n}}\right]^2\left\{\frac{n}{m}\left[\frac{r_{m,n}}{a}\right]^2 + \frac{1}{q(a)}\left\{1-\left[1-\frac{r_{m,n}^2}{a^2}\right]^{\gamma}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left[1+\left[\frac{r_{m,n}}{a}\right]^2(1+2\gamma)\right]\right\}\right\} \qquad \text{(II-43)}$$

Tomando a equação para as superfícies magnéticas devido à perturbação dada por (II-38) obtemos, a partir de (II-42),

$$r-r_{m,n} = \pm\left\{\frac{2}{\psi_0''(r_{m,n})}\left[C - \frac{\mu_0\, I_h\, m}{\pi}\left[\frac{r_{m,n}}{b}\right]^m \cos m\theta\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

(II-44)

que é a equação que descreve as intersecções das superfícies magnéticas perturbadas com o plano z = 0. As trajetórias das linhas de

campo no espaço de fase $\rho \times u$, correspondentes ao sistema composto pelo plasma em equilíbrio cilíndrico superposto aos condutores helicoidais estão ilustradas na figura II-5. A figura foi obtida a partir do mapeamento analítico do invariante Ψ definido pelas equações (II-16), (II-12) e (II-38).

Notamos que a perturbação $\psi_1(r,u)$, proveniente das correntes helicoidais, tem a mesma helicidade que a superfície racional com $q = m/n$.

Podemos analisar três casos a partir de (II-44) que são ilustrados na fig. II-5:

a) $$C > \frac{\mu_0 I_h m}{\pi} \left[\frac{r_{m,n}}{b}\right]^m$$

de onde concluímos que para qualquer valor de θ obtemos:

$$r - r_{m,n} > 0$$

ou

$$r - r_{m,n} < 0$$

b) $$C = \frac{\mu_0 I_h m}{\pi} \left[\frac{r_{m,n}}{b}\right]^m$$

Neste caso,

$$r-r_{m,n} = \pm \left[\frac{2 \mu_0 I_h m}{\pi \psi''_0(r_{m,n})} \left[\frac{r_{m,n}}{b}\right]^m (1 - \cos m\theta) \right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(II-45)}$$

sendo $r-r_{m,n} = 0$ para

$$\theta = 0 \ , \ \frac{2\pi}{m} \ , \ \frac{4\pi}{m} \ , \ \frac{6\pi}{m} \ \ldots$$

ou

$$r-r_{m,n} = \Delta r_{m,n} = \left[\frac{4 \mu_0 I_h m}{\pi \psi''_0(r_{m,n})} \left[\frac{r_{m,n}}{b}\right]^m \right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(II-46)}$$

quando

$$\theta = \frac{\pi}{m} \ , \ \frac{3\pi}{m} \ , \ \frac{5\pi}{m} \ , \ \ldots$$

A equação (II-46) representa o valor das semi-larguras das ilhas magnéticas. Assim, m pares de fios helicoidais com correntes I_h em sentidos opostos nos condutores adjacentes e enrolados com passo

$2\pi/\alpha$ no tokamak, dão origem à m ilhas magnéticas ao redor da superfície racional com $q(r_{m,n}) = m/n$. A figura V-1.b fornece o mapeamento numérico das tajetórias das linhas de campo através do qual observamos três ilhas magnéticas em torno da superfície com q = 3.

c) $$C < \frac{\mu_0 I_h m}{\pi} \left(\frac{r_{m,n}}{b}\right)^m$$

Analisando a equação (II-44), observamos que para obter valores reais de $r-r_{m,n}$, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\cos m\theta < \frac{C}{\left[\frac{\mu_0 I_h m}{\pi} \left(\frac{r_{m,n}}{b}\right)^m\right]} < 1$$

Isto resulta em um conjunto de linhas fechadas interiores às do caso b, conforme podemos notar na fig. II-5.

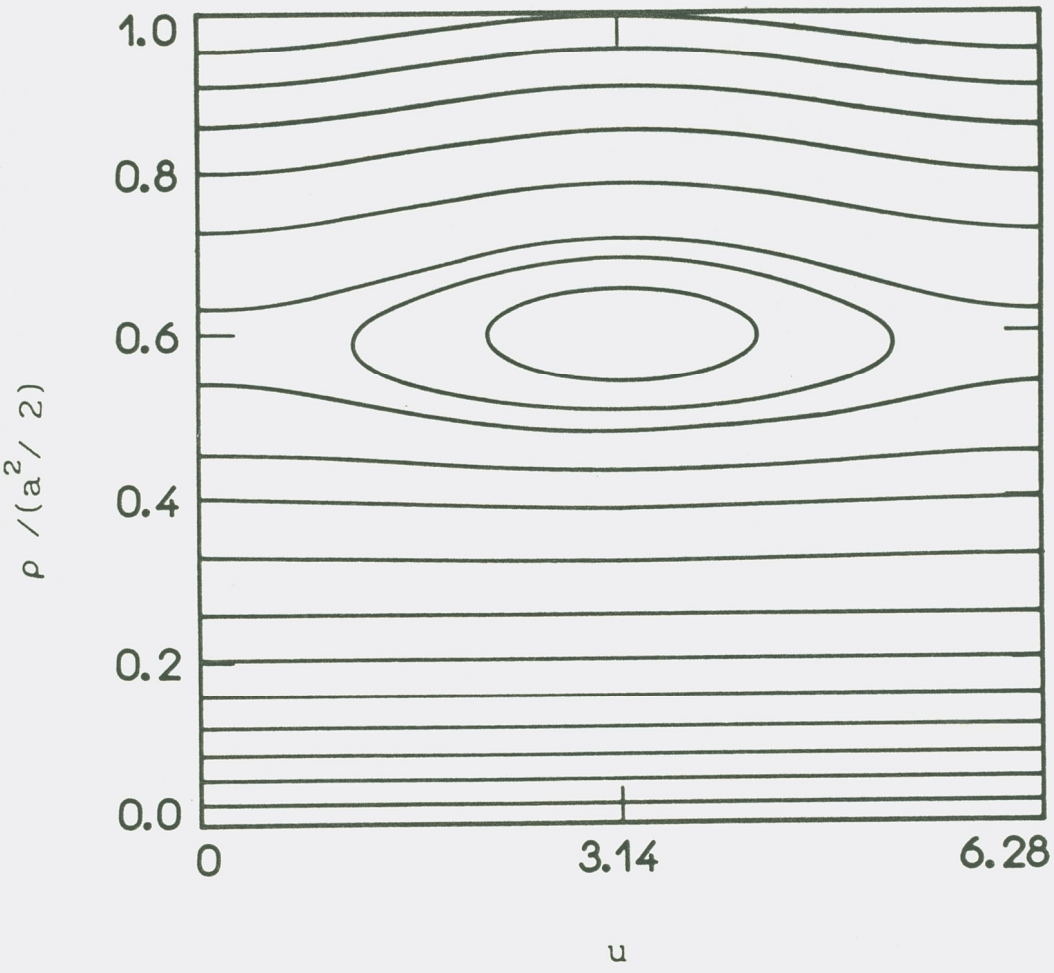

fig. II-5: Trajetórias das linhas de campo no espaço de fase $\rho \times u$. A figura foi obtida para $q(a) = 5$, $q(0) = 1$, $I_p = 10$ kA, $I_h = 100$ A, $m = 3$, $n = 1$ e parâmetros do TBR-1. A variável ρ está normalizada pelo quadrado do raio da coluna de plasma. $\left[\rho = r^2/2 \right]$

II.f) - CORREÇÃO TOROIDAL

Veremos, agora, como ficam as equações para o campo magnético quando introduzimos a correção toroidal ao sistema descrito pela equação (II-16).

Quando esta correção é superposta a uma perturbação helicoidal caracterizada pelos números m e n, temos que a simetria é quebrada e, como conseqüência, as superfícies magnéticas podem desaparecer em algumas regiões do plasma (Morozov e Solov'ev 66). Entretanto, ao considerarmos correntes helicoidais ressonantes de pequena intensidade para tokamaks de grande razão-de-aspecto, observamos, ao invés da destruição das superfícies, a formação de $m \pm 1$ ilhas satélites, denominadas também secundárias, nas superfícies com $q = (m \pm 1)/n$ (Fussman *et. al.* 81); além de outras ilhas de menores dimensões. Por outro lado, caso o valor das correntes nos condutores helicoidais ultrapasse um limite máximo que pode ser estimado, poderá haver superposição das ilhas primárias e secundárias com o aparecimento de uma região caótica que pode causar pequenas disrupturas no tokamak (Vannucci *et. al.* 89).

Inicialmente consideraremos que o sistema, após efetuada a correção toroidal, é descrito por um campo magnético dado pela seguinte expressão:

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}^{0}(r) + \nabla\phi\,(r,u) + \varepsilon \cos\theta\, \nabla\phi_{1}(r,u) \qquad \text{(II-47)}$$

onde $\varepsilon \cos\theta\, \nabla\phi_1$ é o termo que introduz o efeito de curvatura ao campo e $\varepsilon = -r/R$ .Justificaremos posteriormente o emprego da equação (II-47).

O último termo desta equação contém o acoplamento de modos (1,0) com os modos (m,n) e, ao considerá-lo,observamos quebra de

simetria na configuração original. O potencial ϕ_1, na verdade, é o potencial ϕ dado pela equação (II-34). O campo magnético decorrente desta correção tem as seguintes componentes:

$$B_r^t = -\frac{r}{R}\cos\theta \left[-\frac{\mu_0 I_h m}{\pi} \frac{r^{m-1}}{b^m} \text{ sen } u \right] \simeq \frac{\mu_0 I_h m}{2\pi R} \left(\frac{r}{b}\right)^m \text{ sen } u' \qquad \text{(II-48.a)}$$

$$B_\theta^t = -\frac{r}{R}\cos\theta \left[-\frac{\mu_0 I_h m}{\pi} \frac{r^{m-1}}{b^m} \cos u \right] \simeq \frac{\mu_0 I_h m}{2\pi R} \left(\frac{r}{b}\right)^m \cos u' \qquad \text{(II-48.b)}$$

$$B_z^t = -\frac{r}{R}\cos\theta \left[\frac{\mu_0 I_h k}{\pi} \frac{r^m}{b^m} \cos u \right] \simeq -\frac{\mu_0 I_h k}{2\pi R} \frac{r^{m+1}}{b^m} \cos u' \qquad \text{(II-48.c)}$$

Nas equações (II-48) foram utilizadas as expressões (II-35). Além disso, introduzimos a variável $u' = (m \pm 1)\theta - kz$, conforme a superfície racional em que consideramos a ressonância.

As novas equações para as linhas de campo, obtidas quando introduzimos a correção toroidal, são determinadas ao modificarmos o campo gerado pelos condutores helicoidais da seguinte forma:

$$\mathfrak{B}_r = B_r^1 + B_r^t = \left(1 - \frac{r}{R} \cos\theta \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad \text{(II-49.a)}$$

$$\mathfrak{B}_\theta = B_\theta^1 + B_\theta^t = \left(1 - \frac{r}{R} \cos\theta \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \qquad \text{(II-49.b)}$$

$$\mathfrak{B}_z = B_z^1 + B_z^t = \left(1 - \frac{r}{R} \cos\theta \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad \text{(II-49.c)}$$

Tomamos em (II-49) as expressões dadas pelas equações (II-35).

As equações (II-11) tornam-se, assim:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{\mathfrak{B}_r}{B_z^0 + \mathfrak{B}_z} = \frac{- \dfrac{\mu_0 I_h m}{\pi} \dfrac{r^{m-1}}{b^m} \operatorname{sen} u \left(1 - \dfrac{r}{R} \cos\theta \right)}{B_z^0 + \dfrac{\mu_0 I_h k}{\pi} \dfrac{r^m}{b^m} \cos u \left(1 - \dfrac{r}{R} \cos\theta \right)}$$

(II-50.a)

$$r\,\frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta^0 + \mathfrak{B}_\theta}{B_z^0 + \mathfrak{B}_z} = \frac{B_\theta^0 - \dfrac{\mu_0 I_h m}{\pi}\dfrac{r^{m-1}}{b^m}\cos u\left(1 - \dfrac{r}{R}\cos\theta\right)}{B_z^0 + \dfrac{\mu_0 I_h k}{\pi}\dfrac{r^m}{b^m}\cos u\left(1 - \dfrac{r}{R}\cos\theta\right)}$$

(II-50.b)

Considerando $r/R \ll 1$, expandimos as expressões (II-50) e tomamos apenas termos de ordem zero ou termos helicoidais ressonantes de ordem menor que $(r/R)^2$. Desta forma, obtivemos as seguintes expressões finais:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{\mu_0 I_h m}{2\pi R B_z^0}\left[\frac{r}{b}\right]^m \text{sen } u' \qquad \text{(II-51.a)}$$

e

$$r\,\frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta^0}{B_z^0} + \frac{\mu_0 I_h m}{2\pi R B_z^0}\left[\frac{r}{b}\right]^m \cos u' \qquad \text{(II-51.b)}$$

As equações (II-51) também podem ser obtidas considerando $\mathbb{B} \times d\vec{\ell} = 0$ e efetuando-se a correção ao campo toroidal B_z^0 conforme explicitado a seguir:

$$B_z^0 \rightarrowtail \frac{B_z^0}{1 + \frac{r}{R}\cos\theta} \qquad \text{(II-52)}$$

Este fato justifica o emprego da equação (II-47). Ao efetuarmos a correção em B_z^0 consideramos o acoplamento entre o campo da hélice e a correção toroidal, uma vez que modificamos o passo das superfícies magnéticas (*i.e.* o passo das linhas de campo) sobre as quais atua o campo ressonante das hélices.

Reescreveremos a equação (II-51.b) em termos de du'/dz, notando que:

$$u' = m'\theta - kz \qquad \text{(II-53)}$$

sendo

$$m' = m \pm 1 \qquad \text{(II-54)}$$

A partir de (II-53) vem:

$$\frac{du'}{dz} = m' \frac{d\theta}{dz} - k \qquad \text{(II-55)}$$

Substituindo (II-51.b) em (II-55) obtemos:

$$\frac{du'}{dz} = - k + \frac{m' B_\theta^0}{r\, B_z^0} + \frac{\mu_0\, I_h\, m\, m'}{2\pi R\, B_z^0}\ \frac{r^{m-1}}{b^m}\ \cos u' \qquad \text{(II-56)}$$

Podemos estabelecer um invariante aproximado, χ , para as equações (II-51.a) e (II-56), que satisfaça a equação:(Fernandes *et. al.* 89)

$$\mathbb{B} \cdot \nabla\chi \approx 0 \qquad \text{(II-57)}$$

ou seja:

$$\frac{d\chi}{dz} = 0 \qquad \text{(II-58)}$$

onde dz é tomado ao longo de uma linha de campo. Determina-se, assim:

$$\chi = \int \left[\frac{r'}{a}\right]^l (krB_z^0 - m' B_\theta^0)\, dr' - \frac{a}{2\,R} \left[\frac{r}{a}\right]^{l+1} \frac{\mu_0\, I_h\, m}{\pi} \left[\frac{r}{b}\right]^m \cos u'$$

(II-59)

Na equação (II-59) temos:

$$l = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad r \sim r_{m+1,n} \\ -2 & \text{para} \quad r \sim r_{m-1,n} \end{cases}$$

Podemos calcular a largura das m ± 1 ilhas satélites que surgem nas superfícies q = (m ± 1)/n, da mesma forma como foi feito com a função Ψ no item (II.e), através da equação (II-46).

Escreveremos a equação (II-59) através da superposição de dois termos como segue:

$$\chi \simeq \chi_0(r) + \chi_1(r,u') \qquad \text{(II-60)}$$

As semi-larguras das m ± 1 ilhas satélites que surgem nas superfícies q=(m ± 1)/n , podem ser obtidas através de procedimento análogo ao que havíamos feito para as ilhas primárias, tomando a função Ψ. Assim obtemos:

$$\Delta r_{m',n} = \left[\frac{4a}{2R} \left(\frac{r_{m',n}}{a} \right)^{l+1} \frac{\mu_0 I_h m}{\pi \chi_0''(r_{m',n})} \left(\frac{r_{m',n}}{b} \right)^{m} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(II-61)}$$

A razão entre as expressões (II-46) e (II-61) nos fornece a seguinte relação:

$$\frac{\Delta r_{m',n}}{\Delta r_{m,n}} = \left[\frac{a}{2R} \frac{\psi_0''(r_{m,n})}{\chi_0''(r_{m',n})} \left(\frac{r_{m',n}}{r_{m,n}}\right)^m \left(\frac{r_{m',n}}{a}\right)^{l+1} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(II-62)}$$

que depende da razão a/R. Portanto, quanto mais próximos estivermos da aproximação cilíndrica (R/a » 1), menor será a dimensão das ilhas satélites em relação às principais. Podemos, ainda, estimar as semi-larguras das ilhas primárias e secundárias através das equações (II-46) e (II-61), respectivamente, e encontrar condições de superposição das mesmas. Esta superposição determina as regiões caóticas no plasma com ocorrência de disrupturas no tokamak, conforme já foi mencionado.

As semi-larguras das ilhas primárias e secundárias ainda se relacionam através do parâmetro de estocasticidade s, definido por Chirikov (Chirikov 79) através da seguinte expressão:

$$s = \frac{\Delta r_{m,n} + \Delta r_{m',n}}{| r_{m,n} - r_{m',n} |} \qquad \text{(II-63)}$$

Podemos concluir de (II-63) que as ilhas principais e secundárias entram em contato quando $s = 1$. Assim, segundo Chirikov, um sistema torna-se instável quando $s \geq 1$, pois nesta faixa de valores passamos a ter destruição das superfícies magnéticas devido à superposição de ilhas.

Em resumo, obtivemos neste capítulo a configuração de campos para um plasma em equilíbrio MHD estático em um tokamak de grande razão-de aspecto, com m pares de condutores helicoidais percorridos por correntes de sentidos opostos. Associamos a este sistema um invariante aproximado, que representa as superfícies magnéticas necessárias ao confinamento do plasma, e estimamos o valor das semi-larguras das m ilhas magnéticas que surgem em torno da

superfície racional caracterizada pelo fator de segurança $q = m/n$. Em seguida, introduzindo a correção toroidal ao sistema descrito anteriormente, verificamos como as equações das linhas de campo se modificavam e associamos às mesmas um novo invariante aproximado. Este invariante nos permite estimar as semi-larguras das ilhas satélites que surgem em torno das superfícies com $q = m \pm 1/n$ como conseqüência do efeito de curvatura do campo, e assim, encontrar as condições que levam a uma distribuição caótica das linhas de campo devido à superposição de ilhas primárias e secundárias.

CAPÍTULO III

FORMULAÇÃO HAMILTONIANA PARA SUPERFÍCIES MAGNÉTICAS

III.a) - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, representaremos um campo de simetria helicoidal através de duas funções e verificaremos, a partir da definição de um momento canonicamente conjugado à coordenada radial, que uma dessas funções será a Hamiltonina geradora das linhas de campo magnético (Turner 85).

III.b) - REPRESENTAÇÃO PARA UM CAMPO COM SIMETRIA HELICOIDAL

Um campo de simetria helicoidal pode ser representado através de duas funções conforme está definido abaixo:

$$\mathbb{B}(r,u) = \mathcal{F}_1(r,u)\,\hat{e} - \nabla\mathcal{F}_2(r,u) \times \hat{e} \qquad \text{(III-1)}$$

onde

$$u = m\theta - kz \qquad \text{(III-2.a)}$$

$$\hat{e} = \frac{kr\,\hat{e}_\theta + m\,\hat{e}_z}{k^2r^2 + m^2} \qquad \text{(III-2.b)}$$

Podemos determinar as duas funções $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ para um determinado campo magnético, tomando os produtos escalar e vetorial, respectivamente, da equação (III-1) com o versor $\hat{e}$. Deste modo, temos:

$$\mathbb{B}(r,u).\hat{e} = \mathcal{F}_1\,\hat{e}.\hat{e} - (\nabla\mathcal{F}_2 \times \hat{e}).\hat{e} \qquad \text{(III-3)}$$

Notamos facilmente que o segundo termo do lado direito na equação (III-3) é nulo. Através das equações (III-1) e (III-2.b) podemos escrever (III-3) como:

$$B_\theta \frac{kr}{k^2r^2 + m^2} + \frac{B_z m}{k^2r^2 + m^2} = \mathcal{F}_1 \frac{k^2r^2 + m^2}{(k^2r^2 + m^2)^2} \qquad \text{(III-4)}$$

onde B_θ e B_z são as componentes do campo magnético nas direções θ e z, respectivamente. A partir da equação (III-4) obtemos:

$$\mathcal{F}_1 = krB_\theta + mB_z \qquad \text{(III-5)}$$

Tomando o produto vetorial de (III-1) com o versor $\hat{e}$, poderemos determinar o campo estabelecido por $\nabla\mathcal{F}_2$, conforme mostrado a seguir:

$$\mathbb{B}(r,u) \times \hat{e} = \mathcal{F}_1 \hat{e} \times \hat{e} - (\nabla\mathcal{F}_2(r,u) \times \hat{e}) \times \hat{e} \qquad \text{(III-6)}$$

O primeiro termo do lado direito da equação (III-6) é nulo e podemos notar que o segundo termo pode ser escrito como $- \nabla\mathcal{F}_2 e^2$. A equação (III-6) fornece, assim:

$$\left[\frac{m B_\theta}{k^2r^2 + m^2} - \frac{k r B_z}{k^2r^2 + m^2} \right] \hat{e}_r - \frac{m B_r}{k^2r^2 + m^2} \hat{e}_\theta + \frac{k r B_r}{k^2r^2 + m^2} \hat{e}_z =$$

$$= - \nabla\mathcal{F}_2 \frac{1}{k^2r^2 + m^2} \qquad \text{(III-7)}$$

de onde vem:

$$- [mB_\theta(r,u) - krB_z(r,u)] \hat{e}_r + [m\hat{e}_\theta - kr\hat{e}_z] B_r(r,u) = \nabla\mathcal{F}_2 \qquad \text{(III-8)}$$

Verificaremos que $\mathcal{F}_2$ pode ser interpretada como a Hamiltoniana geradora das linhas do campo $\mathbb{B}(r,u)$.

III.c) - FORMALISMO HAMILTONIANO PARA UM CAMPO MAGNÉTICO HELICOIDAL

Para verificarmos que $\mathcal{F}_2$ rege a evolução das linhas de campo, definiremos um momento ρ canonicamente conjugado a r, como segue:

$$\rho = \int^{u} r\, B_z(r,u')\, du' \qquad \text{(III-9)}$$

Da equação (III-9) podemos notar que:

$$\rho = \rho(r,u) \qquad \text{(III-10.a)}$$

$$u = u(r,\rho) \qquad \text{(III-10.b)}$$

e

$$\frac{\partial \rho(r,u)}{\partial u} = r\, B_z(r,u) \qquad \text{(III-11)}$$

Queremos determinar uma Hamiltoniana que gere as seguintes equações para as linhas de campo:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{\partial H'(r,\rho)}{\partial \rho} \qquad \text{(III-12.b)}$$

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\partial H'(r,\rho)}{\partial r} \qquad \text{(III-12.b)}$$

A coordenada z pode ser interpretada como uma variável que descreve a evolução com o tempo e a partir das equações (II-11) podemos escrever:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{B_r}{B_z} \qquad \text{(III-13.a)}$$

$$r \frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta}{B_z} \qquad \text{(III-13.b)}$$

Ao examinarmos as equações (III-10), definimos:

$$\mathcal{H}(r, u(r,\rho)) = H'(r,\rho) \qquad \text{(III-14)}$$

e teremos a partir de (III-12.a) e (III-13.a):

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho}(r, u(r,p)) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(r,u) \frac{\partial u}{\partial \rho}(r,\rho) = \frac{B_r}{B_z} \qquad \text{(III-15)}$$

Combinando a equação (III-11) com a equação (III-15) obtemos:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(r,u) = r\, B_r(r,u) \qquad \text{(III-16)}$$

ou utilizando as equações (II-18), escrevemos:

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}(r,u) = m\,B_r(r,u) \qquad \text{(III-17.a)}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}(r,u) = -\,k\,r\,B_r(r,u) \qquad \text{(III-17.b)}$$

Calcularemos, agora, o lado esquerdo da equação (III-12.b). A partir de (III-10.a) vem:

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\partial \rho}{\partial u}(r,u)\,\frac{du}{dz} + \frac{\partial \rho}{\partial r}(r,u)\,\frac{dr}{dz} \qquad \text{(III-18)}$$

mas

$$\frac{du}{dz} = \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{dz}{dz} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\,\frac{d\theta}{dz} = -\,k + m\,\frac{d\theta}{dz} \qquad \text{(III-19)}$$

Tomando (III-11), (III-13.a) e (III-19) e substituindo em (III-18), concluímos que:

$$\frac{d\rho}{dz} = \left[-\,k + m\,\frac{d\theta}{dz}\right] rB_z + \frac{\partial \rho}{\partial r}(r,u)\,\frac{B_r}{B_z} \qquad \text{(III-20)}$$

Substituindo (III-13.b) em (III-20) obtemos:

$$\frac{d\rho}{dz} = - krB_z + mB_\theta + \frac{B_r}{B_z} \frac{\partial \rho}{\partial r}(r,u) \qquad \text{(III-21)}$$

Mas segundo (III-12.b),

$$\frac{d\rho}{dz} = - \frac{\partial H'(r,\rho)}{\partial r}$$

Vamos, então, calcular $- \partial H'/\partial r$.

Levando em consideração (III-14) vem:

$$- \frac{\partial H'(r,\rho)}{\partial r} = - \frac{d\mathcal{H}}{dr}(r,u(r,\rho)) =$$

$$= - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r}(r,u) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(r,u) \frac{\partial u}{\partial r}(r,\rho) \qquad \text{(III-22)}$$

Utilizando a relação:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r,\rho) = - \frac{\partial \rho(r,u)/\partial r}{\partial \rho(r,u)/\partial u} \qquad \text{(III-23)}$$

e substituindo em (III-22) temos:

$$- \frac{\partial H'(r,\rho)}{\partial r} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r}(r,u) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(r,u) \left[\frac{\partial \rho(r,u)/\partial r}{\partial \rho(r,u)/\partial u} \right] \qquad \text{(III-24)}$$

De (III-11), (III-16) e (III-22) podemos escrever:

$$-\frac{\partial H'(r,\rho)}{\partial r} = -\frac{\partial \mathcal{H}(r,u)}{\partial r} + \frac{B_r}{B_z}\frac{\partial \rho(r,u)}{\partial r} \qquad \text{(III-25)}$$

Considerando (III-12.b), escrevemos a partir de (III-21) e (III-25):

$$\frac{\partial \mathcal{H}(r,u)}{\partial r} = krB_z(r,u) - mB_\theta(r,u) \qquad \text{(III-26)}$$

Podemos reunir as equações (III-17) e (III-26) escrevendo:

$$\nabla\mathcal{H} = [krB_z(r,u) - mB_\theta(r,u)]\,\hat{e}_r + mB_r(r,u)\,\hat{e}_\theta - krB_r(r,u)\,\hat{e}_z \qquad \text{(III-27)}$$

Comparando (III-27) com (III-8) concluímos que:

$$\mathcal{H}(r,u) = \mathcal{F}_2(r,u) \qquad \text{(III-28)}$$

e assim escrevemos:

$$\mathbb{B}(r,u) = \mathcal{F}_1(r,u)\,\hat{e} - \nabla\mathcal{H}(r,u) \times \hat{e} \qquad \text{(III-29)}$$

Para determinar $\mathcal{F}_2$ e portanto $\mathcal{H}$, vamos utilizar um artifício. Inicialmente calcularemos $\nabla\mathcal{F}_1$, a partir de (III-5), de onde vem:

$$\nabla\mathcal{F}_1 = \left[k \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} + m \frac{\partial B_z}{\partial r} \right] \hat{e}_r + \left[k \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{m}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\theta +$$

$$+ \left[kr \frac{\partial B_\theta}{\partial z} + m \frac{\partial B_z}{\partial z} \right] \hat{e}_z \qquad \text{(III-30)}$$

A equação (III-30) pode ser reescrita como:

$$\nabla\mathcal{F}_1 = \left[k \frac{\partial (rB_\theta)}{\partial r} + m \frac{\partial B_z}{\partial r} \right] \hat{e}_r +$$

$$+ \left[\hat{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_z \, r \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[kB_\theta + \frac{m}{r} B_z \right] \qquad \text{(III-31)}$$

Levando-se em conta que a densidade de corrente j(r,u) é o rotacional do campo magnético, vem:

$$j_r = \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \qquad \text{(III-32.a)}$$

$$j_\theta = \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \qquad \text{(III-32.b)}$$

$$j_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right] \qquad \text{(III-32.c)}$$

Tomando (III-32.b) e (III-32.c) podemos escrever o primeiro parênteses de (III-31) como:

$$k \frac{\partial (rB_\theta)}{\partial r} + m \frac{\partial B_z}{\partial r} = krj_z - mj_\theta + \left[k \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + m \frac{\partial B_r}{\partial z} \right] \qquad \text{(III-33)}$$

Ao considerarmos a simetria expressa por (II-18), onde:

$$\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \theta} = - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

teremos que a equação (III-33) resulta em:

$$k \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} + m \frac{\partial B_z}{\partial r} = krj_z - mj_\theta \qquad \text{(III-34)}$$

Por outro lado, a segunda parte da equação (III-31) poderá ser escrita como:

$$(m \hat{e}_\theta - kr \hat{e}_z) j_r \qquad \text{(III-35)}$$

onde utilizamos (III-32.a) e a simetria expressa acima.

Portanto, a partir de (III-31), (III-34) e (III-35) obtemos:

$$\nabla \mathcal{F}_1 = (krj_z - mj_\theta) \hat{e}_r + (m \hat{e}_\theta - kr \hat{e}_z) j_r \qquad \text{(III-36)}$$

Comparando (III-36) com (III-8) e notando a equação (III-5), poderemos escrever, finalmente:

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{H} = kr A_\theta + m A_z \qquad \text{(III-37)}$$

que é justamente o invariante obtido na equação (II-20). Usamos o fato que $\mathbb{J} = \nabla \times \mathbb{B}$ e $\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$.

Obtivemos assim, neste capítulo, segundo um formalismo proposto por Turner (Turner 85), a Hamiltoniana geradora das linhas de um campo com simetria helicoidal. A Hamiltoniana obtida pode ser identificada com o invariante determinado no capítulo anterior expresso pela equação (II-20).

CAPÍTULO IV

FORMALISMO HAMILTONIANO PARA O CAMPO MAGNÉTICO NO TBR-1

IV.a) - INTRODUÇÃO

Apresentaremos neste capítulo uma formulação Hamiltoniana para descrever um sistema composto por um tokamak de grande razão-de-aspecto e por m pares de condutores helicoidais percorridos por correntes de sentidos opostos em condutores adjacentes. Apesar do formalismo apresentado neste capítulo ser expresso por variáveis canônicas diferentes daquelas consideradas no capítulo anterior, podemos identificar a Hamiltoniana aqui introduzida com o invariante estabelecido através da equação (III-37). Concluímos, assim, que as duas Hamiltonianas são numericamente iguais.

O sistema mencionado acima possui simetria helicoidal e é integrável, sendo as trajetórias das linhas de campo mapeadas no espaço de fase (ρ,u), onde ρ e u representam as variáveis canônicas. Dada esta integrabilidade, introduziremos as variáveis de ângulo-ação (ϑ,J) para descrever o sistema e, em seguida, consideraremos a correção toroidal, que quebra a simetria e provoca acoplamentos dos modos (1,0) e (m,n). Este acoplamento é responsável pela formação de $m \pm 1$ ilhas magnéticas em torno das superfícies com $q = m \pm 1/n$. Estabeleceremos o mapeamento do campo magnético desta configuração no plano (J,ϑ), através das equações de evolução das linhas de campo. Os cálculos são obtidos com os parâmetros do TBR-1. Esse método é análogo ao proposto por Filonenko (Filonenko *et. al.* 67) para descrever a estrutura do campo magnético em um stellarator de grande razão-de-aspecto.

IV.b) DESCRIÇÃO HAMILTONIANA PARA AS SUPERFÍCIES MAGNÉTICAS

Descreveremos inicialmente o comportamento das linhas de campo de um sistema composto por um plasma em equilíbrio confinado num tokamak de grande razão-de-aspecto ($R/a \gg 1$) e m pares de condutores helicoidais de raio b enrolados na câmara do toróide, percorridos por correntes de sentidos opostos I_h . O passo do enrolamento é $2\pi/\alpha$ onde $\alpha = k/m$. O campo magnético que corresponde a tal configuração é dado por:

$$\mathbb{B} = B_z^0 \, \hat{e}_z + B_\theta^0 (r) \, \hat{e}_\theta + \nabla\phi \qquad \text{(IV-1)}$$

onde B_z^0 é o campo toroidal uniforme na direção z que provém de um solenóide, $B_\theta^0(r)$ é o campo poloidal gerado pela corrente de plasma I_p dado por (II-7) e ϕ é o potencial escalar dado pela equação (II-31) que corresponde ao campo dos condutores helicoidais.

As equações das linhas de campo têm a seguinte forma:

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r\, d\theta}{B_\theta} = \frac{dz}{B_z}$$

onde (r,θ,z) são as coordenadas cilíndricas e B_r, B_θ e B_z são as respectivas componentes do campo magnético dadas por:

$$B_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{2\,\mu_0\, b\, I_h\, k^2}{\pi}\; k'_m(kb)\;\; I'_m(kr)\;\; \text{senu} \qquad \text{(IV-2.a)}$$

$$B_\theta = B^0_\theta(r) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = B^0_\theta(r) + \frac{2\,\mu_0\, b\, I_h\, k\, m}{\pi}\,\frac{1}{r}\;\; k'_m(kb)\;\; I_m(kr)\;\cos u$$

(IV-2.b)

$$B_z = B^0_z + \frac{\partial \phi}{\partial z} = B^0_z - \frac{2\,\mu_0\, b\, I_h\, k^2}{\pi}\; K'_m(kb)\;\; I_m(kr)\;\;\cos u \qquad \text{(IV-2.c)}$$

$u = m\theta - kz$ é a variável helicoidal (onde $k = n/r$) e $I_m(x)$ e $K_m(x)$ são as funções modificadas de Bessel de primeira e segunda espécies respectivamente (Butkov 78). O primo corresponde às derivadas das funções em relação ao argumento (kr).

Antes de prosseguirmos, vejamos como calcular du/dz:

$$\frac{du}{dz} = m\,\frac{d\theta}{dz} - k\,\frac{dz}{dz}$$

Assim, a partir das equaçõoes (II-11) vem:

$$\frac{du}{dz} = m\,\frac{B_\theta}{rB_z} - k \qquad \text{(IV-3)}$$

Obtemos então:

$$B_z \frac{dr}{dz} = B_z \frac{B_r}{B_z} = \frac{2\,\mu_0\, b\, I_h\, k^2}{\pi} K'_m(kb)\; I'_m(kr) \quad \text{senu} \qquad \text{(IV-4.a)}$$

$$B_z \frac{du}{dz} = m \frac{B_\theta}{r} - k\, B_z = m \frac{B^0_\theta}{r} - k\, B^0_z +$$

$$+ \frac{2\,\mu_0\, b\, I_h\, k^3}{\pi} K'_m(kb)\; I_m(kr) \quad \text{cosu} \quad \left[\frac{m^2}{r^2 k^2} + 1 \right] \qquad \text{(IV-4.b)}$$

onde utilizamos as equações (IV-2).

Para escrevermos as equações (IV-4) de uma forma Hamiltoniana, introduziremos a variável t através da coordenada z conforme estabelecemos a seguir:

$$\frac{dz}{dt} = B_z = B^0_z - \frac{2\,\mu_0\, b\, I_h\, k^2}{\pi} K'_m(kb)\; I_m(kr) \quad \text{cosu} \qquad \text{(IV-5)}$$

onde r e u são expressas em função de z através de (IV-4).

As equações (IV-4) podem, assim, ser reescritas como:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dz}\frac{dz}{dt} = B_r = \frac{2\,\mu_0\, b\, I_h\, k^2}{\pi} K'_m(kb)\; I'_m(kr) \quad \text{senu} \qquad \text{(IV-6.a)}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dt} = m\,\frac{B_\theta}{r} - k\,B_z = m\,\frac{B_\theta^0}{r} - k\,B_z^0 + \frac{2\,\mu_0\,b\,I_h\,k^3}{\pi}\,.$$

$$.K'_m(kb)\;\; I_m(kr)\;\; \cos u\;\left(\frac{m^2}{k^2r^2} + 1\right) \qquad \text{(IV-6.b)}$$

Definindo uma nova variável:

$$\rho = \frac{1}{2}\,r^2 \qquad \text{(IV-7)}$$

e considerando a seguinte relação de recorrência para as funções de Bessel (Morozov e Solov'ev 66):

$$I''_m(kr) + \frac{I'_m(kr)}{kr} = I_m(kr)\left(1 + \frac{m^2}{k^2r^2}\right) \qquad \text{(IV-8)}$$

podemos, finalmente, escrever as equações (IV-6) de uma forma Hamiltoniana como segue:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} = - \frac{du}{dt} \qquad \text{(IV-9.a)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = \frac{d\rho}{dt} \qquad \text{(IV-9.b)}$$

onde (ρ, u) são as variáveis canônicas e o invariante $\mathcal{H}$ dado a seguir, é a Hamiltoniana que descreve o sistema:

$$\mathcal{H} = \frac{k\, B_z^0\, r^2}{2} - m \int^r B_\theta^0 (r')\, dr' - \frac{2\, \mu_0\, b\, I_h\, k^2}{\pi}\, r\, K'_m(kb)\, I'_m(kr) \cos u \qquad \text{(IV-10)}$$

Pode-se demonstrar que $\mathcal{H}$ satisfaz a equação (II-1),

$$\mathbb{B} \cdot \nabla \mathcal{H} = 0$$

sendo, portanto, invariante em cada superfície magnética do sistema considerado.

Embora o formalismo Hamiltoniano aqui introduzido seja diferente do apresentado no capítulo anterior, a Hamiltoniana (IV-10) pode ser obtida da equação (III-37). Para verificarmos esta afirmação, devemos notar primeiramente que o invariante associado à configuração de campos considerada é dado, aproximadamente, segundo a equação (II-16), pela superposição linear das superfícies do equilíbrio $\psi_0(r)$,

com as superfícies provenientes do campo perturbativo. Isso nos permite escrever:

$$\mathcal{H}(r,u) = \mathcal{H}_0(r) + \mathcal{H}_1(r,u)$$

Segundo Turner (Turner 85), conforme foi visto no capítulo III, o invariante que descreve o comportamento das linhas de um campo com simetria helicoidal é:

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{H} = krA_\theta + mA_z$$

O campo magnético deste sistema é dado por:

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}^0(r) + \mathbb{B}^1(r,u)$$

Podemos estender esta relação para o potencial vetor tal que:

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^0(r) + \mathbb{A}^1(r,u)$$

Assim, reescreveremos (III-37) como:

$$\mathcal{H} = kr\,(A_\theta^0 + A_\theta^1) + m\,(A_z^0 + A_z^1)$$

A soma correspondente aos termos do equilíbrio já foi estabelecida pela equação (II-12), ou seja:

$$\mathcal{H}_0 = krA_\theta^0 + mA_z^0$$

onde

$$\mathcal{H}_0(r) = \frac{k\, B_z^0\, r^2}{2} - m \int^r B_\theta^0(r')\, dr'$$

Precisamos, portanto, determinar o invariante que corresponde ao campo proveniente dos condutores helicoidais. As componentes do potencial vetor, calculadas no apêndice A, são:

$$A_r = - \frac{2\, \mu_0\, b\, I_h\, m}{\pi\, r}\; K'_m(kb)\;\; I_m(kr)\;\; \text{senu}$$

$$A_\theta = - \frac{2\, \mu_0\, b\, I_h\, k}{\pi}\; K'_m(kb)\;\; I'_m(kr)\;\; \text{cosu}$$

$$A_z = 0$$

Utilizamos no cálculo, o gauge em que $A_z = 0$ e $\nabla . A = 0$. Assim, o invariante $\psi_1(r,u)$ é:

$$\psi_1(r,u) = krA_\theta$$

$$\psi_1(r,u) = - \frac{2\, \mu_0\, b\, I_h\, k^2}{\pi}\; r\, K'_m(kb)\;\; I'_m(kr)\;\; \text{cosu}$$

Obtemos finalmente de (II-16) que:

$$\mathcal{H} = \frac{k\, B_z^0\, r^2}{2} - m \int^r B_\theta^0(r')\, dr' - \frac{2\,\mu_0\, b\, I_h\, k^2}{\pi}\, r\, K'_m(kb)\, I'_m(kr)\, \cos u$$

que é justamente a Hamiltoniana obtida em (IV-10) como queríamos mostrar.

Utilizando as formas expandidas das funções de Bessel dadas por (II-33) no limite em que seus argumentos tendem a zero, reescrevemos (IV-10) como:

$$\mathcal{H} = \frac{k\, B_z^0\, r^2}{2} - m \int^r B_\theta^0(r')\, dr' + \frac{\mu_0\, I_h\, m}{\pi} \left(\frac{r}{b}\right)^m \cos u$$

ou ainda substituindo a expressão para B_θ^0 dada pela equação (II-7):

$$\mathcal{H} = \frac{k\, B_z^0\, r^2}{2} - m \int^r \frac{\mu_0\, I_p}{2\pi r} \left[1 - \left(1 - \frac{r'^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right] dr' + \frac{\mu_0\, I_h\, m}{\pi} \left(\frac{r}{b}\right)^m \cos u \qquad \text{(IV-11)}$$

A expressão (IV-11) será a utilizada para a Hamiltoniana daqui em diante.

Os pontos de X, que correspondem aos pontos extremos da separatriz (última das superfícies que envolvem as ilhas magnéticas),

e o ponto de O (centro da ilha), são os pontos singulares obtidos da condição:

$$\nabla \mathcal{H} = 0$$

de onde vem:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \text{senu} = 0 \tag{IV-12.a}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{du}{dt} = 0 \tag{IV-12.b}$$

Assim, os pontos de X no mapeamento ρ x u (fig. II-5) correspondem aos pontos nos quais u = 0 e u = 2π, enquanto que o ponto O corresponde ao ponto em que u = π.

As linhas de campo no plano de fase (ρ,u) são trajetórias definidas pela equação:

$$\frac{d\rho}{du} = \frac{d\rho/dt}{du/dt} = \frac{-\,\partial \mathcal{H}/\partial u}{\partial \mathcal{H}/\partial \rho} \tag{IV-13}$$

onde tomamos a intersecção em um plano z constante. Neste trabalho tomamos o plano z = 0.

Notando que:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \tag{IV-14}$$

vem de (IV-12) e (IV-13) a seguinte expressão:

$$\frac{d\rho}{du} = \frac{\dfrac{\mu_0 I_h m}{\pi}\left(\dfrac{r}{b}\right)^m \operatorname{sen} m\theta}{kB_z^0 - m\dfrac{\mu_0 I_p}{2\pi r^2}\left[1-\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right)^{\gamma+1}\right] + \dfrac{m^2 \mu_0 I_h}{\pi}\dfrac{r^{m-2}}{b^m}\cos m\theta}$$

(IV-15)

Utilizamos a equação (IV-15) para obter a fig.V-1.c.

Dada a integrabilidade do sistema, definiremos variáveis de ângulo-ação (ϑ,J) através de uma transformação canônica de variáveis (Percival e Richards 82). As variáveis de ângulo-ação nos permitem simplificar as equações de movimento, além de serem úteis em estudos que envolvem teoria de perturbações.

A cada trajetória do espaço de fase (ρ,u) corresponde um valor da ação, constante, tal que a Hamiltoniana é independente de ϑ. Este fato é expresso através da equação de Hamilton:

$$\frac{dJ}{dt} = 0 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta} \qquad \text{(IV-16)}$$

Desde que J é constante, $\partial\mathcal{H}/\partial J$, que é uma função apenas de J, também é constante. Assim, a outra equação de movimento é:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial J} = \omega(J) \qquad \text{(IV-17)}$$

Ao integrarmos a equação (IV-17) concluímos que ϑ aumenta linearmente com a variável t:

$$\vartheta = \omega(J)\ t + \delta \quad ,$$

sendo δ uma constante arbitrária.

Ao analisarmos o espaço de fase que descreve o nosso sistema (figs. II-5 e V-1.c), podemos identificar dois comportamentos distintos para as linhas de campo mapeadas. Embora ambos sejam periódicos, um deles caracteriza a evolução das linhas de força para pontos externos às ilhas magnéticas. Neste caso dizemos que ocorre uma rotação e observamos trajetórias abertas. Quando observamos a evolução das linhas para regiões em que ocorrem as ilhas magnéticas, as trajetórias no espaço de fase tornam-se fechadas e caracterizamos o movimento de libração.

Para definirmos a variável ação devemos notar que, ao fazermos a transformação canônica $(\rho, u) \rightarrowtail (J, \vartheta)$, as áreas compreendidas por uma curva no espaço de fase nas duas representações durante um período, serão as mesmas.

Afim de ilustrar o que foi dito, dispomos das figuras (IV-1) e (IV-2).

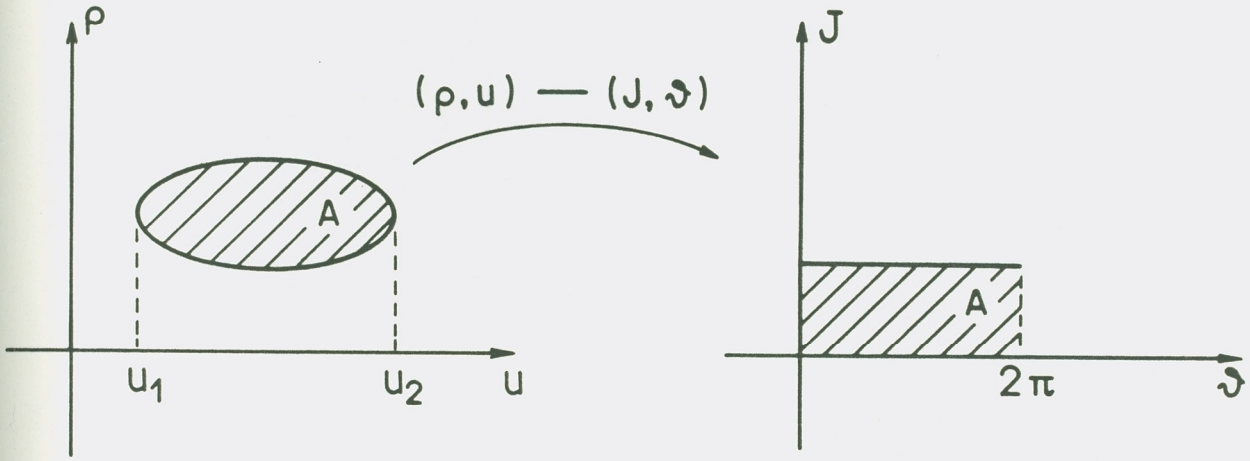

fig. IV-1: Representação da tranformação canônica das variáveis $(\rho,u) \rightarrowtail (J,\vartheta)$ para o movimento de libração (órbitas fechadas).

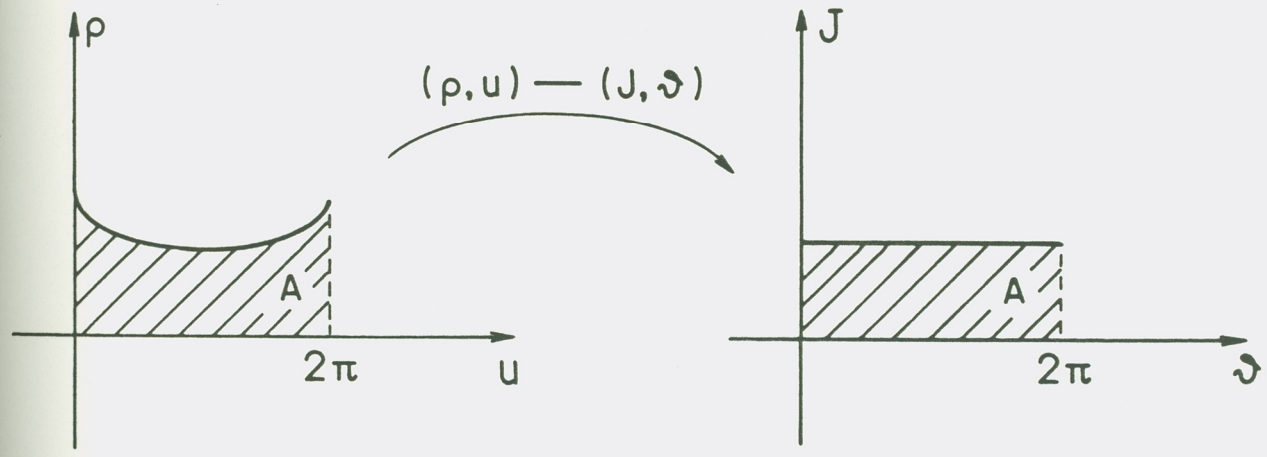

fig. IV-2: Representação da transformação canônica das variáveis $(\rho,u) \rightarrowtail (J,\vartheta)$ para o movimento de rotação (órbitas abertas).

Ao igualarmos em cada caso as áreas obtidas de ambas as representações, obtemos a definição da ação para:

a)*dentro da ilha:*

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \rho \, du = \frac{1}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \rho \, du \qquad \text{(IV-19.a)}$$

onde, conforme indicado na fig. IV-1, $u_1 \leq u \leq u_2$.

b)*fora da ilha:*

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \rho \, du \qquad \text{(IV-19.b)}$$

A relação entre a nova fase (ϑ) e a antiga (u) é dada através da função geratriz *S* como segue:

$$\vartheta = \frac{\partial S}{\partial J}(u, J) \qquad \text{(IV-20)}$$

onde

$$S(u, J) = \int_{u_0}^{u} \rho \, du \qquad \text{(IV-21)}$$

sendo u_0 uma constante.

Podemos ainda estabelecer uma relação aproximada entre a freqüência $\omega(J)$ e a freqüência de rotação de uma linha de força ω_0 que pode ser definida como (Filonenko *et. al.* 67):

$$\omega_0 = \frac{\delta\theta}{\delta z} = \frac{B_\theta}{r\, B_z} \qquad \text{(IV-22)}$$

Ao londo de uma linha de campo, $J(\rho,u)$ é costante, mas ϑ e u variam. Assim:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\delta\vartheta}{\partial u}\,\frac{du}{dt} = \frac{\delta\vartheta}{\delta u}\,\frac{\delta u}{\delta z}\,\frac{dz}{dt} \qquad \text{(IV-23)}$$

Considerando que $\delta\theta$ é a variação no ângulo poloidal quando a variável u sofre uma variação de -2π e que $\delta\vartheta = 2\pi$ quando δu muda de 2π vem de (IV-23) e (IV-5) que:

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = -\left(m\,\frac{\delta\theta}{\delta z} - k\,\frac{\delta z}{\delta z} \right) B_z = (k - \omega_0 m)\, B_z \qquad \text{(IV-24.a)}$$

onde utilizamos $u = m\theta - kz$. Substituindo (IV-22) em (IV-24.a) temos:

$$\omega = k\, B_z - m\,\frac{B_\theta}{r} \qquad \text{(IV-24.b)}$$

Notamos que próximo aos pontos singulares da separatriz, $\omega_0 \longrightarrow k/m$ e conseqüentemente $\omega \longrightarrow 0$. Este fato pode ainda ser verificado da equação (IV-23) ao notarmos que $du/dt=0$ perto dos pontos singulares.

Ao introduzirmos a correção toroidal ao campo gerado pelos condutores helicoidais, a integrabilidade do sistema é quebrada e as equações (IV-16) e (IV-17) deixam de ser válidas. Neste caso ocorrerá a destruição das superfícies magnéticas em algumas regiões do plasma e teremos uma distribuição caótica das linhas de campo.

Conforme já mencionado no capítulo II, o campo magnético do sistema passa a ser descrito pela equação (II-47) dada por:

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}^0(r) + \nabla\phi + \varepsilon \cos\theta \, \nabla\phi_1$$

sendo $\varepsilon = - r/R$. As componentes do campo são, portanto:

$$B_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} + \varepsilon \cos\theta \, \frac{\partial\phi_1}{\partial r} = B_r^1 + \varepsilon \cos\theta \, \mathcal{B}_r^1 \qquad \text{(IV-25.a)}$$

$$B_\theta = B_\theta^0 + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{\varepsilon}{r} \cos\theta \, \frac{\partial\phi_1}{\partial\theta} = B_\theta^0 + B_\theta^1 + \varepsilon \cos\theta \, \mathcal{B}_\theta^1 \qquad \text{(IV-25.b)}$$

$$B_z = B_z^0 + \frac{\partial\phi}{\partial z} + \varepsilon \cos\theta \, \frac{\partial\phi_1}{\partial z} = B_z^0 + B_z^1 + \varepsilon \cos\theta \, \mathcal{B}_z^1 \qquad \text{(IV-25.c)}$$

A variável t passa a ser definida através da coordenada z pela equação:

$$\frac{dz}{dt} = B_z = B_z^0 + B_z^1 + \varepsilon \cos\theta \, \mathcal{B}_z^1 \qquad \text{(IV-26)}$$

Para facilitar a notação, denominaremos o sistema composto do plasma em equilíbrio mais o conjunto de hélices com o índice zero, e os termos provenientes da correção introduzida, com o índice 1. Assim, as equações (IV-9) podem ser reescritas como:

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_0} \qquad \text{(IV-27.a)}$$

e

$$r_0 \frac{du_0}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_0} \qquad \text{(IV-27.b)}$$

onde utilizamos (IV-7).

As equações para as linhas de campo tornam-se, portanto:

$$\frac{dr}{dt} = B_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \varepsilon \cos\theta \frac{\partial \phi_1}{\partial r} = \frac{dr_0}{dt} + \varepsilon \cos\theta \frac{dr_1}{dt} \qquad \text{(IV-28.b)}$$

$$\frac{du}{dt} = m \frac{B_\theta}{r} - k B_z = \frac{m}{r} \left[B_\theta^0(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon}{r} \cos\theta \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right] -$$

$$- k \left[B_z^0 + \frac{\partial \phi}{\partial z} + \varepsilon \cos\theta \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right] = \frac{du_0}{dt} + \varepsilon \cos\theta \frac{du_1}{dt} \qquad \text{(IV-28.b)}$$

Comparando com as equações (IV-6) vem:

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \qquad \text{(IV-29.a)}$$

e

$$\frac{du_1}{dt} = - k \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{m}{r^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \qquad \text{(IV-29.b)}$$

A evolução com t para as variáveis (J, ϑ), pode ser determinada levando-se em conta as equações (IV-27), (IV-19) e (IV-20) relacionadas ao sistema sem correção. Assim, as equações (IV-6) e

(IV-7) se modificam da seguinte forma:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial J}{\partial u}\frac{du}{dt} = \frac{dJ}{d\mathcal{H}}\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_0}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_0}\frac{du}{dt}\right] \qquad \text{(IV-30.a)}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta_0}{du_0}\frac{du}{dt} = \frac{d\vartheta_0/dt}{du_0/dt}\frac{du}{dt} \qquad \text{(IV-30.b)}$$

De (IV-27), (IV-17) e (IV-19) vem:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{\omega}\left[-r_0\frac{du_0}{dt}\left(\frac{dr_0}{dt} + \varepsilon\cos\theta\frac{dr_1}{dt}\right) + \right.$$

$$\left. + r_0\frac{dr_0}{dt}\left(\frac{du_0}{dt} + \varepsilon\cos\theta\frac{du_1}{dt}\right)\right] \qquad \text{(IV-31.a)}$$

de onde resulta:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\varepsilon\cos\theta\, r_0}{\omega}\left[-\frac{du_0}{dt}\frac{dr_1}{dt} + \frac{dr_0}{dt}\frac{du_1}{dt}\right]$$

Da mesma forma:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\omega}{du_0/dt}\left[\frac{du_0}{dt} + \varepsilon\cos\theta\,\frac{du_1}{dt}\right]$$

ou ainda

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega\left[1 + \varepsilon\cos\theta\,\frac{du_1/dt}{du_0/dt}\right] \qquad \text{(IV-31.b)}$$

Substituindo as equações (IV-29) em (IV-31) obtemos:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\varepsilon\cos\theta\, r}{\omega}\left[-\frac{du_0}{dt}\frac{\partial\phi_1}{\partial r} + \frac{dr_0}{dt}\left(-k\frac{\partial\phi_1}{\partial z} + \frac{m}{r^2}\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\right)\right]$$

(IV-32.a)

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega + \frac{\varepsilon\,\omega\cos\theta}{du_0/dt}\left(-k\frac{\partial\phi_1}{\partial z} + \frac{m}{r^2}\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\right) \qquad \text{(IV-32.b)}$$

Escreveremos as equações (IV-32) em termos dos campos magnéticos que constituem a configuração do sistema. Devemos tomar também a expressão para $\varepsilon \cos\theta\ \phi_1$ que resulta em $-\, r/R \cos\theta\ \phi$, sendo $\varepsilon = -\, r/R$. Tomando as expressões para du_0/dt e dr_0/dt a partir de (IV-28) vem:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\varepsilon\ r\ \cos\theta}{\omega} \left[k\ B_z^0 - \frac{m}{r}\ B_\theta^0(r) \right] \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad \text{(IV-34.a)}$$

e

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega + \frac{\varepsilon\ \omega\ \cos\theta \left(\dfrac{m}{r^2} \dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)}{-\, k\ B_z^0 + \dfrac{m}{r} \left(B_\theta^0(r) + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)} \qquad \text{(IV-34.b)}$$

onde consideramos termos até primeira ordem e tomamos ϕ dado por (II-34).

As equações (IV-34) nos mostram que a quebra de integrabilidade do sistema está relacionada com a amplitude da razão r/R , através do parâmetro ε, e com a corrente I_h que percorre os condutores helicoidais. Quando estes parâmetros tendem a zero, simultaneamente ou isoladamente, a simetria é reestabelecida e recaímos no caso integrável, onde:

$$\frac{dJ}{dt} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega$$

Estabelecemos, desta forma, um formalismo Hamiltoniano quase integrável para a configuração de campos de um plasma em equilíbrio MHD estático, num tokamak de grande razão-de-aspecto com m pares de condutores helicoidais adjacentes percorridos por correntes

de sentidos opostos. Introduzimos variáveis de ângulo-ação (ϑ, J) para a descrição das equações das linhas de campo no caso integrável e, em seguida, superpusemos o efeito de curvatura do campo através da correção toroidal considerada sobre a geometria do sistema. As equações, neste caso, adquirem a forma expressa pela relações (IV-34) que serão utilizadas para o mapeamento do campo no plano (J, ϑ), assim como para obtermos o comportamento das variáveis J e ϑ em relação ao número de voltas toroidais efetuadas no tokamak.

CAPÍTULO V

RESULTADOS NUMÉRICOS

V.a) - INTRODUÇÃO

Este capítulo consistirá da descrição dos métodos numéricos utilizados na obtenção dos gráficos e mapeamentos apresentados neste trabalho. Dividiremos os resultados adquiridos descrevendo as figuras provenientes do caso integrável (sem efeito toroidal) e em seguida do não-integrável. Os resultados apresentados correspondem sempre a situações em que consideramos três pares de condutores helicoidais adjacentes (m = 3, n = 1), percorridos por correntes de sentidos opostos, e os parâmetros do TBR-1:

raio menor	a = 8 cm
raio maior	R = 30 cm
raio das hélices	b = 11 cm

V.b) - SISTEMA INTEGRÁVEL

1) OS INVARIANTES ψ

No caso integrável, apresentamos curvas com valores constantes dos invariantes ψ, associados às configurações de campo que descrevem os diversos sistemas apresentados.

Para a configuração de equilíbrio, obtivemos o mapeamento analítico do campo magnético no plano $x \times y$ através da função ψ_0 , expressa pela equação (II-12). Verificamos, neste caso,

que as superfícies magnéticas correspondem a um sistema de cilindros concêntricos conforme fig.II-2. Cada um dos círculos é obtido considerando-se um determinado valor constante para a função ψ_0 Deve-se notar que as variáveis x e ψ estão normalizadas pelo raio do plasma. Consideramos, ainda, q(a) = 5, q(0) = 1 e corrente de plasma I_p = 10 kA.

Da mesma forma, considerando o sistema composto apenas pelos condutores helicoidais dispostos conforme a figura II-3, obtivemos as linhas correspondentes a valores constantes da função ψ_1. Neste caso, o invariante é representado, aproximadamente, pela equação (II-38) e ilustrado pela fig.II-4, onde as intersecções das superfícies magnéticas no plano poloidal, são curvas abertas separadas assintoticamente por seis (2m) retas (separatrizes). A figura II-4 foi obtida para q(a) = 5, q(0) = 1, I_p = 10 kA, I_h = 100 A e parâmetros do TBR-1.

Para o sistema que consiste do plasma em equilíbrio e do campo gerado pelos condutores helicoidais que perturba este equilíbrio, encontramos um invariante aproximado expresso pela equação (IV-11). Os pontos singulares para esta equação (pontos de *X* e pontos de *O*, mencionados no capítulo IV) são representados pelas condições:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{(V-1)}$$

e

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \qquad \text{(V-2)}$$

O mapeamento deste invariante está ilustrado na figura V-1.a. A figura V-1.b fornece o mapeamento numérico das trajetórias das linhas de campo para o mesmo sitema. Os pontos desta figura foram obtidos a partir das equações das linhas de campo (II-11), e colecionados num plano poloidal a cada volta efetuada no tokamak. Em ambos os casos observamos a presença de superfícies circulares nas regiões internas da coluna onde o campo proveniente do sistema de correntes helicoidais não se pronuncia fortemente, pois não

é ressonante. A formação de m ilhas magnéticas ocorre em torno da superfície q = 3 (m = 3 , n = 1), onde o campo passa a ser ressonante. Os pontos de X estão localizados em $\theta = 0$, $2\pi/3$ e $4\pi/3$, o que pode ser visto, aproximadamente (pois as separatrizes não estão evidentes). As figuras V-1.a e V-1.b foram obtidas para q(a) = 5, q(0) = 1, I_p = 10 kA e I_h = 100 A.

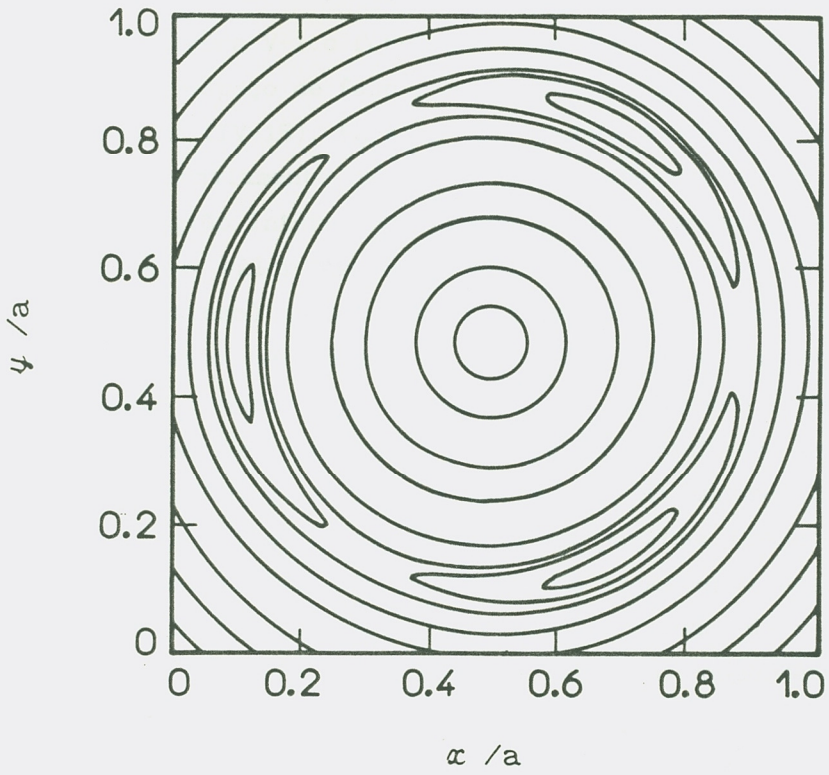

fig.V-1.a: Superfícies de ψ constante para o sistema composto do plasma em equilíbrio num tokamak de grande razão-de-aspecto com três pares de condutores helicoidais (m = 3, n = 1). Utilizou-se q(a) = 5, q(0) = 1, I_p = 10 kA e I_h = 100 A e os comprimentos são normalizados pelo raio do plasma.

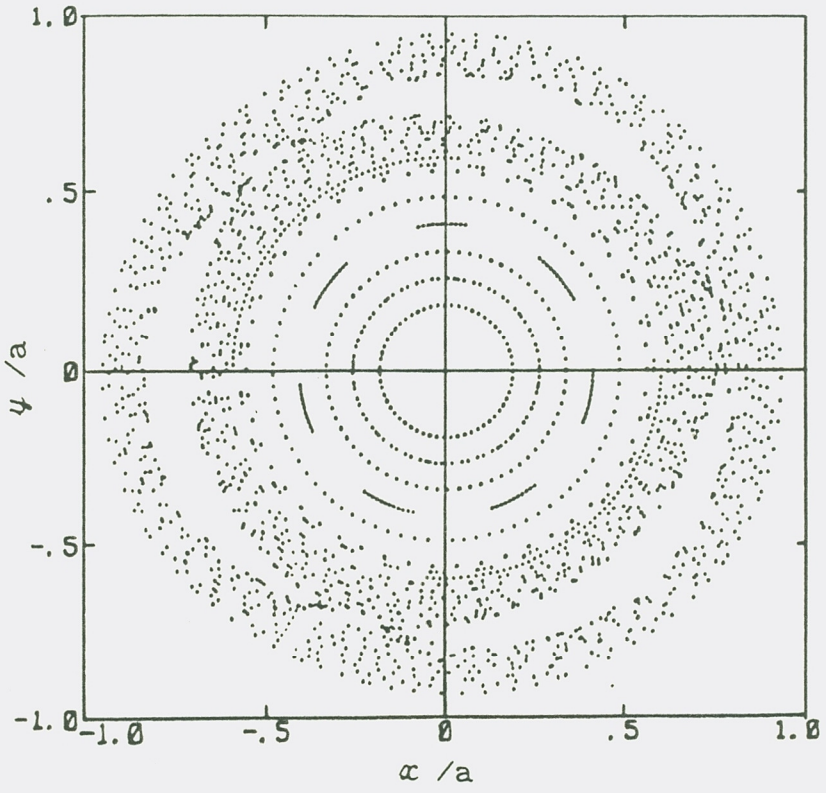

fig.V-1.b: Intersecção das trajetórias das linhas de campo no plano z = 0 para o sistema da figura anterior. As variáveis x e ψ estão normalizadas pelo raio do plasma.

2) ESPAÇO DE FASE

A figura V-1.c fornece o mapeamento das trajetórias das linhas de campo no espaço de fase $\rho \times u$, obtido a partir da integração numérica da equação (IV-15). Para tanto, tomamos valores iniciais de ρ e u, que foram previamente testados para sabermos se o ponto se encontrava numa região interna ou externa às ilhas magnéticas. O teste é feito mediante o valor assumido pela função ψ (que é também a Hamiltoniana do sistema) quando substituímos em sua expressão, o ponto (ρ, u). Caso o ponto se encontre fora das ilhas magnéticas, os incrementos du são tomados sempre positivos na expressão (IV-15). Caso contrário, du pode ser positivo ou negativo conforme os valores assumidos pela variável ρ, a cada interação, sejam menores ou maiores que $\rho_{3,1}$, respectivamente. O espaço de fase para as trajetórias das linhas de campo foi também obtido através do mapeamento analítico do invariante $\psi = \mathcal{H}$ dado pela equação (IV-11). As curvas de ψ constante estão ilustradas na figura II-5. Nota-se razoável concordância entre os mapeamentos obtidos das duas maneiras distintas. O espaço de fase, ilustrado nas figs. II-5 e V-1.c, apresenta órbitas abertas que caracterizam o movimento de rotação para pontos localizados em regiões em que não ocorrem ilhas magnéticas, e órbitas fechadas e limitadas entre dois valores de u que caracterizam a libração para pontos onde existem ilhas. O valor das semi-larguras das ilhas magnéticas pode ser estimado a partir da equação (II-46) e comparado com as semi-larguras obtidas a partir das figuras II-5, V-1.a, V-1.b e V-1.c. Em todos os casos, obtivemos, aproximadamente, $\Delta r_{3,1} \cong 0{,}5$ cm. As figs. II-5 e V-1.c foram obtidas para $I_h = 100$ A, $q(a) = 5$, $q(0) = 1$ e $I_p = 10$ kA.

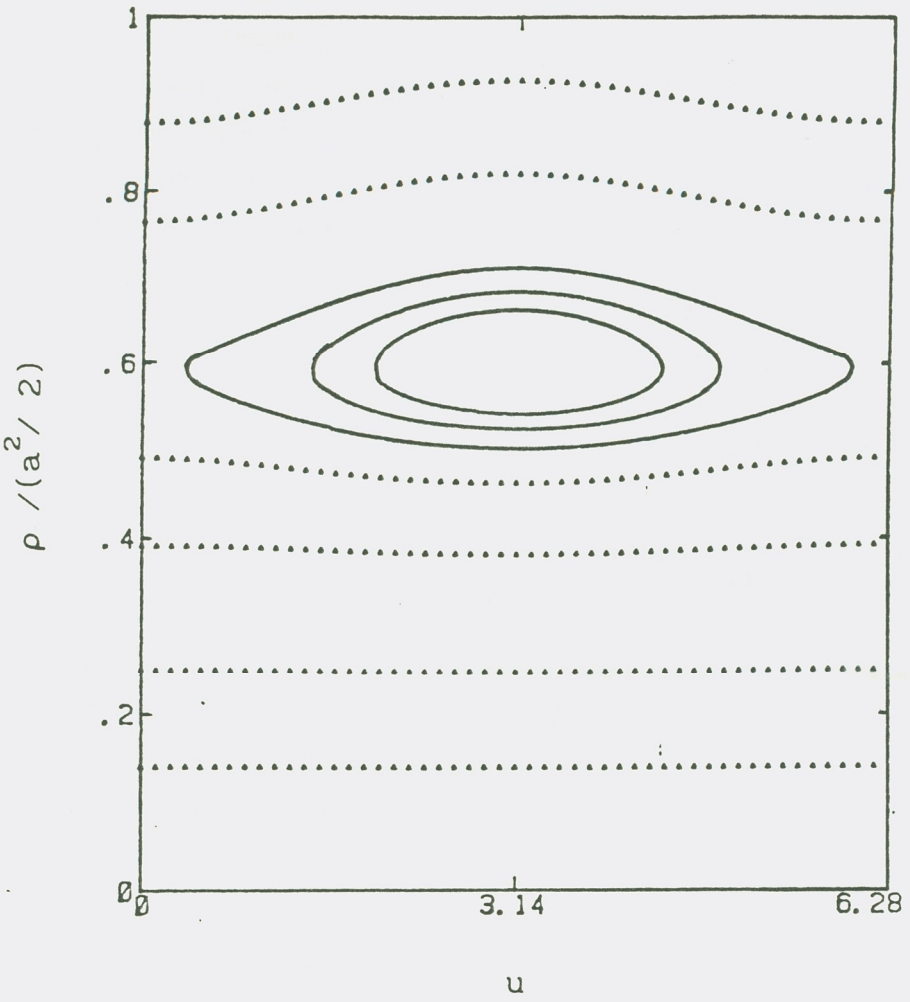

fig V-1.c: Trajetórias das linhas de campo obtidas no espaço de fase $\rho \times u$ a partir da integração numérica da equação (IV-15). A figura foi obtida para, $q(a) = 5$, $q(0) = 1$, $I_p = 10$ kA, $I_h = 100$ A, $m = 3$, $n = 1$ e parâmetros do TBR-1.

3) HAMILTONIANA

A fig.V-2 fornece o comportamento da Hamiltoniana em função da posição radial (ρ), obtido a partir da equação (IV-11) para $u = \pi/2$, no plano $z = 0$. Os comprimentos em ρ estão normalizados pelo raio da coluna de plasma. Observamos um mínimo quando o valor de ρ está próximo ao valor do raio da superfície racional $\rho_{3,1}/(a^2/2) \simeq 0{,}6$. Este fato pode ser explicado porque a componente helicoidal do campo de equilíbrio num tokamak, proporcional à $d\psi_0/dr$, muda de sentido nas vizinhanças da superfície racional $r_{3,1}$, onde se anula. Assim temos:

$$B_{hel.}(r_{3,1}) \propto \left.\frac{d\psi_0}{dr}\right|_{r_{3,1}} = 0 \qquad \text{(V-3)}$$

o que explica o mínimo obtido para a Hamiltoniana no raio da superfície racional $r_{3,1}$ ($\rho_{3,1}$) uma vez que $\mathcal{H} \cong \psi_0$ (equação IV-11), pois $|\psi_1| << |\psi_0|$. Devido a esta mudança de sentido da componente helicoidal do campo de equilíbrio, e à existência de uma perturbação radial agindo no plasma, há a formação de ilhas magnéticas em torno da superfície ressonante. O gráfico $\mathcal{H} \times \rho$ foi obtido para $q(a) = 5$, $q(0) = 1$, $I_p = 10$ kA e $I_h = 100$ A.

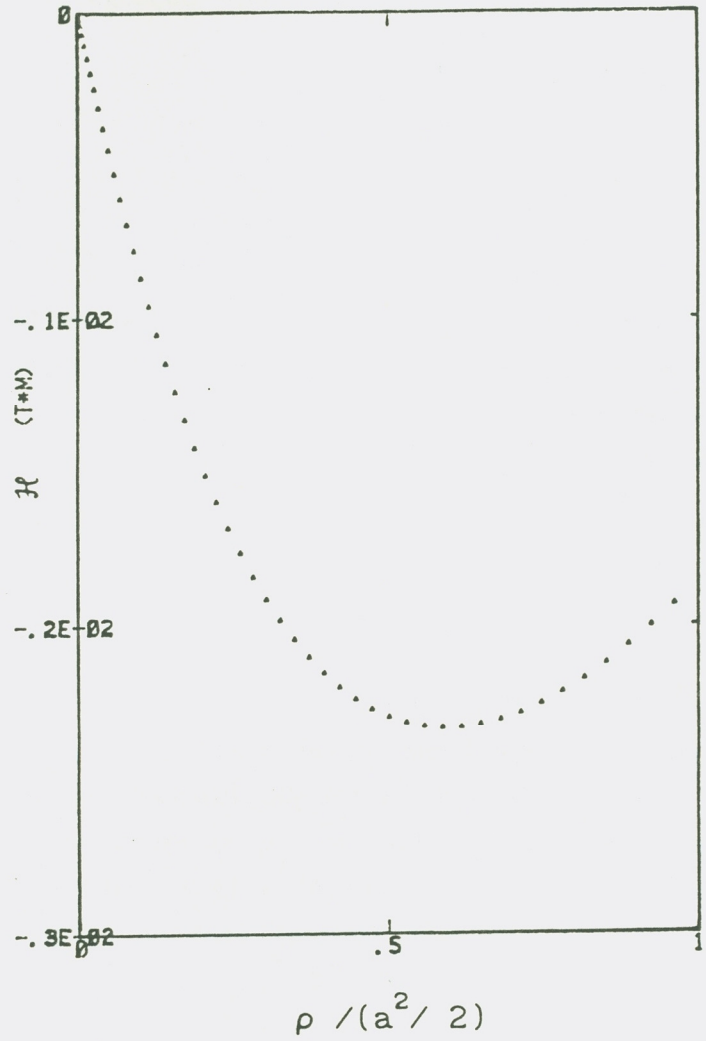

fig.V-2: Gráfico da Hamiltoniana em função de ρ obtido para m = 3, n = 1, q(a) = 5, q(0) = 1, I_p =10 kA, I_h = 100 A e parâmetros do TBR-1. A variável ρ está normalizada pelo quadrado do raio da coluna de plasma.

4) AÇÃO

O cálculo da ação para cada valor inicial ρ_0 foi obtido a partir da integração numérica das equações (IV-19) onde consideramos:

$$J = \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_i \rho_i \qquad \text{(V-4)}$$

para pontos localizados fora da região onde há ilhas magnéticas, sendo $\Delta u > 0$ e $0 \leq u \leq 2\pi$. Neste caso, tomamos sempre os mesmos incrementos positivos (Δu), na variável u para cada passo da integração.

Para pontos internos à região onde ocorrem as ilhas, tomamos:

$$J = \frac{1}{2\pi} \sum_i (\Delta u)_i \ \rho_i \qquad \text{(V-5)}$$

onde os incrementos Δu são positivos ou negativos, conforme os valores de ρ_i sejam menores ou maiores que $\rho_{3,1}$, respectivamente.

Os valores de ρ_i de cada termo das somatórias que aparecem nas expressões (V-4) e (V-5), foram obtidos da equação das trajetórias no espaço de fase (ρ x u) dada por (IV-15) a partir da qual obtivemos os incrementos $d\rho$. Temos, portanto:

$$\rho_i = \rho_{i-1} + d\rho \qquad \text{(V-6)}$$

O comportamento da ação em função de ρ, normalizado pelo quadrado do raio do plasma, está ilustrado na fig.V-3. Notamos que a ação é crescente para as regiães externas à presença das ilhas

magnéticas, e apresenta uma variação quase linear para pontos mais internos da coluna de plasma, onde o sistema é aproximadamente integrável. Para as regiões onde ocorrem as ilhas, observamos um comportamento decrescente à medida que nos aproximamos da região onde se localiza a superfície racional com $q = 3$ ($\rho/a^2/2 \simeq 0{,}6$), e crescente à medida que nos afastamos dela. Isto é esperado se analisarmos o espaço de fase (ρ x u) e relacionarmos a ação com a área compreendida por uma curva neste espaço (fig.II-5). Os parâmetros q(a), q(0), I_p e I_h são os mesmos utilizados nas figuras anteriores.

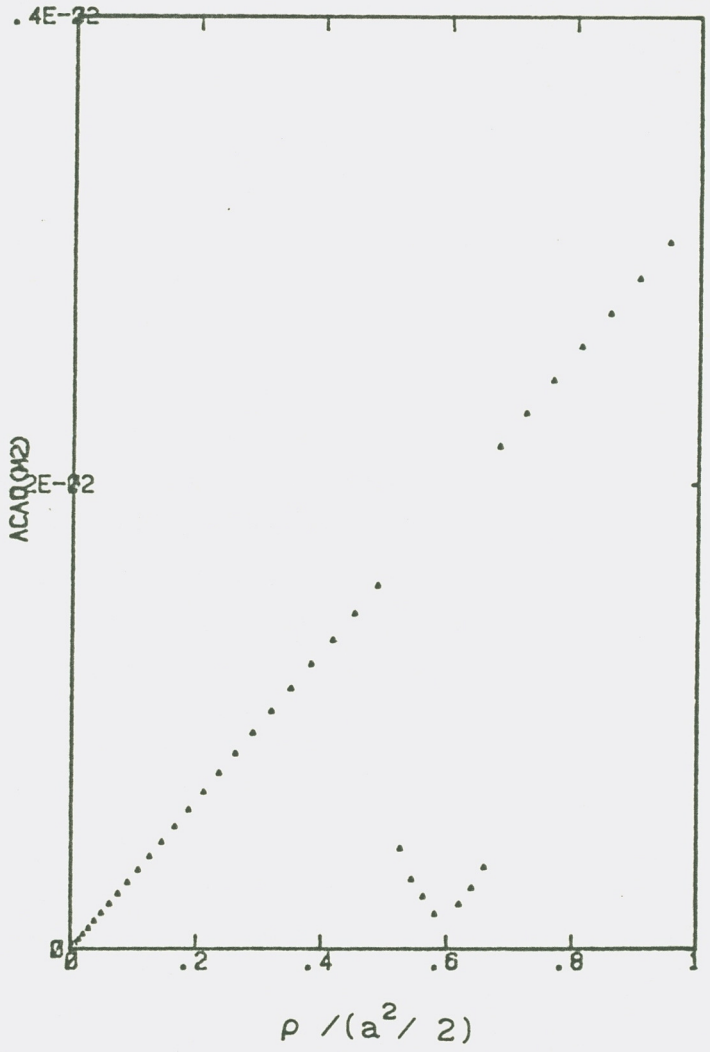

fig.V-3: Gráfico da ação (J) em função da posição radial na coluna de plasma (ρ) para m = 3, n = 1, q(a) = 5, q(0) = 1, I_p = 10 kA, I_h = 100 A e parâmetros do TBR-1. A variável ρ está normalizada pelo quadrado do raio da coluna de plasma.

5) FREQÜÊNCIA (w)

A freqüência é definida pela equação (IV-17):

$$\omega(J) = \frac{d\mathcal{H}(J)}{dJ}$$

Para este cálculo obtivemos, a partir da equação (IV-11), o valor de $\mathcal{H}$ para dois valores de ρ (ρ e $\rho + d\rho$) com $d\rho$ arbitrário, e calculamos em correspondência, os valores da ação J utilizando (V-4) ou (V-5), conforme a localização do ponto. Consideramos, assim:

$$\omega(J) = \frac{\mathcal{H}(\rho,u) - \mathcal{H}(\rho + d\rho,u)}{J - (J + dJ)} \qquad (V-7)$$

A fig.V-4 fornece o comportamento de ω em função de ρ normalizado ao raio do plasma. Nas regiões próximas à superfície racional ($\rho/a^2/2 \simeq 0,6$) ω tende a zero. Para as regiões externas às ilhas magnéticas, ω apresenta comportamento crescente.

Na fig.V-5 a freqüência ω foi obtida utilizando-se a expressão (IV-24.b) onde relacionamos ω com a freqüência de rotação de uma linha de campo. Podemos notar uma boa concordância para os valores da freqüência ω obtidos das duas maneiras distintas aqui mencionadas, mostrando-nos que ω pode ser estimada satisfatoriamente através da relação (IV-24.b). Novamente utilizamos q(a) = 5, q(0) = 1, I_p = 10 kA e I_h = 100 A.

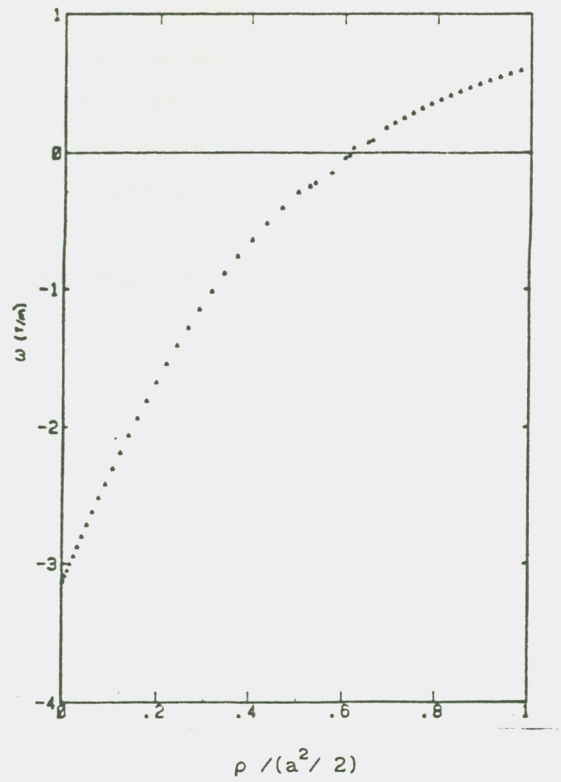

fig.V-4: Gráfico da freqüência em função de ρ obtido através da equação (IV-17) para q(a) = 5, q(0) = 1, I_p = 10 kA, I_h = 100 A, m = 3, n = 1 e parâmetros do TBR-1. A variável ρ está normalizada pelo quadrado do raio do plasma.

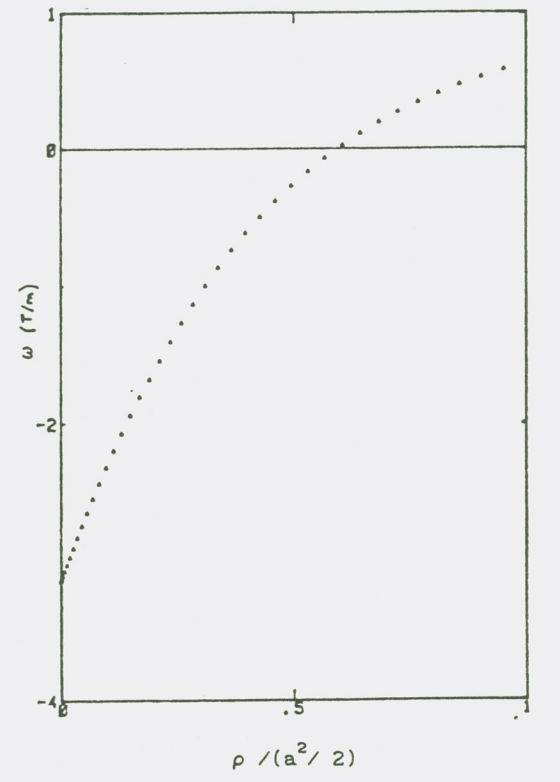

fig.V-5: Gráfico da freqüência em função de ρ obtido a partir da equação (IV-24.b). Os parâmetros utilizados na obtenção do gráfico são idênticos aos da figura anterior.

V.c) - SISTEMA NÃO - INTEGRÁVEL

Conforme já mencionado, quando introduzimos a correção toroidal ao sistema de simetria helicoidal correspondente à configuração de campos associada ao plasma em equilíbrio superposto aos condutores helicoidais, ocorre quebra de simetria e o sistema deixa de ser integrável. Analisamos como se modificam as equações para dJ/dt e dθ/dt e obtivemos as equações (IV-34), que se reduzem às do caso integrável quando fazemos $\varepsilon = - r/R = 0$ ou $I_h = 0$, este último devido à dependência do potencial ϕ com a corrente dos condutores helicoidais.

1) MAPEAMENTO NUMÉRICO PARA AS LINHAS DE CAMPO

A fig.V-6 ilustra o mapa de Poincaré das linhas de campo correspondente ao sistema não-integrável descrito acima. As equações das linhas de campo são corrigidas pelo efeito toroidal e integradas numericamente. Observamos que nas regiões mais internas da coluna de plasma, as superfícies magnéticas, descritas por círculos, ainda estão presentes, pois a ressonância não se pronuncia fortemente. Observamos a formação das ilhas satélites em torno da superfície com $q = 4$ e uma mudança na configuração das ilhas primárias que se tornam menores em relação ao caso integrável. Notamos também uma distribuição de linhas de campo mais caótica nas proximidades das superfícies com $q = 3$ e $q = 4$. As ilhas secundárias em torno da superfície com $q = 2$ não são observadas devido à amplitude da corrente I_h.

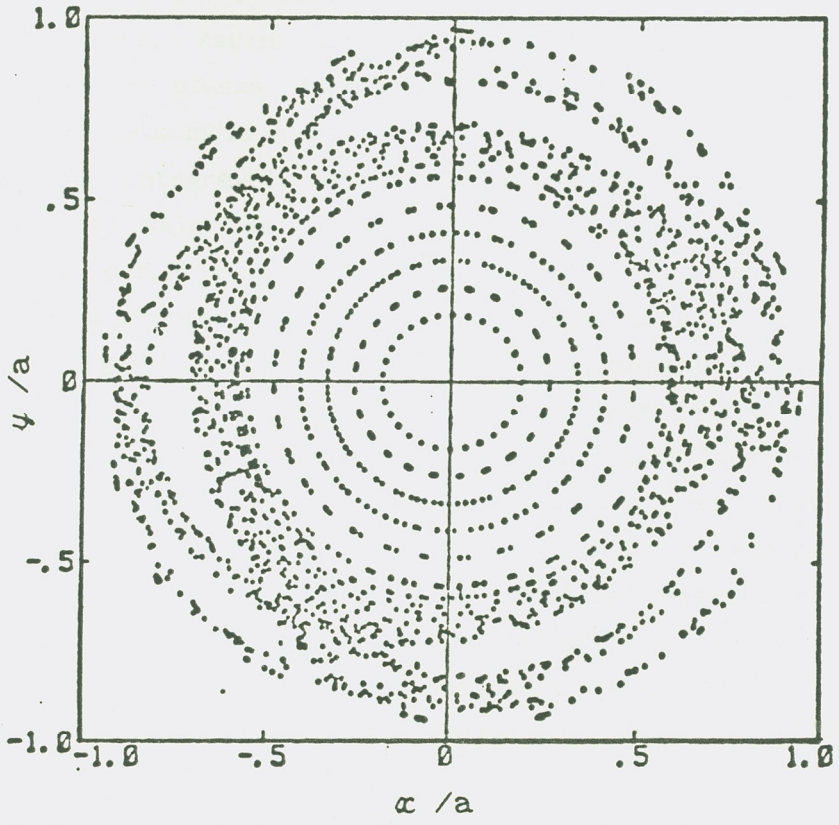

fig. V-6: Mapa de Poincré das linhas de campo para o sistema composto pelo plasma em equilíbrio e condutores helicoidais ao qual introduzimos a correção toroidal. Utilizamos q(a) = 5, q(0) = 1, I_p = 10 kA, I_h = 100 A, m = 3, n = 1 e parâmetros do TBR-1.

2) VARIAÇÃO DE J E ϑ

Para as figuras V-7, V-8 e V-9, mencionadas a seguir, utilizamos q(a) = 5, q(0) = 1, I_p = 10kA e I_h = 100 A.

Para obtermos a variação de J com N, onde N é o número de voltas toroidais, tomamos um valor inicial para J, determinado de (V-4) ou (V-5), que foi incrementado pelos fatores dJ, obtidos a

partir de (IV-34.a) ao fazermos $dt = dz/B_z$ onde $dz = 2\pi R/M$, para M inteiro. Os pontos são colecionados a cada volta toroidal completada. Os gráficos (J x N) foram obtidos em duas situações: a fig V-7 mostra o comportamento da variável J em relação ao número de voltas toroidais para uma fase inicial u = 0. Nesta direção não se observa a existência de ilhas magnéticas. Assim, podemos notar que para pontos mais internos da coluna de plasma, J permanece com seu valor inalterado, pois quase não se pronuncia o efeito perturbativo, sendo, portanto, o sistema quase que integrável. As oscilações começam a surgir quando nos aproximamos do valor de $r_{3,1} \cong 6,2$ cm e $r_{4,1} \cong 7,1$ cm, ou seja, das superfícies q = 3 e q = 4, respectivamente, devido ao campo proveniente das correntes helicoidais, associado ao efeito toroidal introduzido. A fig.V-8 fornece o gráfico (J x N) para $u = \pi/2$. Nesta direção, passamos por pontos que podem se localizar dentro de ilhas magnéticas. Obtivemos o mapeamento para pontos iniciais localizados em uma região onde as superfícies magnéticas começam a ser destruídas devido ao efeito de curvatura do campo, e notamos que o comportamento de J, neste caso, passa a ser caótico. Devemos ressaltar que os valores da freqüência $\omega(J)$, utilizados no cálculo dos incrementos dJ fornecidos pela equação (IV-34.a), variam a cada volta toroidal completada, pois a ação também varia. Entretanto, consideramos sempre um valor fixo para ω, calculado para cada valor de r inicial, e a partir deste valor, que é mantido durante todas as interações, obtivemos os incrementos dJ. Procedemos desta forma, pois queremos justamente avaliar o efeito perturbativo sobre as condições que nos forneciam a situação integrável.

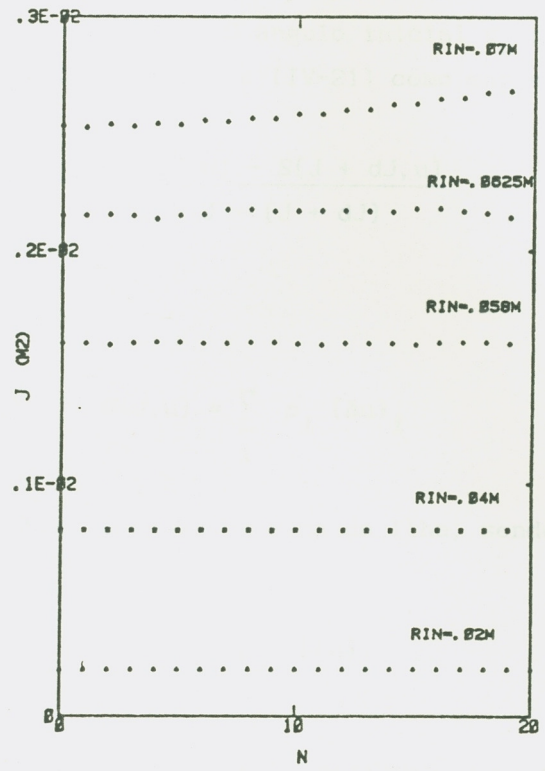

fig.V-7: Gráfico da variável J em relação ao número de voltas toroidais para u = 0 e vários raios iniciais. O gráfico foi obtido para q(a) = 5, q(0) = 1, I_p = 10 kA, I_h = 100 A, m = 3, n = 1 e parâmetros do TBR-1.

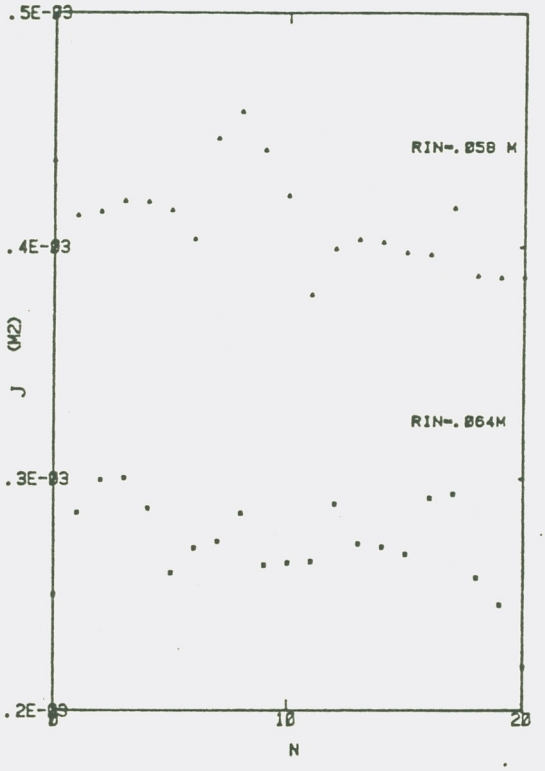

fig V-8: Variação de J em relação ao número de voltas toroidais para u = $\pi/2$, e raios iniciais de 5,8 cm e 6,4 cm. Os parâmetros utilizados são idênticos aos da figura anterior.

Para a variação de ϑ com N, tomamos um valor inicial ϑ_0 que foi incrementado através da equação (IV-34.b) em processo análogo ao descrito na variação de J. O ângulo inicial ϑ_0 pode ser determinado utilizando as equações (IV-20) e (IV-21) como segue:

$$\vartheta = \frac{S(J,u) - S(J + dJ,u)}{J - (J + dJ)} \qquad (V\text{-}8)$$

onde

$$S(J,u) = \sum_i \rho_i \, (\Delta u)_i \qquad (V\text{-}9)$$

para pontos iniciais localizados fora da ilha, sendo $(\Delta u)_i > 0$ ou

$$S = \sum_i \rho_i \, (\Delta u)_i \qquad (V\text{-}10)$$

para dentro da ilha, com $\Delta u_i \gtrless 0$, conforme $\rho \gtrless \rho_{m,n}$. Tomamos como referência para integração o ponto em que $\rho = \rho_{m,n}$ (m = 3 , n = 1), com $u < \pi$.

A fig.V-9 mostra o comportamento da variável ϑ em relação ao número de voltas toroidais (N). Os ângulos são marcados de maneira que fiquem compreendidos no intervalo $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Observamos que a variação de ϑ com N é quase linear, mostrando-nos que a correção toroidal quase não influencia no comportamento da variável em relação ao caso integrável, ou seja, há um deslocamento mínimo em relação ao valor estabelecido pela equação $d\vartheta/dt = \omega(J)$.

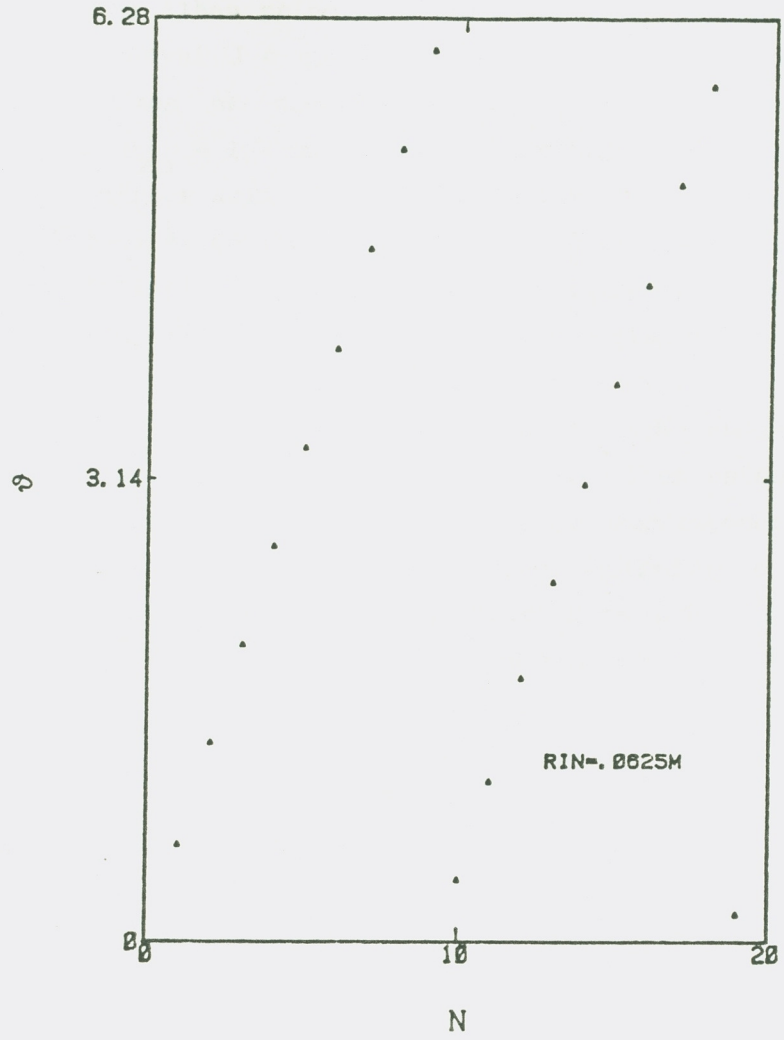

fig V-9: Gráfico da variável ϑ e relação ao número de voltas toroidais N. O gráfico foi obtido para $\vartheta_0 = 0$ e um raio inicial de 6,2 cm. Foram utilizados os parâmetros das figuras anteriores.

3) MAPEAMENTO DAS LINHAS DE CAMPO NO PLANO ($J \times \vartheta$)

Obtivemos o mapeamento do campo magnético no plano ($J \times \vartheta$) em duas situações. A fig.V-10 fornece este mapeamento para pontos externos às ilhas principais para um valor inicial de $u = 0$. Neste caso, a variável J é quase constante para um raio $r = 5,8$ cm. Para raios próximos às superfícies com $q = 4$ e $q = 2$, onde $r_{4,1} \cong 7,1$ cm e $r_{2,1} \cong 4,7$ cm, temos estruturas assinaladas com periodicidade quatro e dois. Observamos que o mapeamento destes pontos é bastante sensível às condições iniciais consideradas, pois obtivemos configurações distintas a cada ponto inicial tomado no plano poloidal. As figuras foram obtidas para $I_h = 100$ A, $q(a) = 5$, $q(0) = 1$ e $I_p = 10$ kA.

Na fig.V-11 temos a variação da ação em relação a ϑ para pontos em uma região em que as ilhas magnéticas estão presentes em torno da superfície $q = 3$. Tomamos raios que correspondem a pontos onde as superfícies magnéticas começam a ser destruídas e a variação de J, passa a ser caótica. A semelhança entre os gráficos ($J \times \vartheta$) e ($J \times N$) se deve à linearidade do gráfico ($\vartheta \times N$) observada na fig.V-9.

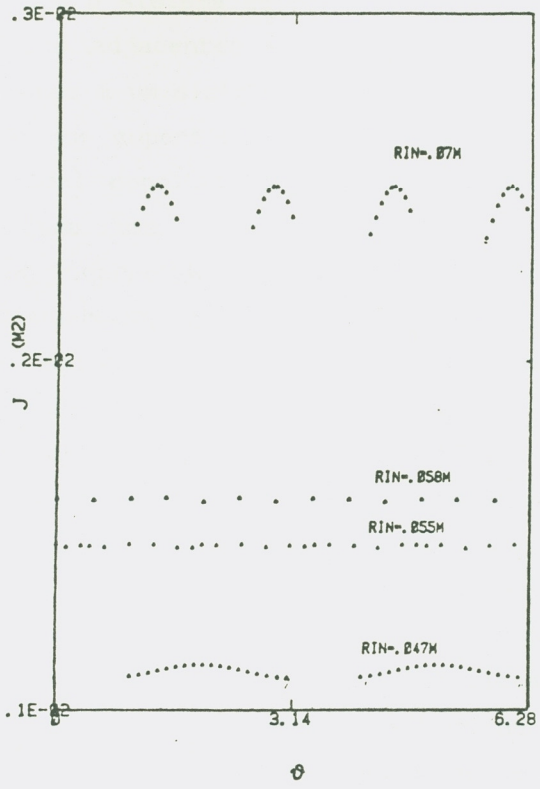

fig. V-10: Mapeamento das linhas de campo no plano J × ϑ para pontos com u = 0. O mapeamento foi obtido para quatro raios iniciais utilizando q(a) = 5, q(0) = 1, I_p = 10 kA, I_h = 100 A, m = 3, n = 1 e parâmetros do TBR-1.

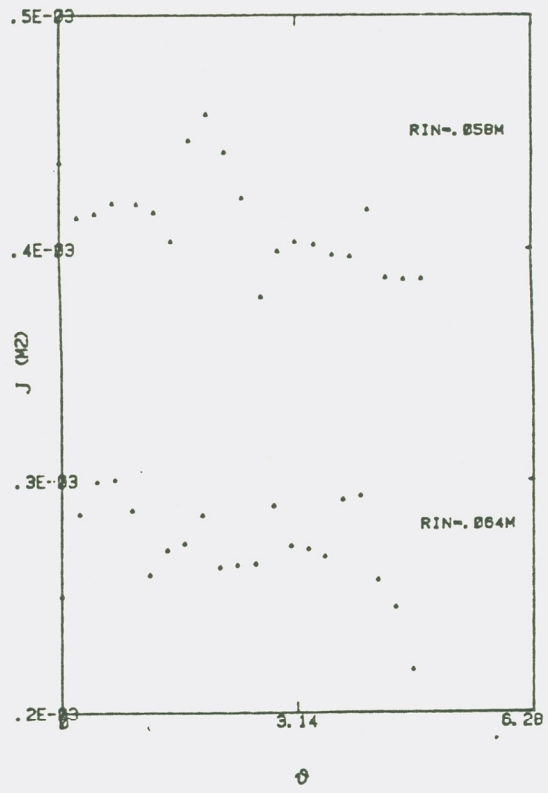

fig V-11: Mapeamento das linhas de campo no plano J × ϑ para pontos com $u_{in} = \pi/2$ e raios iniciais de 5,8 cm e 6,4 cm. Os parâmetros utilizados são idênticos aos da figura V-10.

Os mapeamentos obtidos para as trajetórias das linhas de campo, mostram que o sistema estudado (composto pelo tokamak TBR-1 e três pares de fios adjacentes enrolados helicoidalmente na câmara toroidal), corresponde a um sistema quase-integrável. Esta denominação se deve ao fato de que superfícies magnéticas, não ressonantes com a perturbação helicoidal considerada, não são destruídas e, portanto, determinam no plasma uma região onde as linhas de campo são conhecidas. O que ocorre é que, para esta região, a simetria helicoidal não é quebrada e assim, as superfícies magnéticas são determinadas como soluções das equações MHD. Este fato pode ser analisado através do comportamento da variável J, que permanece praticamente constante para estas regiões, caracterizando a integrabilidade do sistema. Além disso, através do mapeamento numérico das linhas de campo (fig.V-6), verificamos que para regiões internas da coluna de plasma (longe da região ressonante), as superfícies magnéticas, ilustradas por círculos concêntricos, ainda estão presentes. Ao analisarmos as regiões próximas às superfícies ressonantes observamos um comportamento caótico da variável J, assim como das linhas de campo, indicando quebra de simetria e perda de integrabilidade do sistema. Assim, caracterizamos o sistema como sendo do tipo quase-integrável.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Apresentamos, neste capítulo, algumas análises e conclusões a respeito dos resultados obtidos nesta dissertação.

Nosso objetivo, neste trabalho, consistia em investigar a evolução do comportamento das chamadas superfícies magnéticas para um plasma em equilíbrio MHD estático, sujeito a perturbações helicoidais e confinado numa geometria toroidal. Esta análise foi feita através do mapeamento das trajetórias das linhas de campo no espaço de fase, assinalando as intersecções das mesmas num plano poloidal com z constante, após cada volta efetuada no tokamak, num processo análogo ao utilizado para se obter o mapa de Poincaré das trajetórias de um sistema dinâmico. Através do comportamento destas linhas de campo sabemos, por extensão, a evolução das superfícies magnéticas do sistema e temos condições de analisar as regiões onde, eventualmente, elas podem estar sendo destruídas.

No início do nosso trabalho apresentamos, no capítulo II , as equações para um campo magnético com simetria helicoidal dado pela superposição do campo de equilíbrio num tokamak de grande razão-de-aspecto com um campo perturbativo gerado por m pares de condutores helicoidais enrolados na câmara do tokamak. Na aproximação cilíndrica o campo de equilíbrio é dado pela soma do campo proveniente de um solenóide e o campo poloidal gerado pela corrente de plasma I_p. Consideramos, então, a perturbação gerada pelas correntes helicoidais. Associamos ao sistema plasma em equilíbrio mais hélices, um invariante descrito pela função $\Psi \cong \psi_0(r) + \psi_1(r,u)$, que representa as superfícies magnéticas sobre as quais estão as linhas de campo e que são necessárias ao confinamento do plasma. A partir deste invariante, pudemos determinar uma expressão analítica aproximada para as semi-larguras das ilhas magnéticas originadas em torno da superfície com $q = m/n$ onde a perturbação é ressonante. Estas semi-larguras são dadas pela equação (II-46). Introduzimos, em

seguida, a correção toroidal ao sistema anterior, considerando o campo $\mathbb{B}$ presente nas equações das linhas de campo $\mathbb{B} \times d\vec{\ell} = 0$, dado, aproximadamente, por:

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}^0 + \mathbb{B}^1 + \varepsilon \cos\theta \, \nabla\phi$$

conforme a equação (II-47). Com esta modificação, verificamos a ocorrência de $m \pm 1$ ilhas satélites em torno das superfícies com $q = (m \pm 1)/n$. Associamos a esta configuração um novo invariante local aproximado χ, que nos permite estimar as semi-larguras das ilhas secundárias através da equação (II-61). As semi-larguras das ilhas primárias apresentam uma dependência com a corrente nos condutores helicoidais, e com o passo das linhas do campo de equilíbrio, pois $\Delta r_{m,n} \cong (I_h / \psi_0'')^{1/2}$. No caso das ilhas secundárias temos $\Delta r_{m',n} \cong [(a\, I_h) / (R\, \chi_0'')]^{1/2}$. Portanto, controlando os parâmetros de equilíbrio, a corrente helicoidal I_h e a razão a/R, podemos estabelecer as condições para as quais pode haver uma superposição de ilhas magnéticas que leva a uma distribuição caótica das linhas de campo devido à destruição de superfícies magnéticas.

No capítulo III, seguimos um formalismo proposto por Turner (Turner 85) para determinar a Hamiltoniana geradora das linhas de um campo com simetria helicoidal. Este campo é representado através de duas funções escalares (equação III-1), sendo a Hamiltoniana dada por uma destas funções. Neste formalismo as variáveis canônicas são r e $\rho = \int^u r\, B_z(r,u')\, du'$ e a Hamiltoniana é escrita como uma soma das componentes do potencial vetor $\mathbb{A}$. Esta Hamiltoniana é invariante por uma transformação de gauge e pode ser identificada com a função Ψ estabelecida pela equação (II-20).

No capítulo IV descrevemos uma outra formulação Hamiltoniana para o mesmo sistema descrito anteriormente. Neste formalismo, as variáveis canônicas são $\rho = 1/2\, r^2$ e $u = m\theta - kz$, sendo o tempo definido pela equação $dz/dt = B_z$ (Filonenko *et. al.* 67). Obtivemos a Hamiltoniana dada pela equação (IV-10) e verificamos que a mesma é numericamente igual à Hamiltoniana definida por Turner e, conseqüentemente, igual à função Ψ expressa por (II-20). Esta Hamiltoniana satisfaz a equação $\mathbb{B} \cdot \nabla\mathcal{H} = 0$ e portanto caracteriza um sistema integrável, pois o sistema considerado possui apenas um grau

de liberdade. Dada esta integrabilidade, pudemos introduzir variáveis de ângulo-ação (ϑ,J), verificando que, neste caso, a ação permanece constante em relação ao tempo, enquanto ϑ é uma função linear de t. Ao introduzirmos a correção toroidal através da equação (II-47), ocorre quebra da simetria helicoidal e o sistema deixa de ser integrável. Para descrever a evolução das linhas de campo utilizamos a teoria de perturbações análoga a que foi usada por Filonenko para o estudo do comportamento de superfícies magnéticas no Stellarator. As equações obtidas são dadas por:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\varepsilon\, r\, \cos\theta}{\omega} \left[k\, B_z^0 - \frac{m}{r}\, B_\theta^0(r) \right] \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega + \frac{\varepsilon\, \omega\, \cos\theta \left[\dfrac{m}{r^2} \dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]}{- k\, B_z^0 + \dfrac{m}{r} \left[B_\theta^0(r) + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]}$$

que nos permitem obter o mapeamento das linhas de campo no plano (J,ϑ), com os parâmetros do TBR-1. Pode-se verificar, a partir destas equações que, quando $\varepsilon = -r/R$ tende a zero, recaímos no caso integrável.

Finalmente, no que diz respeito às aplicações numéricas, utilizamos três pares de condutores adjacentes helicoidais (m = 3/ n = 1), percorridos por correntes de sentidos opostos I_h. Os parâmetros utilizados foram os do TBR-1 e as escalas foram normalizadas pelo raio da coluna do plasma ou pelo quadrado deste valor. Apresentamos os mapeamentos analíticos dos invariantes ψ associados aos campos gerados:

1) pelo plasma em equilíbrio MHD estático (ψ_0),
2) pelos condutores helicoidais (ψ_1),
3) pela superposição das configurações anteriores.

No primeiro caso as superfícies de ψ constante são representadas por círculos concêntricos ao eixo geométrico do sistema (fig.II-2). No segundo, temos uma configuração de hexapolo que fornece seis estruturas representando superfícies abertas que se encontram assintoticamente na separatriz, conforme a fig.II-4. No terceiro caso, as superfícies de ψ constante fornecem círculos nas regiões mais internas da coluna e três ilhas magnéticas em torno da superfície com q = 3 (fig.V-1.a). Apresentamos ainda , para o mesmo sistema, o mapeamento numérico das equações das linhas de campo, colecionando pontos num plano poloidal a cada volta toroidal completada (fig.V-1.b). Observamos, neste caso, as mesmas características do mapeamento obtido através das curvas de ψ constante. Para o sistema não-integrável, o mapeamento numérico do campo ilustra o aparecimento das ilhas satélites que surgem devido ao efeito toroidal introduzido.

Ainda para o caso integrável fizemos o mapeamento das linhas de campo no espaço de fase (ρ,u) obtendo órbitas fechadas e abertas conforme estivéssemos em regiões onde ocorressem ou não ilhas magnéticas. A figura II-5 ilustra as trajetórias das linhas de campo no plano $\rho \times u$ obtidas através do mapeamento analítico do invariante $\psi = \mathcal{H}$, expresso pela equação (IV-11). Essas trajetórias foram também obtidas a partir da integração numérica da equação (IV-15) (fig.V-1.c). Obtivemos ainda os gráficos da freqüência ω , da Hamiltoniana $\mathcal{H}$, e da ação J em função de ρ. No primeiro caso, notamos que, próximo à região de ressonância, ω tende a zero (fig.V-4). Observamos, também, uma boa concordância com os valores obtidos para ω médio, através da equação (IV-24.b), mostrando ser esta expressão, uma boa estimativa para os valores da freqüência $\omega(J)$ (fig.V-5). No que se refere à Hamiltoniana, notamos que seus valores assumem um mínimo para pontos próximos à superfície racional $\rho_{3,1}/a^2/2 \approx 0,6$, conforme a fig. V-2. Isto ocorre porque a derivada de $\mathcal{H}$ em relação a r é proporcional à componente helicoidal do campo de equilíbriio, que por sua vez é nula sobre a superfície ressonante. O comportamento da ação é crescente para pontos iniciais que se afastam do centro. Para as regiões internas às ilhas, a ação é decrescente à medida que nos aproximamos do raio da superfície racional com q = 3 (fig.V-3). Isto condiz com o fato de que a ação está relacionada com a área no espaço de fase (ρ,u).

Ao introduzirmos a correção toroidal ($\varepsilon \neq 0$), o sistema passa a ser não-integrável devido à quebra de simetria (Lichtenberg e Liebermann 83) e tanto J, como o ângulo ϑ variam com o tempo t. A variável ângulo, entretanto, assume valores que apresentam uma pequena variação em relação ao caso integrável, e o seu gráfico continua apresentando comportamento aproximadamente linear em t (variável relacionada ao número de voltas toroidais), conforme a figura V-9. Dada esta quase linearidade temos que os mapeamentos $J \times N$ e $J \times \vartheta$, apresentam formas bastante semelhantes. Os mapeamentos $J \times \vartheta$ em um plano poloidal foram obtidos em duas situações: uma delas se refere aos pontos localizados em uma região do mapa do campo integrável, onde as ilhas magnéticas principais estão presentes, e a segunda para pontos em uma região onde estas ilhas não ocorrem. No primeiro caso, ao tomarmos pontos iniciais próximos a região ressonante ($r \approx r_{3,1} \approx 6{,}2$ cm), obtivemos uma configuração aleatória de pontos (fig.V-11), pois estamos em regiões em que as ilhas se sobrepõem e as superfícies são destruídas. No segundo caso, para o mesmo raio inicial de 5,8 cm, a variação dos valores de J é bem menor, pois as superfícies magnéticas ainda estão presentes assegurando um comportamento mais previsível para as linhas de campo (fig.V-10). Ainda neste segundo caso, notamos a presença de estruturas assinaladas com periodicidade quatro e dois na região onde as ilhas satélites surgem quando introduzimos a correção toroidal. Pudemos observar que o comportamento destas estruturas é bastante sensível às condições iniciais consideradas na obtenção do mapeamento. Há ainda o gráfico da ação em função do número de voltas toroidais ($J \times N$), ilustrado na fig.V-7. Este gráfico mostra que para pontos bem internos da coluna, localizados longe da região ressonante, a ação permanece constante, pois o sistema é aproximadamente integrável. Os valores de J tornam-se mais variáveis à medida que nos aproximamos da superfície ressonante. Neste gráfico os pontos foram obtidos para uma região em que não ocorrem as ilhas primárias. Portanto, as oscilações mais evidentes surgem quando nos aproximamos da região onde estão localizadas as ilhas satélites ($r_{in} \approx 0{,}07$m).

Os resultados obtidos são compatíveis com a previsão que pode ser feita através do teorema de Nekhoroshev (Nekhoroshev 77).

Segundo este teorema, ao considerarmos uma pequena região no plano do mapeamento, a variação da ação é compreendida por:

$$|J(N) - J(0)| \leq \varepsilon$$

para um número de voltas toroidais $N \propto \exp F(\varepsilon,r)$. Quando estamos nas regiões mais internas da coluna, $\varepsilon \mapsto 0$ e F aumenta. Assim, será preciso um maior número de voltas para que possamos observar alguma variação de J. O teorema ainda nos diz que F diminui próximo à região onde ocorrem as ressonâncias. Portanto, nesta região a ação varia mais rapidamente.

Este comportamento caracteriza o sistema como sendo do tipo quase-integrável (Lichtenberg e Liebermann 83), isto é, do tipo Hamiltoniano com perturbações tais que o parâmetro de estocasticidade s, definido pela equação (II-63), é aproximadamente igual à um. Esta faixa de valores para s, compreende as transições para uma situação de distribuição caótica das linhas de campo. Os fatores que controlam as condições para as quais esta transição se estabelece são dados, no nosso caso, pela corrente nos condutores helicoidais I_h, pelos parâmetros do equilíbrio representados pela corrente de plasma I_p, e pelos fatores de segurança medidos na borda e no centro do plasma. A escolha destes parâmetros está ligada à facilidade em medi-los e a influência de todos eles sobre o sistema pode ser verificada através dos valores assumidos pelo parâmetro s.

Podemos verificar a validade do método apresentado nesta dissertação, através da obtenção do mapeamento do campo no plano $J \times \vartheta$ a partir dos pontos determinados no plano $x \times y$, assinalados a cada volta toroidal completada. Para fazermos a transformação ponto a ponto, devemos utilizar as equações (V-4), (V-5), (V-8) (V-9) e (IV-20). Este trabalho já está sendo desenvolvido.

O trabalho aqui iniciado pode ter continuidade na utilização de teorias de sistemas Hamiltonianos quase-integráveis como proposto por Escande (Escande e Doveil 81). Em seu trabalho, Escande analisa regiões cada vez menores do espaço de fase através de um processo de renormalização, e obtém a condição para a destruição da última superfície toroidal localizada entre duas dadas ressonâncias. Esta condição é estabelecida a partir da tendência apresentada pelas

amplitudes das ressonâncias a cada passo da renormalização. Caso estas amplitudes tendam a se anularem, o último torus não desaparece, e o sistema renormalizado torna-se integrável. Caso contrário, as superfícies magnéticas não são preservadas e o sistema apresenta uma distribuição caótica das linhas de campo. Portanto, pode-se mostrar que a instabilidade de um sistema está relacionada com a destruição das superfícies toroidais existentes entre duas ressonâncias e Escande procura relacionar este fato com o que é estabelecido pelo teorema KAM, segundo o qual uma pequena perturbação que destrói a integrabilidade de um sistema, destrói todas as superfícies racionais presentes no espaço de fase deste sistema e várias irracionais. A extensão da destruição destas últimas, depende da amplitude da perturbação (Lichtenberg e Liebermann 83). O critério de Escande é mais preciso que o proposto por Chirikov (Chirikov 79) pois, muitas vezes, algumas superfícies irracionais permanecem entre duas ressonâncias para parâmetros de estocasticidade próximos, mas maiores que um.

Além disso, podemos aplicar o formalismo desenvolvido neste trabalho para o caso de um Stellarator afim de estudar o comportamento das superfícies magnéticas, necessárias ao confinamento de plasmas.

APÊNDICE

A.1) - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE PARA O POTENCIAL ϕ

A equação (II-26),

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + \left[\frac{m^2}{r} + k^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} = 0 \qquad \text{(A-1)}$$

pode ser resolvida utilizando o método de separação de variáveis (Butkov 78). A solução pode ser escrita na forma:

$$\phi = R(r)\, U(u) \qquad \text{(A-2)}$$

Substituindo (A-2) em (A-1) e dividindo por RU vem:

$$\frac{1}{R\, r}\frac{d}{dr}\left[r \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{U}\left[\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right] \frac{d^2U}{du^2} = 0 \qquad \text{(A-3)}$$

Fazemos:

$$\frac{d^2U}{du^2} = \lambda\, U \qquad \text{(A-4)}$$

Considerando que u é uma variável periódica que nos permite fazer:

$$\lambda = -N^2 \quad , \; N \text{ inteiro}$$

temos como solução de (A-4):

$$U = A \cos Nu + B \operatorname{sen} Nu \qquad \text{(A-5)}$$

Substituindo em (A-3) e rearranjando a equação obtemos:

$$\frac{d}{dr}\left[r \frac{dR}{dr} \right] - \left[\frac{m^2}{r} + k^2 r \right] N^2 R = 0 \qquad \text{(A-6)}$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$x = Nkr \qquad \text{e} \qquad y(x) = R(x) \qquad \text{(A-7)}$$

reescrevemos (A-6) como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left[1 + \frac{N^2 m^2}{x^2} \right] y = 0 \qquad \text{(A-8)}$$

Esta equação difere da equação de Bessel somente pelo sinal de um termo, e suas soluções são as funções modificadas de Bessel de 1ª e 2ª espécies, respectivamente, I_{mN} e K_{mN}.

Assim, a solução de (a-8) é (Butkov 78):

$$y = A_{mN} I_{mN}(x) + B_{mN} K_{mN}(x)$$

ou

$$R_{mN}(r) = A_{mN} I_{mN}(Nkr) + B_{mN} K_{mN}(Nkr) \qquad \text{(A-9)}$$

Escrevemos finalmente a solução (A-2) como:

$$\phi = B_0 z + \sum_{mN=1}^{\infty} \left[A_{mN} I_{mN}(Nkr) + B_{mN} K_{mN}(Nkr) \right] \text{sen } Nu \qquad \text{(A-10)}$$

O primeiro termo da equação (A-10) representa um campo uniforme na direção z. Para que tenhamos convergência da solução para r = 0, devemos fazer B_{mN}=0 obtendo, assim:

$$\phi = B_0 z + \sum_{mN=1}^{\infty} \left[A_{mN} I_{mN}(Nkr) \right] \text{sen } Nu \qquad \text{(A-11)}$$

$$0 \leq r \leq b$$

Para calcularmos o coeficiente A_{mN} da equação (A-11), vamos considerar uma densidade superficial de corrente (Fernandes e Caldas 85):

$$\tau = \tau_\theta + \tau_z \qquad \text{(A-12)}$$

que percorre uma hélice descrita pelas equações:

$$r = b \qquad \text{e} \qquad u = m\theta - kz \qquad \text{(A-13)}$$

sendo $2\pi/\alpha$ o passo desta hélice. Se γ é o ângulo formado pela hélice e o eixo z no seu sentido positivo, temos que:

$$\text{tg } \gamma = \frac{k}{m} b \qquad \text{(A-14)}$$

Para um fio fino que conduz uma corrente I_h segundo a hélice (A-13), podemos escrever:

$$i_z = \frac{I}{b}\,\delta(u) = \frac{I}{2\pi b} + \sum_{mN=1}^{\infty} \frac{I}{\pi b}\cos Nu \qquad \text{(A-15.a)}$$

e

$$i_\theta = tg\,\gamma\; i_z = \frac{I}{2\pi}\,\frac{k}{m} + \sum_{mN=1}^{\infty} \frac{I}{\pi}\,\frac{k}{m}\cos Nu \qquad \text{(A-15.b)}$$

onde $\delta(u)$ foi expandida em série de Fourier.

As equações (A-15) são uma superposição de correntes uniformes e harmônicas que têm a forma:

$$i_{zmN} = \frac{I_h}{\pi\, b}\cos Nu \qquad \text{(A-16.a)}$$

$$i_{\theta mN} = \frac{I_h}{\pi}\,\frac{k}{m}\cos Nu \qquad \text{(A-16.b)}$$

que criam potenciais finitos segundo a equação (A-10) dados por:

$$\phi^{\,i}_{Nm} = A^{\,i}_{mN}\; I_{mN}(Nkr)\,\text{sen}\,Nu \qquad 0 \le r \le b \qquad \text{(A-17.a)}$$

$$\phi^{\,e}_{mN} = B^{\,e}_{mN}\; K_{mN}(Nkr)\,\text{sen}\,Nu \qquad r \ge b \qquad \text{(A-17.b)}$$

As constantes A^{i}_{mN} e B^{e}_{mN} são determinadas pelas condições de contorno em r = b através de:

$$B^{i}_{rmN} = B^{e}_{rmN} \qquad \text{(A-18.a)}$$

$$B^{i}_{\theta mN} - B^{e}_{\theta mN} = - \mu_0 \, i_{zmN} \qquad \text{(A-18.b)}$$

$$B^{i}_{zmN} - B^{e}_{zmN} = \mu_0 \, i_{\theta mN} \qquad \text{(A-18.c)}$$

Sabendo que $B = \nabla\phi$, vem das equações (A-18), (A-17) e (A-16), as seguintes relações:

$$B^{e}_{mN} = B^{i}_{mN} \; \frac{I'_{mN}(Nkb)}{K'_{mN}(Nkb)} \qquad \text{(A-19.a)}$$

$$Nm \left[A^{i}_{mN} \; I_{mN}(Nkb) - B^{e}_{mN} \; K_{mN}(Nkb) \right] = - \frac{\mu_0 \, I_h}{\pi} \qquad \text{(A-19.b)}$$

Substituindo (A-19.a) em (A-19.b) vem:

$$A^{i}_{mN} \left[K'_{mN}(Nkb) \; I_{mN}(Nkb) - I'_{mN}(Nkb) \; K_{mN}(Nkb) \right] = - \frac{\mu_0 \, I_h}{\pi \, N \, m} \; K'_{mN}(Nkb) \qquad \text{(A-20)}$$

Usando a propriedade:

$$I'_{\mu}(x) \; K_{\mu}(x) - I_{\mu}(x) \; K'_{\mu}(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{(A-21)}$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1589
e.2
INSTITUTO DE FÍSICA

Temos, a partir de (A-20):

$$A^{i}_{mN} = \frac{\mu_0 \, I_h \, K'_{mN}(Nkb) \, b}{\pi} \quad \frac{k}{m} \qquad \text{(A-22)}$$

e escrevemos, então, o potencial (A-11) como:

$$\phi = \frac{\mu_0 \, I_h \, k}{2 \, \pi \, m} \left[z + 2b \sum_{Nm=1}^{\infty} K'_{mN}(Nkb) \; I_{mN}(Nkr) \; \text{sen Nu} \right] \qquad \text{(A-23)}$$

one o primeiro termo corresponde à corrente uniforme (A-15.b) associada ao potencial escalar:

$$\phi = \frac{\mu_0 \, I_h \, k}{2 \, \pi \, m} \; z \qquad \text{para} \qquad 0 \leq r \leq b \qquad \text{(A-24)}$$

A.2) - CAMPO MAGNÉTICO DE PARES DE CORRENTES HELICOIDAIS

Consideremos l pares de fios finos enrolados helicoidalmente numa superfície cilíndrica de raio b com correntes de sentidos opostos. A separação angular entre dois fios vizinhos num plano normal à superfície cilíndrica será $\Delta\theta = \pi/l$. Assim, o j-ésimo condutor é descrito por:

$$r = b \qquad \text{e} \qquad m \left(\theta - j \frac{\pi}{l} \right) - k \, z = \text{cte.} \qquad \text{(A-24)}$$

e o potencial escalar interno criado pelos l pares de fios pode ser escrito como a soma:

$$\phi = \sum_{j=0}^{2l-1} (-1)^j \quad \frac{\mu_0 I_h k}{2 \pi m} \left\{ z + 2b \sum_{mN=1}^{\infty} K'_{mN} (Nkb) I_{mN} (Nkr) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \operatorname{sen} N \left[m \left(\theta - j \frac{\pi}{l} \right) - k z \right] \right\} \qquad \text{(A-25)}$$

onde tomamos a equação (A-23)

Concluímos facilmente que a somatória do primeiro termo é nula. Usando a expressão para a soma dos senos, vem:

$$\sum_{j=0}^{2l-1} (-1)^j \quad \operatorname{sen} N \left[m \left(\theta - j \frac{\pi}{l} \right) - k z \right] =$$

$$\begin{cases} 2l \operatorname{sen} N (m\theta - kz) & \text{para } Nm = (2p + 1)l \ , \ p = 0, 1, 2. \ . \ . \\ 0 \quad \text{para outros valores de Nm} \end{cases}$$

Podemos, portanto, reescrever (A-25) como:

$$\phi = \frac{2 \mu_0 b I_h l k}{\pi m} \sum_{p=0}^{\infty} K'_{mN} (Nkb) \ I_{mN} (Nkr) \ \operatorname{sen} Nu \ , \quad 0 \leq r \leq b$$

(A-26)

sendo $Nm = (2p + 1)l$.

A equação (A-26) é, assim, o potencial gerado por l pares de fios enrolados helicoidalmente percorridos por correntes de sentidos opostos em condutores adjacentes.

A.3) - DETERMINAÇÃO DO POTENCIAL VETOR $\mathbb{A}$ CORRESPONDENTE AO CAMPO GERADO PELOS CONDUTORES HELICOIDAIS

Para determinar o potencial vetor associado ao campo proveniente dos condutores helicoidais, partiremos das seguintes equações para o campo magnético:

$$\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A} \qquad \text{(A-27)}$$

e

$$\mathbb{B} = \nabla\phi \qquad \text{(A-28)}$$

sendo $\mathbb{A}$ o potencial vetor.

Tomaremos o potencial escalar ϕ dado pela equação (II-31):

$$\phi = \frac{2\,\mu_0\, b\, I_h\, k}{\pi}\; K'_m(kb)\;\; I_m(kr)\, \text{sen}\, u \qquad \text{(II-31)}$$

onde b é o raio dos condutores helicoidais, I_h é a corrente helicoidal e $u = m\theta - kz$. I_m e K_m são as funções modificadas de Bessel de 1^{a} e 2^{a} espécies, respectivamente.

De (A-27) temos:

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \qquad \text{(A-29.a)}$$

$$B_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \qquad \text{(A-29.b)}$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \qquad \text{(A-29.c)}$$

Adotaremos o calibre de Coulomb:

$$\nabla \cdot \mathbb{A} = 0 \qquad \text{(A-30)}$$

e escolheremos a componente $A_z = 0$. Utilizando ainda argumentos de simetria, onde:

$$\frac{\partial}{\partial z} = - k \frac{\partial}{\partial u} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial \theta} - m \frac{\partial}{\partial u}$$

podemos escrever , a partir das equações (A-28) e (A-29):

$$B_r = k \frac{\partial A_\theta}{\partial u} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{2 \mu_0 b I_h k^2}{\pi} K'_m(kb) I'_m(kr) \text{ sen } u \qquad \text{(A-31.a)}$$

$$B_\theta = - k \frac{\partial A_r}{\partial u} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{2 \mu_0 b I_h k m}{\pi r} K'_m(kb) I_m(kr) \cos u \qquad \text{(A-31.b)}$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{m}{r} \frac{\partial A_r}{\partial u} = \frac{\partial \phi}{\partial z} =$$

$$= - \frac{2 \mu_0 b I_h k^2}{\pi} K'_m(kb) I_m(kr) \cos u \qquad \text{(A-31.c)}$$

onde a última igualdade de cada uma das expressões acima foi estabelecida a partir de (A-28).

Para obtermos A_θ , integramos (A-31.a) de onde vem:

$$A_\theta = - \frac{2 \mu_0 b I_h k}{\pi} K'_m(kb) I'_m(kr) \cos u + g(r) \qquad \text{(A-32.a)}$$

Analogamente para A_r , a partir e (A-31.b) obtemos:

$$A_r = - \frac{2 \mu_0 b I_h m}{\pi r} K'_m(kb) I_m(kr) \text{ sen } u + h(r) \qquad \text{(A-32.b)}$$

onde g(r) e h(r) são funções a serem determinadas:

Substituindo as equações (A-32) em (A-31.c) vem:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{2\,\mu_0\,b\,I_h\,k\,r}{\pi}\,K'_m(kb)\,I'_m(kr)\cos u + r\,g(r)\right] -$$

$$-\frac{m}{r}\left[-\frac{2\,\mu_0\,b\,I_h\,m}{\pi\,r}\,K'_m(kb)\,I_m(kr)\cos u\right] =$$

$$= -\frac{2\,\mu_0\,b\,I_h\,k^2}{\pi}\,K'_m(kb)\,I_m(kr)\cos u \qquad \text{(A-33)}$$

Rearranjando a equação (A-33) e agrupando alguns termos vem:

$$-\frac{2\,\mu_0\,b\,I_h\,k^2}{\pi}\,K'_m(kb)\cos u\left[\frac{I'_m(kr)}{k\,r} + I''_m(kr)\right] + \frac{g(r)}{r} + \frac{\partial g}{\partial r} +$$

$$+\frac{2\,\mu_0\,b\,I_h\,m^2}{\pi\,r^2}\,K'_m(kb)\,I_m(kr)\cos u = -\frac{2\,\mu_0\,b\,I_h\,k^2}{\pi}\,K'_m(kb)\,I_m(kr)\cos u$$

(A-34)

Substituindo em (A-34) a relação de recorrência para as funções modificadas de Bessel (Morozov e Solov'ev 66),dada abaixo:

$$I''_m(kr) + \frac{I'_m(kr)}{k\,r} = I_m(kr)\left[1 + \frac{m^2}{k^2\,r^2}\right]$$

obtemos:

$$-\frac{2\,\mu_0\,b\,I_h\,k^2}{\pi} K'_m(kb)\,I_m(kr)\left[1 + \frac{m^2}{k^2\,r^2}\right]\cos u + \frac{g(r)}{r} + \frac{\partial g}{\partial r} +$$

$$+\frac{2\,\mu_0\,b\,I_h\,m^2}{\pi\,r^2} K'_m(kb)\,I_m(kr)\cos u = -\frac{2\,\mu_0\,b\,I_h\,k^2}{\pi} K'_m(kb)\,I_m(kr)\cos u$$

de onde concluímos, após identificação dos termos

$$\frac{g(r)}{r} + \frac{\partial g}{\partial r} = 0$$

cuja solução podfe ser tomada como:

$$g(r) = 0 \qquad \text{(A-34)}$$

Utilizando ainda o Calibre de Coulomb:

$$\nabla \cdot \mathbb{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right] = 0$$

onde substituímos as equações (A-32), obtendo:

$$- \frac{2 \mu_0 b I_h m}{\pi r} K'_m(kb) I_m(kr) \operatorname{sen} u + h(r) +$$

$$+ r \left[- \frac{2 \mu_0 b I_h m}{\pi r} I'_m(kr) \operatorname{sen} u + \frac{\partial h}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \frac{2 \mu_0 b I_h m}{\pi r^2} K'_m(kb) I_m(kr) \operatorname{sen} u \right] + m \left[\frac{2 \mu_0 b I_h k}{\pi} K'_m(kb) . \right.$$

$$\left. . I'_m(kr) \operatorname{sen} u \right] = 0$$

Temos, assim:

$$h(r) + r \frac{\partial h}{\partial r} = 0$$

cuja solução é:

$$h(r) = 0 \qquad \text{(A-36)}$$

As componentes do potencial vetor são, portanto:

$$A_r = - \frac{2 \mu_0 \, b \, I_h \, m}{\pi \, r} \, K'_m(kb) \, I_m(kr) \, \text{sen } u$$

$$A_\theta = - \frac{2 \mu_0 \, b \, I_h \, k}{\pi} \, K'_m(kb) \, I'_m(kr) \cos u$$

$$A_z = 0$$

REFERÊNCIAS

- BUTKOV E., 1978, "Física Matemática", Editora Guanabara Dois S. A.

- CHIRIKOV B. V., 1979, "A Universal Instability of Many Dimensional Oscilator", Physics Reports 52 , 263.

- ESCANDE D. F., DOVEIL F., 1981, "Renormalization Method for Computing the Threshold of the Large Scale Stochastic Instability in Two Degrees of Freedom Hamiltonian Systems", Journal of Statistical Physics 26, 257.

- FERNANDES A. S., HELLER M. V. A. P., CALDAS I. L., 1989, "The Destruction of Magnetic Surfaces by Ressonant Helical Windings", Plasma Physics and Controlled Fusion 30 , 1203.

- FERNANDES A. S., CALDAS I. L., 1985, "Campos Ressonantes Criados por Correntes Helicoidais em Tokamaks", Publicações IFUSP P-539

- FILONENKO N. N., SAGDEEV R. Z., ZASLAVSKY G. M., 1967, "Destruction of Magnetic Surfaces by Magnetic Fields Irregularities: Part II", Nuclear Fusion 7, 253.

- FREIDBERG J. P., 1982, "Ideal Magnetohidrodynamic Theory of Magnetic Fusion System", Reviews of Modern Physics 54 , 801.

- FUSSMAN G., GREEN B. J., ZEHRFELD H. P., 1981, "The Magnetic Field of Toroidal Helical Surface Currents and its Effect on Island Formation and Ergodization in Tokamaks", 8th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, 1980 (Brussels) Viena, IAEA 1 , 353.

- GRAD H., 1985, "Theory and Aplications of the Nonexistence of Simple Toroidal Plasma Equilibrium", International Journal of Fusion Energy 3, 33.

- GREENE J. M., 1984, "Renormalization and the Breakup of Magnetic Surfaces" em Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas, 3, John Willy & Sons, New York.

- GREENE J. M., JOHNSON J. L., 1965, "Hydromagnetic Equilibrium and Stability", Advances in Theoretical Physics 1 , 195.

- KARGER F., WOBIG H., CORTI S., GERNHARDT J., KLÜBER O., LISITANO G., McCORICK K., MEISEL D., SESNICK S., 1975, "Influence of Resonant Helical Fields on Tokamak Discharges", 6th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, 1974, (Tokyo) Vienna, IAEA, 1 , 207.

- LICHTENBERG A. I., LIBERMAN M. A., 1983, "Regular and Stochastic Motion", Springer Verlag, New York.

- MOROZOV A. I., SOLOV'EV L. S., 1966, Reviews of Plasma Physics 2, Consultants Bureau, New York.

- PERCIVAL I., RICHARDS D., 1982, "Introduction to Dynamics", cap7, Cambridge University Press.

- ROBINSON D. C., 1985, "Ten Years of Results from the TOSCA Device", Nuclear Fusion 25 , 1101.

- TURNER L., 1985, "Hamiltonian Representation for Helically Symmetric Magnetic Fields", Journal of Mathematics and Physics 26 , 991.

- VANNUCCI A., BENDER O. W., CALDAS I. L., TAN I. H., NASCIMENTO I.C., SANADA E. K. 1988, "Influence of Resonant Helical Windings on the Mirnov Oscilations in a Small Tokamak", Il Nuovo Cimento, 10D, 1193.

- VANNUCCI A., NASCIMENTO I. C., CALDAS I. L., 1989, "Disruptive Instability in the Discharges of the TBR-1 Small Tokamak", Plasma Physics and Controlled Fusion, 31 , 147.