

SISTEMAS NÃO LINEARES:

***IMPLEMENTAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DO
COMPORTAMENTO DINÂMICO DO CIRCUITO DE CHUA***

***PROF. DR. RONILSON ROCHA
UFOP/EM/DECAT***

Objetivos

- *Apresentação do Circuito de Chua e sua versão análoga*
- *Desenvolvimento de um circuito análogo de Chua*
- *Caracterização experimental do circuito análogo de Chua*
- *Mapeamento analítico do comportamento dinâmico do circuito de Chua nos espaços de parâmetros*



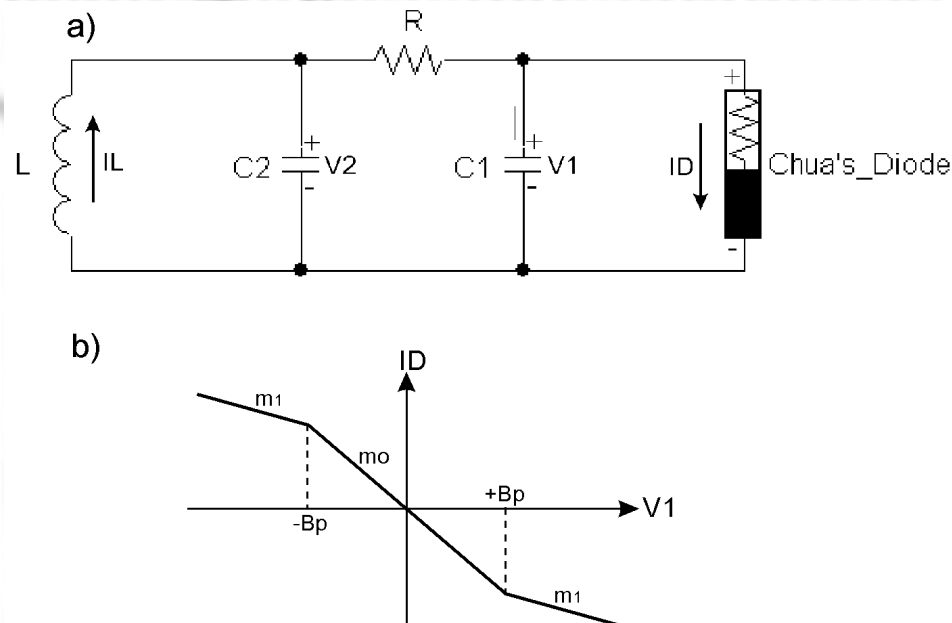
APRESENTAÇÃO

SISTEMAS NÃO-LINEARES

- ***Fenômenos observados em sistemas não-lineares***
 - ***Múltiplos estados de equilíbrio;***
 - ***Múltiplos modos de comportamento;***
 - ***Dependência das condições iniciais;***
 - ***Respostas sub-harmônicas e/ou harmônicas;***
 - ***Ciclos limites ou oscilações auto excitadas;***
 - ***Bifurcações;***
 - ***Caos;***
 - ***Etc.***

CIRCUITO DE CHUA

- O circuito de Chua é aceito como uma paradigma para o estudo de fenômenos não-lineares.



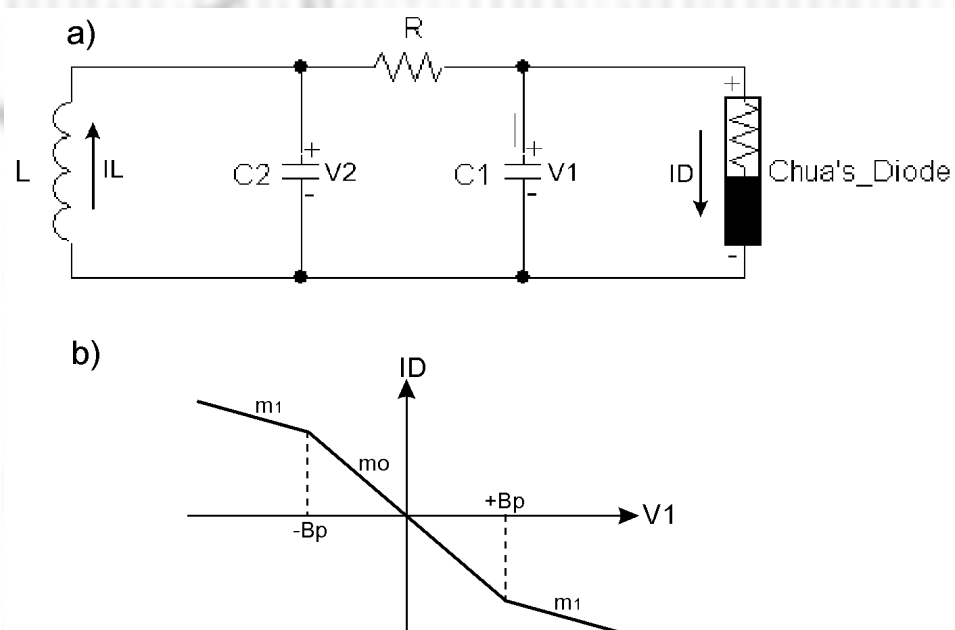
$$\dot{v}_1 = -\frac{(v_1 - v_2)}{RC_1} - \frac{i_D(v_1)}{C_1}$$

$$\dot{v}_2 = \frac{(v_1 - v_2)}{RC_2} - \frac{i_L}{C_2}$$

$$\dot{i}_L = -\frac{v_2}{L}$$

$$i_D(v_1) = m_1 v_1 + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|v_1 + B_P| - |v_1 - B_P|)$$

CIRCUITO DE CHUA (ADMENSIONAL)



$$\dot{x} = \alpha[-x + y - K(x)]$$

$$\dot{y} = x - y + z$$

$$\dot{z} = -\beta y$$

$$K(x) = bx + \frac{1}{2}(a-b)(|x+1| - |x-1|)$$

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = \frac{R^2 C_2}{L}, \quad a = Rm_0, \quad b = Rm_1$$

ELEMENTOS CRÍTICOS

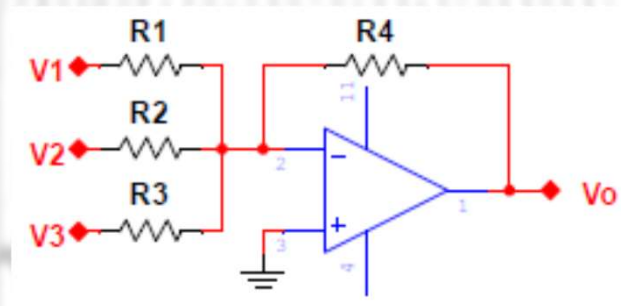
- ***Não Linearidade (Diodo de Chua)***
 - ***Função linear por partes de três segmentos***
 - ***Um polinômio cúbico***
- ***Indutor***
 - ***Faixas muito restritas de valores comerciais***
 - ***Projeto e montagem complexos***
 - ***Grandes dimensões***
 - ***Baixa exatidão***
 - ***Resistência elétrica interna***

ANALOGIA ELETRÔNICA

- ***Emulação de equações utilizando circuitos eletrônicos***
 - ***Amplificadores operacionais***
 - ***Integradores (integração) e Derivadores (derivação)***
 - ***Somadores (soma) e Subtratores (subtração)***
 - ***Amplificadores (multiplicação por constante)***
 - ***Circuitos sintetizados a partir da divisão da função em segmentos de linha gerados por diodos polarizados***
 - ***Dispositivos eletrônicos específicos***
 - ***Amplificadores logarítmicos e antilogarítmicos***
 - ***Multiplicador analógico (Produto, Potência, Divisão, Raiz quadrada, Funções trigonométricas)***
 - ***Etc.***

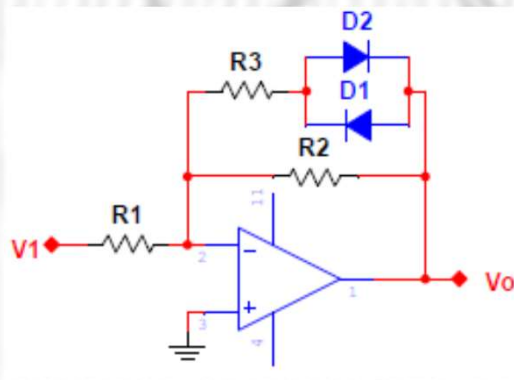
CIRCUITOS ELETRÔNICOS UTILIZADOS NA ANALOGIA

Somador ponderado

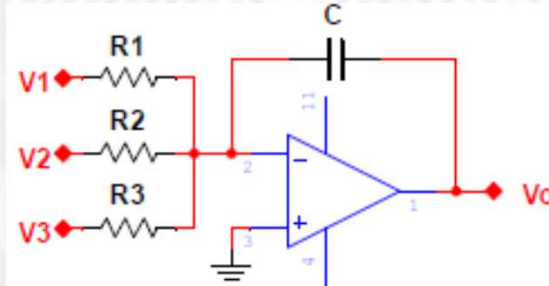


$$v_o = -\frac{1}{R_4} \left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} \right)$$

Não Linearidade



Integrador ponderado



$$v_o = -\frac{1}{C} \int \left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} \right) dt$$

Multiplicador

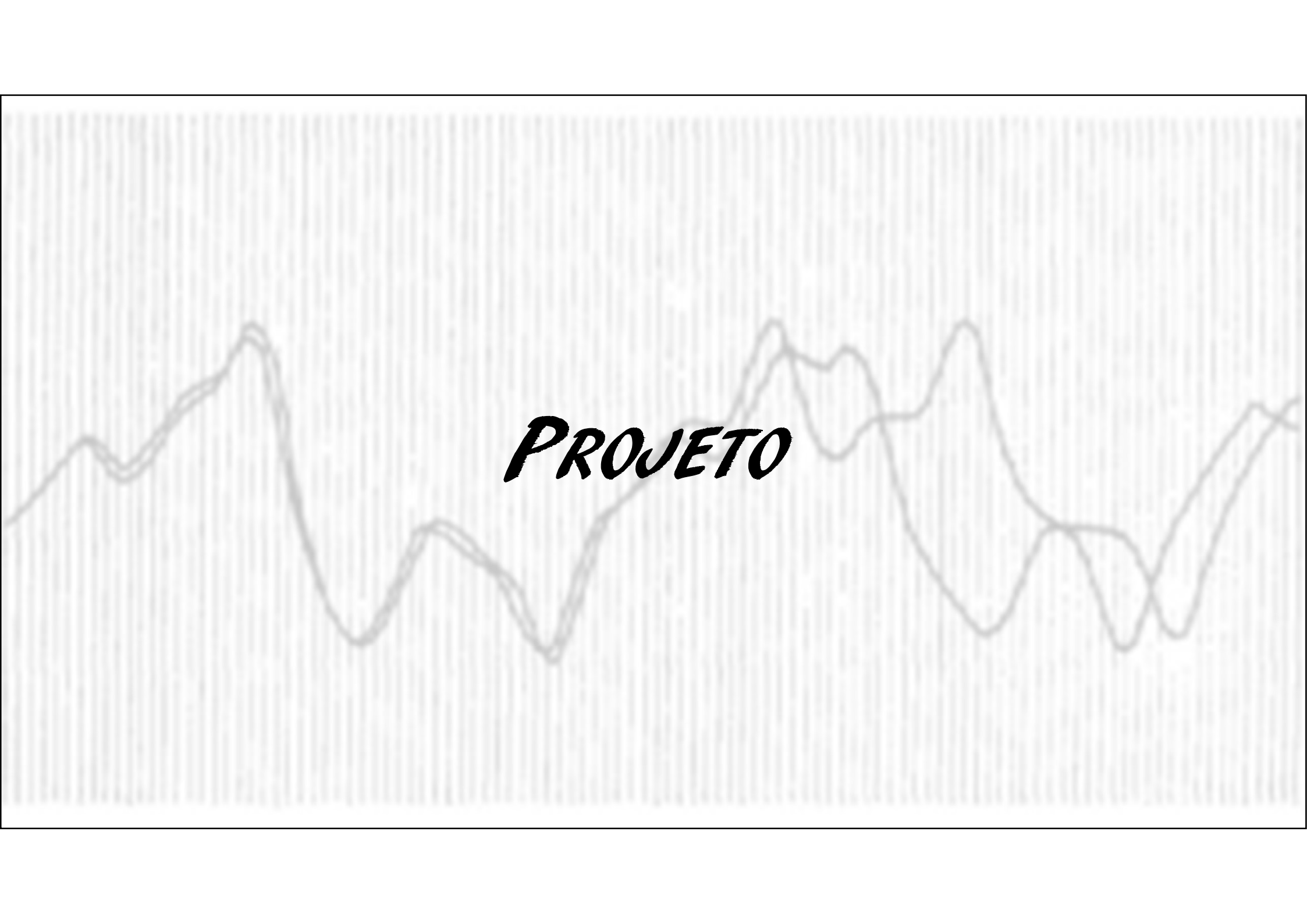


$$W = \frac{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)}{10} + Z$$

$$v_o = \frac{R_3}{R_1} v_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{R_3}{R_1} \right) (|v_1 + 0,7| - |v_1 - 0,7|)$$

VANTAGENS DA ANALOGIA ELETRÔNICA

- *Montagens simples, robustas, compactas, versáteis e baratas e sem indutor*
- *Operação em todo espaço de parâmetros*
- *Representação das variáveis do sistema a partir de sinais elétricos (tensões analógicas)*
 - *Evita o uso de sensores caros*
 - *Observação / armazenamento em osciloscópios e/ou placas de aquisição*
- *Estabelecimento prévio da amplitude dos sinais*
 - *Eliminar sobrecargas e saturação*
 - *Assegurar nível de sinal acima do nível de ruído*
- *Estabelecimento prévio da dinâmica do sistema*
 - *Limitar a frequência do sinal*
 - *Obter um tempo confortável para observação*



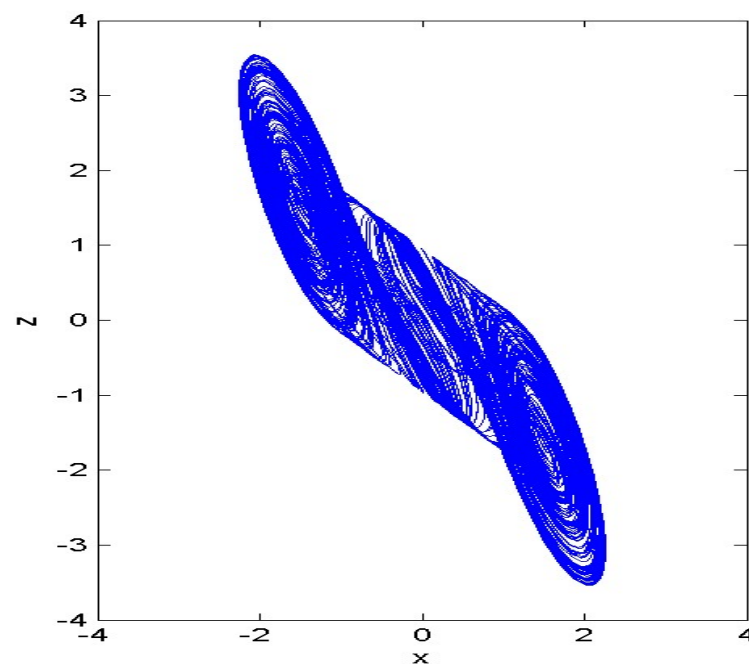
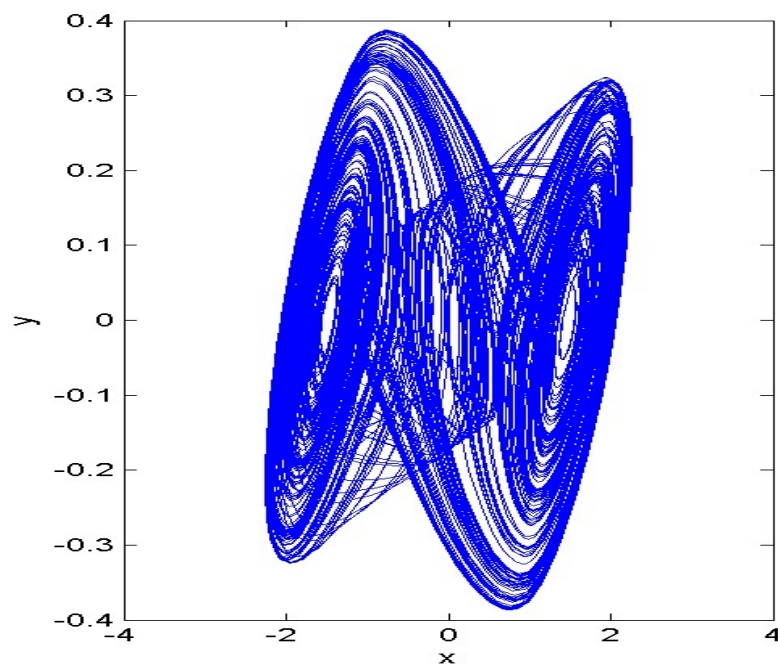
PROJETO

PROJETO DE UM CIRCUITO ELETRÔNICO ANALÓGICO

- *Desenvolver o modelo matemático na forma de equações de estado*
- *Estimar a faixa de valores esperada para cada variável do sistema e aplicar fatores de escala se necessário (Escala de amplitude)*
- *Dividir todo sistema de equações pelo valor do maior parâmetro*
- *Estabelecer a dinâmica da implementação a partir da escolha dos valores da resistência base e dos capacitores (Escala de tempo)*
- *Implementar cada equação de primeira ordem do modelo de estados usando um integrador ponderado e demais operações aritméticas a partir de sub-circuitos adjacentes*

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO CIRCUITO DE CHUA

$$\alpha = 14 \quad \beta = 25 \quad a = -8/7 \quad b = -5/7$$



$$\max(|x|) \approx 2,25 \quad \max(|y|) \approx 0,39 \quad \max(|z|) \approx 3,55$$

ESCALAMENTO EM AMPLITUDE

- *Aplicação de fatores de escala para limitar as amplitudes das variáveis do sistema*
 - *Tensão máxima admissível*
 - *Fonte de alimentação*
 - *Não linearidades (saturação)*
 - *Tensão mínima*
 - *Ruídos*
 - *Erros*
 - *Incertezas*
- *A variável x será escalada de forma que o ponto de quebra da não linearidade seja igual a tensão de chaveamento de um diodo comum (0,7V)*
- *As demais variáveis serão escaladas de forma que todas tenham aproximadamente a mesma amplitude*

$$\bar{x} = 0,7x \quad \bar{y} = \frac{2,25 * 0.7}{0,39} y = 4y \quad \bar{z} = \frac{2,25 * 0.7}{3,55} z = 0,44z$$

MUDANÇA DE VARIÁVEIS

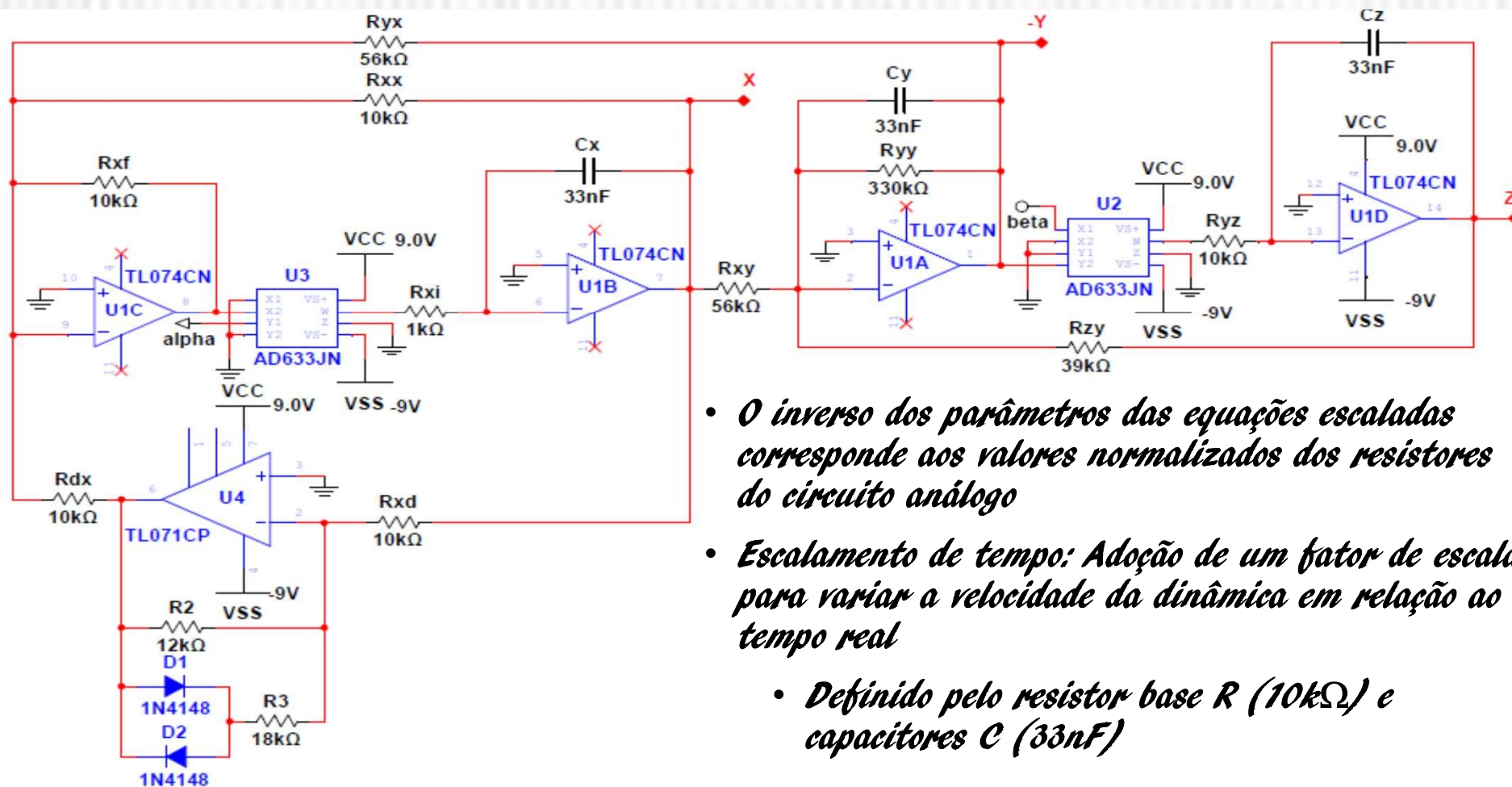
$$K\left(\frac{\bar{x}}{0.7}\right) = \frac{1}{0.7} \left[b\bar{x} + \frac{1}{2}(a-b)(|\bar{x} + 0.7| - |\bar{x} - 0.7|) \right] = \frac{1}{0.7} \bar{K}(\bar{x})$$
$$\dot{\bar{x}} = \alpha \left[-\bar{x} + \frac{0.7}{4} \bar{y} - \bar{K}(\bar{x}) \right] \quad \dot{\bar{y}} = \frac{4}{0.7} \bar{x} - \bar{y} + \frac{4}{0.44} \bar{z} \quad \dot{\bar{z}} = -\frac{0.44}{4} \beta \bar{y}$$

- ***Normalizar todas as equações com o propósito de evitar amplificações intermediárias (33)***

$$\dot{\bar{x}} = \left(\frac{\alpha}{33} \right) \left[-\bar{x} + \frac{1}{5.7} \bar{y} - \bar{K}(\bar{x}) \right] \quad \dot{\bar{y}} = \frac{1}{5.8} \bar{x} - \frac{1}{33} \bar{y} + \frac{1}{3.6} \bar{z} \quad \dot{\bar{z}} = -\frac{1}{9.1} \left(\frac{\beta}{33} \right) \bar{y}$$

- ***A normalização afeta somente a velocidade da dinâmica***

CIRCUITO ANÁLOGO DE CHUA



- O inverso dos parâmetros das equações escaladas corresponde aos valores normalizados dos resistores do circuito análogo
- Escalamento de tempo: Adoção de um fator de escala para variar a velocidade da dinâmica em relação ao tempo real
 - Definido pelo resistor base R ($10k\Omega$) e capacitores C ($33nF$)



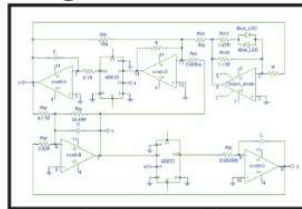
CARACTERIZAÇÃO

APARATO EXPERIMENTAL

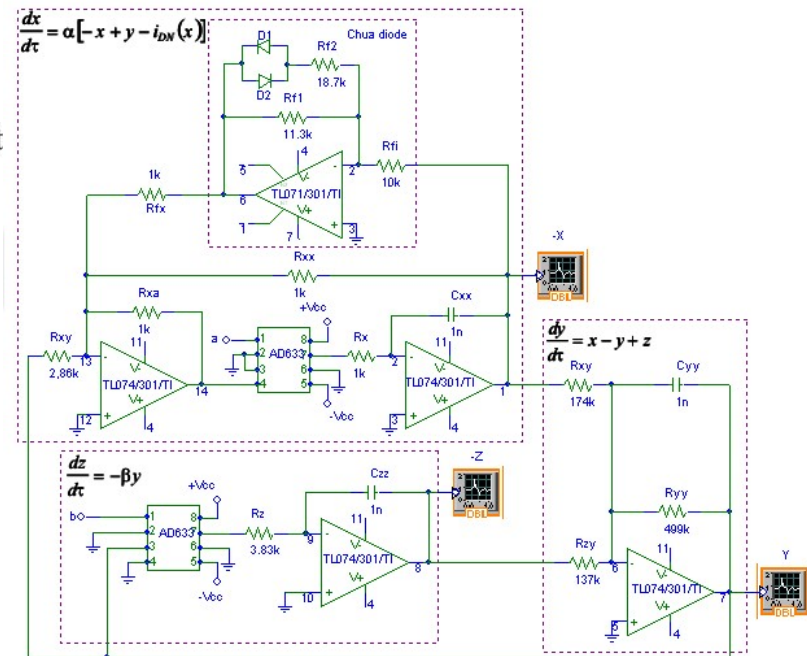


PC+LabVIEW

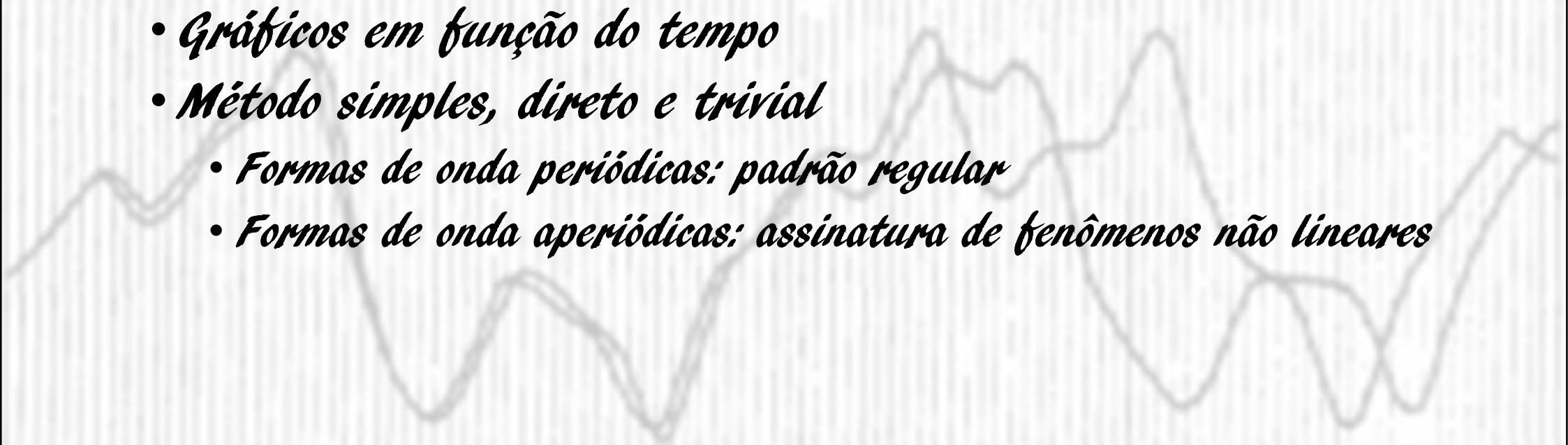
Analogous Chua's Circuit



NI USB-6009

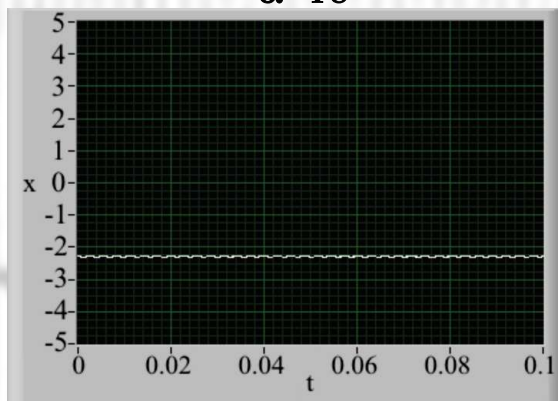


FORMAS DE ONDA

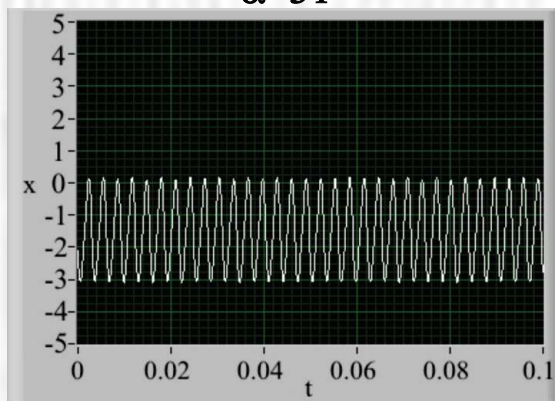
- ***Gráficos em função do tempo***
 - ***Método simples, direto e trivial***
 - ***Formas de onda periódicas: padrão regular***
 - ***Formas de onda aperiódicas: assinatura de fenômenos não lineares***
- 

FORMAS DE ONDA EXPERIMENTAIS ($\beta=105$)

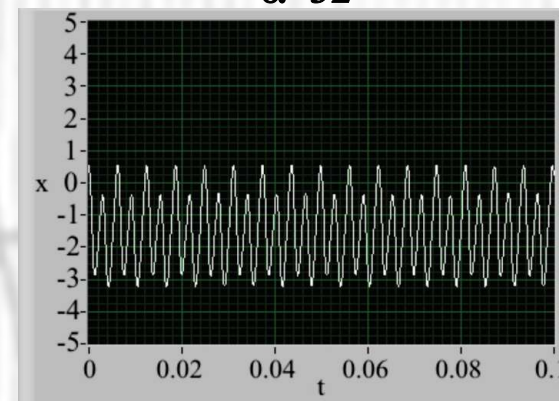
$\alpha=18$



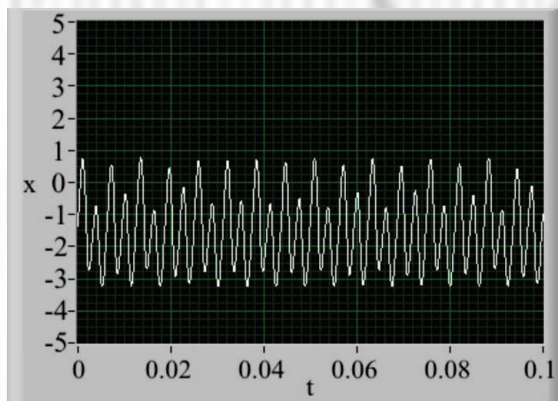
$\alpha=31$



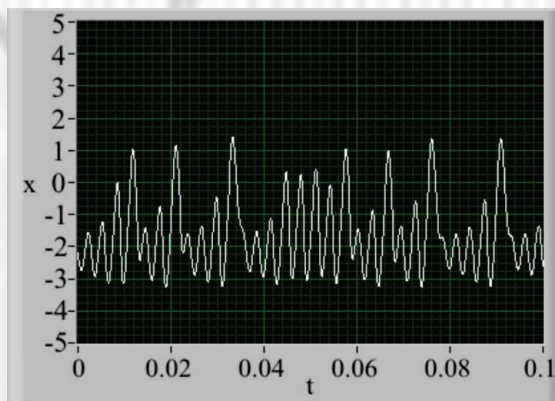
$\alpha=32$



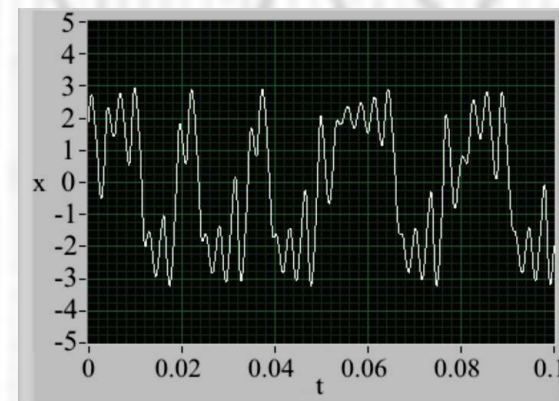
$\alpha=33$



$\alpha=35$



$\alpha=36$

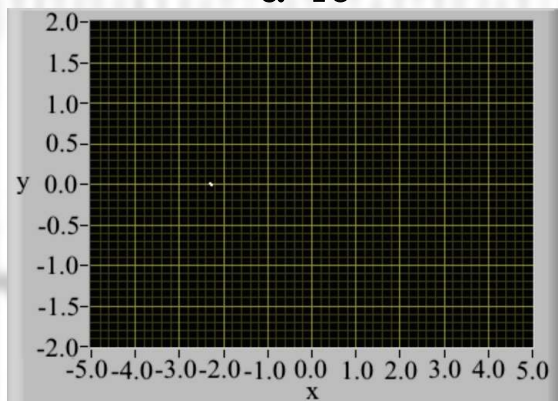


RETRATOS DE FASE

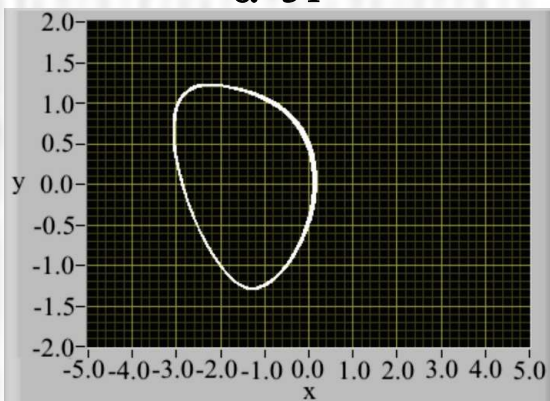
- *Representação geométrica das trajetórias no plano de fase*
- *Identifica o comportamento dinâmico*
 - *Estacionário: ponto*
 - *Periódico: órbita fechada*
 - *Caótico: trajetórias sempre descrevem diferentes órbitas*
 - *Ruído aleatório: bordas difusas*

RETRATOS DE FASE EXPERIMENTAIS ($\beta=105$)

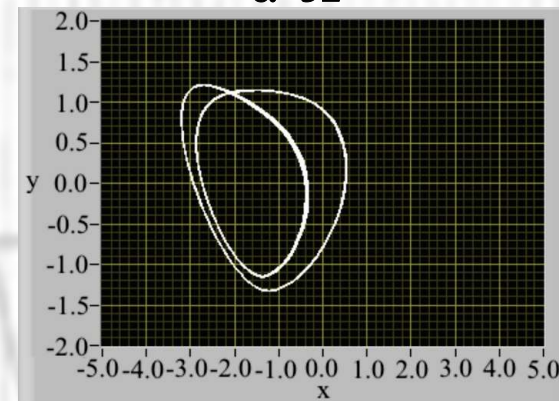
$\alpha=18$



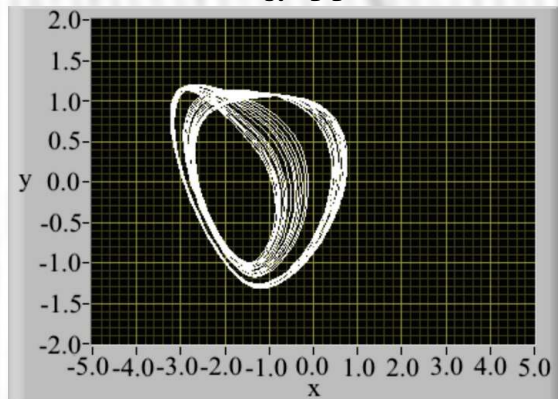
$\alpha=31$



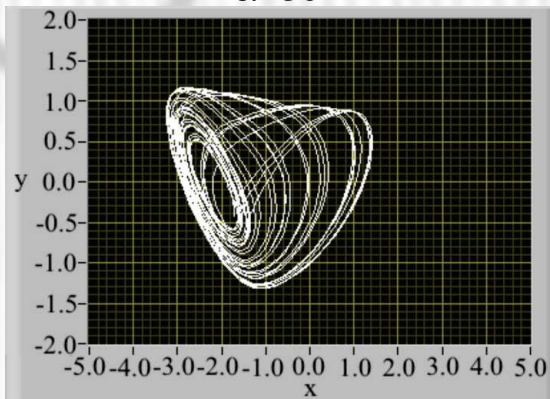
$\alpha=32$



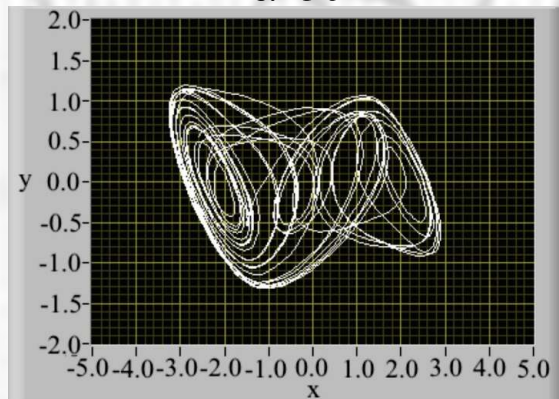
$\alpha=33$



$\alpha=35$



$\alpha=36$

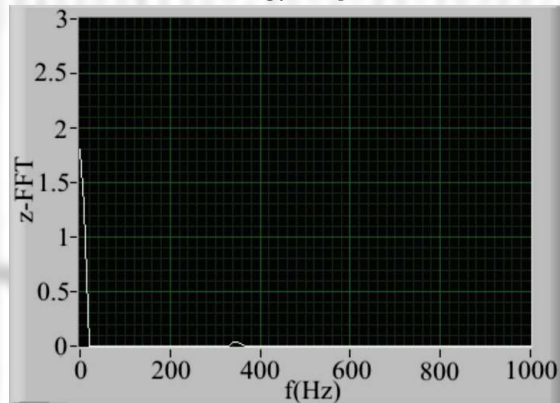


ESPECTRO DE FREQUÊNCIA

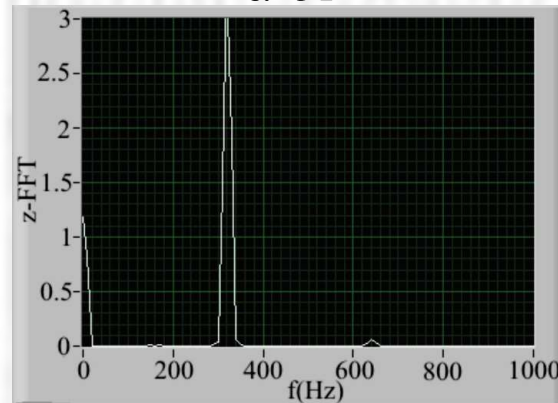
- *Avaliação da magnitude e da fase das componentes senoidais de uma forma de onda utilizando a transformada de Fourier (FFT)*
- *Identificação de sistemas não lineares:*
 - *Somente um comportamento não linear introduz novas frequências no espectro*
 - *Periódico: frequências estáveis*
 - *Caótico: banda larga*
 - *Ruídos: espectro de frequências aleatório*

ESPECTROS DE FREQUÊNCIA EXPERIMENTAIS ($\beta=105$)

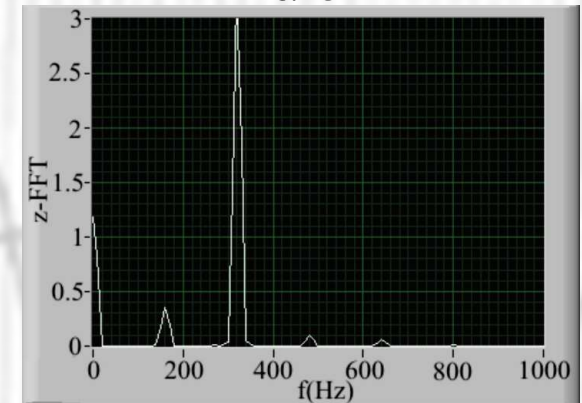
$\alpha=18$



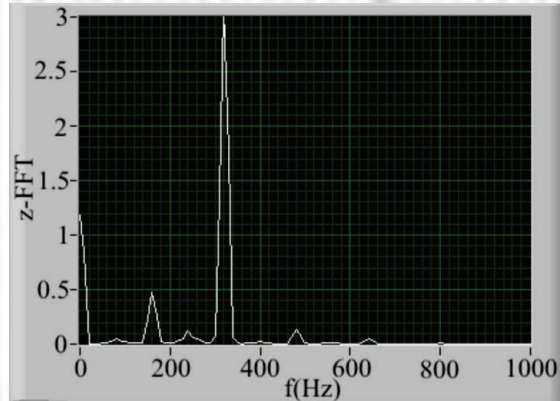
$\alpha=31$



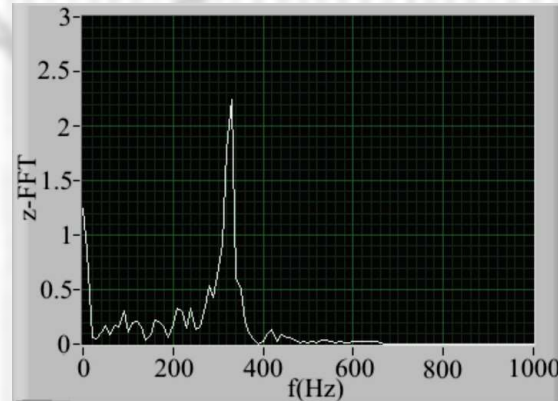
$\alpha=32$



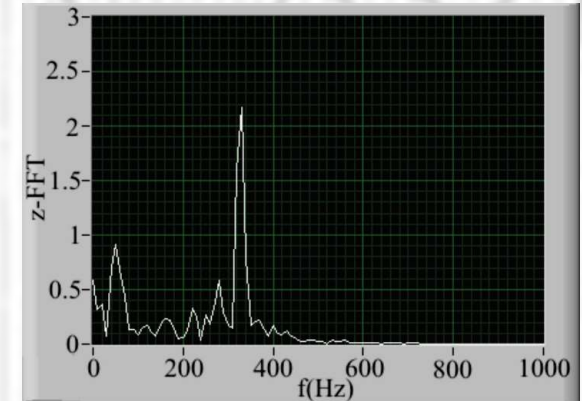
$\alpha=33$



$\alpha=35$

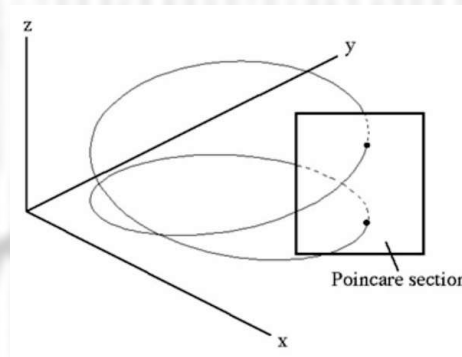


$\alpha=36$



SEÇÃO DE POINCARÉ

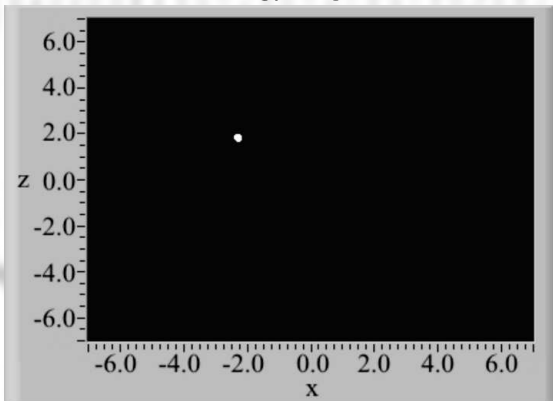
- *Plano bidimensional que intercepta as trajetórias no plano de fase em regime permanente*



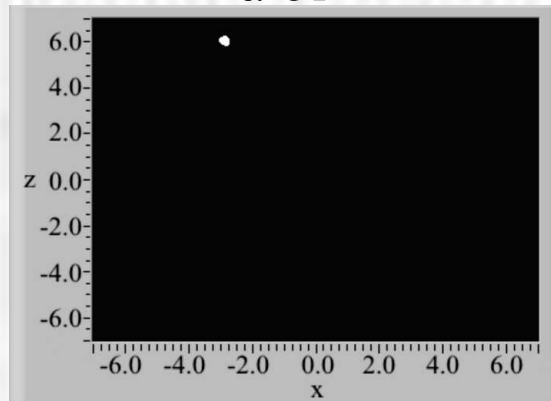
- *Identificação da dinâmica*
 - *Periódica: número finito de pontos que reflete a periodicidade do movimento*
 - *Quase periódica: linha contínua*
 - *Caótica: grande número de pontos irregularmente distribuídos*

SEÇÕES DE POINCARÉ EXPERIMENTAIS ($\beta=105$)

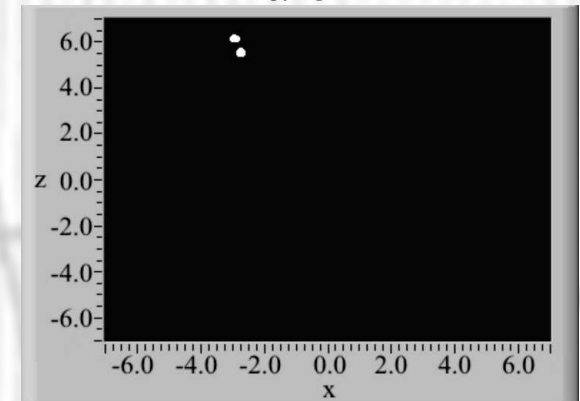
$\alpha=18$



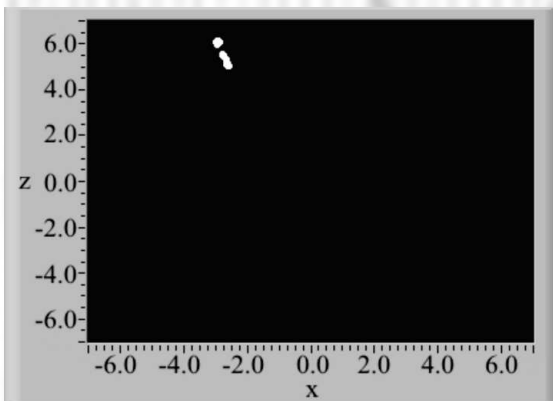
$\alpha=31$



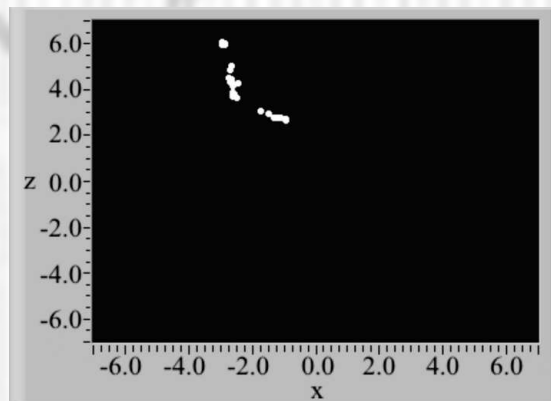
$\alpha=32$



$\alpha=33$



$\alpha=35$



$\alpha=36$

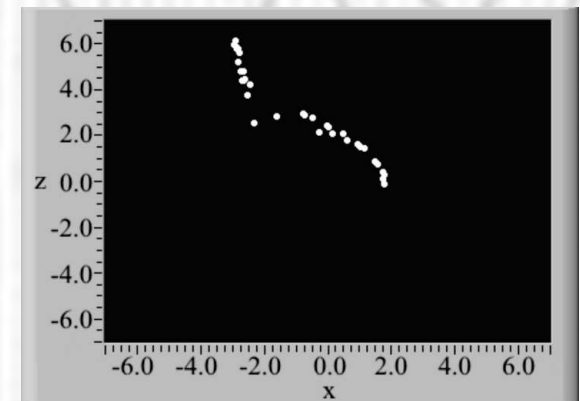
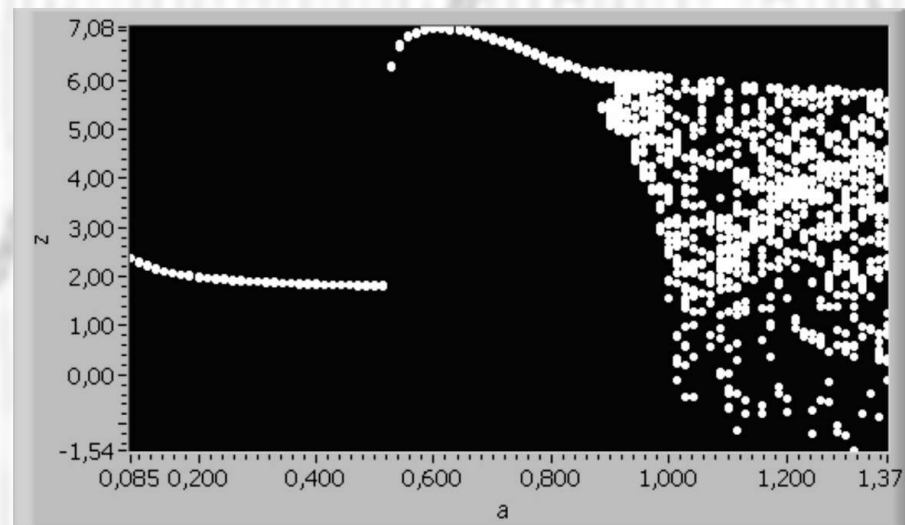


DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO

- *Representação gráfica que mostra as mudanças qualitativas do comportamento dinâmico do sistema conforme a variação de um parâmetro de controle*
- *Os valores de uma variável amostrados utilizando uma seção de Poincaré são plotados em um gráfico em função de um parâmetro de controle*





MAPEAMENTO

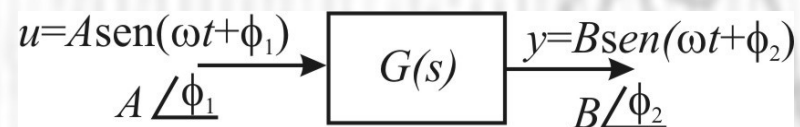
ANÁLISE DE ESTABILIDADE

- *Identificar e mapear os diferentes comportamentos dinâmicos de um sistema não linear*
 - *Funções Descritivas*
 - *Pontos de equilíbrio estáveis,*
 - *Ciclos limites,*
 - *Órbitas periódicas,*
 - *Atratores escondidos,*
 - *Comportamento caótico*
 - *Instabilidade.*

RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

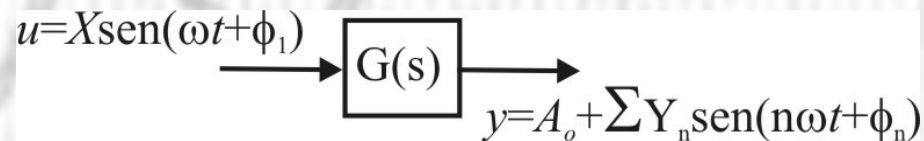
- *Resposta em estado estacionário de um sistema dinâmico a uma entrada senoidal*

- *Sistemas lineares*



- *A resposta em frequência $G(j\omega)$ pode ser representada no plano complexo por uma curva fechada chamada diagrama de Nyquist plotada quando a frequência $s = j\omega$ é varrida de $-\infty$ a $+\infty$.*

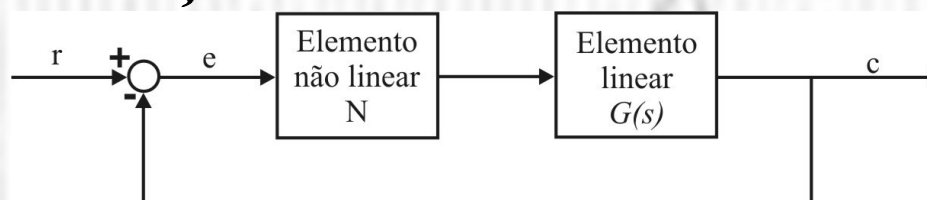
- *Sistemas não lineares*



- *Função descritiva de um elemento não linear (N) é a relação complexa entre a componente harmônica fundamental da saída Y , e a amplitude da onda senoidal aplicada a entrada X de um elemento não linear.*

ANÁLISE UTILIZANDO FUNÇÕES DESCRITIVAS

- Sistema com realimentação não linear***



- Suposição:***

- As componentes harmônicas geradas pelo elemento não linear são atenuadas pelo elemento linear*
- A função descritiva N pode ser tratada como um ganho e substituir o elemento não linear*

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{NG(j\omega)}{1 + NG(j\omega)}$$

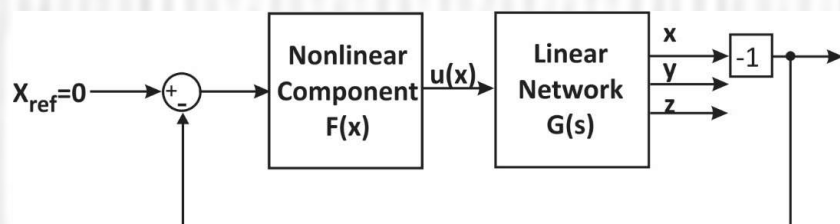
- O sistema realimentado é instável quando***

$$1 + NG(j\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = -\frac{1}{N}$$

CRITÉRIO DE NYQUIST ESTENDIDO

- Se o lugar geométrico $-1/N(X)$ é envolvido pelo diagrama de Nyquist $G(j\omega)$, sendo n_c vezes no sentido horário e n_a vezes no sentido anti-horário, a origem 0 é estável somente se $n_c - n_a$ é igual ao número de polos instáveis de $G(s)$*
- O sistema realimentado apresenta ciclos-limite se $-1/N(X)$ intercepta $G(j\omega)$*
- Caso contrário, o sistema realimentado é estável*

ESTABILIDADE DO CIRCUITO DE CHUA



$$F(X) = \begin{cases} -a & \text{para } |X| < 1 \\ -b - \frac{a-b}{\pi}(\theta + \sin \theta) & \text{para } |X| \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{onde } \theta = 2 \arcsin\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$G(s) \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(x)$$

$$\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$$

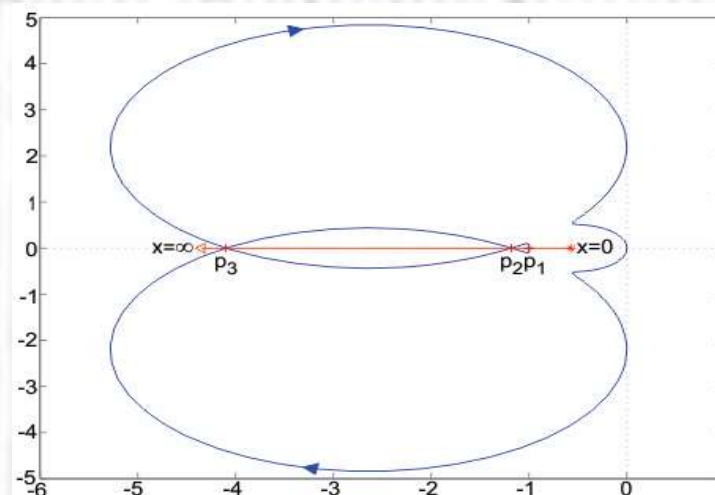
$$p_0 = 0 \quad p_1 = 1 \quad p_2 = \frac{\alpha}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \beta}} \quad p_3 = \frac{\alpha}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \beta}}$$

$$\alpha = 11,00$$

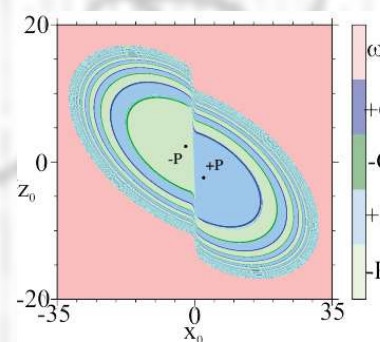
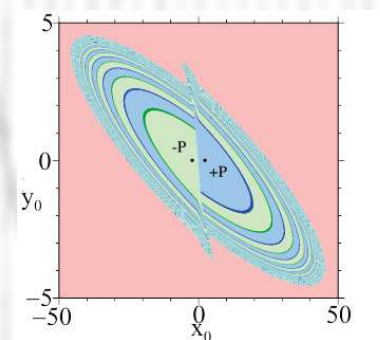
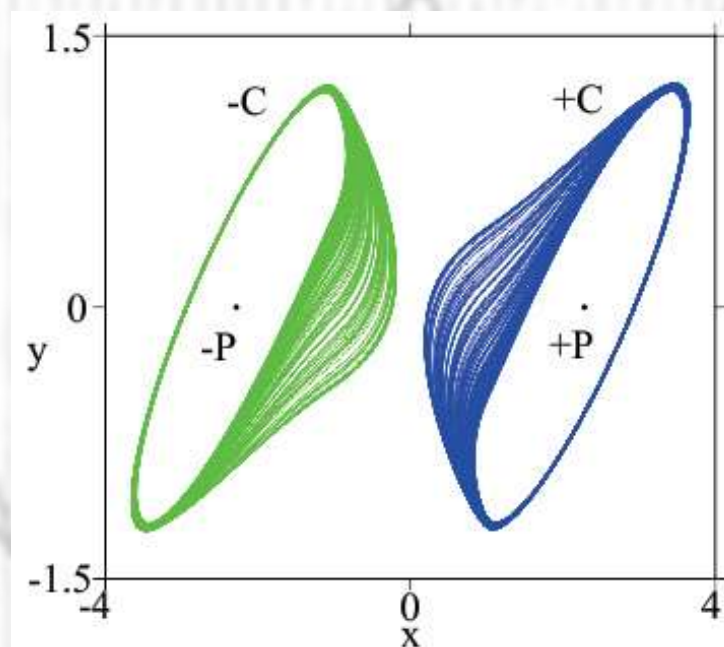
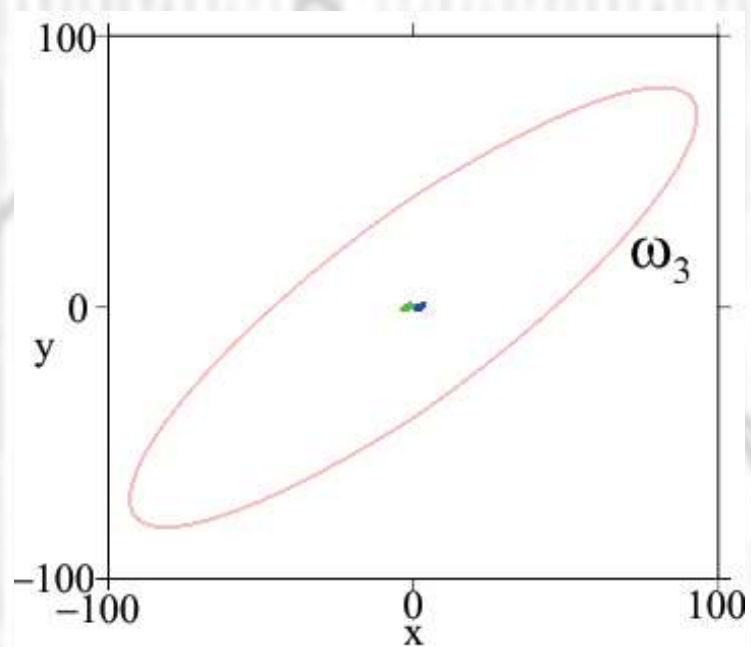
$$\beta = 25,00$$

$$a = 2,00$$

$$b = 0,22$$



ATRATORES DO CIRCUITO DE CHUA



COMPORTAMENTO DINÂMICO

- *Bifurcações:*

- *Mudança qualitativa do comportamento dinâmico do sistema conforme a variação de um parâmetro.*

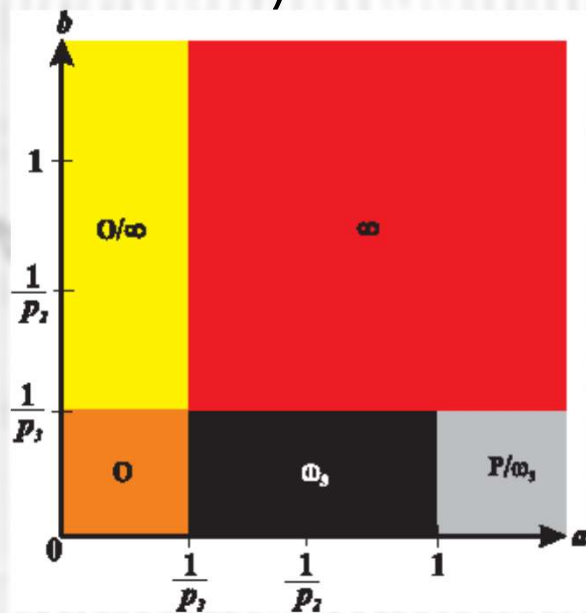
- *Multi-estabilidade:*

- *Coexistência simultânea de múltiplos comportamentos dinâmicos na operação de um sistema não linear.*
- *Bacia de atração: Conjunto de todas condições iniciais que fazem a operação de um sistema convergir para um determinado comportamento dinâmico.*
 - *Atrator auto-excitado:*
 - *Bacia de atração intercepta as vizinhanças de um ponto de equilíbrio.*
 - *Facilmente detectados numericamente utilizando procedimentos computacionais padrões.*
 - *Atrator Escondido:*
 - *Bacia de atração não intercepta as vizinhanças de um ponto de equilíbrio.*
 - *Tendem a ser ignorados em investigações numéricas convencionais.*

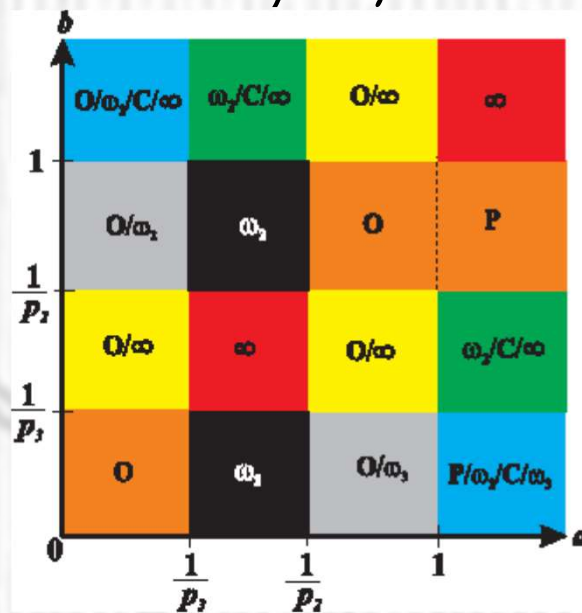
MAPA DA DINÂMICA DO CIRCUITO DE CHUA

$\alpha > 0$ E $\beta > 0$

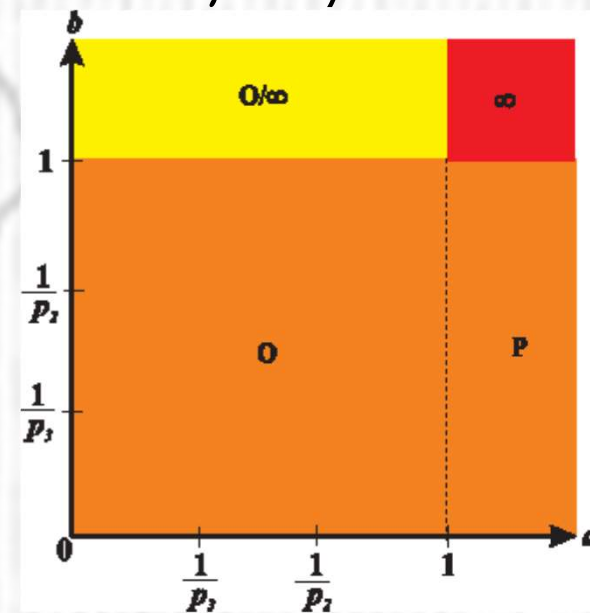
$$0 < \beta < \alpha$$



$$\alpha < \beta < \gamma^2$$



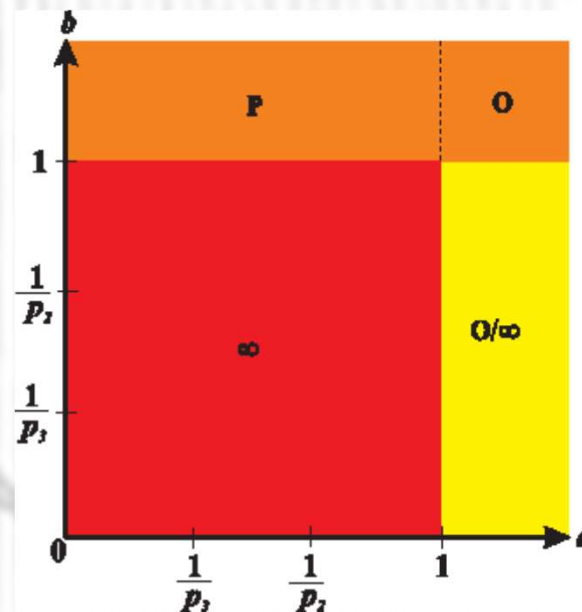
$$\gamma^2 < \beta$$



$$\gamma = \frac{1+\alpha}{2} \quad p_2 = \frac{\alpha}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \beta}} \quad p_3 = \frac{\alpha}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \beta}}$$

MAPA DA DINÂMICA DO CIRCUITO DE CHUA

$\alpha < 0$ E $\beta > 0$

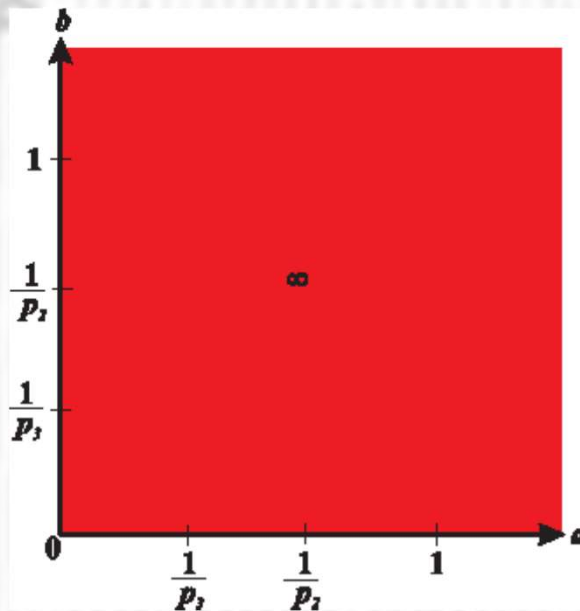


$$\gamma = \frac{1+\alpha}{2} \quad p_2 = \frac{\alpha}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \beta}} \quad p_3 = \frac{\alpha}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \beta}}$$

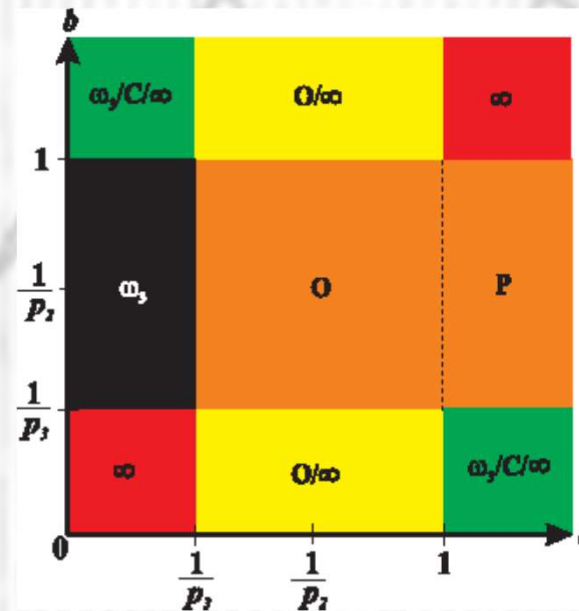
MAPA DA DINÂMICA DO CIRCUITO DE CHUA

$\alpha < 0$ E $\beta < 0$

$$0 > \alpha > \beta$$



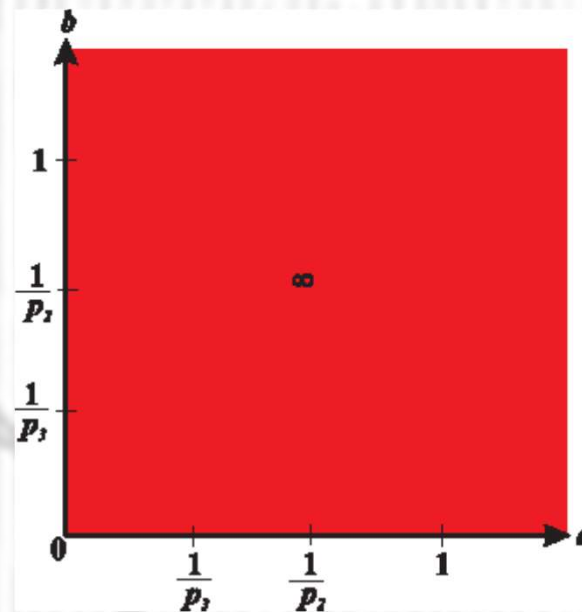
$$\alpha < \beta < 0$$



$$\gamma = \frac{1+\alpha}{2} \quad p_2 = \frac{\alpha}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \beta}} \quad p_3 = \frac{\alpha}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \beta}}$$

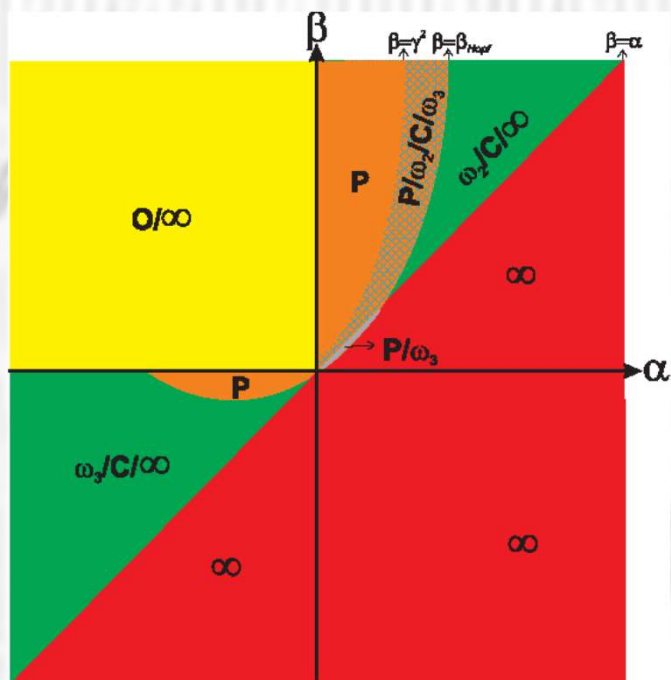
MAPA DA DINÂMICA DO CIRCUITO DE CHUA

$\alpha > 0$ E $\beta < 0$

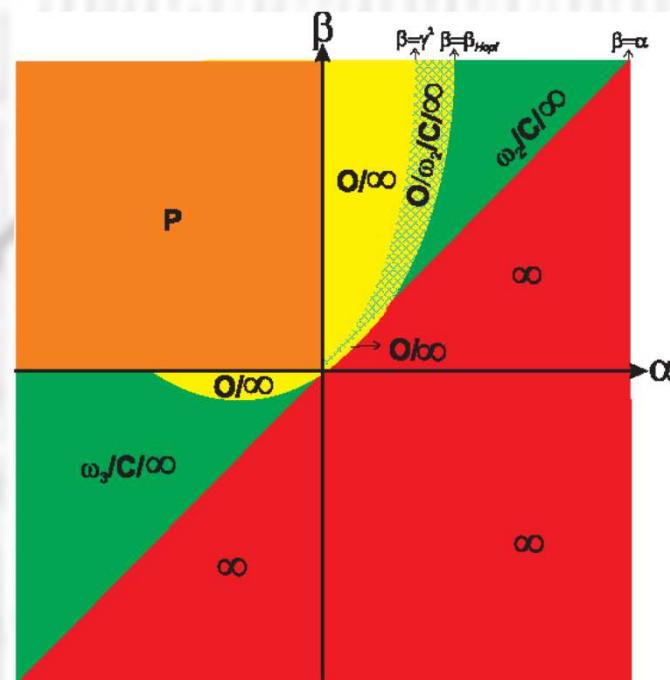


MAPA DA DINÂMICA DO CIRCUITO DE CHUA

$a > 1$ e $b < 1$



$a < 1$ e $b > 1$



$$\beta_{Hopf} = \alpha \min(a, b) [1 + \alpha(1 - \min(a, b))]$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Rocha, R.](#); [Martins Filho, L.S.](#) ; [Machado, R.F.](#) . A methodology of teaching in dynamic systems using analogous electronic circuits. *International Journal of Electrical Engineering Education*, v. 43, n.4, p. 334-345, 2006
- [Rocha, R.](#); [Medrano-T., R.O.](#) . An inductor-free realization of the Chua's circuit based on electronic analogy. *Nonlinear Dynamics*, v. 56, p. 389-400, 2009.
- [Rocha, R.](#); [Andrucioli, G.L.D.](#) ; [Medrano-T., R.O.](#) . Experimental characterization of nonlinear systems: a real-time evaluation of the analogous Chua's circuit behavior. *Nonlinear Dynamics*, v. 62, p. 237-251, 2010.
- [Medrano-T., R.O.](#) ; [Rocha, R.](#) . The negative side of Chua's circuit parameter space: stability analysis, period-adding, basin of attraction metamorphoses, and experimental investigation. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, v. 24, p. 1430025, 2014
- [Rocha, R.](#); [Medrano-T., R.O.](#) . Stability analysis and mapping of multiple dynamics of Chua's circuit in full four-parameter spaces. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, v. 25, p. 1530037, 2015.
- [Rocha, R.](#); [Medrano-T., R.O.](#) . Finding hidden oscillations in the operation of nonlinear electronic circuits. *Electronics Letters*, v. 52, p. 1010-1011, 2016.

*“O sertão está em toda parte...
O sertão é confusão em grande e demasiado
sossego!!!”*

Guimarães Rosa

Parafraseando

*“O Caos está em toda parte...
O Caos é confusão em grande e demasiado
sossego!!!”*