

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

SBI-IFUSP



INVARIANTES EM FÍSICA DE PLASMAS

*Suzana Junqueira de Camargo*



Dissertação de Mestrado apresentada  
ao Instituto de Física da Universida  
de de São Paulo.

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas.

Março / 1989

*Robert Clemente*  
*J. L. Caldas*  
*Iberê Luiz Caldas*

500.117  
C172.i  
M  
e.2

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Camargo, Suzana Junqueira de  
Invariantes em física de plasmas. São Paulo, 1989.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo  
Instituto de Física. Departamento de Física Experimen-  
tal.

Área de Concentração: Física nuclear  
Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Unitermos: 1.Física de plasmas; 2.Invariantes; 3.  
Superfícies magnéticas; 4.Equações não-lineares.

USP/IF/SBI - 10/89

*A meus pais,  
pelo apoio e carinho.  
Ao Mauricio,  
pelo nosso futuro.*

## AGRADECIMENTOS

Todas as pessoas que fazem parte de minha vida, contribuíram de alguma maneira para que este trabalho se desenvolvesse. É impossível mencionar todas elas, mas não posso deixar de citar alguns nomes. Gostaria de agradecer:

Ao Iberê pelo apoio, incentivo e dedicação durante estes anos em que desenvolvemos esta tese.

Ao Wanderley pela enorme ajuda na parte computacional do trabalho, pela composição artística da capa e pela grande amizade.

À Célia pela leitura desta tese e suas sugestões utilíssimas. As discussões intermináveis e os longos fins-de-semana fazendo listas de exercício me ajudaram a chegar até aqui. Acima de tudo, agradeço pela amizade e companheirismo.

Ao Valdir e à Mutsuko pelo auxílio que prestaram sempre que foram solicitados.

À Maria Vittoria pelo interesse e ajuda nos problemas computacionais.

Ao Maurício pela compreensão, paciência e carinho demonstrados e pelo apoio em tudo que estava a seu alcance.

Ao Celso e ao Banzai pelo estímulo ao trabalho.

A todos os professores, bolsistas e técnicos do grupo de Física de Plasmas. Cada um, à sua maneira, contribuiu para este trabalho.

A todos os meus amigos, em especial à Marina, à Márcia, ao Duda, ao Johnny e à Lúcia que apesar de não terem contribuído diretamente, estiveram sempre ao meu lado nesta fase de minha vida.

Ao meu irmão, Zeca, pela paciência em sua convivência comigo no decorrer do mestrado.

À FAPESP pela bolsa de Mestrado.

## RESUMO

Neste trabalho investigamos dois tipos de invariantes em Física de Plasmas. Através do método de análise de similaridade, pesquisamos a existência de invariantes para duas equações não-lineares típicas de fluidos. Obtivemos também um invariante médio que descreve superfícies magnéticas médias, para um sistema sem simetria, constituído de um equilíbrio perturbado, por correntes elétricas em hélices ressonantes, em um tokamak. Ao analisarmos estas superfícies magnéticas médias, concluimos que as ilhas magnéticas se aproximam do centro do plasma e que suas larguras diminuem com o aumento da pressão.

## ABSTRACT

In this work, we study two kinds of invariants of Plasma Physics. Using the similarity method, we research the existence of invariants for two fluid equations. We obtained an average invariant, which describes average magnetic surfaces for a system without symmetry. This system constitutes of a tokamak equilibrium perturbed by resonant helical windings. Through the analysis of the average surfaces, we concluded that the magnetic islands go nearer the plasma centre and that their width become smaller, as the pressure increases.

## ÍNDICE

CAPITULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - INVARIANTES DE UMA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR PARA ONDAS DE DERIVA	4
II.1 - Introdução	4
II.2 - Descrição do Método Utilizado	4
II.3 - Obtenção da Equação Não-linear para Ondas de Deriva	5
II.4 - Aplicação da Análise de Similaridade à Equação	8
CAPÍTULO III - INVARIANTES DE UMA CLASSE DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES	12
III.1 - Introdução	12
III.2 - Descrição da Classe de Equações Não-lineares	12
III.3 - Aplicação do Método de Similaridade às Equações	14
III.4 - Aplicação do Método a um Caso Particular	18
III.5 - Transformações Finitas	20
CAPÍTULO IV - INVARIANTES APROXIMADOS	22
IV.1 - Introdução	22
IV.2 - Superfícies Magnéticas	22
IV.3 - Descrição do Método de Obtenção de Invariantes	23
CAPÍTULO V - DESCRIÇÃO DO EQUILÍBRIO UTILIZADO	28
V.1 - Introdução	28
V.2 - Equilíbrio de Shafranov	28
V.3 - Invariante Aproximado do Equilíbrio de Shafranov	34
V.4 - Cálculo do Fator de Segurança	42
CAPÍTULO VI - PERTURBAÇÕES HELICOIDAIS RESSONANTES	48
VI.1 - Introdução	48
VI.2 - Perturbações Helicoidais Ressonantes	48
VI.3 - Perturbação Helicoidal Cilíndrica de um Fio	50
VI.4 - Perturbação Helicoidal de Pares de Fios	54

VI.5 - Perturbação Helicoidal Toroidal	5
CAPÍTULO VII - ILHAS MAGNÉTICAS MÉDIAS	7
VII.1 - Introdução	7
VII.2 - Invariante da Superposição do Equilíbrio com as Hélices	7
VII.3 - Largura de Ilhas Magnéticas	7
VII.4 - Parâmetros Numéricos Utilizados	7
VII.5 - Equilíbrio Perturbado por Pares de Hélices Cilíndricas	7
VII.6 - Equilíbrio Perturbado por Pares de Hélices Toroidais	8
VII.7 - Equilíbrio Perturbado por uma Hélice Cilíndrica	8
VII.8 - Análise dos Resultados Obtidos	9
CAPÍTULO VIII - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	9
APÊNDICE A	9
A.1 - Derivadas de $\bar{\varphi}$	9
A.2 - Solução do Sistema de Equações	9
APÊNDICE B	10
B.1 - Análise de Similaridade de uma Classe de Equações	10
B.2 - Análise de Similaridade de uma Equação	10
APÊNDICE C	11
C.1 - Cálculo dos Campos Magnéticos Aproximados	11
C.2 - Expansão da Componente $\varphi$ do Potencial Vetor	11
APÊNDICE D	11
D.1 - Obtenção do Potencial Escalar para uma Hélice Cilíndrica	11
D.2 - Potencial Vetor de uma Hélice Cilíndrica	12
D.3 - Potencial Escalar de Pares de Hélices Cilíndricas	12
D.4 - Potencial Vetor de Pares de Hélices Cilíndricas	12
D.5 - Potencial Escalar de Pares de Hélices Toroidais	13
D.6 - Potencial Vetor Médio da Ressonância $(m-1)\theta - Nn\varphi$	13
D.7 - Potencial Vetor Médio da Ressonância $(m+1)\theta - Nn\varphi$	13
APÊNDICE E - Programa para Calcular Superfícies Magnéticas	14
REFERÊNCIAS	14

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Invariantes desempenham um papel fundamental na Física. A existência de um invariante está sempre relacionada a uma simetria do sistema. A partir do conhecimento de um invariante, podemos então simplificar o problema, e às vezes solucioná-lo.

Neste trabalho, estudamos dois tipos de invariantes que aparecem na Física de Plasmas. O primeiro tipo estudado relaciona-se às equações não-lineares e descreve uma superfície invariante para a variável dependente da equação. A outra classe de invariantes pode representar as linhas do campo magnético, caso o sistema possua simetria espacial.

Para a obtenção dos invariantes de uma equação não-linear utilizamos as simetrias internas desta equação, aplicando à mesma uma transformação infinitesimal (Ames 72). Uma vez conhecida a transformação infinitesimal mais geral, que deixa a equação invariante, podemos obter a equação de uma superfície invariante para a variável dependente. Obtemos então, funções que são invariantes nesta superfície e as consideramos as novas variáveis da nossa equação, permitindo sua simplificação através da redução do número de variáveis da equação não-linear. Este método está exposto no capítulo II.

Utilizamos o método descrito acima para analisar uma equação não-linear que descreve ondas de deriva em um plasma de baixo beta (capítulo II). Esta equação apresenta interesse, uma vez que considera gradientes de temperatura e densidade e possui soluções que descrevem ondas não-lineares gerais, ondas solitárias e ondas senoidais (Tasso 67, Oraevsky et al. 69). Além disso, perturbações sobre o sistema descrito por esta equação podem levar a uma evolução caótica de suas variáveis (Kaifen et al 88).

No capítulo III, aplicamos este mesmo método no estudo

de uma classe de equações não-lineares, que possui constantes de movimento (Caldas et al 79). O exemplo mais conhecido desta classe de equações é a equação de Korteweg - de Vries, que possui infinitas constantes de movimento e para a qual este método já foi aplicado (Schen et al 74). A descoberta de invariantes para outras equações dessa classe poderia indicar a existência de propriedades de simetria relevantes, como novas constantes de movimento.

O método de análise de similaridade é importante devido à inexistência de métodos gerais de resolução para equações não-lineares, pois permite uma simplificação da equação considerada, o que pode levar à obtenção de suas soluções (Ames 72).

Como já citamos, o mapeamento das linhas do campo magnético pode ser representado por um invariante quando há alguma simetria espacial. Consideramos o caso em que um equilíbrio toroidal, com simetria azimutal, é perturbado por hélices ressonantes. Devido à perturbação, deixa de haver simetria e, portanto, não há um invariante que descreva as linhas do campo magnético. Porém considerando que a amplitude da perturbação é pequena, podemos descrever aproximadamente o problema através de um invariante médio. Este invariante médio é, portanto, um invariante aproximado para o problema real. Ele é obtido através do cálculo de uma média no ângulo poloidal do potencial vetor que descreve o problema (Cary 84). A descrição do método de obtenção de invariantes aproximados está no capítulo IV.

No capítulo V, descrevemos o equilíbrio toroidal considerado (Shafranov 60). Primeiramente, utilizaremos perturbações helicoidais ressonantes no tokamak, sem levar em conta o efeito toroidal e que será considerado numa segunda etapa. Obtemos estas perturbações e seus invariantes no capítulo VI.

Fazemos uma superposição linear do campo de equilíbrio com o campo da perturbação, supondo que este tenha intensidade muito menor que aquele, e considerando que esta superposição descreve, aproximadamente, o campo magnético presente no tokamak. No capítulo VII obtemos o invariante médio que representa esta superposição de campos e analisamos as ilhas magnéticas médias que aparecem ao redor de superfícies magnéticas médias definidas por este invariante, bem como a variação de sua largura com a pressão do plasma.

Aplicações numéricas são apresentadas com os parâmetros típicos do tokamak TBR-1, o que permite a utilização dos resultados obtidos para interpretar algumas experiências realizadas nesse tokamak com hélices ressonantes.

As conclusões e sugestões para a continuação deste trabalho estão apresentadas no capítulo VIII. Os apêndices de A a D se referem aos cálculos dos capítulos II, III, V, e VI. No apêndice E é apresentado o programa utilizado para calcular as superfícies magnéticas a partir de uma função  $\Psi$  que as descreva.

## CAPÍTULO II

### INVARIANTES DE UMA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR PARA ONDAS DE DERIVA

#### II.1- INTRODUÇÃO

Neste capítulo, fazemos uma análise de similaridade de uma equação não-linear que descreve ondas de deriva em um plasma com um gradiente de temperatura e baixo beta (Tasso 67).

Primeiramente descrevemos o método de análise de similaridade seguindo Ames (Ames 72). Obtemos, então a equação mencionada a partir da teoria para dois fluidos (Oraevsky et al.69) e a analisamos com o método mencionado acima.

#### II.2- DESCRIÇÃO DO MÉTODO UTILIZADO

O propósito destes primeiros capítulos é investigar a existência de invariantes de duas equações não-lineares distintas. A técnica utilizada é a obtenção da transformação infinitesimal mais geral que deixa estas equações invariantes. Para achar esta transformação infinitesimal, exploramos as simetrias internas destas equações numa tentativa de deixá-las mais simples ou solúveis. Este método de resolução de equações diferenciais é denominado análise de similaridade (Ames 72). O resultado é uma nova equação expressa em termos de um conjunto de variáveis independentes similares (invariantes), em número menor que o conjunto original de variáveis. Este novo conjunto de variáveis é obtido a partir das equações de Lagrange (Ames 72), quando a transformação infinitesimal que deixa a

equação invariante não é trivial.

Este método já foi aplicado a diversas equações não-lineares como a de Korteweg - de Vries (KdV) (Schen et al. 74) e a equação de Schrödinger Não-linear (Johnson et al. 79). A partir dos grupos de transformações infinitesimais não triviais, que deixam estas equações invariantes, foram obtidas as variáveis similares (invariantes) que possibilitaram a obtenção de equações diferenciais ordinárias simplificando a obtenção de soluções. Estas equações, com infinitas constantes de movimento, são integráveis (Lax 75). Entretanto, se perturbadas por forças externas periódicas, elas podem descrever um sistema de comportamento caótico (Kaifen et al 87). A descoberta de invariantes de uma equação não-linear, pela aplicação do método de análise de similaridade, poderia então sugerir a existência de outras propriedades importantes desta equação.

### II.3- OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR PARA ONDAS DE DERIVA

Se um plasma magnetizado possui gradientes de temperatura ou densidade, suas partículas têm uma deriva associada a estes gradientes e as oscilações do plasma podem ser excitadas. Estas oscilações são denominadas ondas de deriva. A importância destas ondas vem do fato que todo plasma confinado contém regiões inomogêneas capazes de causar movimentos de deriva associados a ondas de deriva.

A primeira equação a ser analisada descreve ondas de deriva não-lineares em um plasma com gradiente de temperatura. Esta equação foi obtida por Tasso (Tasso 67, Oraevsky et al. 69) para um plasma de baixo beta, considerando ondas de deriva estacionárias com um potencial eletrostático  $\varphi$ . Consideraremos  $x$  como a direção dos gradientes do equilíbrio e  $z$  a direção do campo magnético. A variação dos gradientes na direção  $x$  é suposta pequena e a temperatura iônica é considerada muito menor que a temperatura dos elétrons. Para a dedução da equação é utilizada a teoria de dois fluidos, levando em consideração o gradiente da temperatura eletrônica e somente os

efeitos dissipativos devido à inércia dos íons na direção perpendicular ao campo magnético.

A equação final é semelhante a outras equações não-lineares, que aparecem em fluidos e que possuem propriedades relevantes (como soluções do tipo sóliton), como as equações de Korteweg - de Vries (Karpman 75) e BBM (Benjamin et al. 72). A equação obtida possui como soluções uma onda não-linear, uma onda solitária e uma onda senoidal (Oraevsky et al. 69). As duas últimas soluções ocorrem devido ao gradiente de temperatura dos elétrons.

Da equação da continuidade para os elétrons e para os íons temos:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\mathbb{E} \times \mathbb{B}}{B^2} \cdot \nabla n_e + \frac{\partial}{\partial z} \left[ n_e v_{ez} \right] = 0. \quad (\text{II.1a})$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\mathbb{E} \times \mathbb{B}}{B^2} \cdot \nabla n_i + \nabla \cdot \left[ n_i \vec{v}_{ip} \right] = 0, \quad (\text{II.1b})$$

onde  $n_e$  e  $n_i$  são, respectivamente, as densidades dos elétrons e dos íons,  $v_{ez}$  a velocidade macroscópica dos elétrons na direção  $z$ ,  $\vec{v}_{ip}$  a velocidade macroscópica dos íons na direção perpendicular ao campo magnético  $\mathbb{B}$  e  $\mathbb{E}$  o campo elétrico.

A correção inercial devido ao movimento dos íons na direção perpendicular ao campo magnético é dada por:

$$\nabla \cdot \left[ n_i \vec{v}_{ip} \right] = \frac{M}{e B^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ n_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial y} \right]. \quad (\text{II.2})$$

Na equação (II.2)  $M$  é a massa dos íons,  $e$  a sua carga e  $\varphi$  o potencial eletrostático da onda. Consideramos também a quase-neutralidade, ou seja, a densidade dos íons aproximadamente igual à densidade dos elétrons:

$$n_i \approx n_e \quad (\text{II.3})$$

Da equação de movimento dos elétrons na direção do

campo magnético, desprezando a inércia dos elétrons e outros efeitos de ressonância, vem:

$$n_e = n_o(x) \exp \left[ - \frac{e \varphi}{k T_e(x)} \right], \quad (\text{II.4})$$

onde  $T_e$  é a temperatura dos elétrons.

Substituindo (II.2) em (II.1b) temos:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\mathbb{E} \times \mathbb{B}}{B^2} \cdot \nabla n_i + \frac{M}{e B^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ n_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial y} \right] = 0. \quad (\text{II.5})$$

Utilizando a equação (II.3) e substituindo (II.4) em (II.5), chegamos à seguinte expressão :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ n_o(x) \exp \left[ - \frac{e \varphi}{k T_e(x)} \right] \right] + \frac{\mathbb{E} \times \mathbb{B}}{B^2} \cdot \nabla \left[ n_o(x) \exp \left[ - \frac{e \varphi}{k T_e(x)} \right] \right] \\ & + \frac{M}{e B^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ n_o(x) \exp \left[ - \frac{e \varphi}{k T_e(x)} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Desenvolvendo esta expressão, onde consideramos que a dependência em  $x$  das quantidades que variam é pequena e que a temperatura eletrônica é muito maior que a iônica, ou seja a temperatura total é aproximadamente a temperatura eletrônica:

$$T_t \simeq T_e, \quad (\text{II.7})$$

chegamos à equação:

$$\begin{aligned}
& - \frac{e n_0}{k T_e} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left[ \frac{d n_0}{d t} - \frac{e n_0}{k T_e} \frac{d T_e}{d x} \varphi \right] + \\
& + \frac{M}{e B^2} \left[ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial^2 y \partial t} - \frac{e}{k_e T} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial y} \right] = 0. \quad (II.8)
\end{aligned}$$

Esta equação é de grande interesse, pois descreve ondas de deriva em um plasma, levando em conta gradientes de temperatura e densidade e possui soluções que ocorrem em um plasma real, como ondas não-lineares gerais, ondas solitárias e ondas senoidais (Oraevsky et al. 69).

#### II.4- APLICAÇÃO DA ANÁLISE DE SIMILARIDADE À EQUAÇÃO

Escrevendo os coeficientes da equação (II.8) como:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\eta$ , respectivamente teremos:

$$-\alpha \varphi_t + \beta \varphi_y - \gamma \varphi \varphi_y + \delta \varphi_{yyt} - \eta \varphi_y \varphi_{yt} = 0, \quad (II.9)$$

onde os índices em  $\varphi$  representam derivações parciais em relação à coordenada indicada.

Vamos aplicar a seguinte transformação infinitesimal à equação (II.9), seguindo Ames (Ames 72):

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= y + \epsilon Y(y, t, \varphi) \\
\bar{t} &= t + \epsilon T(y, t, \varphi) \\
\bar{\varphi} &= \varphi + \epsilon \phi(y, t, \varphi)
\end{aligned} \quad (II.10)$$

onde as variáveis com barra são as novas variáveis (transformadas) e as funções  $Y$ ,  $T$ ,  $\phi$  são funções arbitrárias de:  $y$ ,  $t$ ,  $\varphi$  e  $\epsilon$  é um

parâmetro infinitesimal. Manteremos termos somente até primeira ordem em  $\epsilon$ .

Utilizando a regra da cadeia em (II.10), obtemos:

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = 1 - \epsilon \left[ Y_y + Y_\varphi \varphi_y \right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{t}} = - \epsilon \left[ Y_t + Y_\varphi \varphi_t \right]$$

(II.11)

$$\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} = 1 - \epsilon \left[ T_t + T_\varphi \varphi_t \right]$$

$$\frac{\partial t}{\partial \bar{y}} = - \epsilon \left[ T_y + T_\varphi \varphi_y \right]$$

Do mesmo modo calculamos, por exemplo:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} = \varphi_y + \epsilon \left[ \phi_y + (\phi_\varphi - Y_y) \varphi_y - T_y \varphi_t - Y_\varphi \varphi_t - Y_\varphi \varphi_y^2 - T_\varphi \varphi_y \varphi_t \right]$$

(II.12)

As outras derivadas de  $\bar{\varphi}$  necessárias à transformação da equação (II.9) estão descritas no apêndice A. Utilizando estas expressões obtemos a equação (II.9) transformada. Para que esta equação seja invariante sob a transformação infinitesimal, todos os termos de primeira ordem em  $\epsilon$  devem ser identicamente nulos. Como não queremos fazer nenhuma restrição extra em  $\varphi$ , ou em suas derivadas, além da própria equação (II.9), impomos que os coeficientes de cada derivada distinta de  $\varphi$  ou de cada combinação de derivadas sejam separadamente iguais a zero.

Isto nos leva a um sistema de equações que deve ser resolvido simultaneamente, com muitas equações redundantes. Este sistema está expresso no apêndice A. O sistema já simplificado encontra-se a seguir:

$$\begin{aligned}
 T_{\varphi} &= T_y = 0 \\
 Y_t &= Y_{\varphi} = 0 \\
 \phi_{\varphi t} &= \phi_{\varphi\varphi} = 0 \\
 -\alpha \phi_t - \beta \phi_y - \gamma \varphi \phi_y + \delta \phi_{yyt} &= 0 \\
 \delta \phi_{yyy\varphi} - 2 \delta Y_y &= 0 \\
 -\gamma \phi - 2 \delta \phi_{y\varphi t} - \eta \phi_{yt} - \gamma \varphi T_t - \beta T_t - \gamma \varphi Y_y + \beta Y_y &= 0 \\
 -2 \delta \phi_{y\varphi\varphi} - \eta \phi_{yt} &= 0 \\
 \delta \phi_{\varphi\varphi t} - \eta \phi_{\varphi t} &= 0 \\
 2 \delta \phi_{yt} - \delta Y_y &= 0 \\
 2 \delta \phi_{\varphi\varphi} - \eta \phi_{\varphi} &= 0 \\
 \delta \phi_{\varphi\varphi\varphi} - \eta \phi_{\varphi\varphi} &= 0
 \end{aligned} \tag{II.13}$$

A resolução deste sistema está descrita também no apêndice A. A solução obtida foi:

$$\begin{aligned}
 \phi &= 0 \\
 Y &= a \\
 T &= b,
 \end{aligned} \tag{II.14}$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias.

Uma vez que  $\bar{\varphi}$ ,  $Y$ ,  $T$ , são conhecidos, pode ser demonstrado, expandindo  $\bar{\varphi}(\bar{y}, \bar{t})$  em termos de  $\varepsilon$ , que (Johnson 79):

$$Y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + T \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \phi. \tag{II.15}$$

A equação (II.15) descreve uma superfície invariante para  $\varphi$ . Esta equação pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\frac{dy}{Y} = \frac{dt}{T} = \frac{d\phi}{\phi}, \quad (\text{II.16})$$

Como obtivemos um resultado trivial para a transformação infinitesimal, concluímos que não há invariantes para a equação (II.9), pois a solução das equações de Lagrange nos dá somente soluções triviais, mostrando que a equação analisada não possui simetrias internas. Isto pode ser concluído devido ao teorema de Noether (Hill 51) da Mecânica Clássica, segundo o qual a cada simetria corresponde uma invariância.

O teorema de Noether nos dá uma maneira natural de associar quantidades conservadas de um sistema a uma transformação infinitesimal aplicada sobre este sistema. Por exemplo, uma densidade conservada pode ser identificada como uma densidade de energia se é associada a uma transformação infinitesimal do tempo (McGuinness 78). Como a equação analisada não é invariante sob nenhum tipo de transformação infinitesimal (só obtivemos resultados triviais), podemos especular que esta talvez não possua densidades conservadas ou constantes de movimento (Lax 75). A integrabilidade de equações não-lineares está relacionada a suas constantes de movimento, pois uma equação integrável tem infinitas constantes de movimento. A integrabilidade de uma equação não-linear é um problema muito complicado e ainda em aberto, que pode ser examinado caso a caso (Chern 84, Hietarinta 87). A possível não existência de constantes de movimento para esta equação nos leva a crer que a mesma não seja integrável. Equações não-lineares que não são integráveis podem ser utilizadas no estudo de caos, que é um assunto de grande interesse hoje em dia. Portanto, a não existência de invariantes para a equação (II.9) é um resultado a ser levado em consideração em futuras aplicações desta equação, de grande interesse físico, no estudo de ondas de deriva em plasma.

## CAPÍTULO III

### INVARIANTES DE UMA CLASSE DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

#### III.1- INTRODUÇÃO

Neste capítulo aplicamos o método de análise de similaridade (Ames 72) a uma classe de equações não-lineares (Caldas et al. 79). Primeiramente especificamos as propriedades desta classe de equações, depois utilizamos o método, de uma forma restrita, em toda classe de equações e em sua forma mais geral para uma das equações desta classe. Finalmente, analisamos as transformações finitas que deixam esta classe de equações invariante.

#### III.2- DESCRIÇÃO DA CLASSE DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

Como mais uma aplicação da análise de similaridade, estudamos uma classe de equações não-lineares que possui relações de recorrência conhecidas entre suas sucessivas constantes de movimento. Esta classe de equações é do tipo (Caldas et al 79):

$$\hat{B} u_t = \partial_x \frac{\delta H}{\delta u}, \quad (\text{III.1})$$

onde  $\hat{B}$  é um operador simétrico que possui um inverso e que satisfaz a condição de comutação:

$$\hat{B} \partial_x = \partial_x \hat{B}. \quad (\text{III.2})$$

H é a Hamiltoniana do sistema. Os colchetes de Poisson referentes a

este sistema são definidos como:

$$[F,G] = \int dx \frac{\delta F}{\delta u} \hat{B}^{-1} \partial_x \frac{\delta G}{\delta u} . \quad (III.3)$$

Podemos mostrar facilmente, utilizando um formalismo não-canônico, que para a classe de equações (III.1), sendo F e G constantes de movimento:

$$[F,G] = \int dx \frac{\delta F}{\delta u} , \quad (III.4)$$

o que implica, pelo teorema de Poisson, que o funcional obtido é uma constante de movimento (por ser [F,G] uma constante de movimento) (Caldas et al. 79). O exemplo mais conhecido da classe de equações (III.1) é a equação de Korteweg - de Vries (Karpman 75). A relação (III.4) pode ser utilizada na procura de novas constantes de movimento (Kuskal et al. 70). Da mesma forma, como já foi discutido no capítulo II, a descoberta de invariantes para a classe de equações (III.1) poderia indicar a existência de propriedades de simetria relevantes para essas equações, como as constantes de movimento mencionadas.

Vamos considerar a seguinte classe de operadores  $\hat{B}$ :

$$\hat{B} = 1 + \sum_{j=1}^N a_j \left( \partial_x \right)^{2j} , \quad (III.5)$$

para  $a_j$  constantes. Para a classe de equações (III.1) relacionada a esta classe de operadores  $\hat{B}$ , consideramos a seguinte Hamiltoniana será considerada:

$$H = \int dx \left[ \frac{u^3}{3} + u \sum_{j=1}^N (-1)^j a_j \left( u_{jx} \right)^2 \right] , \quad (III.6)$$

para a qual a classe de equações (III.1) possui quatro constantes de movimento conhecidas (Caldas et al 79).

Calculando a variação desta Hamiltoniana H em relação a u, obtemos:

$$\frac{\delta H}{\delta u} = u^2 + \sum_{j=1}^N \left[ (-1)^j a_j \left( u_{jx} \right)^2 + 2 a_j \partial_x^j \left( u u_{jx} \right)^2 \right]. \quad (\text{III.17})$$

Substituindo (III.7) e (III.5) em (III.1) chegamos à seguinte equação não-linear:

$$u_t - 2 u u_x + \sum_{j=1}^N a_j \left[ 2 (-1)^{j+1} u_{jx} u_{(j+1)x} - \partial_x^{j+1} \left( u u_{jx} \right) + u_{t(2j)x} \right] = 0. \quad (\text{III.8})$$

### III.3- APLICAÇÃO DO MÉTODO DE SIMILARIDADE AS EQUAÇÕES:

Queremos aplicar uma transformação infinitesimal à equação (III.8). Mas, para isto, precisamos escrevê-la de um modo tal que conheçamos como que se transformam todos os termos. Assim, devemos reescrever o quarto termo desta equação, utilizando o binômio de Newton:

$$\partial_x^{j+1} \left( u u_{jx} \right) = \sum_{i=0}^{j+1} \binom{j+1}{i} u_{(j+1-i)x} u_{(j+i)x}. \quad (\text{III.9})$$

Necessitamos separar da somatória o termo  $i=j+1$ , pois este é um produto  $u u_{(2j+1)x}$  e u se transforma de uma maneira distinta de  $u_{jx}$ . Então:

$$\partial_x^{j+1} \left( u u_{jx} \right) = u u_{(2j+1)x} + \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} u_{(j+1-i)x} u_{(j+i)x}. \quad (\text{III.10})$$

Substituindo (III.10) em (III.8) obtemos então:

$$u_t - 2u u_x + \sum_{j=1}^N a_j \left[ 2(-1)^{j+1} u_{jx} u_{(j+1)x} - 2u u_{(2j+1)x} + \right. \\ \left. - 2 \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} u_{(j+1-i)x} u_{(j+i)x} \right] = 0 \quad (\text{III.11})$$

Tentamos primeiramente aplicar uma transformação infinitesimal à equação (III.11) do tipo (Ames 72):

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \epsilon X(x,t,u) \\ \bar{t} &= t + \epsilon T(x,t,u) \\ \bar{u} &= u + \epsilon U(x,t,u). \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Porém, verificamos que não é possível obter uma expressão geral para  $\bar{u}_{j\bar{x}}$  que seja válida para qualquer  $j$ . Baseando-nos no caso particular  $j=1$ , que será mostrado no item III.4, a transformação infinitesimal que deixa a equação referente a  $j=1$  invariante é linear em  $x$  e  $t$  e não depende de  $u$ . Portanto, decidimos nos restringir a este caso e aplicamos a seguinte transformação infinitesimal à equação (III.11):

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \epsilon X(x,t) = x + \epsilon (\gamma + \beta x + \eta t) \\ \bar{t} &= t + \epsilon T(x,t) = t + \epsilon (\alpha + \xi x + \mu t) \\ \bar{u} &= u + \epsilon U(x,t) = u + \epsilon (\sigma + \tau x + \lambda t) \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Seguindo o método utilizado anteriormente (Capítulo II) para obter a equação transformada, precisamos calcular as derivadas através da regra da cadeia, mantendo somente termos até primeira ordem em  $\epsilon$ . Necessitamos para tal cálculo de:

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} = 1 - \epsilon \beta \qquad \frac{\partial x}{\partial \bar{t}} = -\epsilon \eta \quad (\text{III.14a})$$

$$\frac{\partial t}{\partial \bar{x}} = -\epsilon \xi$$

$$\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} = 1 - \epsilon \mu \quad (\text{III.14b})$$

A partir destas expressões podemos calcular como se transforma cada termo da equação (III.11). É essencial então obtermos a transformação de  $\bar{u}_{j\bar{x}}$ , utilizando a regra da cadeia e as transformações (III.14):

$$\begin{aligned} \bar{u}_{j\bar{x}} &= \frac{\partial^j}{\partial \bar{x}^j} (\bar{u}) = \frac{\partial^j}{\partial x^j} (u + \epsilon U) = \frac{\partial^{j-1}}{\partial x^{j-1}} \left[ \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + \epsilon \frac{\partial U}{\partial \bar{x}} \right] \\ &= \frac{\partial^{j-1}}{\partial x^{j-1}} \left\{ u_x + \epsilon \left[ -\beta u_x - \xi u_t + \tau \right] \right\} \end{aligned}$$

Repetindo este processo, chegamos que:

$$\bar{u}_{j\bar{x}} = u_{jx} + \epsilon \left[ -j\beta u_{jx} - j\xi u_{(j-1)xt} + \delta_{j,1} \tau \right]. \quad (\text{III.15})$$

Com as equações (III.14) e (III.15), podemos obter facilmente como se transformam todos os termos da equação (III.11). Estes resultados se encontram no apêndice B, onde também calculamos a equação (III.11) transformada. Para que a equação (III.11) seja invariante sob a transformação infinitesimal, todos os termos de primeira ordem em  $\epsilon$  devem ser identicamente nulos, levando-nos a um sistema de equações que deve ser resolvido (ver apêndice B).

$$\lambda - 2\tau u = 0$$

$$-\eta + 2\beta u - 2\mu u + 4\xi u^2 - 2\tau x - 2\lambda t = 0$$

$$(2j+1)\beta - \mu + 2\xi u = 0$$

$$\xi = 0$$

$$2\sigma + \eta - 2\tau x - 2\lambda t = 0$$

$$2\beta j - 2\xi u = 0$$

$$\tau = 0$$

(II

A solução deste sistema é uma restrição à transformação infinitesimal (III.13):

$$\begin{aligned} X &= \gamma - 2\sigma t \\ T &= \alpha \\ U &= \sigma \end{aligned} \tag{III.17}$$

Como já mostramos no capítulo II, os invariantes desta transformação infinitesimal são obtidos através das equações de Lagrange (Ames 72):

$$\frac{dx}{X} = \frac{dt}{T} = \frac{du}{U} \tag{III.18}$$

Em nosso caso temos:

$$\frac{dx}{\gamma - 2\sigma t} = \frac{dt}{\alpha} = \frac{du}{\sigma} \tag{III.19}$$

A solução das equações de Lagrange é calculada no apêndice B. Os invariantes obtidos são:

$$\begin{aligned} v &= \alpha x + \sigma t^2 - \gamma t \\ f(v) &= \alpha x + \sigma t^2 - \gamma t + \alpha u - \sigma t \end{aligned} \tag{III.21}$$

Escrevendo u em função de f chegamos a:

$$u = \frac{1}{\alpha} \left[ f - \alpha x + \gamma t + \sigma t - \sigma t^2 \right] \tag{III.22}$$

Vamos então reescrever a equação original (III.11) em termos do invariante f. Precisamos, para tal, das derivadas de u na forma (III.22), que estão também calculadas no apêndice B. A equação original se transforma, então, na equação diferencial ordinária abaixo

(ver apêndice B):

$$\begin{aligned} & \frac{df}{d\nu} (2\nu - \gamma) - (2\nu - \gamma) + \sigma - 2f \frac{df}{d\nu} + 2f + \\ & + \sum_{j=1}^N a_j \left[ 2(-1)^j \alpha^{2j} \frac{d^j f}{d\nu^j} \frac{d^{j+1} f}{d\nu^{j+1}} + 2(j+1) \alpha^{2j} \frac{d^{2j+1} f}{d\nu^{2j+1}} (2\nu - \gamma) + \right. \\ & \left. - 2 \alpha^{2j} f \frac{d^{2j+1} f}{d\nu^{2j+1}} - 2 \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} \alpha^{2j} \frac{d^{j+1-i} f}{d\nu^{j+1-i}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Quando esta equação for resolvida para  $f$ , a solução para  $u$  é obtida de (III.22). Devemos salientar que passamos de uma equação diferencial parcial de duas variáveis independentes (III.11) para uma equação diferencial ordinária, que apresenta solução analítica e numérica mais fácil.

#### III.4- APLICAÇÃO DO MÉTODO A UM CASO PARTICULAR

Como não conseguimos aplicar a transformação infinitesimal mais geral (III.12) à toda classe de equações (III.11), aplicamos esta transformação à equação obtida para  $j=1$ . Neste caso particular o operador  $\hat{B}$  é :

$$\hat{B} = 1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (\text{III.24})$$

e a equação não-linear a ser analisada torna-se:

$$u_t - 2u u_x - u_{txx} + 4u_x u_{xx} + 2u u_{xxx} = 0 \quad (\text{III.25})$$

Utilizando a regra da cadeia e a transformação

infinitesimal (III.12) obtemos a equação transformada (III.25) (apêndice B). Para que esta equação seja invariante sob a transformação infinitesimal, impomos que todos os termos de primeira ordem em  $\varepsilon$  sejam nulos, obtendo então um sistema de equações a ser satisfeito simultaneamente pelas funções  $X$ ,  $T$ ,  $U$ . A solução deste sistema, obtida no apêndice B é :

$$\begin{aligned} X &= \gamma - 2\sigma t \\ T &= \alpha \\ U &= \sigma \end{aligned} \tag{III.26}$$

Podemos verificar que estes são os mesmos invariantes dados pelas equações (III.17) para toda a classe de equações (III.11). A solução das equações de Lagrange (III.19) para a obtenção dos invariantes já foi determinada em (III.21). Portanto, os invariantes calculados para o caso  $j=1$ , utilizando uma transformação infinitesimal geral, são os mesmos que aqueles obtidos para toda a classe de equações (III.11) utilizando uma transformação infinitesimal mais restrita. Então, a equação (III.25) reescrita com os invariantes (variáveis similares) corresponde ao caso particular  $j=1$  da equação (III.23).

Além do método apresentado neste item, utilizamos vários outros na procura de novos invariantes e constantes de movimento das equações (III.1). Assim, por exemplo, tentamos, sem êxito, construir um formalismo Hamiltoniano dual para essas equações (Arthur et al. 82, Case et al. 82), o que implicaria na existência de infinitas constantes de movimento (Fuchssteiner et al 81). Através do estudo das invariâncias e simetrias de um sistema há, em alguns casos, a possibilidade de se obter constantes de movimento para este sistema (Magri 78). Fizemos um estudo da classe de equações (III.11) nesta direção, também sem êxito.

Assim, não encontramos neste trabalho evidências de novas constantes de movimento para as equações (III.11) além das mencionadas na literatura.

### III.5- TRANSFORMAÇÕES FINITAS

Estamos interessados em obter as transformações finitas das variáveis dependentes e independentes que deixam a equação (III.11) invariante. Seguindo Ames (Schen et al.74), podemos calcular a transformação finita associada à transformação infinitesimal (III.17) através do operador  $\hat{Q}$  :

$$\hat{Q} = X \frac{\partial}{\partial x} + T \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial u} \quad (III.27)$$

e das transformações:

$$\begin{aligned} x' &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \frac{\hat{Q}^n x}{n!} \\ t' &= t + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \frac{\hat{Q}^n t}{n!} \\ u' &= u + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \frac{\hat{Q}^n u}{n!} \end{aligned} \quad (III.28)$$

Para o nosso caso não foi possível este cálculo pois não há uma dependência explícita de X com x, T com t e U com u. Devido a este fato, a aplicação de  $\hat{Q}$  duas ou três vezes sobre x, t e u resulta nula, impedindo-nos de obter a transformação finita associada. A tentativa resultou numa transformação infinitesimal onde t e u têm a mesma forma anterior e x possui apenas uma ordem a mais em  $\epsilon$  na transformação.

Apesar disto, a classe de equações (III.11) é invariante sob uma transformação finita de Galileu, isto é sob a transformação:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= x - 2 C t \\
 \bar{t} &= t \\
 \bar{u} &= u + C
 \end{aligned}
 \tag{III.29}$$

Note que a transformação infinitesimal obtida é justamente uma transformação de Galileu, mas não conseguimos calcular a transformação finita de Galileu a partir da transformação (III.17).

Verificamos que esta classe de equações também é invariante sob a transformação linear:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= A^0 x \\
 \bar{t} &= A^{-m} t \\
 \bar{u} &= A^m u
 \end{aligned}
 \tag{III.30}$$

A existência de uma transformação linear para uma equação não-linear, permite que esta possa ser escrita de várias maneiras. Isto ocorre, por exemplo, com a equação de Korteweg - de Vries. A transformação entre as diversas maneiras de escrever a equação, é justamente a transformação linear.

## CAPÍTULO IV

### INVARIANTES APROXIMADOS

#### IV.1- INTRODUÇÃO

Neste capítulo descrevemos o método das médias, que permite a obtenção de invariantes aproximados para campos não-integráveis. Para aplicar este método, são utilizados os potenciais vetores dos equilíbrios e das perturbações helicoidais, calculados nos capítulos seguintes.

#### IV.2- SUPERFÍCIES MAGNÉTICAS

As equações da teoria Magnetohidrodinâmica, que o equilíbrio deve satisfazer quando há uma pressão escalar isotrópica, implicam que (Greene et al 65):

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0 . \quad (\text{IV.1})$$

Esta condição impõe uma limitação severa na geometria dos campos magnéticos, pois a pressão precisa ser constante nas linhas do campo magnético, ou seja, as linhas do campo precisam estar em superfícies de pressão constante. Denominaremos qualquer superfície formada pelas linhas do campo magnético com pressão constante, de superfícies magnéticas.

Quando as linhas do campo estão dispostas de forma que as superfícies magnéticas formem toróides, o plasma pode ser confinado. As superfícies magnéticas toroidais existem para uma configuração com simetria axial. Campos perturbativos que acabam com a simetria, podem destruir estas superfícies.

Então, se o campo magnético exibir algum tipo de simetria, é possível representá-lo por uma função  $\psi$ , constante em cada superfície magnética, que possui a mesma simetria do campo magnético, ou seja (Morozov et al 66):

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0 \quad . \quad (\text{IV.2})$$

Como uma ilustração, mostramos na figura (IV.1) uma representação de superfícies magnéticas concêntricas, correspondentes a um equilíbrio com simetria cilíndrica.

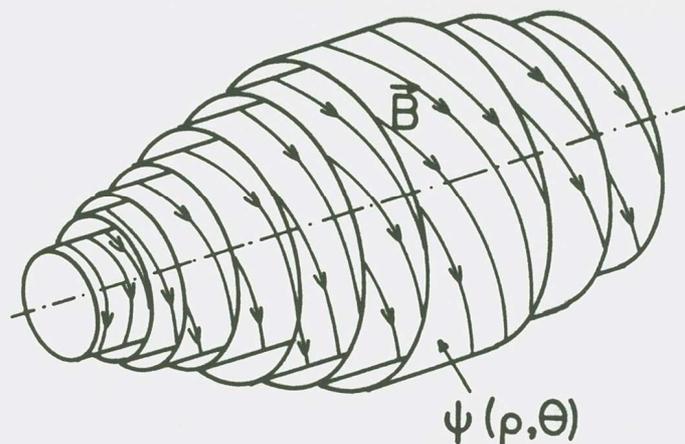


FIGURA (IV-1): Esquema das superfícies magnéticas que aparecem em um sistema com simetria cilíndrica.

#### IV.3- DESCRIÇÃO DO MÉTODO DE OBTENÇÃO DE INVARIANTES

Nosso objetivo principal é analisar o que ocorre com as superfícies magnéticas do plasma no tokamak, quando perturbamos o equilíbrio toroidal através de uma hélice ou pares de hélices ressonantes enroladas no tokamak. Para isto, seguiremos o método de Cary (Cary 84), que estudou o problema das superfícies magnéticas do

stellarator (no vácuo), através da obtenção de superfícies magnéticas médias. Faremos então uma analogia a este método, analisando o efeito das hélices ressonantes em equilíbrios toroidais. Para isso consideraremos o campo resultante como uma superposição do campo de equilíbrio MHD com o das perturbações criadas pelas hélices.

É possível descrever as linhas do campo magnético a partir de um princípio variacional em um sistema de coordenadas arbitrário (Cary 82):

$$\delta \int A_i(\vec{x}) \frac{dx^i}{d\lambda} d\lambda = 0 . \quad (\text{IV.3})$$

No princípio variacional expresso por (IV.3)  $\lambda$  é um parâmetro arbitrário, podendo ser tomado como uma das coordenadas  $x^i$ . A Lagrangiana do problema é então:

$$L = A_i(\vec{x}) \frac{dx^i}{d\lambda} . \quad (\text{IV.4})$$

A aplicação do teorema de Noether (Hill 51) à Lagrangiana acima pode implicar que uma das componentes do potencial vetor seja um invariante, isto é, uma função constante ao longo das linhas do campo. Por se cada uma das componentes  $A_i$  do potencial vetor for independente de  $x^1$ , então  $A_1$  é um invariante (Cary 82, Cary et al 82). Portanto, a simetria necessária para provar a existência de superfícies magnéticas é descrita pela representação do potencial vetor. Citamos, como exemplo, o stellarator reto cujo equilíbrio depende somente do seu raio e do ângulo helicoidal (Miyamoto 78).

O potencial vetor do problema a ser estudado é expresso aproximadamente como a soma do potencial vetor do equilíbrio mais o potencial vetor da perturbação :

$$A_i(\rho, \theta, \varphi) \approx \mathcal{A}_i(\rho, \theta) + a_i(\rho, \theta, \varphi) , \quad (\text{IV.5})$$

onde  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  são as coordenadas polares locais descritas na figura (IV-2),  $\mathcal{A}_i$  e  $a_i$  correspondem, respectivamente, às componentes  $i$  do potencial vetor do equilíbrio toroidal e da perturbação helicoidal ressonante.

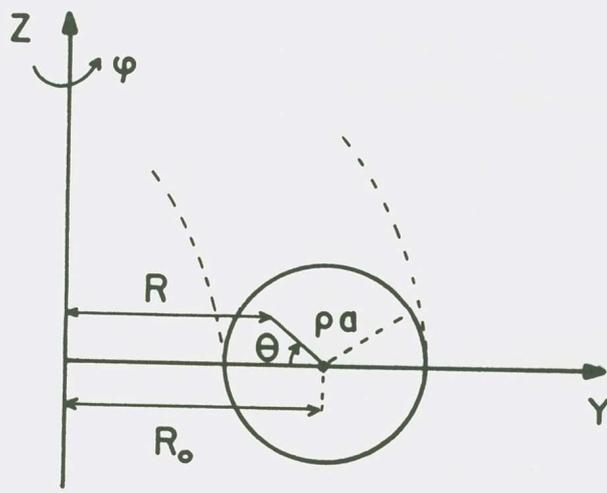


FIGURA (IV-2): Sistema de coordenadas utilizado em todo este trabalho.

A intensidade da corrente nas hélices ressonantes é muito menor que a da corrente de plasma, de modo que as hélices podem ser consideradas perturbações ao equilíbrio do plasma. Consideraremos que o enrolamento das hélices é descrito pela equação:

$$u = m \theta - n \varphi = \text{constante.} \tag{IV.6}$$

O potencial vetor (IV.5) depende das três coordenadas, portanto não há um invariante relacionado a ele. Para que haja uma simetria em relação a uma das coordenadas, definiremos um potencial vetor médio e assim teremos um invariante que descreve o nosso problema.

As componentes do potencial vetor médio, ao longo de uma linha com  $u$  constante são definidas por:

$$\bar{A}_i(\rho, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_i(\rho, \theta, \varphi) d\theta \quad (\text{IV.7})$$

Para  $\rho/R_0 \ll 1$ , o potencial vetor médio difere pouco do potencial vetor exato. O potencial vetor médio tem a forma:

$$\bar{A}(\rho, u) = \bar{A}_\rho(\rho, u) \hat{e}_\rho + \bar{A}_\theta(\rho, u) \hat{e}_\theta + \bar{A}_\varphi(\rho, u) \hat{e}_\varphi \quad (\text{IV.8})$$

Utilizando a variável  $u$  no lugar de  $\varphi$  obtemos:

$$\bar{A}(\rho, u) = \bar{A}_\rho(\rho, u) \hat{e}_\rho + \left[ \bar{A}_\theta(\rho, u) + \frac{m}{n} \bar{A}_\varphi(\rho, u) \right] \hat{e}_\theta + \frac{1}{n} \bar{A}_\varphi(\rho, u) \hat{e}_u \quad (\text{IV.9})$$

Devemos notar que neste sistema de coordenadas o potencial vetor não depende da coordenada  $\theta$ . Logo, seguindo o teorema de Noether, já citado anteriormente, a componente  $\theta$  do potencial vetor médio descrito pela equação (IV.9) é um invariante, isto é,

$$\psi = \bar{A}_\theta + \frac{m}{n} \bar{A}_\varphi = \text{constante} \quad (\text{IV.10})$$

Embora  $\bar{A}$  tenha um invariante exato, não é mais o potencial vetor exato do problema. A utilidade deste método de médias segue do fato que o potencial vetor médio é aproximadamente o potencial vetor exato. Portanto, o invariante exato da superfície magnética aproximada é um invariante aproximado da superfície magnética exata.

Com este método em mente, calcularemos o potencial vetor de um equilíbrio toroidal (Capítulo V) e de três perturbações helicoidais ressonantes distintas (Capítulo VI), para então obtermos o

invariante correspondente de cada caso.

Quando há somente o equilíbrio, existem superfícies magnéticas, pois há simetria azimutal. Na presença das perturbações deixa de haver simetria e portanto não há função  $\psi$  que descreva as superfícies magnéticas. Por isso, ao estudarmos este caso, consideramos superfícies magnéticas médias que descrevem aproximadamente o problema.

## CAPÍTULO V

### DESCRIÇÃO DO EQUILÍBRIO UTILIZADO

#### V.1- INTRODUÇÃO

Neste capítulo mostramos o equilíbrio toroidal utilizado para descrever o plasma, e a sua perturbação por hélices ressonantes será considerada nos próximos capítulos. Usando o invariante exato que descreve este equilíbrio, obtemos para utilizar nos capítulos seguintes, um invariante médio.

O equilíbrio considerado foi obtido por Shafranov (Shafranov 60) e descreve um plasma confinado em um aparato toroidal .

#### V.2- EQUILÍBRIO DE SHAFRANOV

O equilíbrio de Shafranov (Shafranov 60) foi obtido para uma configuração toroidal com simetria axial . Para haver equilíbrio em tal configuração precisa haver uma corrente estabilizadora azimutal  $j_\varphi$  (Shafranov 57, Shafranov 58).

Como ilustração, indicamos nas figuras (V.1) e (V.2) os campos magnéticos e as correntes elétricas principais existentes no tokamak. Assim, estão assinalados na figura (V-1) os campos magnéticos poloidal  $B_p$  , toroidal  $B_t$  e vertical  $B_v$  . Devemos notar que a equação Grad- Shafranov leva em consideração todos estes campos. Na figura (V-2) mostramos a corrente de plasma  $I_p$  a corrente elétrica nas bobinas e a corrente que gera o campo vertical  $I_v$ .

Quando o campo magnético exhibe algum tipo de simetria, é possível representá-lo por uma função  $\psi$  , constante em cada superfície magnética, que possui a mesma simetria e periodicidade do campo magnético, ou seja (Morozov et al 66):

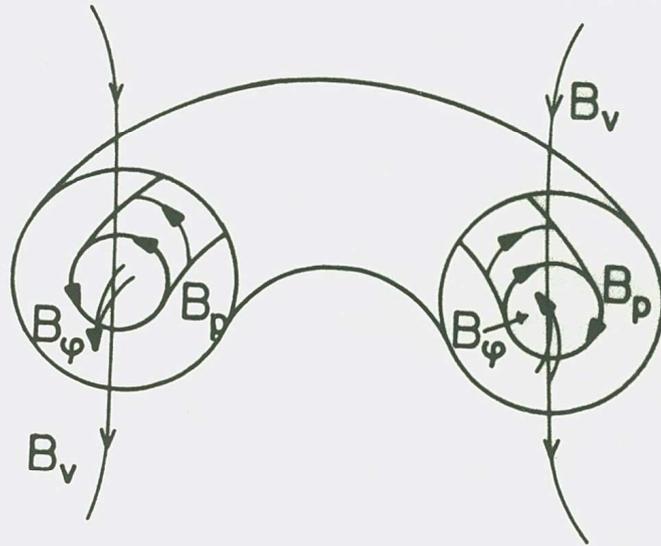
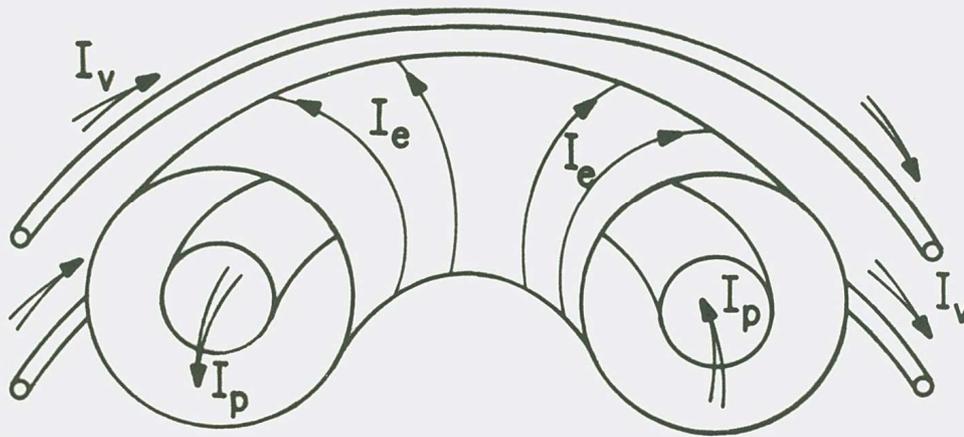


FIGURA (V-1): Campos magnéticos principais presentes no tokamak.



FIGURA(V-2): Principais correntes elétricas no tokamak.

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0 . \quad (\text{V.1})$$

A função  $\psi$ , que descreve o equilíbrio de um plasma confinado em um toróide, e que é proporcional ao fluxo magnético poloidal, pode ser obtida através da equação de Grad-Shafranov (Shafranov 60) em coordenadas cilíndricas (figura IV-2):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = - \mu_0 R j_\varphi , \quad (\text{V.2})$$

onde

$$j_\varphi = - \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right] \quad (\text{V.3})$$

$$I = \frac{R B_\varphi}{\mu_0} . \quad (\text{V.4})$$

Para resolver esta equação, escolhemos perfis do campo toroidal e da pressão precisam ser escolhidos. No caso estudado, os seguintes perfis foram utilizados por Shafranov:

$$p(\psi) = A \psi + C \quad (\text{V.5a})$$

$$I^2(\psi) = B \psi + D . \quad (\text{V.5b})$$

A resolução da equação de Grad-Shafranov foi feita, neste caso, no sistema de coordenadas toroidais usuais. Utilizamos a solução calculada por outro bolsista do laboratório de Física de

Plasmas da Universidade de São Paulo (Okano 89), para determinadas condições de contorno (coluna de plasma com seção circular) que representam um perfil típico de um tokamak. Fizemos, então, uma mudança de coordenadas para as coordenadas polares locais ( $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ) (figura IV-2), considerando uma razão-de-aspecto grande, e obtivemos a seguinte expressão para  $\psi$  :

$$\psi = \frac{\mu_0 I_p R_0}{4 \pi} \left[ 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right] \left[ 1 - (\Lambda+1) \frac{\rho}{R_0} \cos\theta \right] \quad (V.6)$$

onde  $I_p$  é a corrente de plasma,  $a$  e  $R_0$  são, respectivamente, os raios menor e maior do tokamak (figura IV-2). A constante  $\Lambda$  é definida como:

$$\Lambda = \beta + \frac{l_i}{2} - 1 \quad (V.7)$$

Na equação (V.7)  $\beta$  é a razão entre as pressões cinética e magnética do plasma e  $l_i$  é a indutância interna do plasma por unidade de comprimento (Haye et al. 81).

A função  $I$  relacionada a  $\psi$  é dada pela expressão:

$$I^2 = I_\circ^2 + 2 \frac{R_0^2}{a^2} I_p^2 \left[ \frac{5}{4} - \Lambda \right] \left[ 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right] \left[ 1 - \frac{\rho}{R_0} (\Lambda+1) \cos\theta \right], \quad (V.8)$$

onde  $I_\circ$  é a corrente que passa nas bobinas do solenóide que envolvem o tokamak.

As figuras (V-3) e (V-4) mostram as superfícies magnéticas onde  $\psi$  é constante. Na figura (V-3) tomamos  $\Lambda = 0.28$ , que foi o valor obtido experimentalmente para o TBR-1 (Ueta 85), enquanto na figura (V-4) consideramos  $\Lambda = -1$  que corresponde ao limite em que  $\beta$  tende a zero.

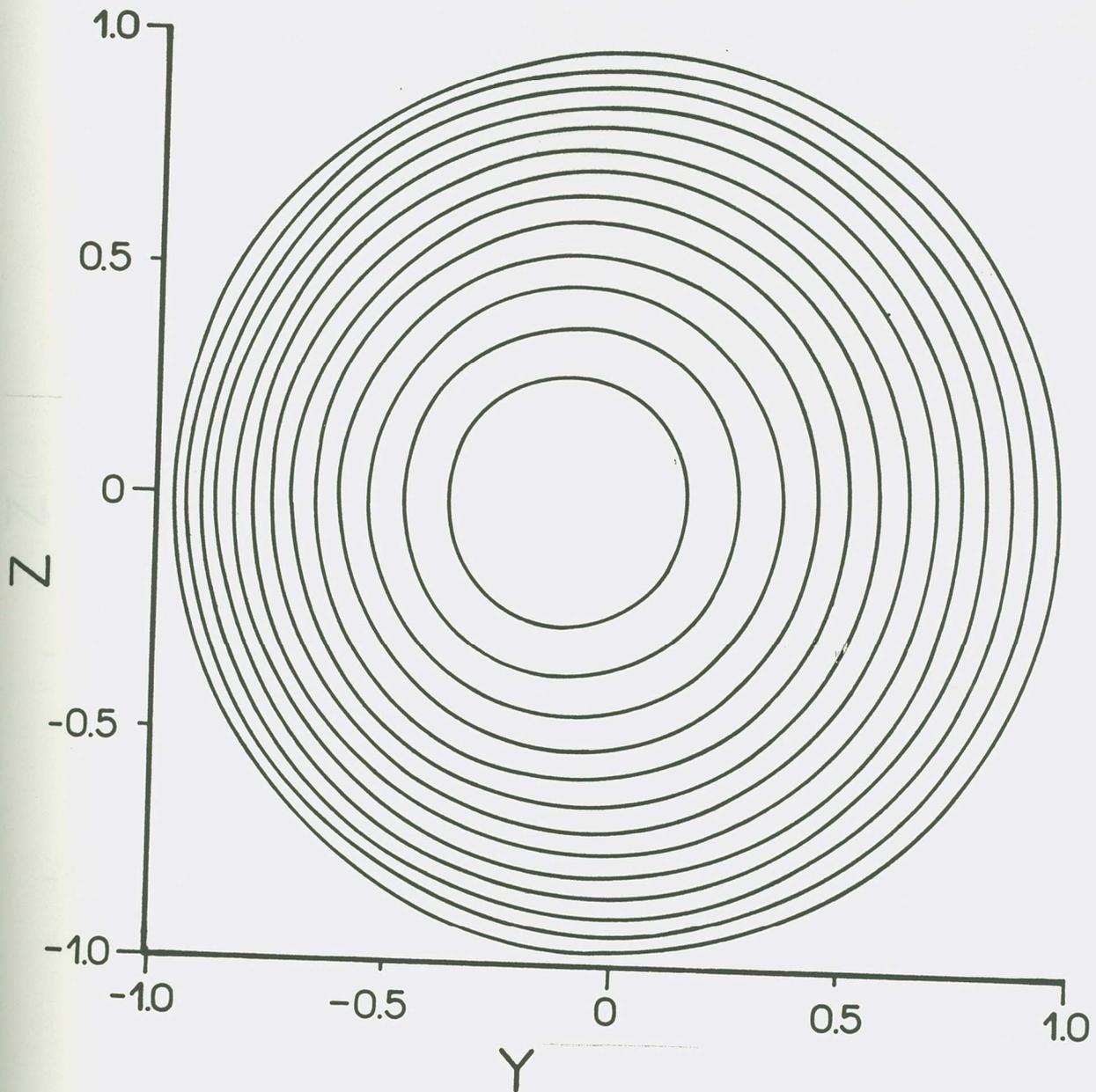


FIGURA (V-3): Superfícies de  $\psi$  constante, para  $\Lambda=0,28$ , corrente de plasma  $I_p=18\text{kA}$ , corrente nas bobinas  $I_b=600\text{kA}$ , raio maior do tokamak  $R_0=30\text{cm}$  e raio menor do tokamak  $a=8\text{cm}$ . As escalas estão normalizadas pelo raio menor do tokamak.

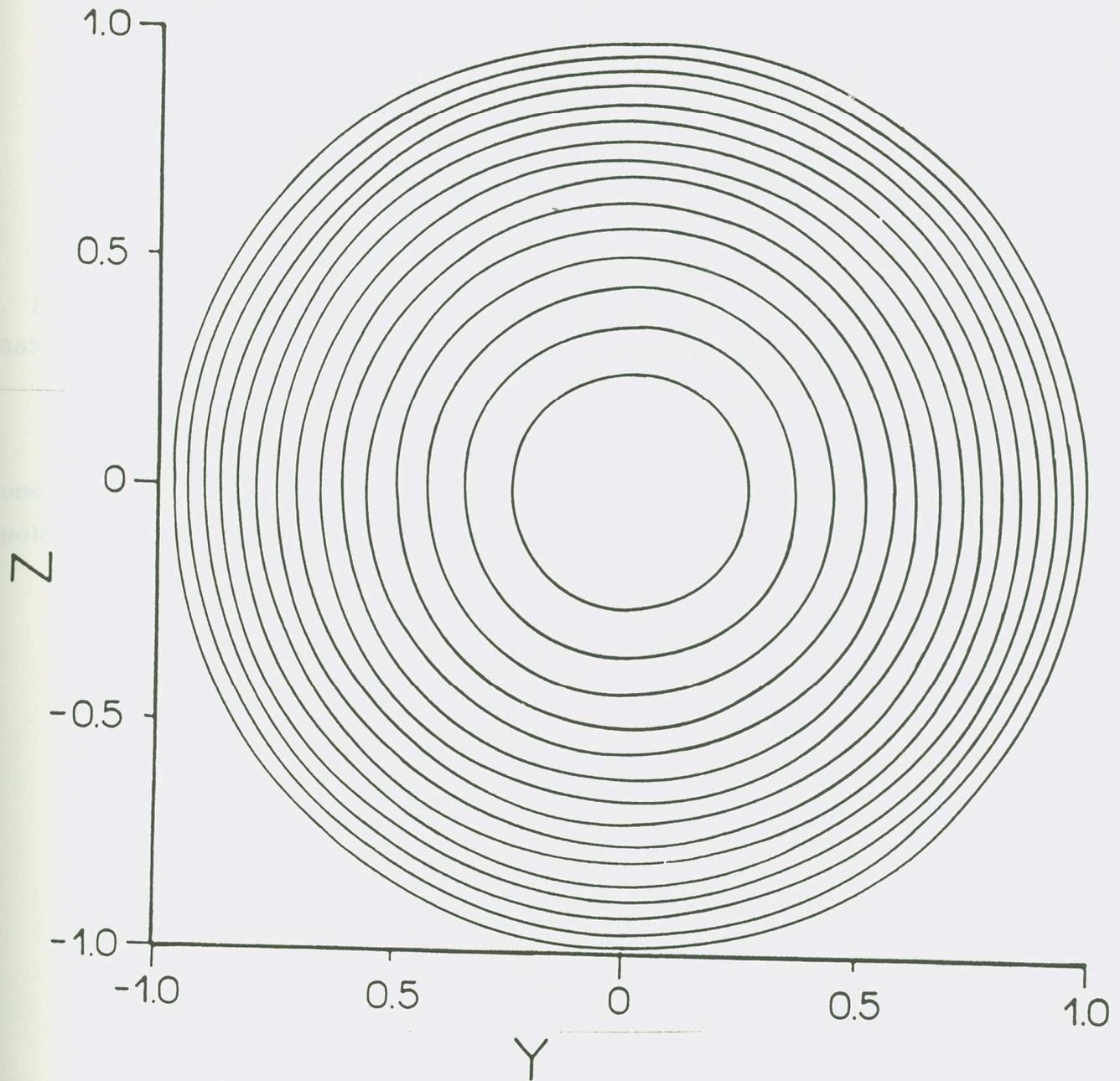


FIGURA (V-4): Superfícies de  $\psi$  constante, para  $\Lambda=-1$ , corrente de plasma  $I_p=18\text{kA}$ , corrente nas bobinas  $I_c=600\text{kA}$ , raio maior do tokamak  $R_o=30\text{cm}$  e raio menor do tokamak  $a=8\text{cm}$ . As escalas estão normalizadas pelo raio menor do tokamak.

### V.3- INVARIANTE APROXIMADO DO EQUILÍBRIO DE SHAFRANOV

Queremos obter o potencial vetor correspondente a  $\psi$ . Para isto, utilizaremos a expressão de Boozer (Boozer 83, Boozer 86), para o potencial vetor de um campo magnético :

$$\vec{A} = \chi \nabla \theta - \Gamma \nabla \varphi, \quad (V.9)$$

onde  $\chi$  e  $\Gamma$  são, respectivamente, o fluxo toroidal e o fluxo poloidal do campo magnético definidos a seguir (figuras (V-5) e (V-6)):

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{B} \cdot d\vec{S}_t, \quad (V.10a)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{B} \cdot d\vec{S}_p. \quad (V.10b)$$

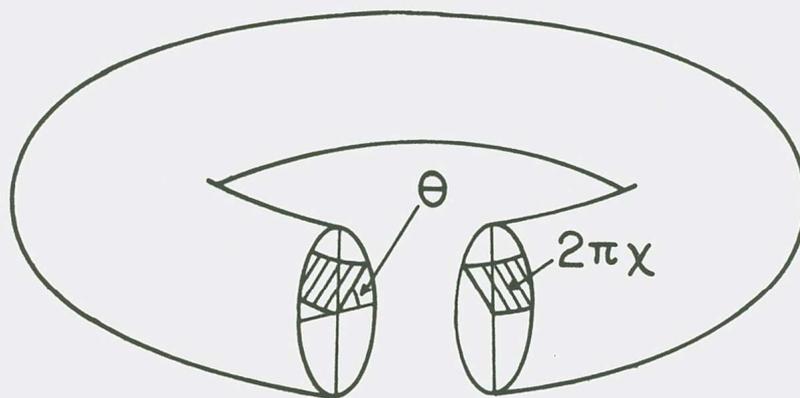


FIGURA (V-5): Fluxo poloidal em um tokamak

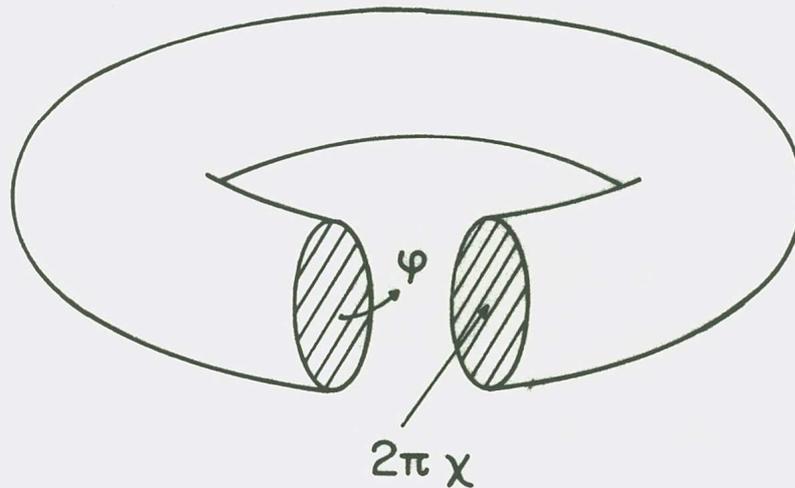


FIGURA (V-6): Fluxo toroidal em um tokamak.

Para obtermos estes fluxos, calcularemos primeiramente o campo magnético que se relaciona com as funções  $\psi$  e  $I$  através da expressão (Caldas et al 85):

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R} \left[ \nabla \psi \times \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} + \frac{\mu_0 I(\psi)}{2\pi} \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} \right], \quad (\text{V.11})$$

onde (ver figura IV.2)

$$R = R_0 - \rho \cos\theta. \quad (\text{V.12})$$

As componentes do campo magnético calculadas a partir das expressões (V.7), (V.8) e (V.11) são:

$$B_{\rho} = \frac{\mu_0 I_p}{4 \pi} \frac{(\Lambda+1) \operatorname{sen} \theta}{(R_0 - \rho \cos \theta)} \left[ 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right] \quad (\text{V.13a})$$

$$B_{\theta} = \frac{\mu_0 I_p R_0}{4 \pi} \frac{1}{(R_0 - \rho \cos \theta)} \left[ \frac{2\rho}{a^2} - \frac{(\Lambda+1) \cos \theta}{R_0} \left[ 3 \frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right] \right] \quad (\text{V.13b})$$

$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0}{2 \pi} \frac{1}{(R_0 - \rho \cos \theta)} \left[ I_e^2 + 2 \frac{R_0^2}{a^2} I_p^2 \left[ \frac{5}{4} - \Lambda \right] \cdot \left[ 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right] \left[ 1 - \frac{\rho}{R_0} (\Lambda+1) \cos \theta \right] \right]^{1/2} \quad (\text{V.13c})$$

Para calcularmos os fluxos, precisamos integrar estes campos. Porém, não conseguimos integrá-los analiticamente nesta forma. Afim de podermos fazer estas integrais, expandimos as expressões (V.13) em potências de  $\rho/R_0$ . Este é um ponto delicado do cálculo e está descrito no apêndice C. O problema principal é que queremos fazer aplicações numéricas para o TBR-1, cujo inverso da razão de aspecto não é muito pequeno:

$$\frac{a}{R_0} = \frac{8}{30} \approx 0.27 \quad (\text{V.14})$$

Portanto, tivemos que tomar um cuidado especial ao desprezarmos os termos das expansões, comparando-os numericamente. Fizemos todas as expansões mantendo termos até a ordem  $\rho^2/R_0^2$ . A única exceção foi no cálculo de  $B_{\varphi}$ . Esta componente é um produto de duas expansões distintas e este produto deve ser coerente. Assim, um termo dominante teve sua expansão mantida até a ordem  $\rho^4/R_0^4$ , enquanto outros termos que representam apenas uma correção foram conservados somente até a potência  $\rho/R_0$ , ou literalmente desprezados, de acordo com o valor

numérico de seus coeficientes.

As componentes do campo magnético aproximado são:

$$B_{\rho} \approx \frac{\mu_0 I_P}{4\pi R_0} (\Lambda+1) \operatorname{sen}\theta \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \left( 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta + \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos^2\theta \right) \quad (\text{V.15a})$$

$$B_{\theta} \approx \frac{\mu_0 I_P}{4\pi} \left[ \frac{2\rho}{a^2} - 3(\Lambda+1) \frac{\rho^2}{a^2 R_0} \cos\theta + \frac{(\Lambda+1)}{R_0} \cos\theta + \right. \\ \left. + \frac{2\rho^2}{a^2 R_0} \cos\theta - 3(\Lambda+1) \frac{\rho^3}{a^2 R_0^2} \cos^2\theta + \frac{2\rho^3}{a^2 R_0^2} \cos^2\theta \right] \quad (\text{V.15b})$$

$$B_{\varphi} \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ C \left[ 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta + \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos^2\theta + \frac{\rho^3}{R_0^3} \cos^3\theta + \frac{\rho^4}{R_0^4} \cos^4\theta \right] - \frac{D}{2C} \left[ 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta \right] \left[ \frac{\rho^2}{a^2} + (\Lambda+1) \frac{\rho}{R_0} \cos\theta \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \right] \right\} \quad (\text{V.15c})$$

Na expressão de  $B_{\varphi}$  :

$$D = \frac{2 I_P^2 \left( \frac{5}{4} - \Lambda \right)}{a^2} \quad (\text{V.16a})$$

$$C = \left( D + \frac{I_P^2}{R_0^2} \right)^{1/2} \quad (\text{V.16b})$$

A partir deste campo aproximado podemos então calcular os fluxos do campo magnético. O fluxo toroidal é definido como:

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho} \int_0^{\theta} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} \rho \, d\theta \, d\rho$$

Ou seja:

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho} \int_0^{\theta} B_{\varphi} \rho \, d\theta \, d\rho \quad (V.17)$$

Calculando esta integral, obtemos:

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{\mu_0}{4\pi^2} \left\{ C \left[ \frac{\rho^2}{2} \theta + \frac{\rho^3}{3R_0} \operatorname{sen}\theta + \frac{\rho^4}{4R_0^2} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4} \right) + \right. \right. \\ & + \frac{\rho^5}{5R_0^3} \left( \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta + \frac{2}{3} \operatorname{sen}^3\theta \right) + \frac{\rho^6}{6R_0^4} \left( \frac{3\theta}{8} + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\operatorname{sen}4\theta}{32} \right) \right] - \frac{C}{2D} \left[ \frac{\rho^4}{4a^2} \theta + \frac{\rho^5}{5a^2R_0} \operatorname{sen}\theta \right] + \\ & - \frac{C}{2D} (\Lambda+1) \left[ \frac{\rho^3}{3R_0} \operatorname{sen}\theta + \frac{\rho^4}{4R_0^2} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4} \right) - \frac{\rho^5}{5a^2R_0} \operatorname{sen}\theta + \right. \\ & \left. \left. - \frac{\rho^6}{6a^2R_0^2} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (V.18)$$

Por outro lado, o fluxo poloidal é definido por:

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\theta} 2\pi R d\rho =$$

$$= \int_0^{\rho} B_{\theta} R d\rho = \int_0^{\rho} \left[ -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right] R d\rho = -\psi$$

Então:

$$\Gamma = -\psi = -\frac{\mu_0 I_p R_0}{4\pi} \left[ 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right] \left[ 1 - (\Lambda+1) \frac{\rho}{R_0} \cos\theta \right]. \quad (V.19)$$

Temos finalmente o potencial vetor, substituindo (V.19) e (V.18) em (V.9):

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \left\{ C \left[ \frac{\rho^2}{2} \theta + \frac{\rho^3}{3R_0} \text{sen}\theta + \frac{\rho^4}{4R_0^2} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}2\theta}{4} \right) + \right. \right.$$

$$+ \frac{\rho^5}{5R_0^3} \left( \text{sen}\theta \cos^2\theta + \frac{2}{3} \text{sen}^3\theta \right) + \frac{\rho^6}{6R_0^4} \left( \frac{3\theta}{8} + \frac{\text{sen}2\theta}{4} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\text{sen}4\theta}{32} \right) \right] - \frac{D}{2C} \left[ \frac{\rho^4}{4a^2} \theta - \frac{\rho^5}{5a^2 R_0} \text{sen}\theta \right] - \frac{D}{2C} (\Lambda+1)$$

$$\left[ \frac{\rho^3}{3R_0} \text{sen}\theta + \frac{\rho^4}{4R_0^2} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}2\theta}{4} \right) - \frac{\rho^5}{5a^2 R_0} \text{sen}\theta + \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\rho^6}{6a^2 R_0^2} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}2\theta}{4} \right) \right] \right\} \nabla \theta +$$

$$+ \frac{\mu_0 I_p R_0}{4\pi} \left[ 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right] \left[ 1 - (\Lambda+1) \frac{\rho}{R_0} \cos\theta \right] \nabla \varphi \quad (V.20)$$

Queremos calcular o potencial vetor médio, definido pela expressão (IV.7). Devemos lembrar ainda que:

$$\nabla \theta = \frac{1}{\rho} \hat{e}_\theta \quad (V.21a)$$

$$\nabla \varphi = \frac{1}{(R_0 - \rho \cos\theta)} \hat{e}_\varphi \quad (V.21b)$$

Antes de tirarmos a média em  $\theta$ , vamos expandir o denominador da componente  $\varphi$  do potencial vetor em potências de  $\rho/R_0$ , desprezando os termos que são de uma ordem de grandeza de  $10^{-3}$  do termo dominante (ver apêndice C):

$$\begin{aligned} \alpha_\theta = & \frac{\mu_0}{4\pi^2} \left\{ C \left[ \frac{\rho}{2} \theta + \frac{\rho^2}{3R_0} \text{sen}\theta + \frac{\rho^3}{4R_0^2} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}2\theta}{4} \right) + \right. \right. \\ & + \frac{\rho^4}{5R_0^3} \left[ \text{sen}\theta \cos^2\theta + \frac{2}{3} \text{sen}^3\theta \right] + \frac{\rho^5}{6R_0^4} \left[ \frac{3\theta}{8} + \frac{\text{sen}2\theta}{4} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\text{sen}4\theta}{32} \right] \right] - \frac{C}{2D} \left[ \frac{\rho^3}{4a^2} \theta + \frac{\rho^4}{5a^2R_0} \text{sen}\theta \right] - \frac{C}{2D} (\Lambda+1) \\ & \left[ \frac{\rho^2}{3R_0} \text{sen}\theta + \frac{\rho^3}{4R_0^2} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}2\theta}{4} \right) - \frac{\rho^4}{5a^2R_0} \text{sen}\theta + \right. \\ & \left. \left. - \frac{\rho^5}{6a^2R_0^2} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}2\theta}{4} \right) \right] \right\} \quad (V.22a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\varphi \approx & \frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \left\{ 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta + \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos^2\theta - \frac{\rho^2}{a^2} \left[ 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos^2\theta \right] - \frac{\rho}{R_0} (\Lambda+1) \cos\theta \left[ 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta \right] + \right. \\
& \left. - \frac{\rho^3}{a^2 R_0} (\Lambda+1) \cos\theta \left[ 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta \right] \right\} \quad (V.22b)
\end{aligned}$$

Utilizando as expressões (V.22) para tirar a média em  $\theta$  e lembrando que:

$$\overline{\mathcal{A}_i} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{A}_i(\rho, \theta) d\theta, \quad (V.23)$$

de acordo com a equação (IV.7), obtemos finalmente o potencial vetor médio:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{A}_\theta} = & \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ C \left[ \frac{\rho}{2} + \frac{\rho^3}{8R_0^2} + \frac{\rho^5}{16R_0^4} \right] - \frac{D}{8C} \frac{\rho^3}{a^2} + \right. \\
& \left. - \frac{D}{2C} (\Lambda+1) \left[ \frac{\rho^3}{8R_0^2} + \frac{\rho^5}{12a^2 R_0^2} \right] \right\} \quad (V.24a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{A}_\varphi} = & \frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \left\{ 1 + \frac{\rho^2}{2R_0^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \left[ 1 + \frac{\rho^2}{2R_0^2} \right] - \frac{\rho^2}{2R_0^2} (\Lambda+1) + \right. \\
& \left. - \frac{\rho^4}{2a^2 R_0^2} (\Lambda+1) \right\}. \quad (V.24b)
\end{aligned}$$

Seguindo o método explicado no capítulo anterior, a função  $\Psi$  que descreve as superfícies magnéticas médias é dada por:

$$\Psi = \overline{\mathcal{A}_\theta} + \frac{m}{n} \overline{\mathcal{A}_\varphi} \quad (V.25)$$

Ou seja:

$$\Psi = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ C \left[ \frac{\rho}{2} + \frac{\rho^3}{8R_0^2} + \frac{\rho^5}{16R_0^4} \right] - \frac{D}{8C} \frac{\rho^3}{a^2} - \frac{D}{2C} (\Lambda+1) \left[ \frac{\rho^3}{8R_0^2} + \frac{\rho^5}{12a^2R_0^2} \right] \right\} + \frac{m}{n} \frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \left\{ 1 + \frac{\rho^2}{2R_0^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \left[ 1 + \frac{\rho^2}{2R_0^2} \right] - \frac{\rho^2}{2R_0^2} (\Lambda+1) - \frac{\rho^4}{2a^2R_0^2} (\Lambda+1) \right\} . \quad (V.26)$$

As superfícies de  $\Psi$  constante estão ilustradas nas figuras (V-7) e (V-8), para  $\Lambda=0,28$  e  $\Lambda=-1$ . Devemos notar que apesar do equilíbrio não depender de  $m$  e  $n$ , o invariante médio depende. No caso, utilizamos  $m=3$ ,  $n=1$ . Notamos que a região com menor densidade de níveis é justamente onde aparecerão as ilhas magnéticas e que a posição e largura desta região depende de  $\Lambda$ .

#### V.4- CÁLCULO DO FATOR DE SEGURANÇA

Um parâmetro importante para a caracterização do equilíbrio do plasma é o denominado fator de segurança que será definido a seguir.

Consideremos as intersecções de uma linha do campo magnético com um plano poloidal com  $\varphi$  constante. Entre duas intersecções sucessivas das linhas de força com este plano, ou seja, após uma volta toroidal completa, há uma variação na posição da linha do campo. Esta variação depende do passo, isto é, da helicidade dessa linha ao longo de seu deslocamento toroidal. Essa helicidade pode ser caracterizada pela transformada rotacional da linha, ou, como mais comumente utilizado, pelo fator de segurança em cada ponto.

O fator de segurança é introduzido a partir da equação das linhas do campo magnético:

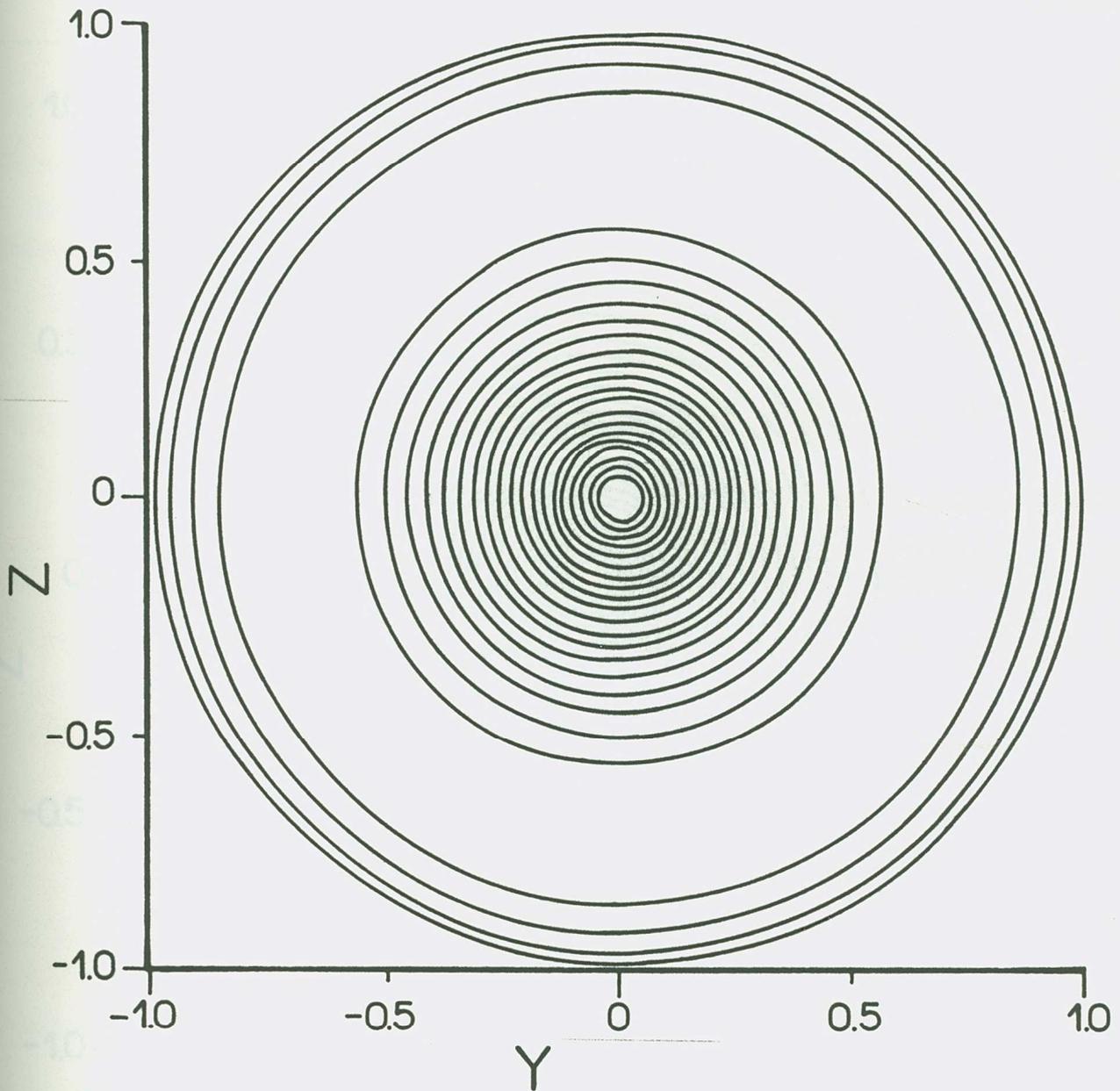


FIGURA (V-7): Superfícies de  $\Psi$  constante, para  $\Lambda=0,28$ , corrente de plasma  $I_p=18\text{kA}$ , corrente nas bobinas  $I_o=600\text{kA}$ , raio maior do tokamak  $R_o=30\text{cm}$  e raio menor do tokamak  $a=8\text{cm}$ ,  $m=3$ ,  $n=1$ ,  $N=1$ . As escalas estão normalizadas pelo raio menor do tokamak.

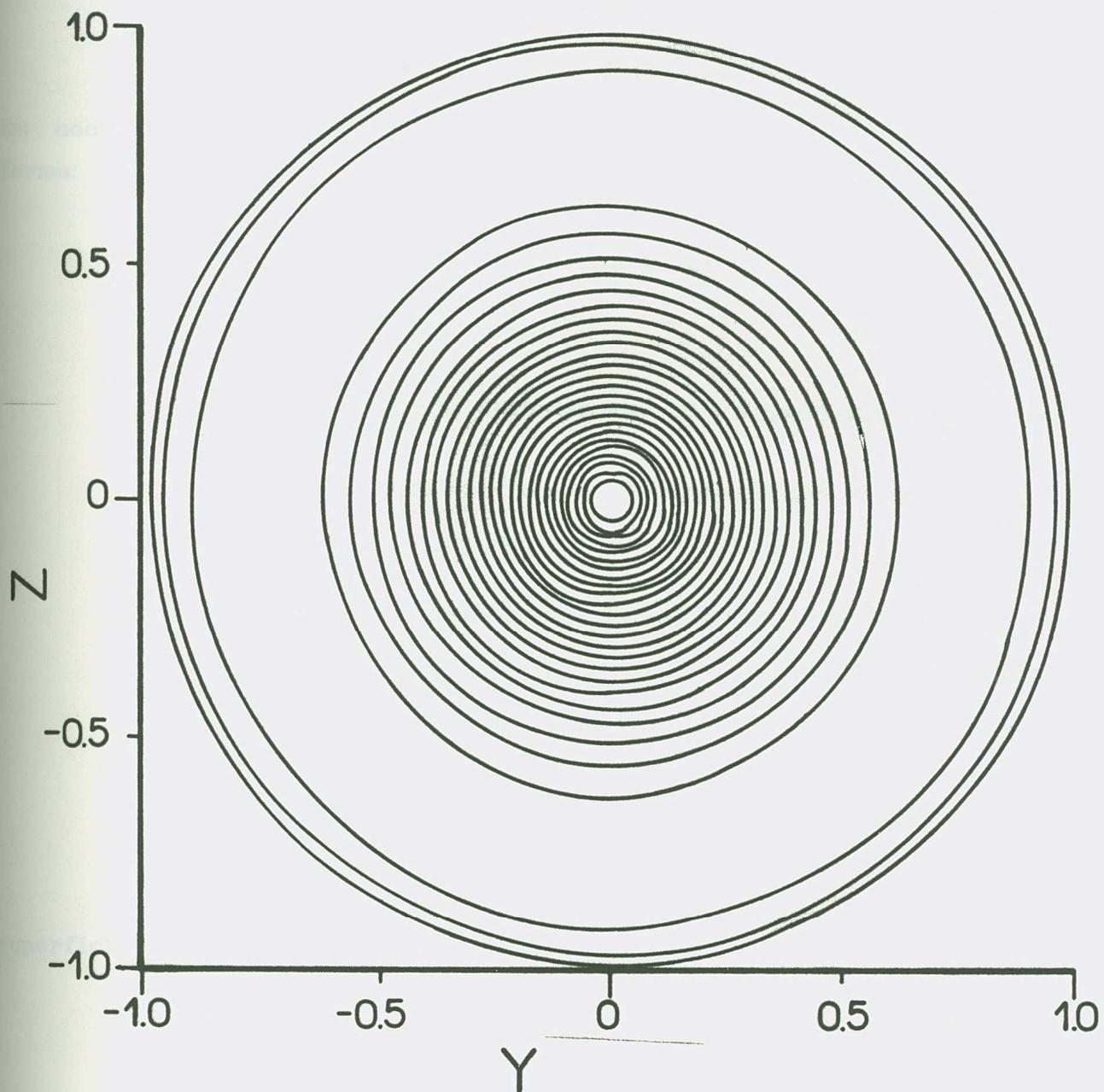


FIGURA (V-8): Superfícies de  $\Psi$  constante, para  $\Lambda=0,28$ , corrente de plasma  $I_p=18\text{kA}$ , corrente nas bobinas  $I_e=600\text{kA}$ , raio maior do tokamak  $R_0=30\text{cm}$  e raio menor do tokamak  $a=8\text{cm}$ ,  $m=3$ ,  $n=1$ ,  $N=1$ . As escalas estão normalizadas pelo raio menor do tokamak.

$$d\vec{r} \times \mathbb{B} = 0. \quad (\text{V.27})$$

Em coordenadas polares locais esta equação pode ser reescrita na forma:

$$\frac{d\rho}{B_\rho} = \frac{\rho d\theta}{B_\theta} = \frac{R d\varphi}{B_\varphi}. \quad (\text{V.28})$$

A variação da coordenada  $\theta$  é portanto:

$$d\theta = \frac{R B_\theta}{\rho B_\varphi} d\varphi \quad (\text{V.29})$$

O fator de segurança é, então, definido como:

$$q = \frac{\rho B_\varphi}{R B_\theta} \quad (\text{V.30})$$

Vamos definir um fator de segurança médio sobre uma superfície de  $\psi$  constante:

$$\langle q \rangle \Big|_{\psi=\text{cte}} = \frac{1}{\oint_{\psi=\text{cte}} dl} \int_{\psi=\text{cte}} q(\rho, \theta) dl \quad (\text{V.31})$$

Percebemos que se

$$\langle q \rangle = \frac{m}{n} \quad (\text{V.32})$$

a linha do campo fecha-se sobre si mesma após terem sido dadas  $m$  voltas na direção toroidal e  $n$  voltas na direção poloidal. Uma superfície magnética racional é, portanto, aquela em que as linhas do

campo magnético se fecham, caracterizada pelo valor de  $\langle q \rangle$ .

Se o equilíbrio do plasma for perturbado por hélices ressonantes, ilhas magnéticas se formam ao redor das superfícies que tiverem fatores de segurança correspondentes à helicidade das correntes. Assim, estamos interessados na variação do fator de segurança com a posição radial, para sabermos a localização das ilhas. Porém, como estamos utilizando equilíbrios toroidais, há uma dependência dos campos magnéticos com a variável poloidal. Para obtermos um fator de segurança que dependa somente de  $\rho$ , definiremos um fator de segurança médio, ou seja:

$$\bar{q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho B_\varphi}{R B_\theta} d\theta \quad (V.32)$$

As componentes do campo magnético do equilíbrio são dadas em (V.13). Utilizando estas expressões, teremos:

$$\bar{q}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho \left[ I_e^2 + \frac{2R_o^2 I_p^2}{a^2} \left[ \frac{5}{4} - \Lambda \right] \left\{ 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right\} \left[ 1 + \frac{\rho}{R_o} \cos\theta \right] \right]^{1/2}}{\frac{I_p R_o}{2R} \left\{ \frac{2\rho}{a^2} + \frac{(\Lambda+1)}{R_o} \cos\theta \left[ 1 - 3 \frac{\rho^2}{a^2} \right] \right\}} \quad (V.33)$$

Queremos calcular o fator de segurança no centro do plasma. Em  $\rho=a$ , a equação (V.33) fica:

$$\bar{q}(a) = \frac{a^2 I_e}{2\pi I_p} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(R_o - a \cos\theta) (R_o - a (\Lambda+1) \cos\theta)} \quad (V.34)$$

Expandindo o denominador em potências de  $\rho/R_o$  e calculando a integral, obtemos:

$$\bar{q}(a) = \frac{a^2 I_e}{R_o^2 I_p} \left\{ 1 + \frac{a^2}{2 R_o^2} \left[ (\Lambda+2)^2 - (\Lambda+1) \right] \right\} \quad (V.35)$$

Devemos notar que, na borda, a última superfície é circular, portanto, ao fazermos  $\rho=a$ , fizemos uma integração sobre uma superfície de  $\psi$  constante. O valor calculado é apenas um valor médio entre os valores máximo  $q(a,\theta=0)$  e mínimo  $q(a,\theta=\pi)$ .

## CAPÍTULO VI

### PERTURBAÇÕES HELICOIDAIS RESSONANTES

#### VI.1- INTRODUÇÃO

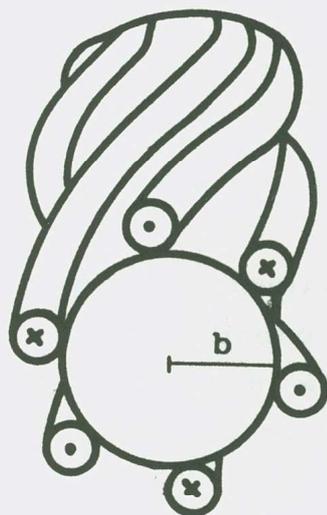
Neste capítulo descreveremos as hélices ressonantes enroladas no tokamak utilizadas para perturbar o plasma em equilíbrio toroidal.

O caso estudado de maior interesse é a perturbação criada por pares de correntes helicoidais, com sentidos opostos em condutores adjacentes, enroladas no tokamak (Fernandes et al 85, Fernandes et al 88). Consideramos também duas expressões para a perturbação criada por uma hélice enrolada no tokamak. Numa delas desprezamos o efeito toroidal (Morozov et al 66) e na outra nós o consideramos (Kucinski et al 87). Obtemos então o invariante aproximado de cada uma das perturbações.

#### VI.2- PERTURBAÇÕES HELICOIDAIS RESSONANTES

Investigaremos nos próximos capítulos o efeito de perturbações magnéticas ressonantes, criadas por correntes elétricas em espiras helicoidais, sobre o equilíbrio toroidal de um plasma em um tokamak. A figura (VI-1) mostra o enrolamento de três pares de hélices no tokamak. O raio da câmara onde estão as hélices é  $b$ .

A importância deste estudo reside no fato de que foi constatado que pares de fios enrolados no tokamak, conduzindo correntes em sentidos opostos nos condutores adjacentes, com helicidades iguais às das superfícies magnéticas podem melhorar a estabilidade do plasma (Pulsator Team 85, Robinson 85, Vanucci et al 88).



FIGURA(VI-1) Três pares de correntes helicoidais ressonantes.

Uma superfície magnética racional é uma superfície em que as linhas do campo magnético se fecham após um determinado número de voltas. A superfície magnética racional é caracterizada pela razão entre os números  $m$  e  $n$ , que são respectivamente o número de voltas toroidais e poloidais que as linhas do campo magnético precisam percorrer para se fechar.

As perturbações helicoidais ressonantes criam ilhas magnéticas ao redor da superfície racional do plasma que tiver a helicidade das correntes helicoidais. Investigamos a formação destas ilhas considerando a superposição do potencial vetor médio de equilíbrio do plasma com o potencial vetor médio da perturbação helicoidal. O campo magnético da perturbação é muito menor que o do equilíbrio, pois a corrente nas hélices é cerca de 5% da corrente de plasma.

Neste capítulo, consideramos um campo magnético estacionário, com simetria helicoidal, numa região do espaço sem correntes elétricas. O potencial escalar é obtido em termos das

correntes helicoidais ao considerarmos as condições de contorno na posição das correntes.

### VI.3- PERTURBAÇÃO HELICOIDAL CILÍNDRICA DE UM FIO

Vamos analisar primeiramente a perturbação criada por um único fio enrolado em um cilindro de raio  $b$ , desprezando o efeito toroidal. Na ausência de correntes elétricas, o campo magnético pode ser descrito por um potencial escalar  $\phi$ , pois o seu rotacional é nulo:

$$\mathbf{B} = \nabla \phi . \quad (\text{VI.1})$$

Como o campo magnético também tem divergente nulo, este potencial escalar satisfaz a equação de Laplace, escrita abaixo em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{VI.2})$$

Estamos aproximando o tokamak por um cilindro onde a direção  $z$  corresponde à direção anteriormente descrita pelo ângulo  $\varphi$  (figura IV-2). Podemos estabelecer a seguinte relação entre  $z$  e o ângulo  $\varphi$ :

$$\varphi = \frac{z}{R_0} \quad (\text{VI.3})$$

Consideramos que o campo magnético possui simetria helicoidal, sendo o enrolamento das hélices descrito pela equação:

$$u = m \theta - \frac{n}{R_0} z = \text{constante.} \quad (\text{VI.4})$$

onde  $m$  e  $n$ , são respectivamente, o número de períodos na direção toroidal e poloidal.

O potencial escalar dependerá então somente das variáveis  $\rho$  e  $u$ . A resolução da equação de Laplace nestas coordenadas está no apêndice D. A solução geral é (Morozov et al. 66):

$$\phi = B_0 z + \sum_{Nm=1}^{\infty} \left[ A_{Nm} K_{Nm}(Nk\rho) + B_{Nm} I_{Nm}(Nk\rho) \right] \text{senNu}, \quad (\text{VI.5})$$

para

$$k = \frac{n}{R_0}. \quad (\text{VI.6})$$

O primeiro termo da equação (VI.5) representa um campo magnético uniforme na direção  $z$ .  $I_{Nm}$  e  $K_{Nm}$  são respectivamente as funções de Bessel modificadas de primeira e de segunda espécie de ordem  $Nm$  (Butkov 78). A solução da equação de Laplace que não diverge na origem ( $\rho = 0$ ) é :

$$\phi = B_0 z + \sum_{Nm=1}^{\infty} B_{Nm} I_{Nm}(Nk\rho) \text{senNu}. \quad (\text{VI.7})$$

Considerando correntes elétricas helicoidais que percorrem condutores com raio  $b$  como condição de contorno para o campo magnético, podemos obter as constantes indeterminadas da equação (VI.7). A expressão final para o potencial escalar interno à distribuição de correntes é (Fernandes et al 85):

$$\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{n}{mR_0} \left[ z + 2b \sum_{Nm=1}^{\infty} K'_{Nm}(Nkb) I_{Nm}(Nk\rho) \text{sen}Nu \right], \quad (\text{VI.8})$$

onde o apóstrofe indica uma derivada em relação ao argumento da função de Bessel.

Conhecendo o potencial escalar, podemos então obter o potencial vetor, igualando as componentes do campo magnético obtido através de cada potencial separadamente. Ou seja:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \quad (\text{VI.9a})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \quad (\text{VI.9b})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho a_\theta \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{VI.9c})$$

Escolhendo um gauge em que  $a_z = 0$  e utilizando a expressão (VI.8) para o potencial escalar, chegamos ao seguinte potencial vetor (apêndice D):

$$a_\rho = - \frac{\mu_0 b I}{\pi \rho} \sum_{Nm=1}^{\infty} K'_{Nm}(Nkb) I_{Nm}(Nk\rho) \text{sen}Nu \quad (\text{VI.10a})$$

$$a_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{n}{mR_0} \left[ \rho - 4b \sum_{Nm=1}^{\infty} K'_{Nm}(Nkb) I'_{Nm}(Nk\rho) \cos Nu \right] \quad (\text{VI.10b})$$

$$a_z = 0 \quad (\text{VI.10c})$$

Tomamos apenas um dos harmônicos da somatória, pois como podemos verificar analisando a expressão resultante do potencial vetor, a amplitude deste diminui conforme o produto  $Nm$  aumenta. Além disso, consideramos a aproximação de pequenos argumentos para as funções de Bessel (Fernandes et al 85), uma vez que estamos considerando  $\rho/R_0 \ll 1$ . Assim,

$$I_p(x) \approx \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left( \frac{x}{2} \right)^p \quad \text{(VI.11a)}$$

$$K_p(x) \approx \frac{\Gamma(p)}{2} \left( \frac{2}{x} \right)^p \quad \text{(VI.11b)}$$

Utilizando as aproximações (VI.11) o potencial vetor fica:

$$a_\rho \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \frac{k}{N} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm-1} \text{sen}N(m\theta - kz) \quad \text{(VI.12a)}$$

$$a_\theta \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{n}{mR_0} \rho + \frac{2R_0}{N n b} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm-1} \text{cos}N(m\theta - kz) \right]. \quad \text{(VI.12b)}$$

Queremos expressar o potencial vetor em termos das coordenadas  $(\rho, \theta, \varphi)$ . Para isto, utilizamos a relação (VI.3) e chegamos a:

$$a_\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \frac{k}{N} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm-1} \text{sen}N(m\theta - n\varphi) \quad \text{(VI.13a)}$$

$$a_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{n}{mR_0} \rho + \frac{2R_0}{N n b} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm-1} \text{cos}N(m\theta - n\varphi) \right] \quad \text{(VI.13b)}$$

O potencial vetor médio é dado pela média em  $\theta$  da

expansão (VI.13), ao longo de um caminho com  $u$  constante. Porém, o potencial vetor só depende de  $\theta$  através da variável  $u$ . Como  $u$  descreve as hélices e é uma constante, o potencial vetor médio é, neste caso, o próprio potencial vetor. Portanto:

$$\bar{a}_\rho = a_\rho \quad (\text{VI.14a})$$

$$\bar{a}_\theta = a_\theta \quad (\text{VI.14b})$$

$$\bar{a}_\varphi = a_\varphi = 0 \quad (\text{VI.14c})$$

Seguindo a análise feita no capítulo IV, a função  $\tilde{\psi}_c$  que descreve as superfícies magnéticas formadas pelo campo magnético destas correntes helicoidais é dada por:

$$\tilde{\psi} = \bar{a}_\theta + \frac{m}{n} \bar{a}_\varphi \quad (\text{VI.15})$$

Neste caso, então:

$$\tilde{\psi}_c = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{n}{mR_0} \rho + \frac{2 R_0}{N n b} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm-1} \cos Nu \right] \quad (\text{VI.16})$$

A figura (VI.2) mostra um corte transversal das superfícies magnéticas descritas pelas superfícies constantes de  $\tilde{\psi}_c$  para  $m=3$ ,  $n=1$ ,  $N=1$ ,  $I=100A$ .

#### VI.4- PERTURBAÇÃO HELICOIDAL DE PARES DE FIOS

Vamos considerar agora  $m$  pares de fios enrolados helicoidalmente numa superfície cilíndrica de raio  $b$ , com os fios adjacentes conduzindo correntes  $I$  em sentidos opostos. O potencial escalar que descreve este problema pode ser expresso como uma somatória do potencial escalar obtido para um fio no item anterior (VI.8). Analisando esta somatória, verificamos que alguns termos têm soma nula e o resultado final, obtido no apêndice D (Fernandes et al

85) é:

$$\Phi = \frac{2 \mu_0 I}{\pi} k \sum_{Nm} K'_{Nm}(Nkb) I_{Nm}(Nk\rho) \operatorname{sen}N(m\theta - kz), \quad (\text{VI.17})$$

sendo  $N$  ímpar.

Utilizando um processo análogo ao descrito no item precedente, obtemos a expressão abaixo para o potencial vetor (apêndice D) relacionado ao potencial escalar (VI.17). Devemos notar que este potencial vetor, a exemplo do caso anterior, também é o potencial vetor médio, pois a dependência em  $\theta$  só ocorre através da variável helicoidal  $u$  que é uma constante sobre as hélices.

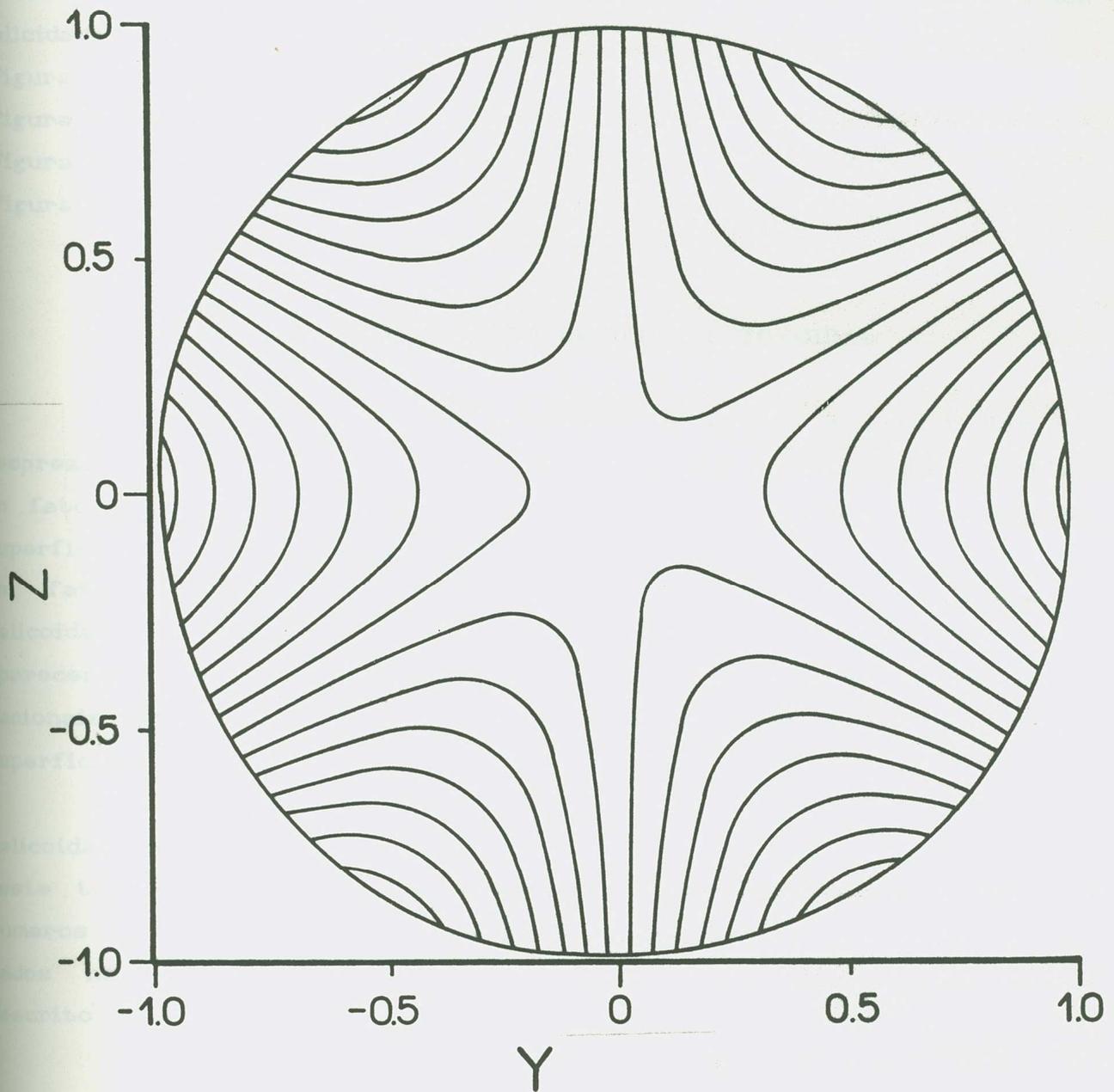
$$\vec{a}_\rho^m = a_\rho^m = \frac{\mu_0 I R_0 m}{\pi b N n} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm-1} \operatorname{sen}N(m\theta - n\varphi) \quad (\text{VI.18a})$$

$$\vec{a}_\theta^m = a_\theta^m = \frac{\mu_0 I R_0 m}{\pi b N n} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm-1} \operatorname{cos}N(m\theta - n\varphi) \quad (\text{VI.18b})$$

$$\vec{a}_\varphi^m = a_\varphi^m = 0 \quad (\text{VI.18c})$$

Com as expressões (VI.15) e (VI.18) obtemos a função  $\tilde{\psi}_m$  que descreve as superfícies magnéticas da perturbação helicoidal gerada por  $m$  pares de fios.

$$\tilde{\psi}_m = \frac{\mu_0 I R_0 m}{\pi b N n} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm-1} \operatorname{cos}Nu \quad (\text{VI.19})$$



FIGURA(VI-2): Superfícies de  $\tilde{\psi}_c$  constante para  $m=3$ ,  $n=1$ ,  $N=1$  corrente na hélice  $I=100A$ , raio maior  $R_0=30$  cm, raio das hélices  $b=11$  cm. As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma  $a=8$ cm.

As figuras (VI.3), (VI.4), (VI.5), (VI.6) mostram um corte num plano  $\varphi$  contante das superfícies de  $\tilde{\psi}_m$  constante para diversas helicidades, com uma corrente na hélice de 100A. As helicidades são respectivamente:

-Figura(VI.3):  $m=2, n=1, N=1$

-Figura(VI.4):  $m=3, n=1, N=1$

-Figura(VI.5):  $m=6, n=2, N=1$

-Figura(VI.6):  $m=4, n=1, N=1$

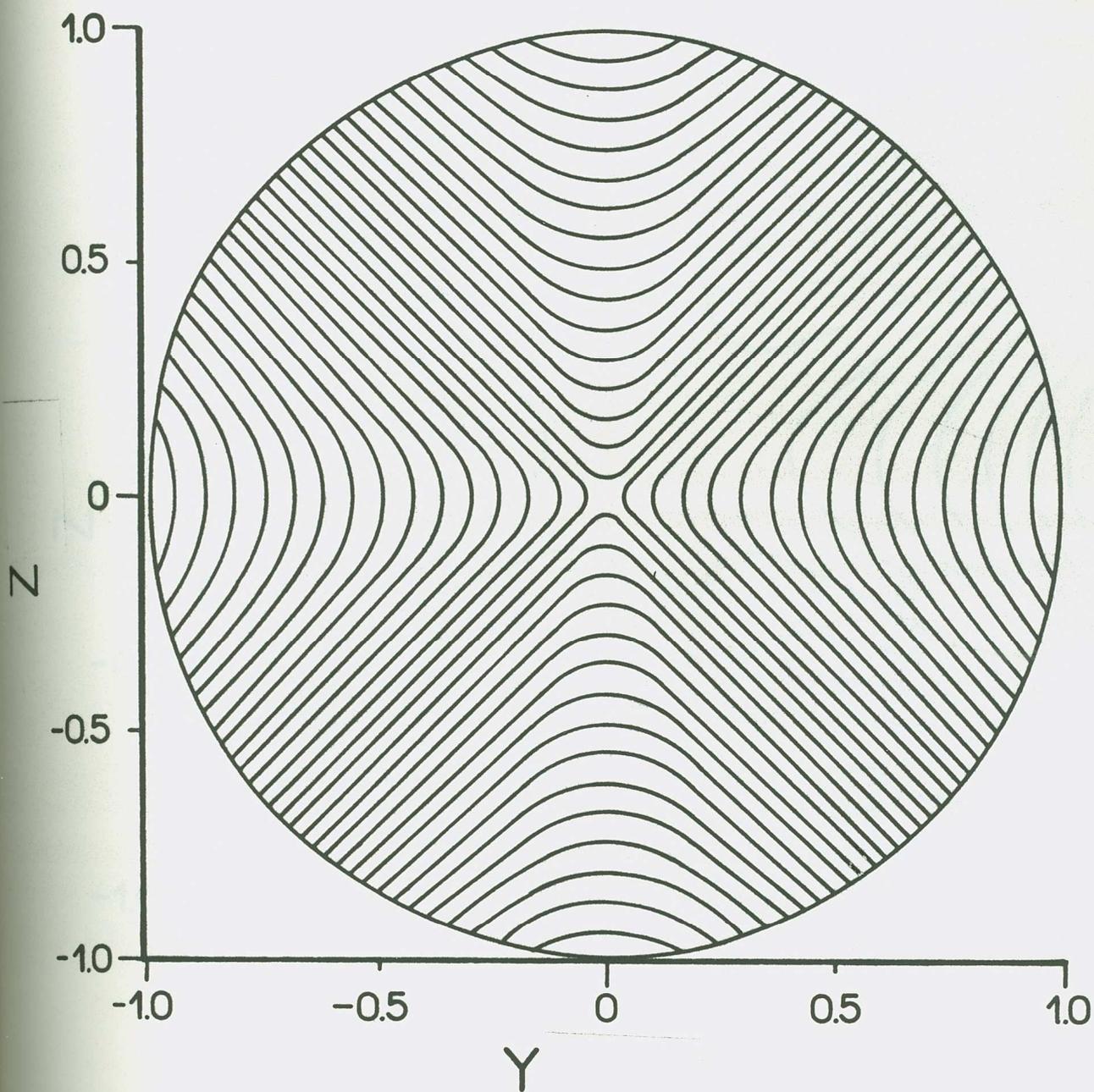
### VI.5- PERTURBAÇÃO HELICOIDAL TOROIDAL

Neste item consideramos o efeito toroidal das hélices, desprezado nos itens anteriores. A importância do efeito toroidal está no fato que ao considerá-lo, aparecem ilhas magnéticas satélites nas superfícies racionais vizinhas às superfícies racionais que tiverem um fator de segurança equivalente à helicidade das correntes helicoidais. Por exemplo, se as correntes tiverem helicidade  $m=3, n=1$ , aparecerão ilhas magnéticas no plasma em torno das superfícies racionais com fator de segurança 3 e ilhas satélites em torno das superfícies com  $q=2$  e  $q=4$ .

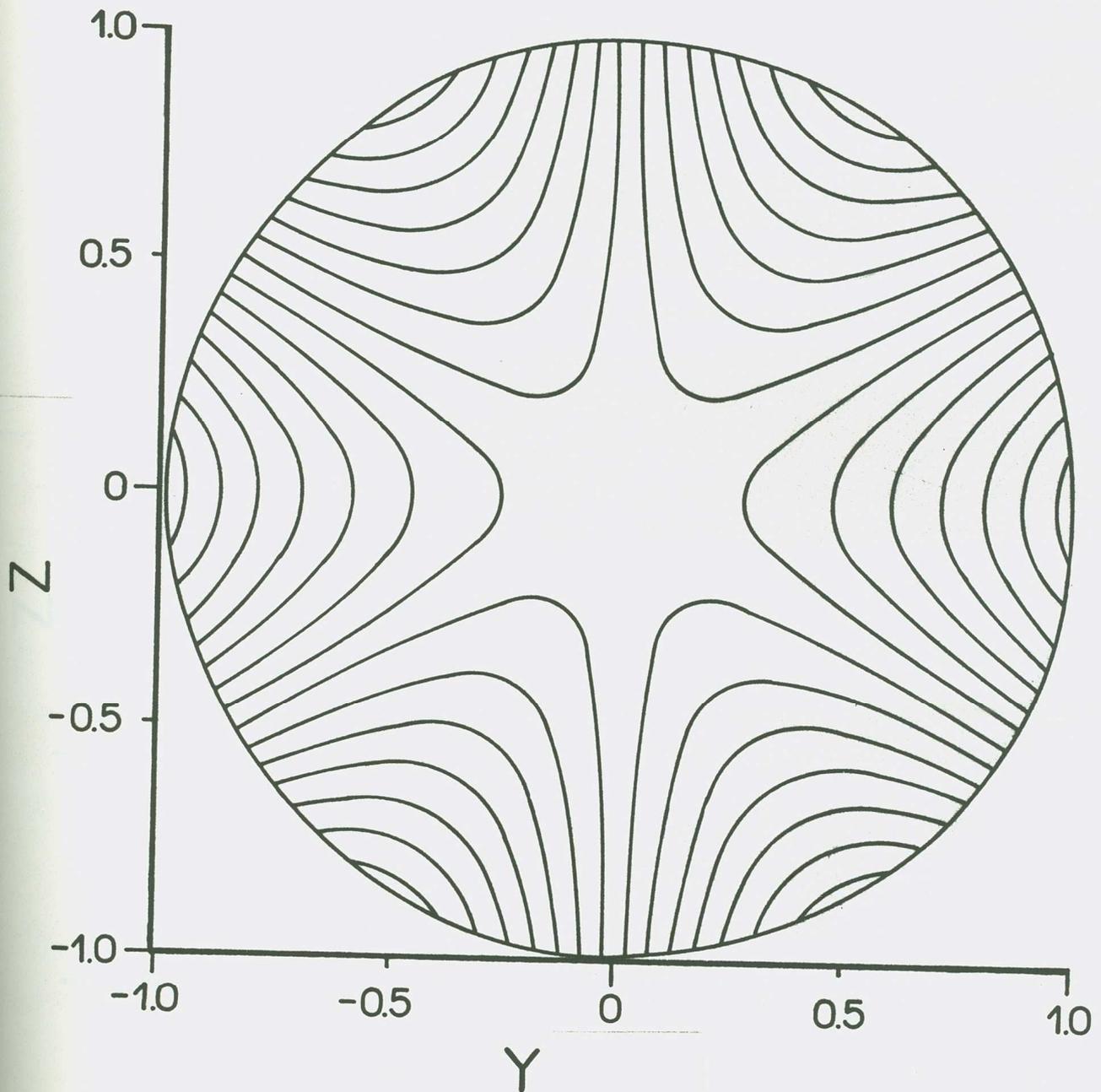
Temos um toróide circular em torno do qual enrolamos helicoidalmente um condutor conduzindo uma corrente  $I$ . O raio maior deste toróide é  $R_0$  e o menor é  $b$ . A helicidade é caracterizada pelos números  $m$  e  $n$  que representam, respectivamente, o número de períodos dados na direção poloidal e toroidal pelo fio. O enrolamento é descrito pela equação:

$$u = m \theta - n \varphi = \text{constante.} \quad (\text{VI.20})$$

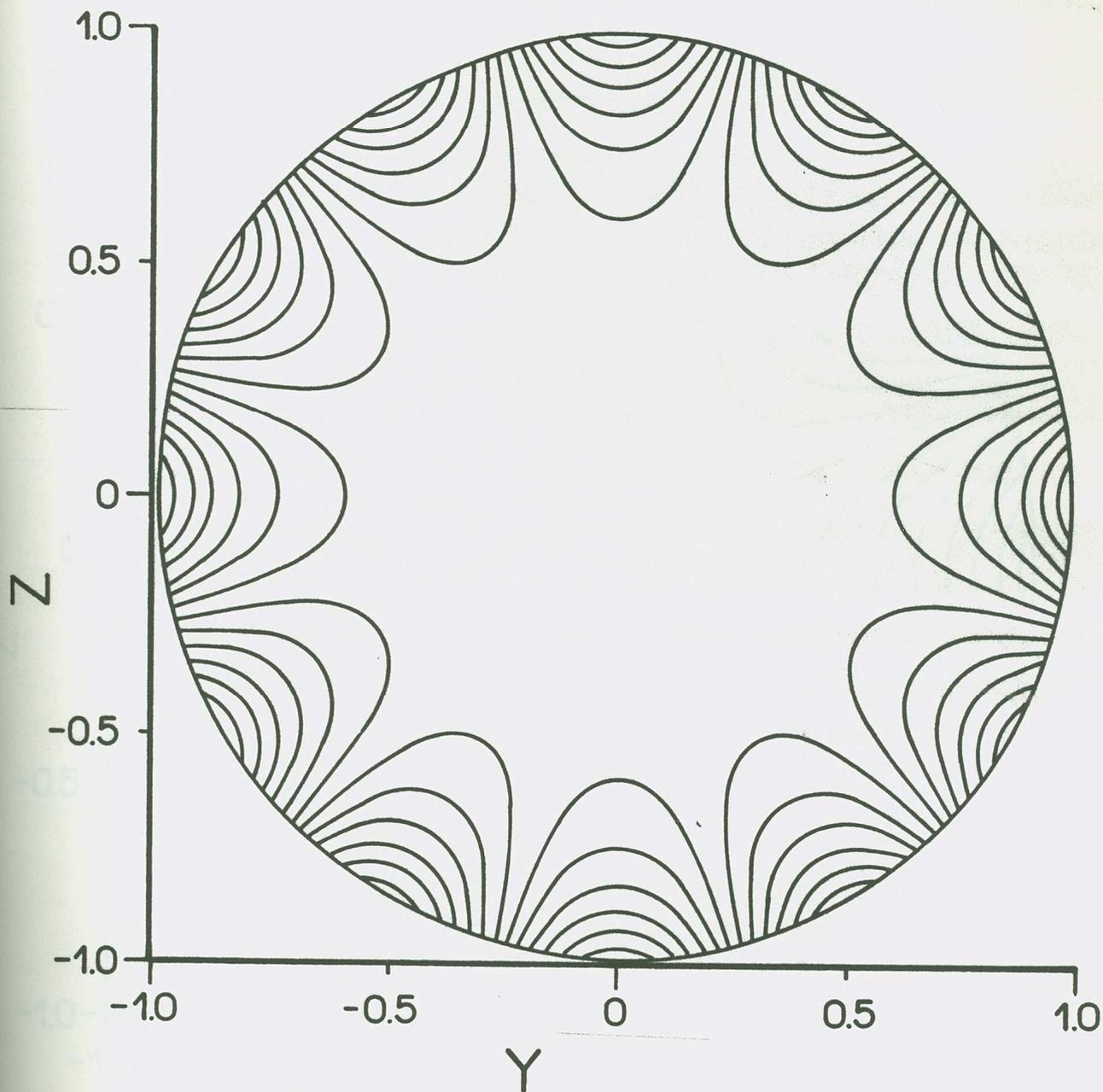
O potencial escalar resultante deste problema é calculado em coordenadas toroidais (Kucinski et al 87). Fazendo uma mudança de variáveis para coordenadas polares locais, considerando um enrolamento linear e tomando apenas o primeiro termo da expansão da função de Bessel, obtemos a seguinte expressão (apêndice D):



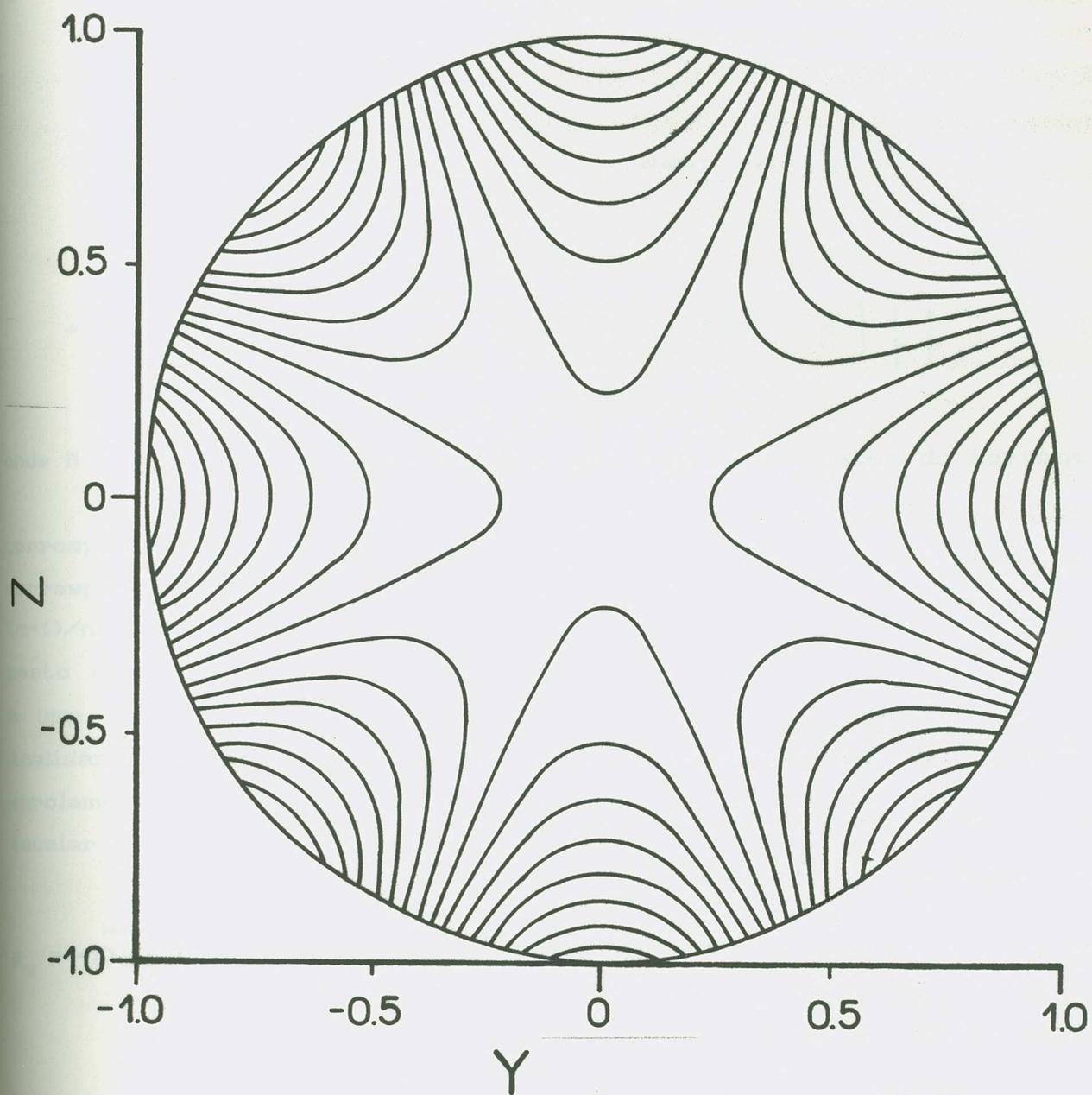
FIGURA(VI-3): Superfícies de  $\tilde{\psi}_m$  constante para  $m=2$ ,  $n=1$ ,  $N=1$  corrente na hélice  $I=100A$ , raio maior  $R_o=30$  cm , raio das hélices  $b=11$  cm. As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma  $a=8$ cm.



FIGURA(VI-4): Superfícies de  $\tilde{\psi}_m$  constante para  $m=3$ ,  $n=1$ ,  $N=1$  corrente na hélice  $I=100A$ , raio maior  $R_o=30$  cm , raio das hélices  $b=11$  cm. As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma  $a=8$ cm.



FIGURA(VI-5): Superfícies de  $\tilde{\psi}_m$  constante para  $m=6$ ,  $n=2$ ,  $N=1$  corrente na hélice  $I=100A$ , raio maior  $R_o=30$  cm, raio das hélices  $b=11$  cm. As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma  $a=8$ cm.



FIGURA(VI-6): Superfícies de  $\tilde{\psi}_m$  constante para  $m=4$ ,  $n=1$ ,  $N=1$  corrente na hélice  $I=100A$ , raio maior  $R_o=30$  cm, raio das hélices  $b=11$  cm. As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma  $a=8$ cm.

$$\begin{aligned}
\phi_t = & (-1)^{Nm+1} \left[ 1 + \frac{\rho}{2R_0} \cos\theta \right] \frac{m \mu_0 I}{\pi N} \left\{ \left[ \frac{\rho}{b} \right]^{Nm} \text{sen}N(m\theta - n\varphi) + \right. \\
& - \frac{b}{4R_0} \left[ \left[ \frac{\rho}{b} \right]^{Nm+1} \frac{Nm+2}{Nm+1} \text{sen} \left[ (Nm-1)\theta - Nn\varphi \right] + \right. \\
& \left. \left. + \left[ \frac{\rho}{b} \right]^{Nm-1} \frac{Nm}{Nm+1} \text{sen} \left[ (Nm+1)\theta - Nn\varphi \right] \right] \right\} \quad \text{(VI.21)}
\end{aligned}$$

onde  $N$  é a harmônica considerada e  $m$  o número de pares de correntes .

Cada termo do potencial escalar dado por (VI.21) corresponde a uma determinada ressonância. O primeiro termo corresponde à ressonância  $m/n$  e os outros dois às ressonâncias  $(m-1)/n$  e  $(m+1)/n$ . Vamos considerar uma ressonância por vez, pois perto das superfícies racionais com fator de segurança correspondente a uma das ressonâncias, a contribuição devido às demais é desprezível. Analisaremos então cada termo separadamente, como se fossem três enrolamentos distintos de hélices. Para a ressonância  $m/n$ , o potencial escalar é dado por:

$$\phi_m = (-1)^{Nm+1} \left[ 1 + \frac{\rho}{2R_0} \right] \frac{m \mu_0 I}{\pi N} \left[ \frac{\rho}{b} \right]^{Nm} \text{sen}N(m\theta - n\varphi). \quad \text{(VI.22)}$$

Vamos calcular o potencial vetor utilizando novamente a expressão de Boozer (Boozer 83)(V.9), que depende dos fluxos do campo magnético. Para obtê-los, devemos calcular primeiramente o campo magnético através do gradiente do potencial escalar.

$$\tilde{B}_\rho = (-1)^{Nm+1} \frac{m \mu_0 I}{\pi N} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \left[ \frac{1}{2R_0} \cos\theta + \left( 1 + \frac{\rho}{2R_0} \cos\theta \right) \frac{Nm}{\rho} \right] \text{sen}N(m\theta - n\varphi) \quad (\text{VI.23a})$$

$$\tilde{B}_\theta = (-1)^{Nm+1} \frac{m \mu_0 I}{\pi N} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \left[ -\frac{1}{2R_0} \text{sen}\theta \text{sen}N(m\theta - n\varphi) + \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2R_0} \cos\theta \right) Nm \right] \text{cos}N(m\theta - n\varphi) \quad (\text{VI.23b})$$

$$\tilde{B}_\varphi = -(-1)^{Nm+1} \frac{m \mu_0 I}{\pi N} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \frac{Nn}{R_0} \left[ 1 + \frac{3\rho}{2R_0} \cos\theta \right] \text{cos}N(m\theta - n\varphi) \quad (\text{VI.23c})$$

Como o fluxo toroidal de um campo magnético é definido como:

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_t = \frac{1}{2\pi} \int_0^\rho \int_0^\theta B_\varphi \rho \, d\rho \, d\theta, \quad (\text{VI.24})$$

chegamos que o fluxo toroidal neste caso é :

$$\chi_t = -(-1)^{Nm+1} \frac{1}{2\pi^2} \frac{m \mu_0 I n}{R_0} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \left\{ \frac{\rho^2}{Nm+2} \frac{\text{sen}N(m\theta - n\varphi)}{Nm} + \right.$$

$$+ - \frac{3 \rho^2}{4 R_o (Nm+3)} \left[ \frac{\text{sen}\{(Nm+1)\theta - Nn\varphi\}}{(Nm+1)} + \frac{\text{sen}\{(Nm-1)\theta - Nn\varphi\}}{(Nm-1)} \right] \} \quad (VI.25)$$

O fluxo poloidal é por sua vez :

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^\rho B_\theta 2\pi R d\rho = \int_0^\rho B_\theta (R_o - \rho \cos\theta) d\rho \quad (VI.26)$$

Utilizando a equação (VI.23b) e a definição (VI.26), obtemos o fluxo poloidal:

$$\begin{aligned} \Gamma_t = (-1)^{Nm+1} \frac{m \mu_o I}{\pi N} \left[ \frac{\rho}{b} \right]^{Nm} & \left\{ - \frac{\rho \text{sen}\theta \text{sen}N(m\theta - n\varphi)}{(Nm+1)} + \right. \\ & + \left[ \frac{R_o}{Nm} + \frac{\rho \cos\theta}{2(Nm+1)} \right] Nm \cos N(m\theta - n\varphi) - \frac{\rho^2}{2 R_o} \\ & \frac{\text{sen}\theta \cos\theta \text{sen}N(m\theta - n\varphi)}{(Nm+2)} - \left[ \frac{\rho}{(Nm+1)} + \frac{\rho^2 \cos\theta}{2 R_o (Nm+2)} \right] \\ & \left. Nm \cos\theta \cos N(m\theta - n\varphi) \right\} \quad (VI.27) \end{aligned}$$

O potencial vetor relacionado a estes fluxos é:

$$\mathbf{a}^t = \chi_t \nabla \theta - \Gamma_t \nabla \varphi = \frac{1}{\rho} \chi_t \hat{e}_\theta - \frac{1}{R_o - \rho \cos\theta} \Gamma_t \hat{e}_\varphi \quad (VI.28)$$

Portanto:

$$a_{\rho}^t = 0$$

(VI.29a)

$$a_{\theta}^t = - (-1)^{Nm+1} \frac{m \mu_0 I n}{2\pi^2 R_0} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \left\{ \frac{\rho \operatorname{sen} N(m\theta - n\varphi)}{(Nm+2) N m} + \right. \\ \left. + \frac{3 \rho^2}{4 R_0 (Nm+3)} \left[ \frac{\operatorname{sen} \{(Nm+1)\theta - Nn\varphi\}}{(Nm+1)} + \frac{\operatorname{sen} \{(Nm-1)\theta - Nn\varphi\}}{(Nm-1)} \right] \right\}$$

(VI.29b)

$$a_{\varphi}^t = (-1)^{Nm+1} \frac{m \mu_0 I}{\pi N} \frac{1}{(R_0 - \rho \cos \theta)} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \left\{ \frac{\rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} N(m\theta - n\varphi)}{(Nm+1)} + \right. \\ \left. - \left[ \frac{R_0}{Nm} + \frac{\rho \cos \theta}{2 (Nm+1)} \right] Nm \cos N(m\theta - n\varphi) + \frac{\rho^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen} N(m\theta - n\varphi)}{2 R_0 (Nm+2)} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\rho}{(Nm+1)} + \frac{\rho^2 \cos \theta}{2 R_0 (Nm+2)} \right] N m \cos \theta \cos N(m\theta - n\varphi) \right\}.$$

(VI.29c)

Queremos calcular o potencial vetor médio. Para isto, precisamos expandir o denominador de  $a_{\varphi}^t$ . Diferente do que fizemos para o equilíbrio, vamos manter os termos da expansão até  $\rho/R_0$ . Isto se justifica porque a amplitude das correntes das hélices toroidais é considerada como uma perturbação e não teria sentido tratá-la como o equilíbrio.

A expressão aproximada para  $a_{\varphi}^t$  é :

$$\begin{aligned}
a_{\rho}^t = & (-1)^{Nm+1} \frac{m \mu_0 I}{\pi N R_0} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \left( 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta \right) \left\{ \frac{\rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}N(m\theta - n\varphi)}{2(Nm+1)} + \right. \\
& - \left[ \frac{R_0}{Nm} + \frac{\rho \cos\theta}{2(Nm+1)} \right] Nm \cos N(m\theta - n\varphi) + \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{sen}N(m\theta - n\varphi)}{2 R_0 (Nm+2)} + \\
& \left. + \left[ \frac{\rho}{(Nm+1)} + \frac{\rho^2 \cos\theta}{2 R_0 (Nm+2)} \right] N m \cos\theta \cos N(m\theta - n\varphi) \right\}. \quad \text{(VI.30)}
\end{aligned}$$

Calculando a média em  $\theta$  em um caminho de  $u$  constante nas componentes do potencial vetor e lembrando que

$$u = m\theta - n\varphi$$

é uma constante, temos:

$$a_{\rho}^t = 0 \quad \text{(VI.31a)}$$

$$a_{\theta}^t = -(-1)^{Nm+1} \frac{\mu_0 I n}{2\pi^2 N R_0} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \frac{\rho}{(Nm+2)} \operatorname{sen}N(m\theta - n\varphi) \quad \text{(VI.31b)}$$

$$a_{\varphi}^t = -(-1)^{Nm+1} \frac{m \mu_0 I}{\pi N} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \cos N(m\theta - n\varphi). \quad \text{(VI.31c)}$$

Conforme explicamos no capítulo IV, o invariante que descreve as superfícies magnéticas médias é então dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_t = & - (-1)^{Nm+1} \frac{\mu_0 I n}{2\pi^2 N R_0} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \frac{\rho}{(Nm+2)} \text{sen}N(m\theta-n\varphi) + \\ & - (-1)^{Nm+1} \frac{m^2 \mu_0 I}{\pi N n} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \text{cos}N(m\theta-n\varphi) . \end{aligned} \quad (\text{VI.32})$$

A figura (VI-7) mostra um corte transversal das linhas de  $\tilde{\psi}_t$  constante para  $m=3, n=1, N=1, I=100A$ .

Para as duas outras ressonâncias devemos seguir o mesmo procedimento a partir da expressão do potencial escalar para a obtenção do potencial vetor médio. Estes cálculos estão descritos no apêndice D. Para a ressonância  $(m-1)/n$ , obtivemos:

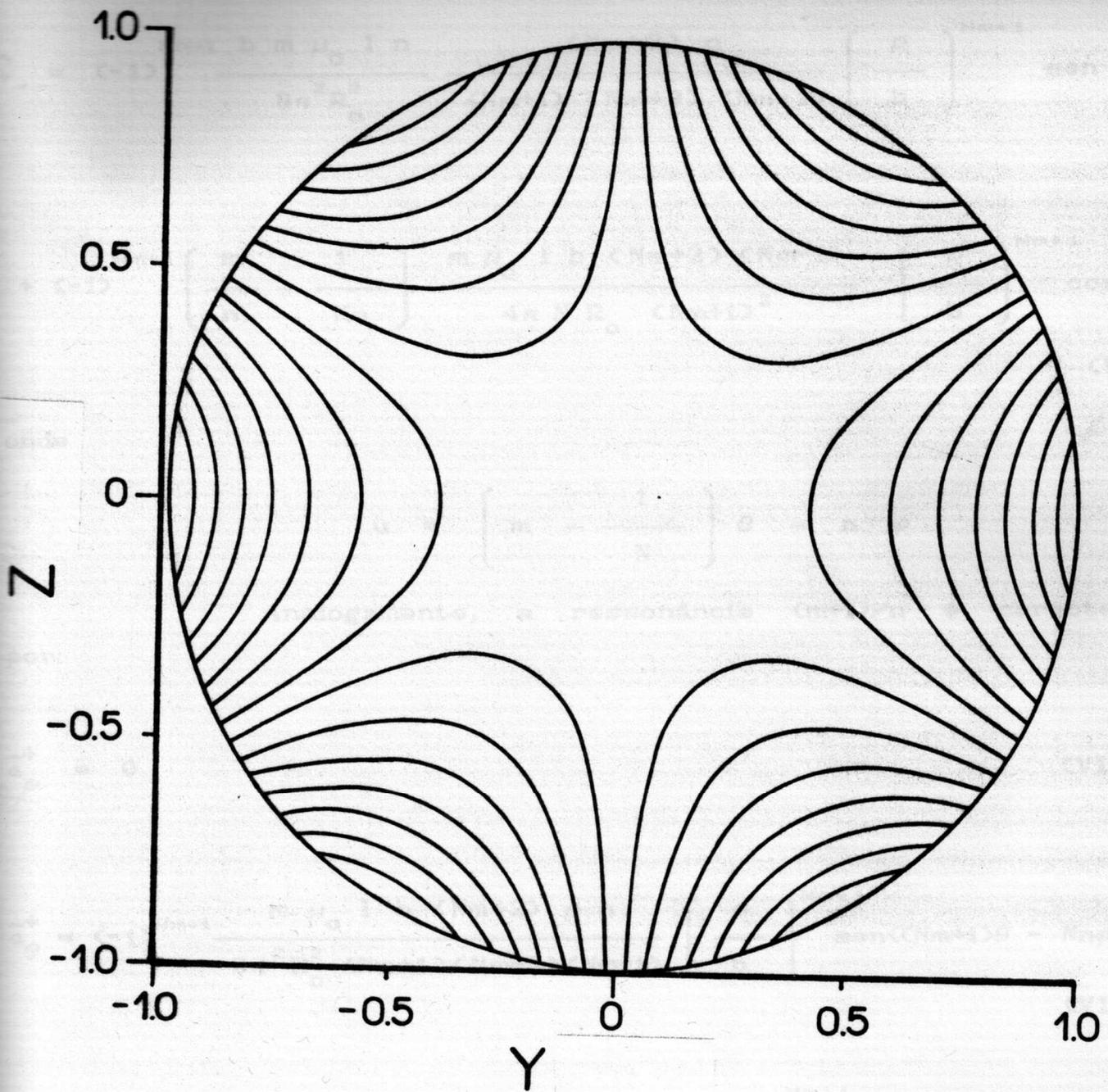
$$\bar{a}_\rho^- = 0 \quad (\text{VI.33a})$$

$$\bar{a}_\theta^- = (-1)^{Nm+1} \frac{b m n \mu_0 I}{8\pi^2 R_0^2} \frac{(Nm+2) \rho}{(Nm+1)(Nm+3)(Nm-1)} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm+1} \text{sen}[(Nm-1)\theta - Nn\varphi] \quad (\text{VI.33b})$$

$$\bar{a}_\varphi^- = (-1)^{Nm+1} \frac{m \mu_0 I b (Nm+2) (Nm-1)}{4\pi N R_0 (Nm+1)^2} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm+1} \text{cos}((Nm-1)\theta - Nn\varphi) . \quad (\text{VI.33c})$$

O invariante desta ressonância é :

$$\tilde{\psi}_- = \bar{a}_\theta^- + \left( \frac{m}{n} - \frac{1}{Nn} \right) \bar{a}_\varphi^- \quad (\text{VI.34})$$



FIGURA(VI-7): Superfícies de  $\tilde{\psi}_t$  constante para  $m=3$ ,  $n=1$ ,  $N=1$  corrente na hélice  $I=100A$ , raio maior  $R_0=30$  cm , raio das hélices  $b=11$  cm. As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma  $a=8$ cm.

Ou seja:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_- = & (-1)^{Nm+1} \frac{b m \mu_o I n}{8\pi^2 R_o^2} \frac{(Nm+2) \rho}{(Nm+1)(Nm+3)(Nm-1)} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm+1} \text{sen } Nu + \\ & + (-1)^{Nm+1} \left[ \frac{m}{n} - \frac{1}{Nn} \right] \frac{m \mu_o I b (Nm+2)(Nm-1)}{4\pi N R_o (Nm+1)^2} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm+1} \text{cos } Nu, \end{aligned} \quad \text{(VI.35)}$$

onde

$$u = \left[ m - \frac{1}{N} \right] \theta - n \varphi \quad \text{(VI.36)}$$

Analogamente, a ressonância  $(m+1)/n$  é caracterizada por:

$$\frac{\tilde{a}_\rho^+}{\rho} = 0 \quad \text{(VI.37a)}$$

$$\frac{\tilde{a}_\theta^+}{\theta} = (-1)^{Nm+1} \frac{m \mu_o I b (Nm+2) \rho n}{8\pi^2 R_o^2 (Nm+1)(Nm+3)(Nm-1)} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm+1} \text{sen}((Nm+1)\theta - Nn\varphi) \quad \text{(VI.37b)}$$

$$\frac{\tilde{a}_\varphi^+}{\varphi} = (-1)^{Nm+1} \frac{m \mu_o I b (Nm-1)(Nm+2)}{4\pi N R_o (Nm+1)^2} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm+1} \text{cos}((Nm+1)\theta - Nn\varphi), \quad \text{(VI.37c)}$$

E o invariante correspondente é :

$$\begin{aligned} \psi_+ = & (-1)^{Nm+1} \frac{m \mu_0 I b (Nm+2) \rho n}{8\pi^2 R_0^2 (Nm+1)(Nm+3)(Nm-1)} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm+1} \text{senNu} + \\ & + \left( \frac{m}{n} + \frac{1}{Nn} \right) (-1)^{Nm+1} \frac{m \mu_0 I b (Nm-1)(Nm+2)}{4\pi N R_0 (Nm+1)^2} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm+1} \text{cosNu}, \end{aligned} \quad (\text{VI.38})$$

onde

$$u = \left( m + \frac{1}{N} \right) \theta - n \varphi. \quad (\text{VI.39})$$

## CAPÍTULO VII

### ILHAS MAGNÉTICAS MÉDIAS

#### VII.1- INTRODUÇÃO

Obtemos neste capítulo o invariante médio que descreve o equilíbrio superposto a uma perturbação helicoidal ressonante. Devido à perturbação, aparecem ilhas magnéticas ao redor das superfícies magnéticas médias que possuem um fator de segurança médio correspondente à helicidade da perturbação. Calculamos a largura destas ilhas magnéticas e analisamos o efeito da pressão do plasma sobre as mesmas..

#### VII.2-INVARIANTE DA SUPERPOSIÇÃO DO EQUILÍBRIO COM AS HÉLICES

O invariante aproximado que descreve as superfícies magnéticas do equilíbrio toroidal de Shafranov, perturbado por correntes helicoidais ressonantes, será dado pela superposição do invariante médio do equilíbrio com o invariante da perturbação, ou seja:

$$\psi = \Psi + \tilde{\psi} . \quad (\text{VII.1})$$

Vamos justificar a utilização desta expressão. O potencial vetor total do sistema é dado aproximadamente pela soma do potencial vetor do equilíbrio com o potencial vetor da perturbação, pois consideramos que a amplitude da perturbação é muito menor que a

amplitude do equilíbrio:

$$\vec{A} \simeq \vec{\mathcal{A}} + \vec{a} . \quad (\text{VII.2})$$

O potencial vetor médio é calculado através de uma integração no ângulo poloidal de 0 a  $2\pi$  . Utilizando as propriedades da integração:

$$\vec{A} \simeq \vec{\mathcal{A}} + \vec{a} \quad (\text{VII.3})$$

Portanto:

$$\vec{A}_i \simeq \vec{\mathcal{A}}_i + \vec{a}_i \quad (\text{VII.4})$$

Como o invariante médio é definido como:

$$\psi = \vec{A}_\theta + \frac{m}{n} \vec{A}_\varphi , \quad (\text{VII.5})$$

substituindo (VII.4) em (VII.5) chegamos que:

$$\psi = \left[ \vec{\mathcal{A}}_\theta + \frac{m}{n} \vec{\mathcal{A}}_\varphi \right] + \left[ \vec{a}_\theta + \frac{m}{n} \vec{a}_\varphi \right] . \quad (\text{VII.6})$$

Cada um dos colchetes da equação (VII.6) foi calculado anteriormente como o invariante médio do equilíbrio  $\Psi$  e da perturbação  $\tilde{\psi}$  , respectivamente. Teremos então um invariante total médio definido como:

$$\psi(\rho, u) = \Psi(\rho) + \tilde{\psi}(\rho, u) . \quad (\text{VII.7})$$

### VII.3- LARGURA DE ILHAS MAGNÉTICAS

Utilizando a forma do invariante médio (VII.7) e expandindo-o ao redor da superfície racional, podemos obter uma expressão para a largura das ilhas magnéticas que aparecem em torno das superfícies magnéticas médias. Lembrando que a amplitude da perturbação é muito menor que a do equilíbrio

$$|\tilde{\psi}| \ll |\Psi|, \quad (\text{VII.8})$$

expandimos então  $\psi$  em série de Taylor em torno de uma superfície racional média, de onde:

$$\psi(\rho, u) \approx \Psi(\rho_0) + \Psi'(\rho_0) (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \Psi''(\rho_0) (\rho - \rho_0)^2 + \tilde{\psi}(\rho_0, u), \quad (\text{VII.9})$$

onde o apóstrofe indica uma derivada em relação a  $\rho$  e  $\rho_0$  é o raio da superfície racional média.

Sabemos que em uma superfície racional a derivada de  $\psi$  é nula (Fernandes et al 85, Fernandes et al 88). Como veremos mais adiante que há formação de ilhas em torno das superfícies magnéticas médias, consideraremos na obtenção das larguras destas ilhas que:

$$\Psi'(\rho_0) = 0 \quad (\text{VII.10})$$

Como as superfícies racionais são descritas pelas linhas de  $\psi$  constante chegamos então a:

$$\psi(\rho, u) = \Psi(\rho_0) + \frac{1}{2} \Psi''(\rho_0) (\rho - \rho_0)^2 + \tilde{\psi}(\rho_0, u) = C, \quad (\text{VII.11})$$

onde C é uma constante arbitrária. Ou seja:

$$\rho - \rho_0 = \pm \sqrt{\frac{2}{|\Psi(\rho_0)|} \left[ C - \Psi(\rho_0) - \tilde{\psi}(\rho_0, u) \right]} \quad (\text{VII.12})$$

Denominando:

$$C - \Psi(\rho_0) = K, \quad (\text{VII.13})$$

ficamos com a seguinte expressão:

$$\rho - \rho_0 = \pm \sqrt{\frac{2}{|\Psi(\rho_0)|} \left[ K - \tilde{\psi}(\rho_0, u) \right]} \quad (\text{VII.14})$$

No capítulo VI obtivemos que os invariantes da perturbação são do tipo:

$$\tilde{\psi}(\rho_0) = f(\rho_0) \cos N(m\theta - n\varphi) \quad (\text{VII.15})$$

Substituindo (VII.15) em (VII.14), temos:

$$\rho - \rho_0 = \pm \left\{ \frac{2}{|\Psi(\rho_0)|} \left[ K + f(\rho_0) \cos N(m\theta - n\varphi) \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{VII.16})$$

Escolhendo o plano  $\varphi = 0$ , vem:

$$\rho - \rho_0 = \pm \left\{ \frac{2}{|\Psi(\rho_0)|} \left[ K + f(\rho_0) \cos Nm\theta \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{VII.17})$$

Vamos analisar detalhadamente a equação (VII.17). Se  $K > f(\rho_0)$ , para qualquer valor de  $\theta$ , teremos sempre  $(\rho - \rho_0) > 0$  ou  $(\rho - \rho_0) < 0$ . Estamos portanto fora da ilha magnética. Quando  $K = f(\rho_0)$  a equação (VII.17) fica:

$$\rho - \rho_s = \pm \left\{ \frac{2 f(\rho_s)}{|\Psi(\rho_s)|} \left[ 1 + \cos Nm\theta \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{VII.18})$$

A expressão (VII.18) será nula sobre a superfície racional. Isto ocorre se  $(1 + \cos Nm\theta) = 0$ , ou seja,  $\theta = \pm\pi/Nm, \pm 3\pi/Nm, \dots$ . As semi-larguras das ilhas magnéticas são obtidas quando a expressão (VII.18) é máxima, ou seja, para  $(1 + \cos Nm\theta) = 2$ , em  $\theta = \pm 2\pi/Nm, \pm 3\pi/Nm, \dots$ . Portanto as semi-larguras das ilhas magnéticas são dadas por :

$$\Delta\rho_s = \left\{ \frac{4 f(\rho_s)}{|\Psi(\rho_s)|} \right\}^{1/2}. \quad (\text{VII.19})$$

#### VII.4- PARÂMETROS NUMÉRICOS UTILIZADOS

Para analisarmos as ilhas magnéticas formadas ao redor das superfícies magnéticas médias, devemos nos certificar primeiramente que, no equilíbrio não perturbado, existem superfícies racionais com fatores de segurança correspondentes à helicidade das correntes ressonantes. Precisamos portanto estimar numericamente a variação do fator de segurança no plasma. Utilizaremos sempre os seguintes parâmetros (referentes ao TBR-1).

- Raio menor :  $a = 8$  cm.
- Raio maior :  $R_0 = 30$  cm.
- Raio das hélices :  $b = 11$ cm.
- Corrente nas hélices :  $I = 100$ A.
- Corrente total nas bobinas :  $I_0 = 600$ kA.

Se considerarmos fixa a corrente total nas bobinas, o fator de segurança variará apenas com a corrente de plasma  $I_p$ . Afim de analisarmos a formação das ilhas magnéticas em torno de determinadas superfícies magnéticas médias, devemos impor que o fator

de segurança do plasma tenha em alguma região o valor de ressonância. Portanto, nós utilizaremos vários valores para a corrente de plasma, de acordo com a ressonância que queremos que apareça no mesmo.

O parâmetro  $\Lambda$  já foi calculado experimentalmente para o TBR-1, e o valor obtido foi 0,28 (Ueta 85). Também empregaremos o valor  $\Lambda=-1$ , que corresponde ao limite em que a razão entre as pressões cinética e magnética do plasma é nula.

No capítulo V, obtivemos uma expressão para o fator de segurança médio na borda do plasma. Utilizando os parâmetros acima, e diversos valores da corrente de plasma, obtemos a seguinte variação para o fator de segurança na borda do plasma ( $\rho=a$ ), que utilizaremos no próximos itens. Estes valores estão descritos na tabela (VII-1).

$\bar{q}(a)$	$\Lambda$	$I_P$ (kA)	m/n
2,1	0,28	23	2
2,7	0,28	18	3
2,5	-1	18	3
2,9	0,28	17	3
4,0	0,28	12	4

TABELA (VII-1) : Variação do fator de segurança médio na borda do plasma com a corrente de plasma e  $\Lambda$ . Apontamos também qual a ressonância presente neste intervalo.

O fator de segurança varia em cada superfície, e calculamos a média do mesmo sobre a superfície mais externa. Portanto, se  $\bar{q}(a) \approx 2,7$ , isto não implica que não apareça uma região onde  $q=3$ , uma vez que  $q(a, \theta=0) = 4,9$  e  $q(a, \theta=\pi) = 1,4$ . Assim, nesta superfície deve haver uma região onde  $q=3$ .

Devemos observar ainda que a variação do fator de segurança do centro até a borda do plasma é muito pequena (Okano 89), não aparecendo duas regiões de ressonância para o mesmo valor de corrente de plasma. Devido a este fato, não poderemos analisar as ilhas

magnéticas satélites que apareceriam nas duas ressonâncias vizinhas à ressonância de mesma helicidade da perturbação.

#### V.5-EQUILÍBRIO PERTURBADO POR PARES DE HÉLICES CILÍNDRICAS

Vamos considerar primeiramente o efeito de  $m$  pares de hélices ressonantes enroladas em um cilindro de raio  $b$  (desprezando o efeito toroidal), perturbando o equilíbrio toroidal descrito no capítulo V. Segundo a equação (VII.7) o invariante aproximado que descreve tal situação é a soma do invariante médio do equilíbrio com o invariante médio da perturbação. Utilizando estes invariantes médios, calculados nas expressões (V.26) e (VI.19), respectivamente, chegamos ao seguinte invariante:

$$\psi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ C \left[ \frac{\rho}{2} + \frac{\rho^3}{8 R_o^2} + \frac{\rho^5}{16 R_o^4} \right] - \frac{D \rho^3}{8 C a^2} - \frac{D}{2 C} (\Lambda+1) \right. \\ \left. \left[ \frac{\rho^3}{8 R_o^2} + \frac{\rho^5}{12 a^2 R_o^2} \right] + \frac{m}{n} I_p \left[ 1 + \frac{\rho^2}{2 R_o^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \left( 1 + \frac{\rho^2}{2 R_o^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho^2}{2 R_o^2} (\Lambda+1) + \frac{\rho^4}{2 a^2 R_o^2} (\Lambda+1) \right] \right\} + \frac{\mu_0 I m R_o}{\pi N n b} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm-1} \cos Nu \quad (VII.20)$$

As figuras (VII-1), (VII-2), (VII-3), (VII-4), mostram as curvas de  $\psi_m$  constante para diversas helicidades e correntes de plasma, utilizando os parâmetros do item (IV) e  $\Lambda=0,28$ .

Notamos que estas figuras mostram que nossa estimativa de  $q$  na borda está correta, pois aparecem as ilhas magnéticas esperadas para cada valor de corrente de plasma. Tentamos obter para

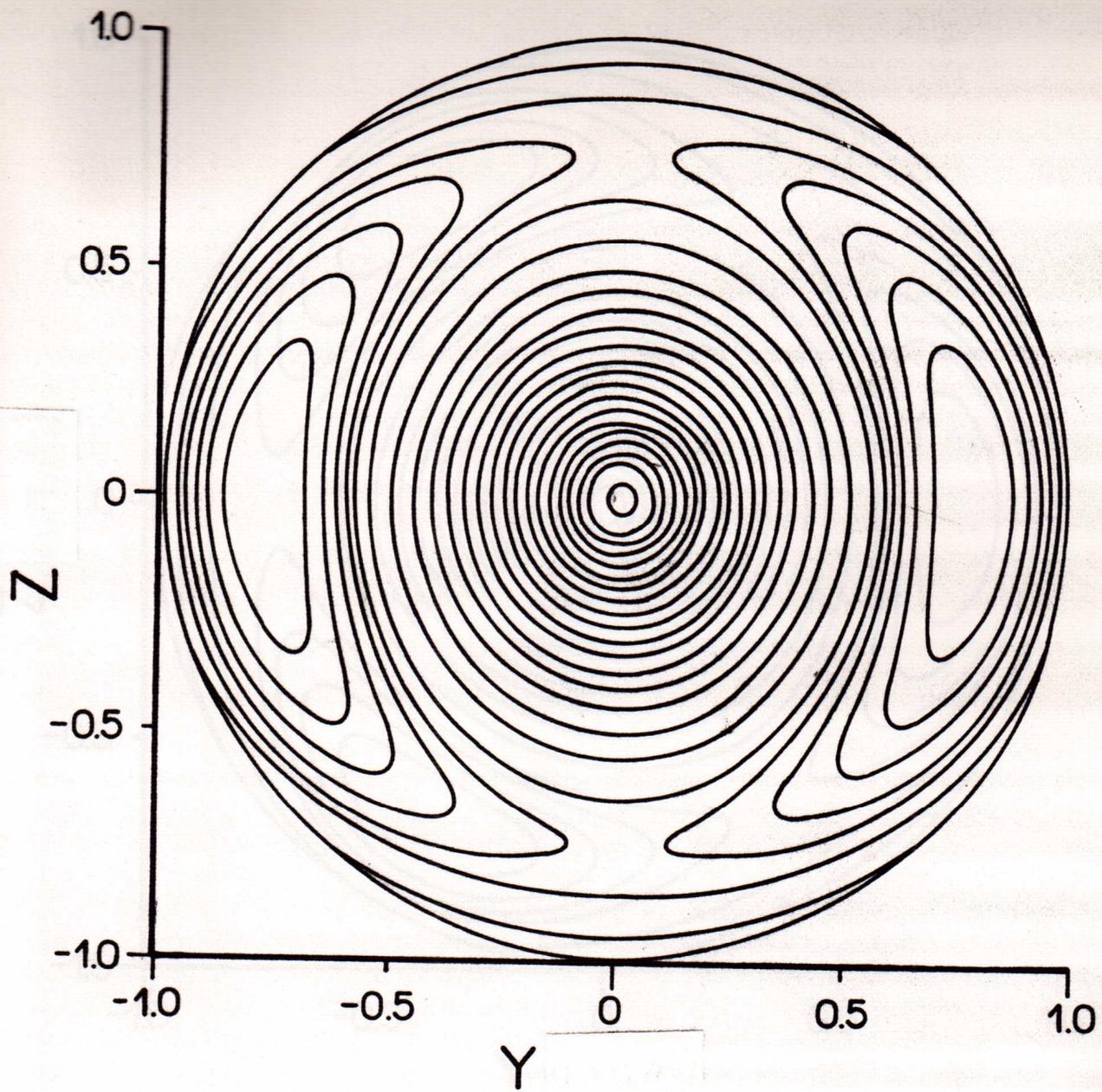


FIGURA (VII-1) : Curvas de  $\psi_m$  constante para :  $m=2$ ,  $n=1$ ,  $N=1$ ,  $I_p=25\text{kA}$ ,  $I_e=600\text{kA}$ ,  $I=100\text{A}$ ,  $a=8\text{cm}$ ,  $b=11\text{cm}$ ,  $R_o=30\text{cm}$ ,  $\Lambda=0,28$ . As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma

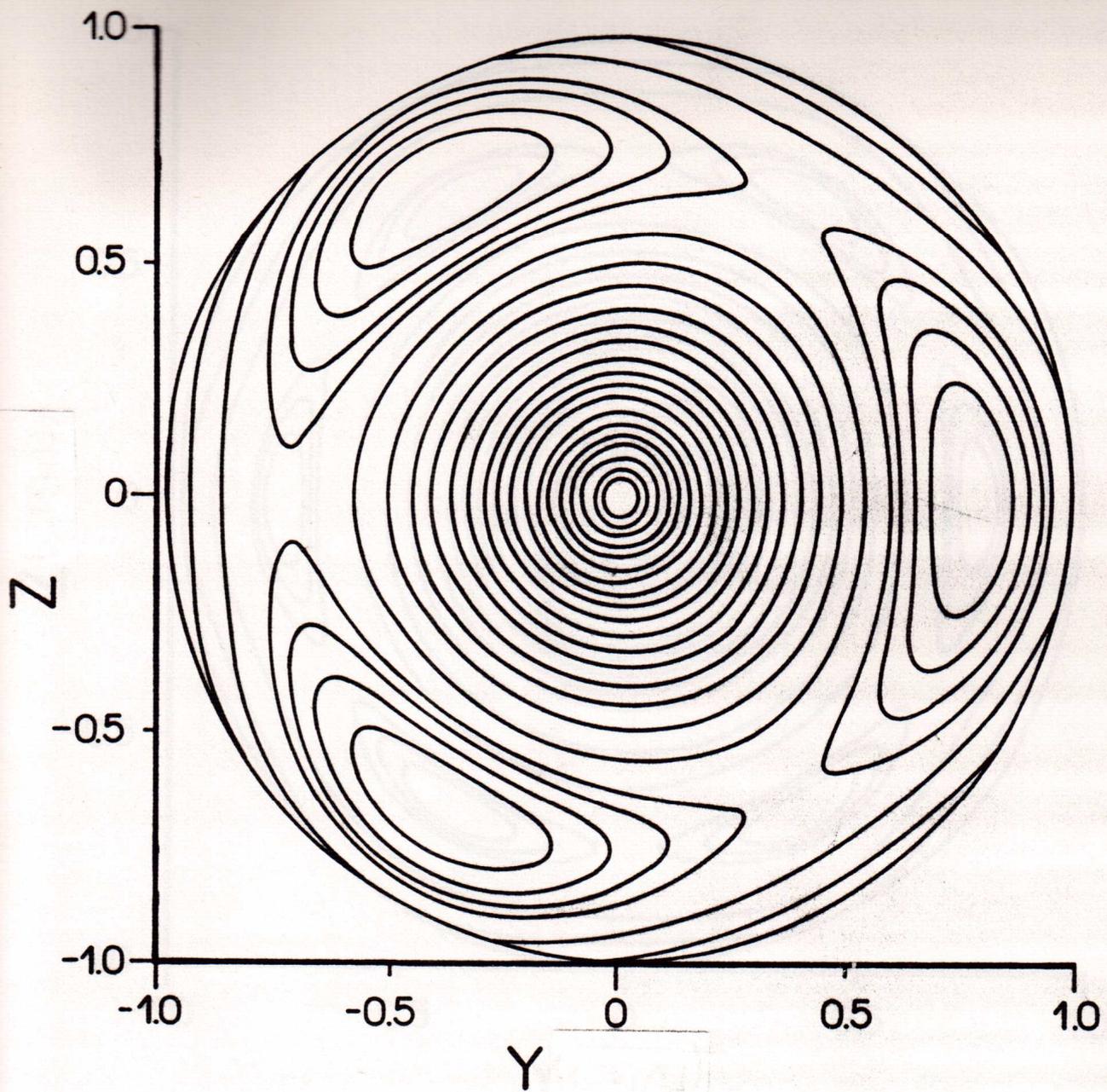


FIGURA (VII-2) : Curvas de  $\psi_m$  constante para :  $m=3$ ,  $n=1$ ,  $N=1$ ,  $I_p=25\text{kA}$ ,  $I_e=600\text{kA}$ ,  $I=100\text{A}$ ,  $a=8\text{cm}$ ,  $b=11\text{cm}$ ,  $R_o=30\text{cm}$ ,  $\Lambda=0,28$ . As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma.

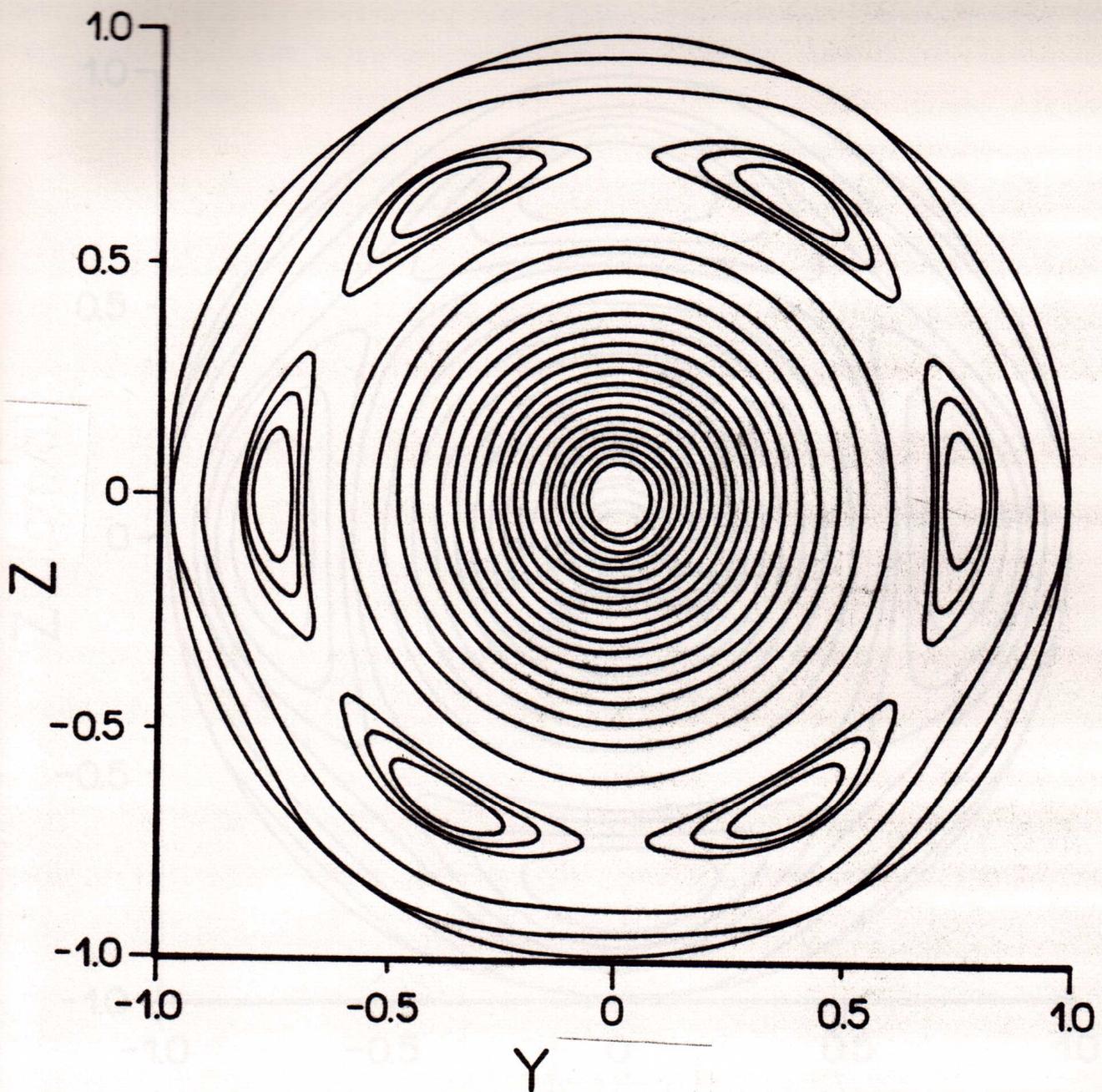


FIGURA (VII-3) : Curvas de  $\psi_m$  constante para :  $m=6$ ,  $n=2$ ,  $N=1$ ,  $I_p=25kA$ ,  $I_e=600kA$ ,  $I=100A$ ,  $a=8cm$ ,  $b=11cm$ ,  $R_o=30cm$ ,  $\Lambda=0,28$ . As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma.

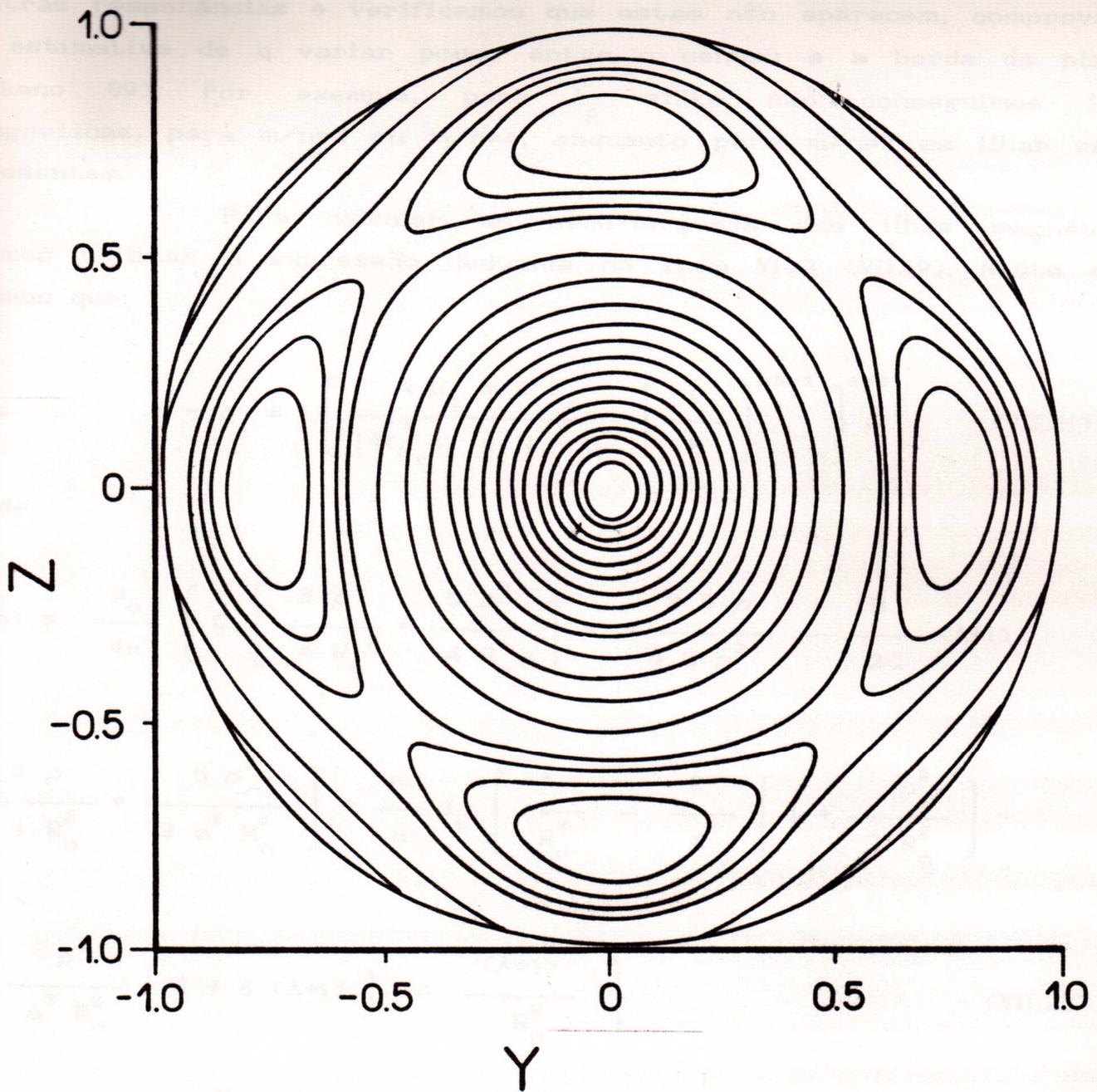


FIGURA (VII-4) : Curvas de  $\psi_m$  constante para :  $m=4$ ,  $n=1$ ,  $N=1$ ,  $I_p=25\text{kA}$ ,  $I_e=600\text{kA}$ ,  $I=100\text{A}$ ,  $a=8\text{cm}$ ,  $b=11\text{cm}$ ,  $R_o=30\text{cm}$ ,  $\Lambda=0,28$ . As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma.

estes valores de corrente, as ilhas magnéticas correspondentes a outras ressonâncias e verificamos que estas não aparecem, comprovando a estimativa de q variar pouco entre o centro e a borda do plasma (Okano 89). Por exemplo, para  $I_p = 17\text{kA}$  não conseguimos ilhas magnéticas, para  $m/n=2$  ou  $m/n=4$ , enquanto para  $m/n=3$  as ilhas estão presentes.

Para calcular as semi-larguras das ilhas magnéticas vamos utilizar a expressão deduzida no item VII.2 (VII.19). Neste caso temos que:

$$\rho - \rho_s = \left\{ \frac{4 \mu_0 m I R_0}{|\Psi(\rho_s)| \pi N n b} \left[ \frac{\rho}{b} \right]^{Nm-1} \right\}^{1/2}, \quad (\text{VII.21})$$

onde

$$\Psi''(\rho) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ C \left[ \frac{3\rho}{4R_0^2} + \frac{5\rho^3}{4R_0^4} \right] - \frac{3D\rho}{4Ca^2} - \frac{D}{2C} (\Lambda+1) \right.$$

$$\left. \left[ \frac{3\rho}{4R_0^2} + \frac{5\rho^3}{3a^2R_0^2} \right] + \frac{m}{n} I_p \left[ \frac{1}{R_0^2} - \frac{2}{a^2} \left( 1 + \frac{\rho^2}{2R_0^2} \right) \right] + \right.$$

$$\left. - \frac{\rho^2}{a^2R_0^2} \left[ 5 + 6(\Lambda+1) \right] - \frac{(\Lambda+1)}{R_0^2} \right\} \quad (\text{VII.22})$$

Vamos analisar o efeito de  $\Lambda$  nas semi-larguras e nas posições das ilhas magnéticas. As figuras (VII-5) e (VII-6) mostram as curvas onde  $\tilde{\psi}_m$  é constante para uma corrente de plasma de 18kA,  $m=3$ ,  $n=1$ . Na figura (VII.5) utilizamos  $\Lambda=0,28$  e na figura (VII.6)  $\Lambda=-1$ , que corresponde ao limite em que  $\beta$  é nulo.

Pelas figuras percebemos que, no limite da razão entre as pressões cinética e magnética nula, as ilhas magnéticas são maiores e estão deslocadas para a borda do plasma. Utilizando a expressão

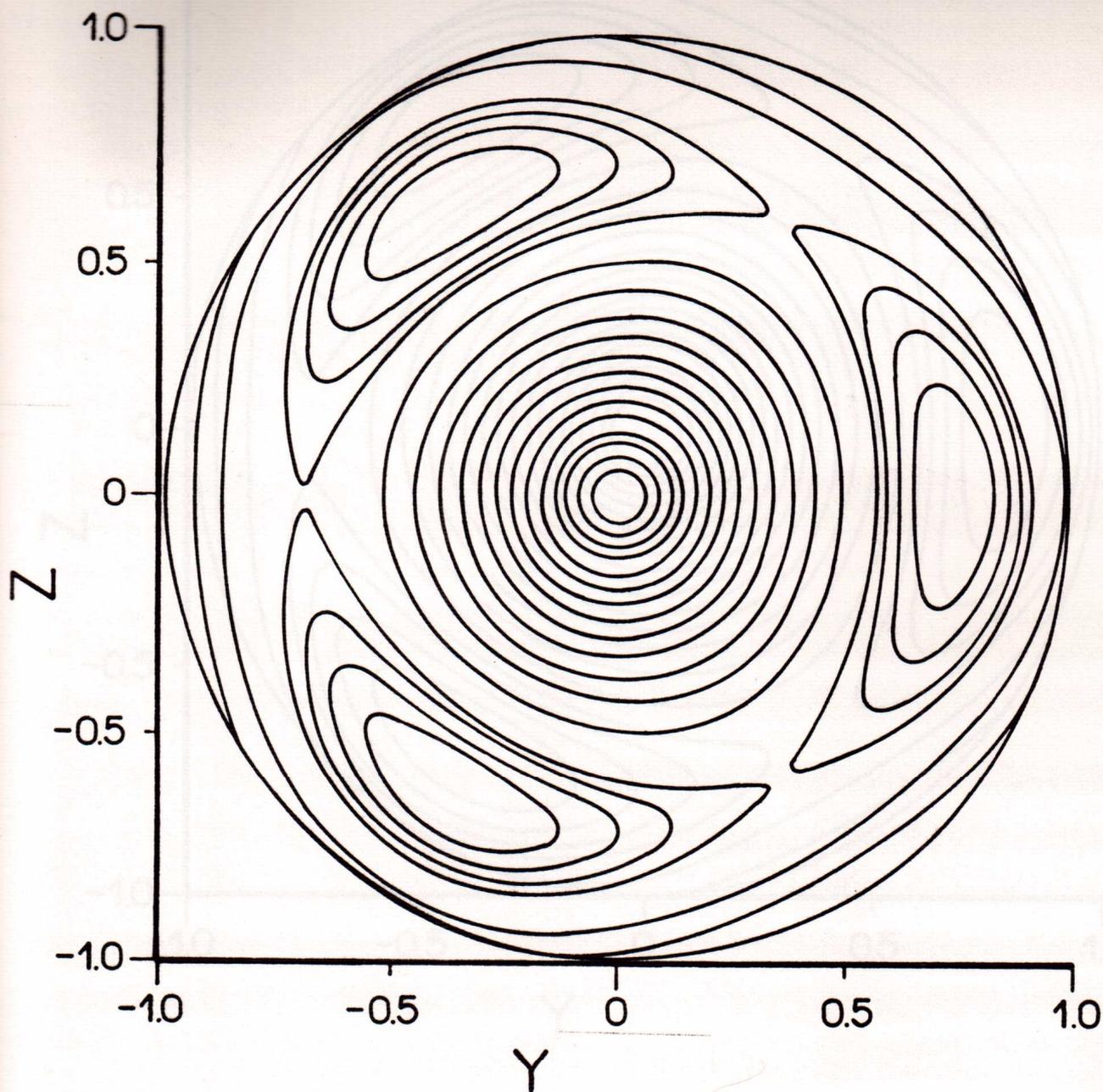


FIGURA (VII-5) : Curvas de  $\psi_m$  constante para :  $m=3$ ,  $n=1$ ,  $N=1$ ,  $I_p=18\text{kA}$ ,  $I_e=600\text{kA}$ ,  $I=100\text{A}$ ,  $a=8\text{cm}$ ,  $b=11\text{cm}$ ,  $R_o=30\text{cm}$ ,  $\Lambda=0,28$ . As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma.

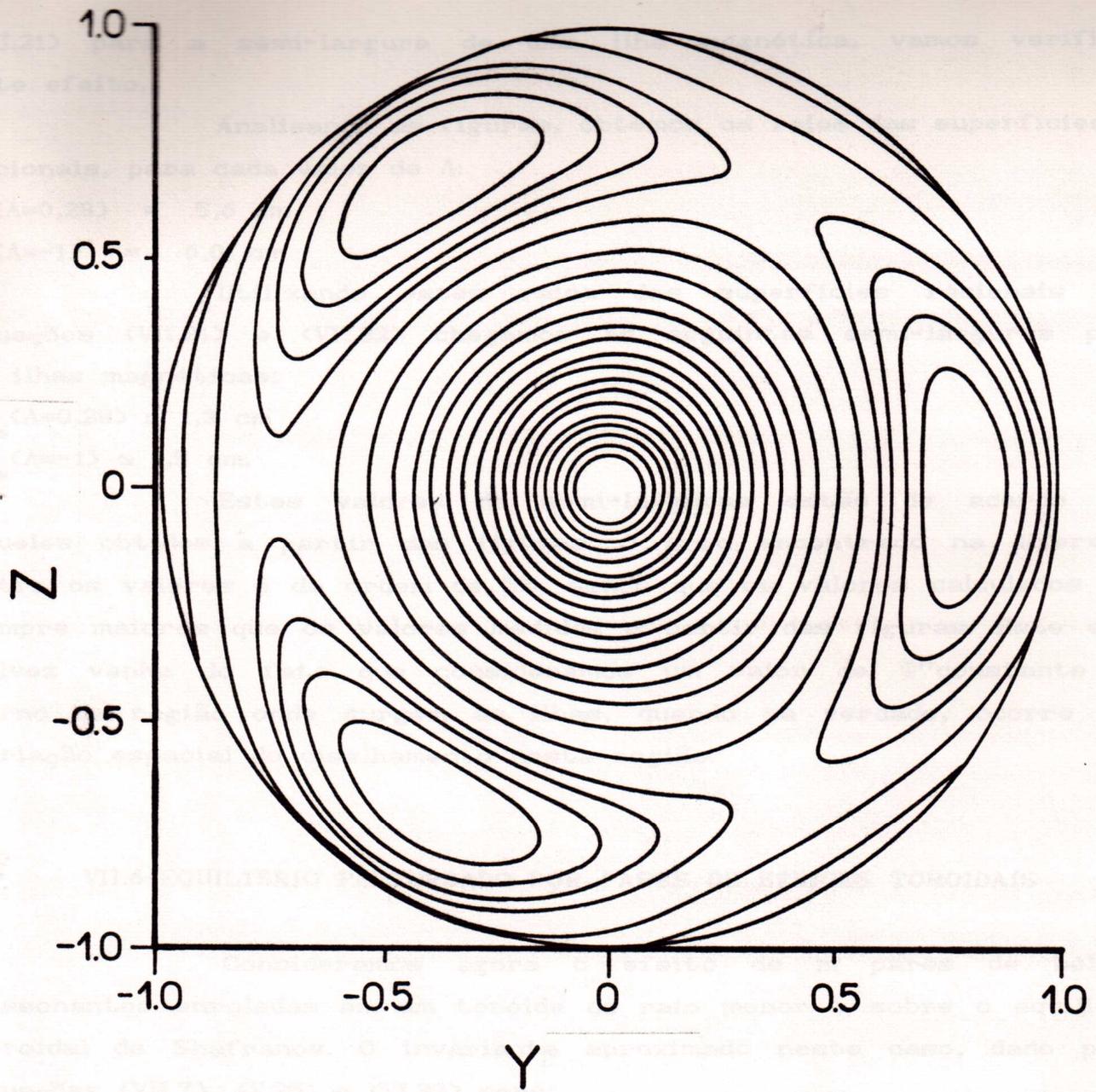


FIGURA (VII-6) : Curvas de  $\psi_m$  constante para :  $m=3$ ,  $n=1$ ,  $N=1$ ,  $I_p=18\text{kA}$ ,  $I_e=600\text{kA}$ ,  $I=100\text{A}$ ,  $a=8\text{cm}$ ,  $b=11\text{cm}$ ,  $R_o=30\text{cm}$ ,  $\Lambda=-1$ . As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma.

(VII.21) para a semi-largura de uma ilha magnética, vamos verificar este efeito.

Analisando as figuras, obtemos os raios das superfícies racionais, para cada valor de  $\Lambda$ :

$$\rho_{\bullet}(\Lambda=0,28) = 5,6 \text{ cm}$$

$$\rho_{\bullet}(\Lambda=-1) = 6,0 \text{ cm}$$

Utilizando estes raios das superfícies racionais nas equações (VII.21) e (VII.22) chegamos às seguintes semi-larguras para as ilhas magnéticas:

$$\Delta\rho_{\bullet}(\Lambda=0,28) \approx 1,3 \text{ cm}$$

$$\Delta\rho_{\bullet}(\Lambda=-1) \approx 1,5 \text{ cm.}$$

Estes valores de semi-larguras estão de acordo com aqueles obtidos a partir das figuras. O erro encontrado na diferença entre os valores é da ordem de 5%, sendo que os valores calculados são sempre maiores que os valores medidos a partir das figuras. Este erro talvez venha do fato que consideramos um valor de  $\Psi''$  constante em torno da região onde surgem as ilhas, quando na verdade, ocorre uma variação espacial do cisalhamento nesta região.

#### VII.6-EQUILIBRIO PERTURBADO POR PARES DE HÉLICES TOROIDAIS

Consideramos agora o efeito de  $m$  pares de hélices ressonantes enroladas em um toróide de raio menor  $b$  sobre o equilíbrio toroidal de Shafranov. O invariante aproximado neste caso, dado pelas equações (VII.7), (V.25) e (VI.32) será:

$$\psi_t = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ C \left[ \frac{\rho}{2} + \frac{\rho^3}{8R^2} + \frac{\rho^5}{16R^4} \right] - \frac{D}{8C} \frac{\rho^3}{a^2} - \frac{D}{2C} (\Lambda+1) \right.$$

$$\left. \left[ \frac{\rho^3}{8R_0^2} + \frac{\rho^5}{12a^2R_0^2} \right] + \frac{m}{n} I_p \left[ 1 + \frac{\rho^2}{2R_0^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \left( 1 + \frac{\rho^2}{2R_0^2} \right) \right] + \right.$$

$$- \left. \left. \left. \frac{\rho^2}{2 R_o^2} (\Lambda+1) + \frac{\rho^4}{2 a^2 R_o^2} (\Lambda+1) \right] \right\} + \right. \\ \left. - (-1)^{Nm+1} \left\{ \frac{\mu_o I n \rho}{2\pi^2 N R_o (Nm+2)} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \text{senNu} - \frac{m^2 \mu_o I}{n \pi N} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \text{cosNu} \right\} \right.$$

(VII.23)

As figuras (VII.7) e (VII.8) mostram as curvas de  $\psi_t$  constante para uma corrente de plasma de 18kA,  $m=3$ ,  $n=1$  e  $\Lambda$  respectivamente 0,28 e -1.

Através de uma análise das figuras, percebemos que o efeito da pressão do plasma foi o mesmo que ocorreu na análise anterior, ou seja o aumento da pressão faz com que as ilhas se desloquem para o centro do plasma e se tornem menores.

A aplicação da fórmula (VII.19) para a semi-largura de uma ilha magnética não é direta neste caso. O invariante da perturbação é dado por:

$$\tilde{\psi}_t = - (-1)^{Nm+1} \left\{ \frac{\mu_o I n \rho}{2\pi^2 N R_o (Nm+2)} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \text{senNu} - \frac{m^2 \mu_o I_o}{n \pi N} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \text{cosNu} \right\} \quad \text{(VI.24)}$$

Como a amplitude da perturbação é pequena e  $\rho/R_o \ll 1$ , podemos aproximar este invariante para a seguinte expressão:

$$\tilde{\psi}_t \approx - (-1)^{Nm+1} \frac{m^2 \mu_o I}{n \pi N} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \text{cosNu} \quad \text{(VII.25)}$$

A utilização da expressão (VII.19) é agora quase imediata. Devemos apenas notar que como o sinal (fase) do invariante é diferente do que analisamos para  $Nm+1$  par, as ilhas estão rodadas se comparadas ao caso anterior, pois as semi-larguras são medidas agora em  $\theta = \pm \pi/Nm, \pm 3\pi/Nm, \dots$  e os pontos onde  $(\rho-\rho_o)$  se anulam estão em

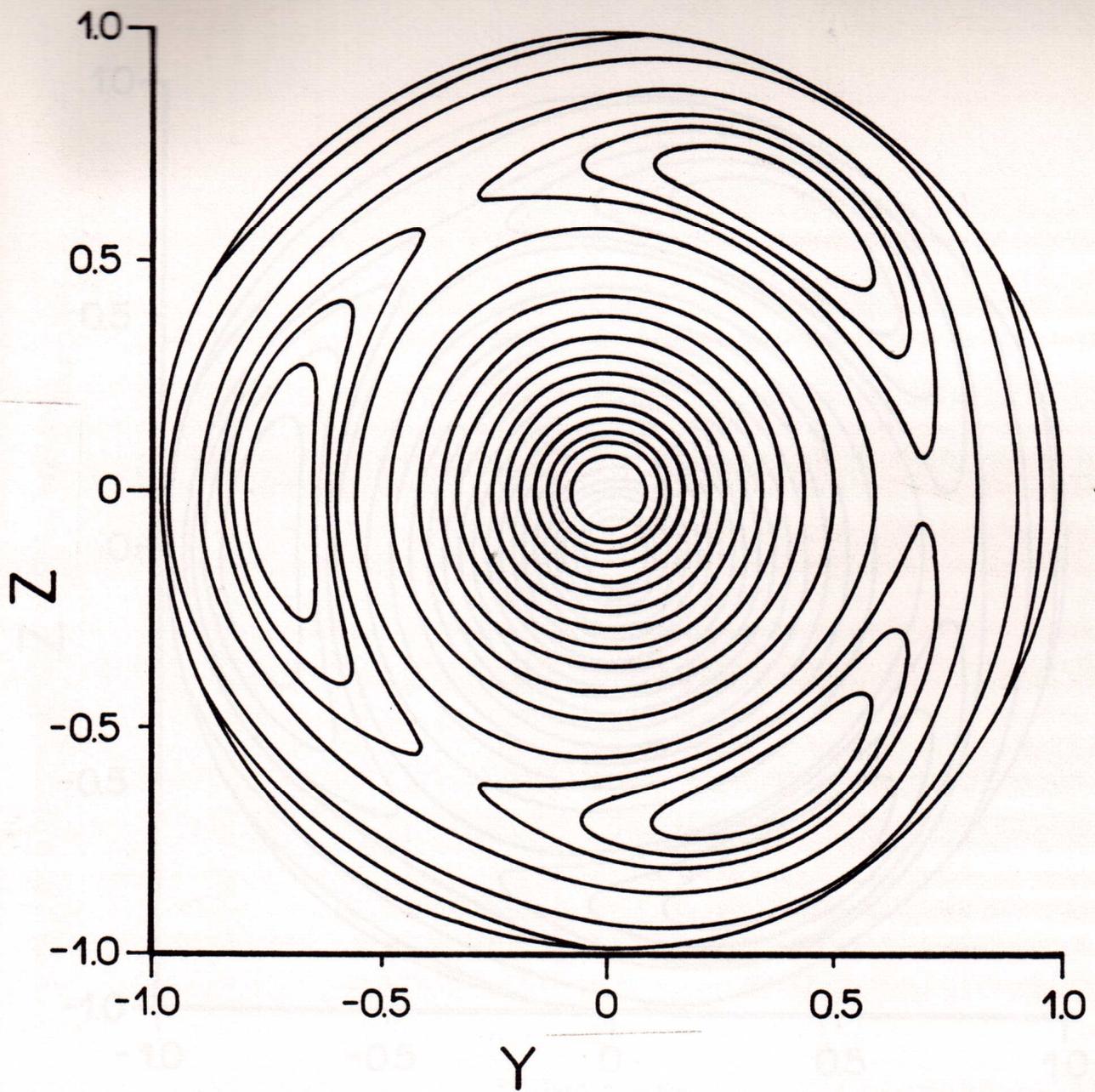


FIGURA (VII-7) : Curvas de  $\psi_t$  constante para :  $m=3$ ,  $n=1$ ,  $N=1$ ,  $I_p=18\text{kA}$ ,  $I_e=600\text{kA}$ ,  $I=100\text{A}$ ,  $a=8\text{cm}$ ,  $b=11\text{cm}$ ,  $R_o=30\text{cm}$ ,  $\Lambda=0,28$ . As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma.

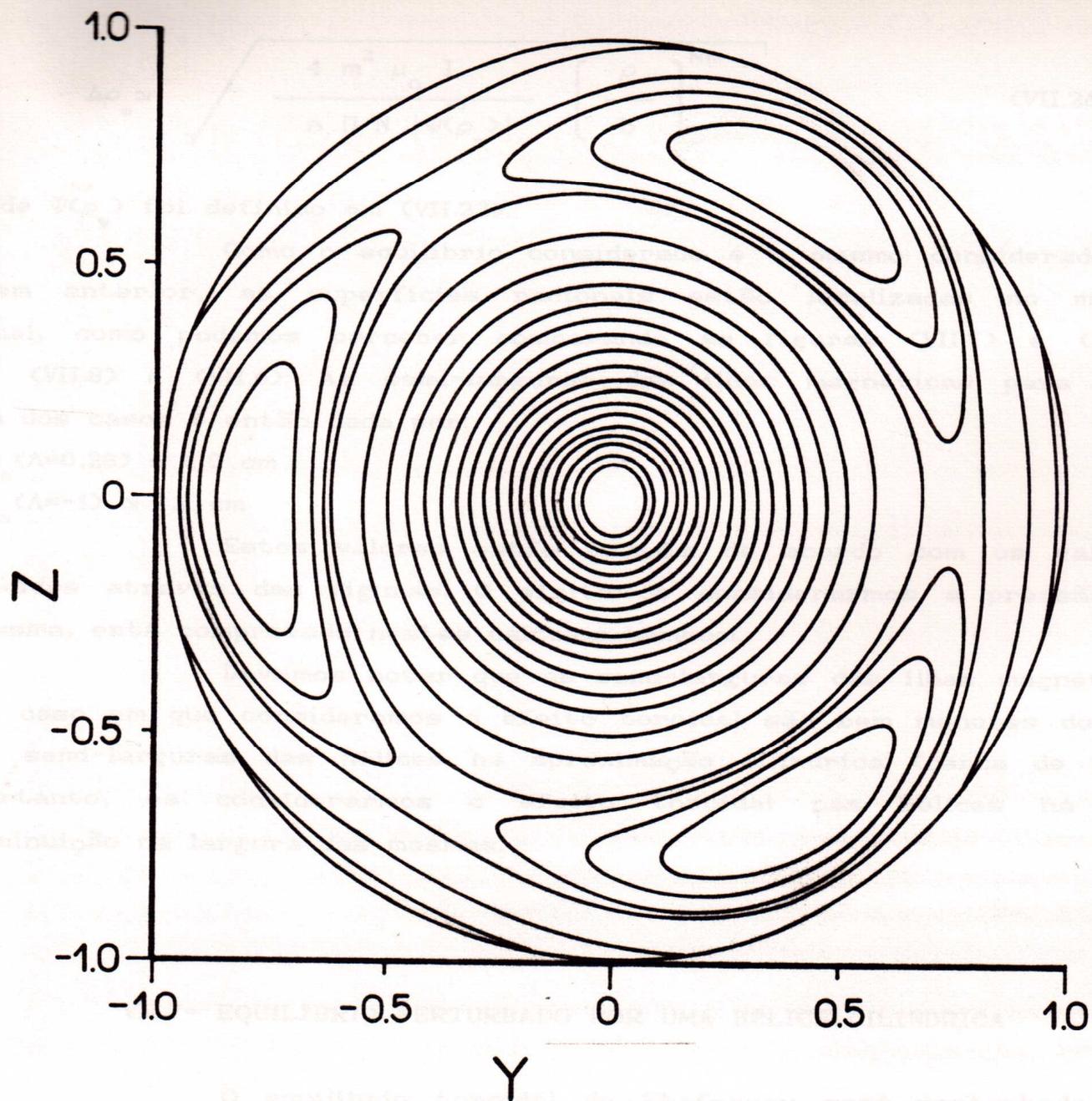


FIGURA (VII-8) : Curvas de  $\psi_t$  constante para :  $m=3$ ,  $n=1$ ,  $N=1$ ,  $I_p=18\text{kA}$ ,  $I_e=600\text{kA}$ ,  $I=100\text{A}$ ,  $a=8\text{cm}$ ,  $b=11\text{cm}$ ,  $R_o=30\text{cm}$ ,  $\Lambda=-1$  As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma.

$\theta = \pm 2\pi/Nm, \pm 4\pi/Nm, \dots$ . A expressão para as semi-larguras é dada por :

$$\Delta\rho_s \approx \sqrt{\frac{4 m^2 \mu_0 I}{n \pi N |\Psi''(\rho_s)|} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{Nm}}, \quad (\text{VII.26})$$

onde  $\Psi''(\rho_s)$  foi definido em (VII.22).

Como o equilíbrio considerado é o mesmo considerado no item anterior, as superfícies racionais estão localizadas no mesmo local, como podemos perceber comparando as figuras (VII.7) e (VII.5) ou (VII.8) e (VII.6). As semi-larguras das ilhas magnéticas para cada um dos casos é então dada por:

$$\Delta\rho_s (\Lambda=0,28) \approx 1,0 \text{ cm}$$

$$\Delta\rho_s (\Lambda=-1) \approx 1,1 \text{ cm}$$

Estes valores estão também de acordo com os valores medidos através das figuras. O efeito de considerarmos a pressão do plasma, está comprovado nestes cálculos também.

Devemos notar que as semi-larguras das ilhas magnéticas no caso em que consideramos o efeito toroidal são bem menores do que as semi-larguras das hélices na aproximação cilíndrica (cerca de 25%). Portanto, ao considerarmos o efeito toroidal nas hélices há uma diminuição na largura das mesmas.

### VII.7- EQUILÍBRIO PERTURBADO POR UMA HÉLICE CILÍNDRICA

O equilíbrio toroidal de Shafranov será perturbado por uma hélice enrolada em um cilindro, desprezando o efeito toroidal. Seguindo um desenvolvimento análogo aos itens anteriores, temos que o invariante que descreve este sistema, definido pelas equações (V.26), (VI.16), é dado por:

$$\psi_c = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ C \left[ \frac{\rho}{2} + \frac{\rho^3}{8R^2} + \frac{\rho^5}{16R^4} \right] - \frac{D \rho^3}{8C a^2} - \frac{D}{2C} (\Lambda+1) \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\rho^3}{8 R_o^2} + \frac{\rho^5}{12 a^2 R_o^2} \right] + \frac{m}{n} I_p \left[ 1 + \frac{\rho^2}{2 R_o^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \left( 1 + \frac{\rho^2}{2 R_o^2} \right) + \right. \\
& \left. - \frac{\rho^2}{2 R_o^2} (\Lambda+1) + \frac{\rho^4}{2 a^2 R_o^2} (\Lambda+1) \right] + \\
& + \frac{\mu_o I}{4\pi} \left\{ \frac{n \rho}{m R_o} + \frac{2 R_o}{b N n} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm-1} \cos Nu \right\} \quad (VII.27)
\end{aligned}$$

As figuras (VII.9) e (VII.10) mostram as curvas de  $\psi_c$  constante para  $m=3$ ,  $n=1$  e  $\Lambda$  respectivamente 0,28 e -1.

Analogamente ao que fizemos nos itens anteriores, a semi-largura das ilhas magnéticas é dada por:

$$\Delta \rho_s = \sqrt{\frac{\mu_o I 2 R_o}{\pi b N n |\Psi''(\rho_s)|} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm-1}}, \quad (VII.28)$$

para  $\Psi''(\rho)$  definido na equação (VII.22). Utilizando os mesmos parâmetros dos itens anteriores para  $m=3$  e  $n=1$ , obtemos os seguintes valores para a semi-largura das ilhas:

$$\Delta \rho_s (\Lambda=0,28) = 0,5 \text{ cm}$$

$$\Delta \rho_s (\Lambda=-1) = 0,6 \text{ cm.}$$

Neste caso, apesar de pequeno o efeito da pressão do plasma também ocorre.

## VII.8-ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

A análise de nossos resultados mostra, portanto, que há uma variação da posição e da largura das ilhas magnéticas com a pressão. A consideração da pressão é equivalente a um deslocamento do eixo magnético, pois quando nós a desprezamos, o eixo magnético

coincide com o eixo geométrico. Convém notar que a largura das ilhas é menor quando calculada usando-se a expressão toroidal para o campo ressonante do que para a expressão cilíndrica.

Esse mesmo efeito já foi obtido de uma outra maneira (Zheng et al 87) ao se considerar o deslocamento do eixo magnético e uma expressão toroidal para o campo ressonante. Este resultado foi calculado tanto analiticamente quanto numericamente e o deslocamento das ilhas para o centro do plasma com a diminuição de suas larguras aparece em ambos os cálculos.

Atualmente estamos fazendo uma integração numérica das equações dos campos magnéticos utilizados neste trabalho, para comparar os resultados numéricos com os nossos resultados analíticos.

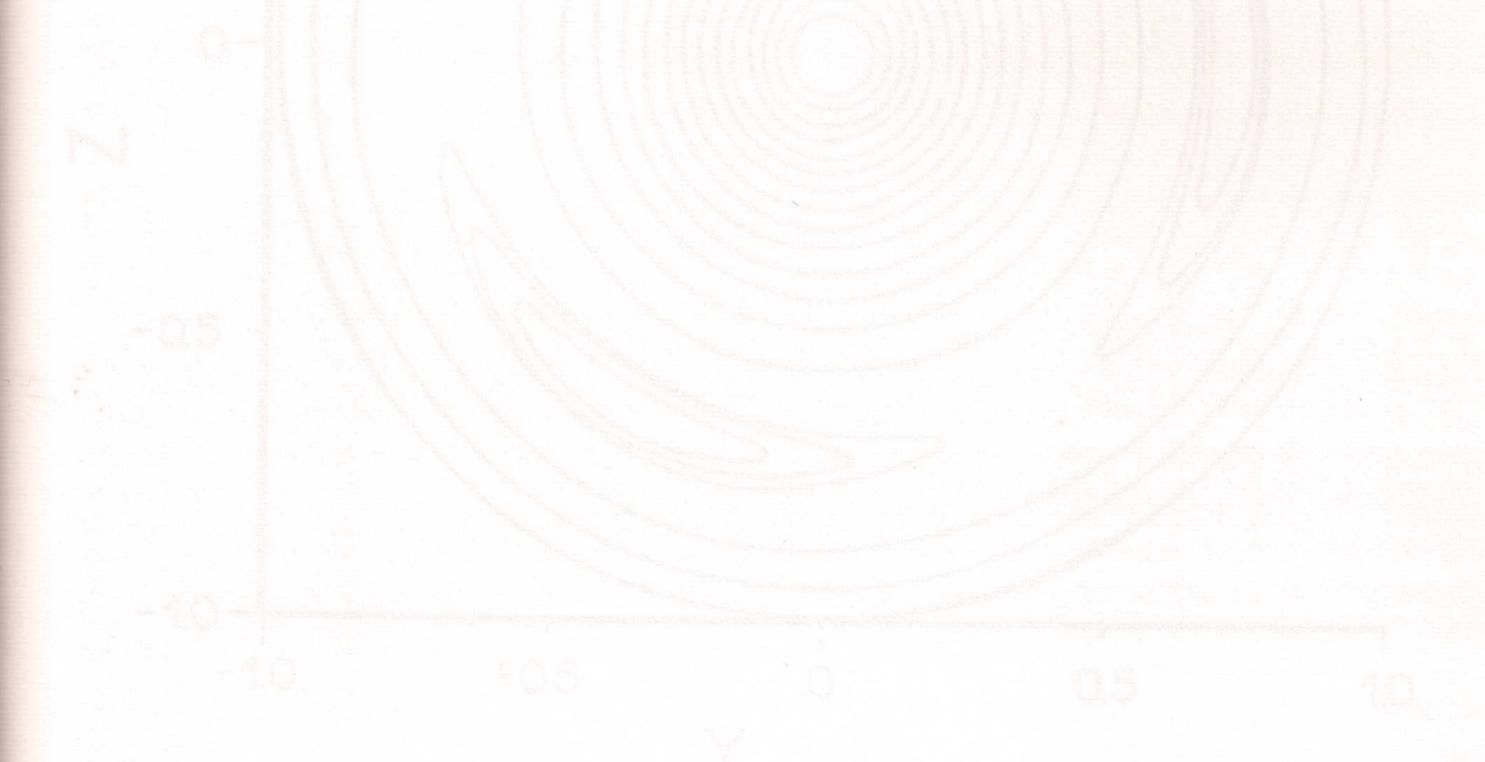


FIGURA (91-97) - Curvas de  $\psi$  normalizadas para  $t = 0$ ,  $\psi = 0$ ,  $\psi = 1$ ,  $\psi = 2$ ,  $\psi = 3$ ,  $\psi = 4$ ,  $\psi = 5$ ,  $\psi = 6$ ,  $\psi = 7$ ,  $\psi = 8$ ,  $\psi = 9$ ,  $\psi = 10$ .  $I_p = 600kA$ ,  $I_{res} = 200kA$ ,  $R = 30cm$ ,  $a = 10cm$ ,  $\beta = 0.2$ . As curvas estão normalizadas pelo polo norte do plasma.

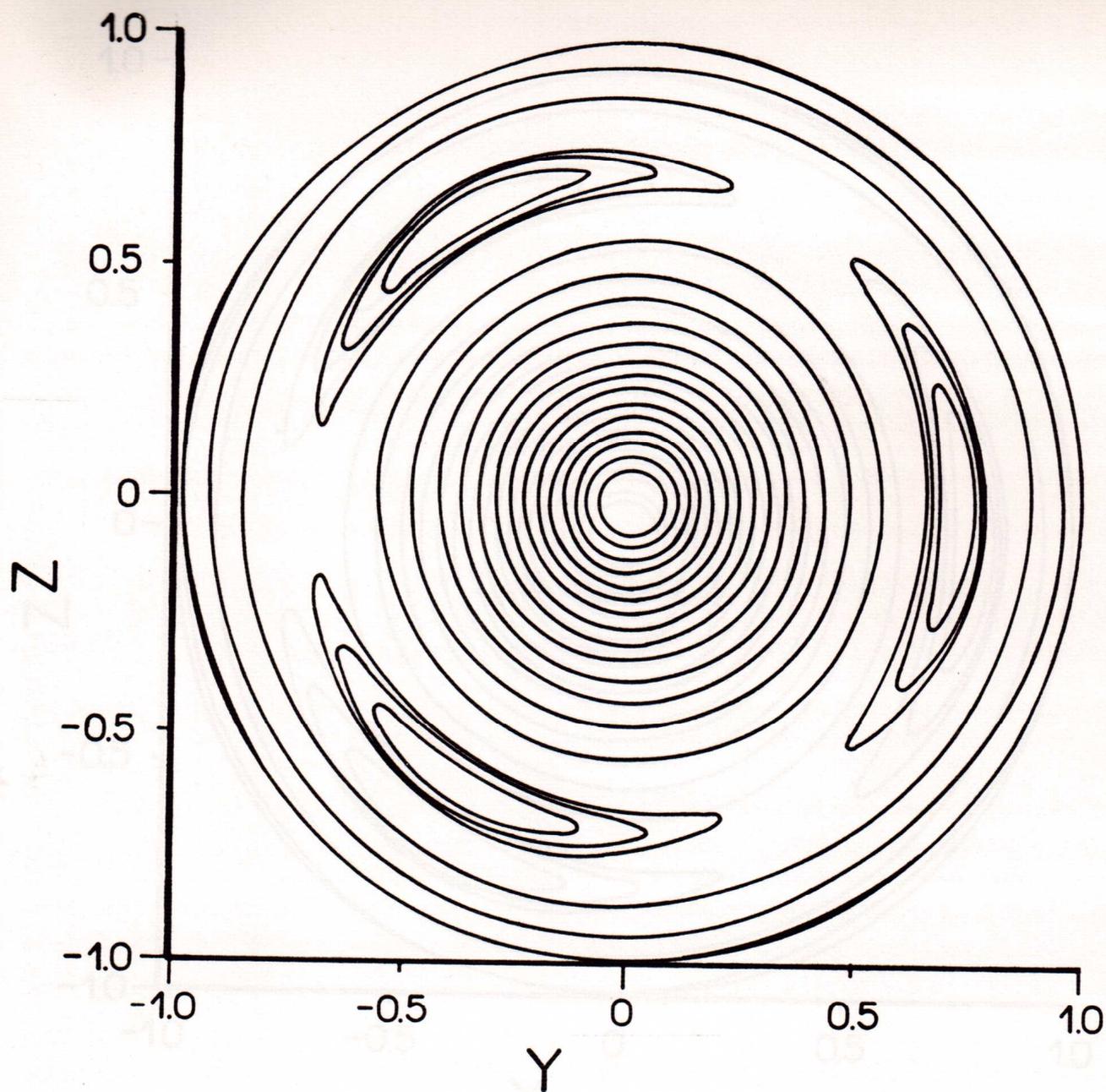


FIGURA (VII-9) : Curvas de  $\psi_C$  constante para :  $m=3$ ,  $n=1$ ,  $N=1$ ,  $I_p=18\text{kA}$ ,  $I_e=600\text{kA}$ ,  $I=100\text{A}$ ,  $a=8\text{cm}$ ,  $b=11\text{cm}$ ,  $R_o=30\text{cm}$ ,  $\Lambda=0,28$ . As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma.

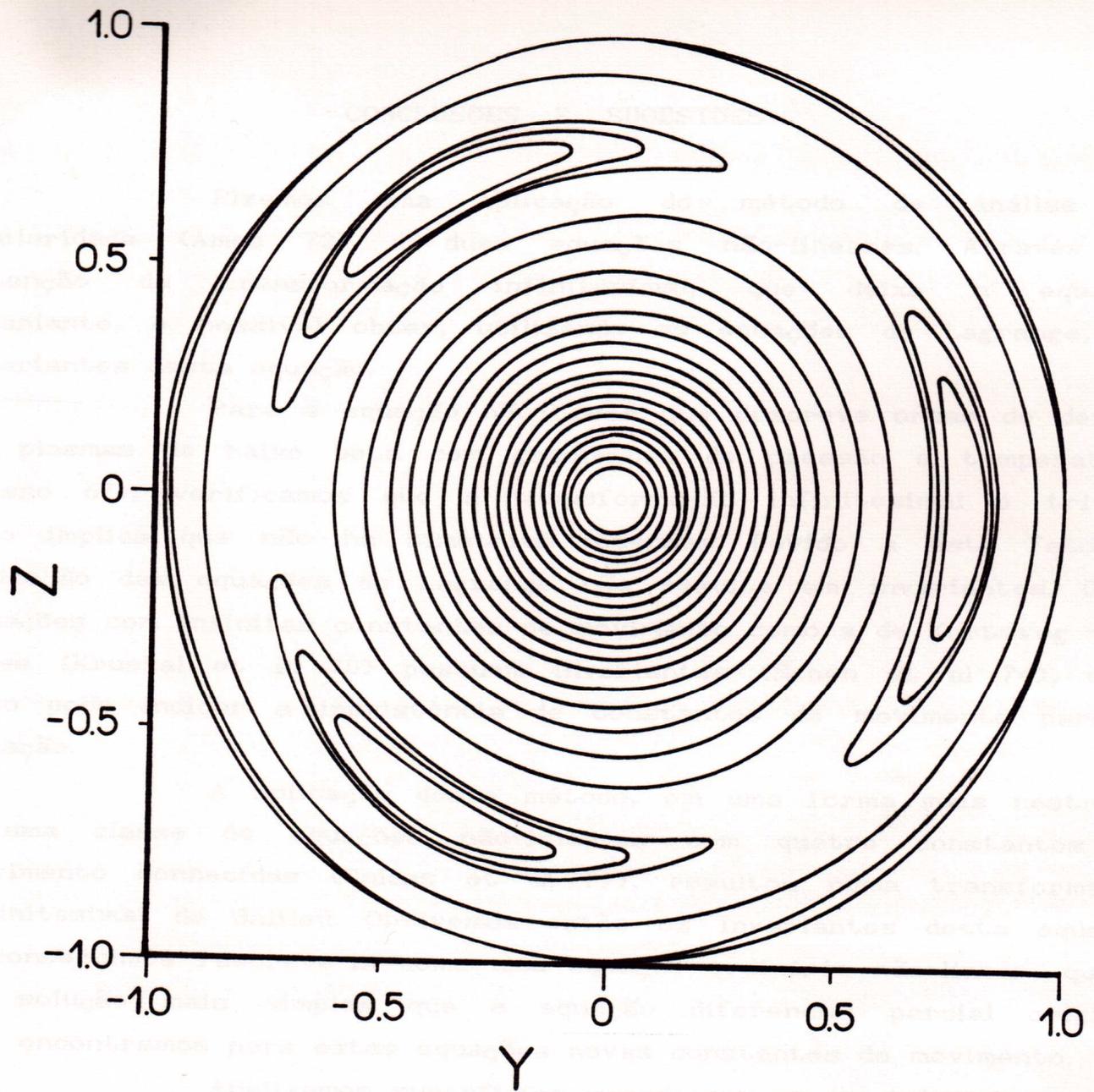


FIGURA (VII-10) : Curvas de  $\psi_c$  constante para :  $m=3$ ,  $n=1$ ,  $N=1$ ,  $I_p=18\text{kA}$ ,  $I_e=600\text{kA}$ ,  $I=100\text{A}$ ,  $a=8\text{cm}$ ,  $b=11\text{cm}$ ,  $R_o=30\text{cm}$ ,  $\Lambda=-1$ . As escalas estão normalizadas pelo raio menor do plasma.

## CAPÍTULO VIII

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Fizemos uma aplicação do método de análise de similaridade (Ames 72) a duas equações não-lineares. Através da obtenção da transformação infinitesimal, que deixa a equação invariante, é possível obter, utilizando as equações de Lagrange, os invariantes desta equação.

Para a equação não-linear que descreve ondas de deriva em plasmas de baixo beta com gradientes de pressão e temperatura (Tasso 67), verificamos que a transformação infinitesimal é trivial. Isto implica que não há simetrias internas. Devido a este fato, a aplicação das equações de Lagrange não resulta em invariantes. Como equações com infinitas constantes de movimento como a de Korteweg - de Vries (Kruskal et al 70) possuem invariantes (Schen et al 74), este fato pode indicar a inexistência de constantes de movimento para a equação.

A aplicação deste método, em uma forma mais restrita, a uma classe de equações não-lineares com quatro constantes de movimento conhecidas (Caldas et al 79), resultou numa transformação infinitesimal de Galileu. Obtivemos então os invariantes desta equação e conseguimos reecrevê-la como uma equação ordinária não-linear, que é de solução mais simples que a equação diferencial parcial original. Não encontramos para estas equações novas constantes de movimento.

Analizamos superfícies magnéticas em um tokamak para um equilíbrio toroidal, obtido por Shafranov (Shafranov 60), perturbado por correntes helicoidais ressonantes. Devido à perturbação não há simetria, portanto não há uma função  $\psi$  cujas linhas constantes descrevam as superfícies magnéticas. Através do método de Cary (Cary 84) obtivemos invariantes médios que descrevem aproximadamente o problema e analisamos as superfícies magnéticas médias, ao redor das

quais se formam ilhas magnéticas médias. Utilizamos os parâmetros numéricos do TBR-1 em nossos cálculos, o que permite a sua utilização para interpretar alguns resultados experimentais realizados neste tokamak com hélices (Vanucci et al. 88)

Verificamos, então, que há uma dependência da posição e da largura das ilhas magnéticas com a pressão do plasma. Com o aumento de pressão, as ilhas se tornam menores e se deslocam para o centro do plasma. Foi possível observar, também, que a utilização de uma expressão toroidal para as hélices ressonantes resulta em ilhas magnéticas de largura menor que aquelas obtidas para uma aproximação cilíndrica.

A variação da posição e da largura das ilhas magnéticas com a pressão é equivalente a considerarmos um deslocamento do eixo magnético, pois quando a pressão é nula, o eixo magnético coincide com o eixo geométrico. A diminuição da largura das ilhas magnéticas e seu deslocamento para o centro do plasma, já foram obtidos analítica e numericamente (Zheng et al 87) considerando o deslocamento do eixo magnético.

Como aperfeiçoamento deste trabalho, podemos utilizar outros equilíbrios que possuam um fator de segurança que varie mais acentuadamente no plasma e, portanto, seja mais próximo dos encontrados em tokamaks. Além disto já estamos fazendo uma integração numérica das linhas do campo magnético, afim de compararmos os nossos resultados analíticos com resultados numéricos. Finalmente, há a possibilidade de aplicar o método de obtenção de superfícies magnéticas médias a outras máquinas.

APÊNDICE A

A.1- DERIVADAS DE  $\bar{\varphi}$  .

Aqui estão expressas as diversas derivadas de necessárias à transformação infinitesimal da equação (II.9):

$$\bar{\varphi}_t = \varphi_t + \epsilon \left\{ \Phi_t + (\Phi_\varphi - T_t) \varphi_t - \gamma_t \varphi_y - T_\varphi \varphi_t^2 + \right. \\ \left. - \gamma_\varphi \varphi_t \varphi_y \right\} \quad (A.1a)$$

$$\bar{\varphi}_y = \varphi_y + \epsilon \left\{ \Phi_y + (\Phi_\varphi - \gamma_y) \varphi_y - T_y \varphi_t - \gamma_\varphi \varphi_y^2 + \right. \\ \left. - T_\varphi \varphi_y \varphi_t \right\} \quad (A.1b)$$

$$\bar{\varphi} \bar{\varphi}_y = \varphi \varphi_y + \epsilon \left\{ \varphi \Phi_y + (\Phi_\varphi - \gamma_y) \varphi \varphi_y - T_y \varphi_t \varphi + \right. \\ \left. + \varphi_y \Phi - \gamma_\varphi \varphi_t \varphi - \gamma_\varphi \varphi_y^2 \varphi - T_\varphi \varphi_y \varphi_t \varphi - \varphi \varphi_y \varphi_t T_\varphi \right\} \quad (A.1c)$$

$$\bar{\varphi}_y \bar{\varphi}_t = \varphi_{y t} + \epsilon \left\{ -\varphi_{y t} T_t - \varphi_{y t} \varphi_t T_\varphi - \varphi_{y y} \gamma_t + \right. \\ \left. - \varphi_{y y} \varphi_t \gamma_\varphi + \Phi_{y t} + \varphi_t \Phi_{y y} + 2 \varphi_{y t} \Phi_y + 2 \varphi_y \Phi_{y t} + \right. \\ \left. + 2 \varphi_y \varphi_t \Phi_{y y} - \varphi_{y t} \gamma_{y t} - \varphi_y \varphi_t \gamma_{y \varphi} - \varphi_{t t} T_{y y} - \varphi_t T_{y t t} + \right. \\ \left. - \varphi_t^2 T_{y y} + 2 \varphi_y \varphi_{y t} \Phi_{\varphi} + \varphi_y^2 \Phi_{\varphi t} + \varphi_y^2 \varphi_t \Phi_{\varphi \varphi} + \right. \\ \left. - 4 \varphi_y \varphi_{y t} \gamma_\varphi - 2 \varphi_y^2 \varphi_t \gamma_{\varphi \varphi} - \varphi_{y t} \varphi_t T_{y \varphi} - \varphi_y \varphi_{t t} T_{y \varphi} + \right. \\ \left. - \varphi_y \varphi_{y t} T_{y t} - \varphi_y \varphi_t^2 T_{y \varphi} - 3 \varphi_y^2 \varphi_{y t} \gamma_\varphi - \varphi_y^3 \gamma_{\varphi t} + \right. \\ \left. \right\} \quad 96$$

$$\begin{aligned}
& -2\phi_y \phi_x \psi_{yy} - 2\phi_y \phi_{yt} \phi_x \psi_{yy} - 2\phi_{yyt} \psi_y - 2\phi_{yy} \psi_{yt} + \\
& -2\phi_{yy} \phi_x \psi_{yy} - 2\phi_{yxt} \psi_y - 2\phi_{yt} \phi_x \psi_{yy} - 3\phi_{yyt} \phi_y \psi_{yy} + \\
& -3\phi_{yy} \phi_{yt} \psi_{yy} - 3\phi_{yy} \phi_y \phi_x \psi_{yy} - \phi_{yyt} \phi_x \psi_y - \phi_{yy} \phi_{xt} \psi_{yy} + \\
& -\phi_{yy} \phi_x \psi_{yy} - \phi_{yy} \phi_x^2 \psi_{yy} - 2\phi_{yt}^2 \psi_y - 2\phi_y \phi_{yxt} \psi_y + \\
& -2\phi_y \phi_{yt} \psi_{yy} - 2\phi_y \phi_{yt} \phi_x \psi_{yy} \} \quad (A.1d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_y \bar{\phi}_{yt} = & \phi \phi_{yt} + \epsilon \left\{ -\phi_y \phi_{yt} \psi_x - \phi_x \phi_{yt} \psi_y - \phi_y \phi_{yy} \psi_{yt} \right. \\
& -\phi_y \phi_{yy} \phi_x \psi_y + \phi_y \bar{\phi}_{yt} + \phi_y \phi_x \bar{\phi}_{yy} + \phi_y \phi_{yt} \bar{\phi}_y + \phi_y^2 \bar{\phi}_{xt} + \\
& + \phi_y^2 \phi_x \bar{\phi}_{yy} - \phi_y \phi_{yt} \psi_y - \phi_y^2 \psi_{yt} - \phi_y^2 \phi_x \psi_{yy} - \phi_y \phi_{xt} \psi_y + \\
& -\phi_y \phi_x \psi_{yt} - \phi_y^2 \phi_x^2 \psi_{yy} - 2\phi_y^2 \phi_{yt} \psi_y - \phi_y^3 \phi_x \psi_{yy} + \\
& -\phi_y \phi_{yt} \phi_x \psi_y - \phi_y^2 \phi_{xt} \psi_y - \phi_y^2 \phi_x \psi_{yy} - \phi_y^2 \phi_x^2 \psi_{yy} + \\
& + \phi_{yt} \bar{\phi}_y + \phi_{yt} \phi_y \bar{\phi}_y - \phi_{yt} \phi_y \psi_y - \phi_{yt} \phi_x \psi_y + \\
& \left. -\phi_{yt} \phi_y^2 \psi_y - \phi_{yt} \phi_y \phi_x \psi_y \right\}. \quad (A.1e)
\end{aligned}$$

## A2-SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Aplicando a transformação infinitesimal (II.10) à equação (II.9), obtemos a seguinte equação transformada:

$$\begin{aligned}
 0 = & -\alpha \bar{\Phi}_t + \beta \bar{\Phi}_y - \delta \bar{\Phi} \bar{\Phi}_y + \delta \bar{\Phi}_y \bar{y}_t - \eta \bar{\Phi}_y \bar{\Phi}_y t = \\
 = & -\alpha \Phi_t + \beta \Phi_y - \delta \Phi \Phi_y + \delta \bar{\Phi}_y \bar{y}_t - \eta \Phi_y \Phi_y t + \\
 + & \epsilon \left\{ -\alpha \Phi_t + \beta \Phi_y - \delta \Phi \Phi_y + \delta \Phi_{yyt} + \Phi_t (-\alpha \Phi_\varphi + \alpha \tau_t + \right. \\
 - & \beta \tau_y + \delta \Phi \tau_y + \delta \Phi_{yy\varphi} - \delta \tau_{yyt}) + \Phi_y (\alpha \chi_t + \beta \Phi_\varphi + \\
 - & \beta \chi_y - \delta \Phi \Phi_\varphi + \delta \Phi \chi_y - \tau \Phi - 2\delta \Phi_{y\varphi t} - \delta \chi_{yyt} + \\
 - & \eta \Phi_{yt} + \Phi_t^2 (\alpha \tau_\varphi - \delta \tau_{yy\varphi}) + \Phi_t \Phi_y (-\alpha \chi_\varphi - \beta \tau_\varphi + \\
 + & \delta \Phi \tau_\varphi + 2\delta \Phi_{yy\varphi} - \delta \chi_{yy\varphi} - \delta \tau_{y\varphi t} - \eta \chi_{yt}) + \\
 + & \Phi_y^2 (-\beta \chi_\varphi + \delta \Phi \chi_\varphi + \delta \Phi_{\varphi t} - 2\delta \chi_{y\varphi t} - \eta \Phi_{\varphi t} + \eta \chi_{yt}) + \\
 + & \Phi_{yyt} (-\delta \tau_t + \delta \Phi_\varphi - 2\delta \chi_y) - 2\delta \Phi_{yyt} \Phi_t \tau_\varphi + \\
 - & \delta \Phi_{yyy} \Phi_t \chi_\varphi + \Phi_{yt} (2\delta \Phi_{y\varphi} - \delta \chi_{yy} - 2\delta \tau_{yt} - \eta \Phi_y) + \\
 - & \delta \Phi_{tt} \tau_{yy} + \Phi_y \Phi_{yt} (2\delta \Phi_{\varphi\varphi} - 4\delta \chi_{y\varphi} - 2\delta \tau_{\varphi t} + \eta \tau_t + \\
 - & 2\eta \Phi_\varphi + 2\eta \chi_y) + \Phi_y^2 \Phi_t (\delta \Phi_{\varphi\varphi} - 2\delta \chi_{y\varphi\varphi} - \delta \tau_{\varphi\varphi t} + \\
 - & \eta \Phi_{\varphi\varphi} + \eta \tau_t - 2\eta \Phi_\varphi + 2\eta \chi_y) + \Phi_t \Phi_{yt} (-3\delta \tau_{y\varphi} + \eta \tau_y) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \psi_y \psi_{tt} (-\delta \tau_{yy} + \eta \tau_y) + \psi_y \psi_t^2 (-\delta \tau_{yy} + \eta \tau_y) + \psi_y^2 \psi_{yt} \cdot \\
& \cdot (-3\delta \psi_{yy} + 3\eta \psi_y) + \psi_y^3 (-\delta \psi_{yyt} + \eta \psi_{yt}) + \psi_y^3 \psi_t (-\delta \psi_{yy} + \eta \psi_y) + \\
& + \psi_y \psi_t \psi_{yt} (-4\delta \tau_{yy} - 3\eta \tau_y) + \psi_y^2 \psi_{tt} (-\delta \tau_{yy} + \eta \tau_y) + \psi_y^2 \psi_t \cdot \\
& \cdot (-\delta \tau_{yy} + \eta \tau_y) + \psi_{yy} (\delta \Phi_{tt} - 2\delta \psi_{yt}) + \psi_{yy} \psi_t (\delta \Phi_{yy} - 2\delta \psi_{yy} + \\
& - \delta \tau_{yt}) - 2\delta \psi_{ytt} \tau_y - 3\delta \psi_{yy} \psi_{yt} \psi_y + \psi_{yy} \psi_y (-3\delta \psi_{yt} + \eta \psi_t) + \\
& + \psi_{yy} \psi_y \psi_t (-3\delta \psi_{yy} + \eta \psi_y) - \delta \psi_{yy} \psi_{tt} \tau_y - \delta \psi_t^2 \psi_{yy} \tau_{yy} - 2\delta \psi_{yt}^2 \tau_{yt} + \\
& - 2\delta \psi_{ytt} \psi_y \tau_y \} = 0. \tag{A.2}
\end{aligned}$$

Utilizando a equação original (II.9) sob a forma:

$$\psi_{yyt} = \frac{\alpha}{\delta} \psi_t + \frac{1}{\delta} (\delta\varphi - \beta) \psi_y + \frac{\eta}{\delta} \psi_y \psi_{yt}, \tag{A.3}$$

e substituindo-a na equação (A.2), o seguinte sistema de equações deve ser satisfeito simultaneamente:

$$-\alpha \Phi_t + \beta \Phi_y - \delta\varphi \Phi_y + \delta \Phi_{yyt} = 0$$

$$-\beta \tau_y + \delta\varphi \tau_y + \delta \Phi_{yyy} - \delta \tau_{yyt} - 2\delta \psi_y = 0$$

$$\begin{aligned}
-\alpha \psi_t - \delta \Phi - 2\delta \Phi_{yyt} - \delta \psi_{yyt} - \eta \Phi_{yt} - \delta\varphi \tau_t + \\
+ \beta \tau_t - \delta\varphi \psi_y + \beta \psi_y = 0
\end{aligned}$$

$$-\alpha \tau_y + \delta \tau_{yyy} = 0$$

$$\begin{aligned}
-\alpha \psi_y - \beta \tau_y + \delta\varphi \tau_y + 2\delta \Phi_{yyy} - \delta \psi_{yyy} - \delta \tau_{yyt} \\
- \eta \Phi_{yy} + \eta \tau_{yt} = 0
\end{aligned}$$

$$-\beta \psi_y + \delta\varphi \psi_y + \delta \Phi_{ytt} - 2\delta \psi_{yyt} - \eta \Phi_{tt} + \eta \psi_{yt} = 0$$

$$\tau_y = 0$$

$$y_t = 0$$

$$y_\varphi = 0$$

$$2\delta \Phi_{y\varphi} - \delta y_{yy} - 2\delta T_{yt} - \eta \Phi_y = 0$$

$$T_{yy} = 0$$

$$2\delta \Phi_{\varphi\varphi} - 4\delta y_{\varphi\varphi} - 2\delta T_{\varphi t} - \eta \Phi_\varphi = 0$$

$$\delta \Phi_{\varphi\varphi\varphi} - 2\delta y_{\varphi\varphi\varphi} - \delta T_{\varphi\varphi t} - \eta \Phi_{\varphi\varphi} + \eta y_{\varphi\varphi} + \eta T_{\varphi t} = 0$$

$$-3\delta T_{y\varphi} + \eta T_y = 0$$

$$-\delta T_{y\varphi} + \eta T_{y\varphi} = 0$$

$$-\delta T_{y\varphi\varphi} + \eta T_{y\varphi} = 0$$

$$-3\delta y_{\varphi\varphi} + 3\eta y_\varphi = 0$$

$$-\delta y_{\varphi\varphi t} + \eta y_{\varphi t} = 0$$

(A.4)

$$-\delta y_{\varphi\varphi\varphi} + \eta y_{\varphi\varphi} = 0$$

$$-4\delta T_{\varphi\varphi} + 3\eta T_\varphi = 0$$

$$-\delta T_{\varphi\varphi} + \eta T_\varphi = 0$$

$$-\delta T_{\varphi\varphi\varphi} + \eta T_{\varphi\varphi} = 0$$

$$-\delta \Phi_{\varphi t} - 2\delta y_{\varphi t} = 0$$

$$T_y = 0$$

$$-3\delta y_{\varphi t} + \eta y_t = 0$$

$$-3\delta y_{\varphi\varphi} + \eta y_\varphi = 0$$

$$T_{\varphi\varphi} = 0$$

Este sistema possui diversas equações redundantes, simplificando-o teremos (II.13):

$$T_x = T_y = 0$$

$$y_t = y_x = 0$$

$$\Phi_{xt} = \Phi_{xx} = 0$$

$$-\alpha \Phi_t + \beta \Phi_y - \delta \varphi \Phi_y + \delta \Phi_{yyt} = 0$$

$$\delta \Phi_{yyt} - 2\delta y_y = 0$$

$$-\delta \Phi - 2\delta \Phi_{yxt} - \eta \Phi_{yt} - \delta \varphi T_x - \beta T_x - \delta \varphi y_y + \beta y_y = 0$$

$$2\delta \Phi_{yxx} - \eta \Phi_{yx} = 0$$

$$\delta \Phi_{xtt} - \eta \Phi_{xt} = 0$$

$$2\delta \Phi_{yxx} - \delta y_{yy} - \eta \Phi_y = 0$$

$$2\delta \Phi_{xxx} - \eta \Phi_x = 0$$

$$\delta \Phi_{xxx} - \eta \Phi_{xx} = 0$$

Reduzindo ainda mais o sistema acima, teremos:

$$T_x = T_y = 0$$

$$y_x = y_t = y_y = 0$$

$$\Phi_x = 0$$

$$-\alpha \Phi_t + \beta \Phi_y - \delta \Psi \Phi_y + \delta \Phi_{yyt} = 0$$

$$-\delta \Phi - \eta \Phi_{yt} - \delta \Psi \tau_t - \beta \tau_t = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\Phi_y = 0$$

Finalmente, o sistema se simplifica para:

$$\tau_x = \tau_y = 0 \quad (\text{A.7a})$$

$$y_x = y_t = y_y = 0 \quad (\text{A.7b})$$

$$\Phi_t = \Phi_x = \Phi_y = 0 \quad (\text{A.7c})$$

$$-\delta \Phi - \delta \Psi \tau_t - \beta \tau_t = 0 \quad (\text{A.7d})$$

Do sistema (A.7), podemos concluir que  $\tau = \tau(t)$ , e que  $\Phi$  e  $y$  são constantes arbitrárias:

$$\tau = \tau(t)$$

$$y = a \quad (\text{A.8})$$

$$\Phi = c$$

Substituindo (A.8) em (A.7d) teremos que:

$$\tau = - \frac{\delta c}{\delta \Psi - \beta} t + b \quad (\text{A.9})$$

Mas, como  $\tau$  e  $\Phi$  devem satisfazer também (A.7b) e (A.7c), a solução final será:

$$y = a$$

$$\tau = b \quad (\text{A.10})$$

$$\Phi = 0$$

APÊNDICE B

B.1- ANÁLISE DE SIMILARIDADE DE UMA CLASSE DE EQUAÇÕES

Aqui se encontram todos os termos da equação (III.11) modificados pela transformação infinitesimal (III.13).

$$\bar{u}_{\bar{t}} = u_t + \epsilon \left\{ -\mu u_t - \eta u_x + \lambda \right\} \quad (B.1a)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \bar{u}_{\bar{x}} = u u_x + \epsilon \left\{ u \left[ -\beta u_x - \rho u_t + \tau \right] + \right. \\ \left. + u_x \left[ \sigma + \tau x + \lambda t \right] \right\} \quad (B.1b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{j\bar{x}} \bar{u}_{(j+1)\bar{x}} = u_{jx} u_{(j+1)x} + \epsilon \left\{ u_{jx} \left[ -(j+1) \beta u_{(j+1)x} + \right. \right. \\ \left. \left. - (j+1) \rho u_{jxt} \right] + u_{(j+1)x} \left[ -j \beta u_{jx} - j \rho u_{(j-1)xt} + \tau \delta_{j,\pm} \right] \right\} \quad (B.1c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \bar{u}_{(2j+1)\bar{x}} = u u_{(2j+1)x} + \epsilon \left\{ u \left[ -(2j+1) \beta u_{(2j+1)x} - (2j+1) \rho u_{(2j)xt} \right] + \right. \\ \left. + u_{(2j+1)x} \left[ \sigma + \tau x + \lambda t \right] \right\} \quad (B.1d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\bar{t}(2j)\bar{x}} = u_{t(2j)x} + \epsilon \left\{ -(\mu + 2\rho j) u_{(2j)xt} - \eta u_{(2j+2)x} + \right. \\ \left. - 2 \rho j u_{(2j-1)xtt} \right\} \quad (B.1e) \end{aligned}$$

$$\bar{u}_{(j+1-i)\bar{x}} \bar{u}_{(j+i)\bar{x}} = u_{(j+1-i)x} u_{(j+i)x} + \epsilon \left\{ u_{(j+1-i)x} \cdot \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ -(j+1) \beta u_{(j+1)x} - (j+1) \int u_{(j+1-x)t} + \tau \delta_{j+1,1} \right] + \\
 & + u_{(j+1)x} \left[ -(j+1-i) \beta u_{(j+1-i)x} - (j+1-i) \int u_{(j-i)x} + \tau \delta_{j+1-i,1} \right] \\
 & \hspace{20em} (B.1f)
 \end{aligned}$$

Utilizando as expressões (B.1), obtemos a equação (III.11) transformada:

$$\begin{aligned}
 & \bar{u}_t - 2\bar{u} \bar{u}_x + \sum_{j=1}^N a_j \left[ 2(-1)^j \bar{u}_j \bar{u}_{(j+1)} - 2\bar{u} \bar{u}_{(2j+1)} + \right. \\
 & \left. \bar{u}_{(2j)} - 2 \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} \bar{u}_{(j+1-i)} \bar{u}_{(j+i)} \right] = 0 = \\
 & u_t - 2u u_x + \sum_{j=1}^N a_j \left[ 2(-1)^{j+1} u_j u_{(j+1)} - 2u u_{(2j+1)} + \right. \\
 & \left. u_{(2j)} - 2 \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} u_{(j+1-i)} u_{(j+i)} \right] + \epsilon \left\{ -\mu u_t + \right. \\
 & \left. u_x + \lambda + 2\beta u u_x + 2\int u u_t - 2\tau u - 2\sigma u_x - 2\tau u_x x + \right. \\
 & \left. \lambda u_t + \sum_{j=1}^N a_j \left[ 2(-1)^j (j+1) \beta u_j u_{(j+1)} + 2(-1)^j (j+1) \int \right. \right. \\
 & \left. \left. u_j x_t + 2(-1)^j j \beta u_{(j+1)} u_j + 2(-1)^j j \int u_{(j-1)x} u_{(j+1)x} + \right. \right. \\
 & \left. \left. 2(-1)^{j+1} \tau \delta_{j,1} u_{(j+1)} + 2(2j+1) \beta u u_{(2j+1)} + 2(2j+1) \int \right. \right. \\
 & \left. \left. u_{(2j)x} - 2\delta u_{(2j+1)} - 2\tau x u_{(2j+1)} - 2\lambda t u_{(2j+1)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. u + 2\beta j \right) u_{(2j)x} - \eta u_{(2j+1)} - 2\int j u_{(2j-1)x} + \right. \\
 & \left. \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} \left\{ 2(j+1) \beta u_{(j+1-i)} u_{(j+i)} + 2(j+i) \int u_{(j+1-i)} u_{(j+i-1)x} \right\} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2\tau u_{(j+1-i)x} \delta_{j+i,1} + 2(j+1-i)\beta u_{(j+i)x} u_{(j+1-i)x} + \\
 & + 2(j+1-i)\rho u_{(j+1)x} u_{(j-i)x} - 2\tau u_{(j+i)x} \delta_{j+1-i,1} \Big] \Big] \Big] \quad (B.2)
 \end{aligned}$$

Para que a equação (III.11) seja invariante sob esta transformação infinitesimal, impomos que todos os termos em primeira ordem em  $\epsilon$  sejam nulos. Para que tal aconteça, devemos satisfazer o sistema de equações descrito a seguir, sendo que para obtê-lo utilizamos que:

$$\delta_{j+1-i,1} = \delta_{j,1}$$

$$\delta_{j+i,1} = \delta_{j,1} \delta_{i,0}$$

e a equação original.

$$\lambda - 2\tau u = 0$$

$$-\eta + 2\beta u - 2\sigma - 2\mu u + 4\rho u^2 - 2\tau x - 2\lambda t = 0$$

$$(2j+1)\beta - \mu + 2\rho u = 0$$

$$\rho = 0$$

(B.3)

$$2\delta + \eta - 2\tau x - 2\lambda t = 0$$

$$2\beta j - 2\rho u = 0$$

$$\tau = 0$$

A solução deste sistema é praticamente imediata:

$$\begin{aligned} \lambda = \rho = \beta = \mu = \tau = 0 \\ \eta + 2\sigma = 0 \end{aligned} \quad (B.4)$$

Portanto, as funções que deixam a equação (III.11) invariante são:

$$\begin{aligned} x &= \delta - 2\sigma t \\ T &= \alpha \\ U &= \sigma \end{aligned} \quad (B.5)$$

Utilizando estas funções, as equações de Lagrange para o nosso caso particular se tornam:

$$\frac{dx}{\delta - 2\sigma t} = \frac{dt}{\alpha} = \frac{du}{\delta} \quad (B.6)$$

Vamos resolver primeiramente a equação das variáveis independentes. Queremos calcular um invariante  $\gamma$  tal que:

$$dr = 0 \quad (B.7)$$

e que satisfaça (B.6).

$$\gamma = \gamma(x, t)$$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial t} dt = 0$$

$$dr = \left( \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial t} \right) dt = 0 \quad (\text{B.8})$$

Utilizando (B.6) em (B.8), obtemos a seguinte equação para  $\alpha \neq 0$ :

$$\frac{\partial r}{\partial x} (\rho - 2\sigma t) + \alpha \frac{\partial r}{\partial t} = 0, \quad (\text{B.9})$$

que tem como solução particular:

$$r = \alpha x + \sigma t^2 - \rho t. \quad (\text{B.10})$$

Agindo analogamente, vamos chegar a um outro invariante  $f$ , tal que:

$$df = 0 \quad (\text{B.11})$$

e que satisfaça também (B.6).

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial u} du = 0$$

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} \right) dt = 0 \quad (\text{B.12})$$

Substituindo (B.6) em (B.12), para  $\alpha \neq 0$ , teremos:

$$(\rho - 2\sigma t) \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha \frac{\partial f}{\partial t} + \sigma \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad (\text{B.13})$$

cuja solução é:

$$f(r) = \alpha x + \alpha u - \sigma t - \sigma t + \sigma t^2 \quad (B.14)$$

Conseguimos portanto obter dois invariantes ou variáveis similares. Note que o mesmo resultado teria sido obtido integrando diretamente as equações de Lagrange.

Para reescrever a equação (III.11) em termos das variáveis similares  $f$ ,  $r$ , precisamos das derivadas de  $f$  a partir da equação (B.14). A partir desta expressão chegamos a:

$$u_t = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{df}{dr} (2\sigma t - r) + r + \sigma - 2\sigma t \right] \quad (B.15a)$$

$$u_{yx} = \alpha^{\beta-1} \frac{d^2 f}{dr^2} - \delta_{\beta,1} \quad (B.15b)$$

$$u_{t(2\beta)x} = \alpha^{\beta-1} \frac{d^{\beta+1} f}{dr^{\beta+1}} (2\sigma t - r) \quad (B.15c)$$

Utilizando as equações (B.15) na equação (III.11), obtemos a equação (III.23).

## B.2-ANÁLISE DE SIMILARIDADE DE UMA EQUAÇÃO

Aplicando a regra da cadeia à transformação (III.12),

obtemos:

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} = 1 - \epsilon [X_x + X_\mu \mu_x]$$

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{t}} = -\epsilon [X_t + X_\mu \mu_t]$$

$$\frac{\partial t}{\partial \bar{x}} = 1 - \epsilon [T_x + T_\mu \mu_x]$$

$$\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} = -\epsilon [T_t + T_\mu \mu_t]$$

(B.16)

Do mesmo modo calculamos:

$$\bar{\mu}_{\bar{t}} = \mu_t + \epsilon \left[ U_t + (U_\mu - T_t) \mu_t - X_t \mu_x - T_\mu \mu_t^2 - X_\mu \mu_t \mu_x \right] \quad (\text{B.17a})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu} \bar{\mu}_{\bar{x}\bar{x}} = & \mu \mu_{xx} + \epsilon \left\{ \mu_x U_{xx} + \mu_x^2 (U_{x\mu} - X_{xx}) - \mu_x \mu_t \cdot \right. \\ & \cdot (T_x + T_{xx}) - \mu_x^3 (U_{\mu\mu} - 2X_{x\mu} - X_{\mu\mu}) - \mu_x^2 \mu_t (T_{x\mu} + T_\mu) + \\ & - \mu_x^4 X_{\mu\mu} - \mu_x^3 \mu_t (T_{x\mu} + T_\mu) - \mu_x^4 X_{\mu\mu} - \mu_x^3 \mu_t T_{\mu\mu} + \\ & + \mu_x \mu_{xx} (2U_\mu - 3X_x) - 2\mu_x \mu_{tx} T_x - 3\mu_x^2 \mu_{xx} X_\mu + \\ & \left. - \mu_x \mu_{xx} \mu_t T_\mu - 2\mu_x^2 \mu_{tx} T_\mu + \mu_{xx} U_x \right\} \quad (\text{B.17b}) \end{aligned}$$

$$\bar{u} \bar{u}_x = u u_x + \epsilon \left\{ u U_x + u u_x [U_u - X_x] - u u_t T_x + \right. \\ \left. - u u_x^2 X_u - 2 u u_x u_t T_u + u_x U \right\} \quad (B.17c)$$

$$\bar{u}_x \bar{x} \bar{x} = u_{xxt} + \epsilon \left\{ U_{xxt} + u_{xx} (2U_{xut} - X_{xxt} + U_{ut} - 2X_{xt}) + \right. \\ \left. - u_{xxx} X_t + u_t (U_{xuu} - T_{xxt}) - 2u_{tx} T_{xt} - u_x^3 X_{uut} + u_{xxt} \cdot \right. \\ \left. (-T_t - X_x + U_u - 2X_x + 2U_{xu}) + u_x^2 (U_{uut} - 2X_{uut}) - u_{tt} T_{xx} - u_t^2 T_{xut} + \right. \\ \left. - u_t u_x T_{xut} - 2u_{xtt} T_x + u_t u_{xx} (2U_{xuu} - X_{xuu} + U_{uu} - 2X_{xu} - T_{ut}) + \right. \\ \left. - 2u_{xt}^2 T_u - 2u_t u_{xxt} T_u - u_x u_{xxx} X_u + u_x u_{tx} (2U_{uu} - 4X_{xu} - 2T_{ut}) + \right. \\ \left. - u_x^2 u_t (U_{uuu} - 2X_{xuu} - T_{uut}) - 4u_t u_{tx} T_{xu} - u_x u_t^2 T_{xuu} + \right. \\ \left. - u_x^3 u_t X_{uuu} + u_x^2 u_{xt} (-3X_{uu} - T_{uu}) - u_x^2 u_t^2 T_{uuu} - 4u_x u_t u_{xt} T_{uu} + \right. \\ \left. - 3u_{xt} u_{xx} X_u - 3u_x u_{xxt} X_u - 3u_x u_{xx} X_{ut} - 3u_x u_{xx} u_t X_{uu} + \right. \\ \left. - u_{tt} u_{xx} T_u - u_t^2 u_{xx} T_{uu} - 2u_x u_{xtt} T_u \right\} \quad (B.17d)$$

$$\bar{u} \bar{u}_x \bar{x} \bar{x} = u u_{xxx} + \epsilon \left\{ u U_{xxx} + u u_x^2 (U_{uuu} - 2X_{xuu}) + u u_x U_{xut} + \right. \\ \left. + u u_x^3 (U_{uuu} - 3X_{xuu}) - u u_x^4 X_{uuu} + u u_{xx} (2U_{xuu} - X_{xxx} + U_{ux} + \right. \\ \left. - 2X_{xx}) + 3u u_x^2 X_u + u u_{xxx} (-3X_x + 2U_{xu} - X_{xx} + U_u) - u u_t T_{xxx} + \right. \\ \left. - 3u u_{xt} T_{xx} - 3u u_{xxt} T_x + u u_x u_{xx} (2U_{xuu} - X_{xuu} + 3U_{uu} - 3X_{xu}) + \right. \\ \left. + 3u u_x u_{xxx} X_u - 3u u_x u_t T_{xuu} - 5u u_x u_{tx} T_{xu} - 3u u_x^2 u_{tx} T_{uu} + \right. \\ \left. - 3u u_x u_{txx} T_u - 2u u_t u_{xx} T_{xu} - u u_t u_{xxx} T_u - 2u u_x^2 u_t T_{xuu} + \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & -3\mu u_x u_t u_{xx} T_{xu} - \mu u_x^3 T_{uuu} - 3\mu u_{xx} u_{tx} T_u + \mu_{xxx} U \end{aligned} \right\} \quad (8.17c)$$

Para que a equação (III.25) seja invariante sob esta transformação infinitesimal um sistema de equações deve ser satisfeito. Muitas destas equações são redundantes e o sistema pode ser reduzido para:

$$T_x = T_u = 0$$

$$X_u = 0$$

$$U_t - U_{xxt} - 2\mu U_x - 2\mu U_{xxx} = 0$$

$$U_u - T_t - U_{xxu} = 0$$

$$2\mu U_{uuu} - U_{ut} - 4X_{xx} = 0 \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} -2U_{xut} + X_{xxt} - U_{ut} + 2X_{xt} + 4U_x + 4\mu U_{xxu} - 2\mu X_{xxx} + \\ + 2\mu U_{ux} - 4\mu X_x = 0 \end{aligned}$$

$$X_t + 2U - 6\mu X_x + 4\mu U_{xu} - 2\mu X_{xx} + 2\mu U_u = 0$$

$$4U_{uu} + 2\mu U_{uuu} = 0$$

$$T_t + X_{xx} - U_u + 2X_x + 2U_{xu} = 0$$

$$-2U_{uu} = 0$$

$$-U_{uuu} = 0$$

$$8U_{xx} - 12X_x + 4u U_{xuu} = 0$$

Resolvendo este sistema chegamos à seguinte solução (descrita na expressão (III.26)):

$$X = \delta - 2\sigma t$$

$$T = \alpha \tag{3.19}$$

$$U = \sigma$$

## APÊNDICE C

### C.1-CÁLCULO DOS CAMPOS MAGNÉTICOS APROXIMADOS

A expressão calculada para  $B_{\rho}$  é (equação (V.13a)):

$$B_{\rho} = \frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \frac{(n+1) n \sin \theta}{R_0 - \rho \cos \theta} \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right). \quad (C.1)$$

Expandindo o denominador em série de Taylor, mantendo termos até segunda ordem em  $\rho/R_0$ , teremos:

$$\frac{1}{R_0 - \rho \cos \theta} \approx \frac{1}{R_0} \left[ 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos \theta + \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos^2 \theta \right]. \quad (C.2)$$

Substituindo (C.2) em (C.1) obtemos a seguinte expressão para  $B_{\rho}$  (equação (V.15a)):

$$B_{\rho} \approx \frac{\mu_0 I_p}{4\pi R_0} (n+1) n \sin \theta \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \left[ 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos \theta + \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos^2 \theta \right]. \quad (C.3)$$

Agindo analogamente para  $B_{\theta}$  (V.13b):

$$B_{\theta} = \frac{\mu_0 I_p R_0}{4\pi} \frac{1}{R_0 - \rho \cos \theta} \left[ \frac{2\rho}{a^2} - 3(n+1) \frac{\rho^2}{a^2 R_0} \cos \theta + \frac{(n+1)}{R_0} \cos \theta \right] \approx$$

$$\approx \frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \left[ \frac{2\rho}{a^2} - 3(n+1) \frac{\rho^2}{a^2 R_0} \cos \theta + \frac{(n+1)}{R_0} \right] \left( 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos \theta + \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos^2 \theta \right). \quad (C.4)$$

Avaliando numericamente estes termos, vemos que para desprezarmos o termo de potência  $\rho^3/R_0^3$ :

$$- 3(1+1) \frac{\rho^4}{a^2 R_0^3} \approx 0,9$$

precisamos desprezar também os termos:

$$(1+1) \frac{\rho^2}{R_0^3} \approx 0,3$$

$$(1+1) \frac{\rho}{R_0^2} \approx 1,1$$

Chegamos então à seguinte expressão para  $B_\theta$  (V.15b):

$$B_\theta \approx \frac{\mu_0 I \rho}{4\pi} \left[ \frac{2\rho}{a^2} - 3(1+1) \frac{\rho^2}{a^2 R_0} \cos\theta + \frac{(1+1)}{R_0} \cos\theta + \right. \\ \left. - 3(1+1) \frac{\rho^3}{a^2 R_0^2} \cos^2\theta + \frac{2\rho^3}{a^2 R_0} \cos^2\theta \right]. \quad (C.5)$$

A expansão de  $B_\varphi$  é a mais complicada, pois envolve o produto de duas expansões:

$$B_\varphi \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R_0 - \rho \cos\theta}, \quad (C.6)$$

a expansão do denominador e a expansão de  $I$ . Faremos primeiramente a expansão de  $I$ :

$$I = \left[ I_e^2 + 2 \frac{R_0^2}{a^2} I_p^2 \left( \frac{5}{4} - \Lambda \right) \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \left[ 1 - \frac{\rho}{R_0} (\Lambda + 1) \cos \theta \right] \right]^{1/2}, \quad (C.7)$$

que pode ser reescrito na forma:

$$I = R_0 \left\{ \left( C^2 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) - \frac{\rho}{R_0} \left[ (\Lambda + 1) D \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \cos \theta \right] \right\}^{1/2}, \quad (C.8)$$

onde

$$D = \frac{2 I_p^2 (5/4 - \Lambda)}{a^2} \quad (C.9a)$$

e

$$C^2 = D + \frac{I_e^2}{R_0^2} \quad (C.9b)$$

Expandindo esta expressão em série de Taylor para a variável  $\rho/R_0$  e mantendo termos até segunda ordem, teremos:

$$I \simeq R_0 \left\{ \sqrt{C^2 - D \frac{\rho^2}{a^2}} - \frac{D (\Lambda + 1) \cos \theta (1 - \rho^2/a^2)}{2 \sqrt{C^2 - D \rho^2/a^2}} \frac{\rho}{R_0} + \frac{D^2 (\Lambda + 1)^2 \cos^2 \theta (1 - \rho^2/a^2)^2}{8 [C^2 - D \rho^2/a^2]^{3/2}} \frac{\rho^2}{R_0^2} \right\} \quad (C.10)$$

Como  $C^2 \simeq 100 D$ , podemos expandir em (C.10) também os termos que são função de:

$$\left[ C^2 - D \frac{\rho^2}{a^2} \right]$$

Por exemplo:

$$\sqrt{c^2 - D \frac{\rho^2}{a^2}} \approx c \sqrt{1 - \frac{D}{c^2} \frac{\rho^2}{a^2}} \quad (C.11)$$

Denominando:

$$x = \frac{D}{c^2} \frac{\rho^2}{a^2} \ll 1 \quad (C.12)$$

e utilizando a expansão em série de Taylor de  $\sqrt{1-x}$ , teremos:

$$\sqrt{c^2 - D \frac{\rho^2}{a^2}} \approx c - \frac{1}{2} \frac{D}{c} \frac{\rho^2}{a^2} - \frac{1}{8} \frac{D^2}{c^3} \frac{\rho^4}{a^4} \quad (C.13a)$$

Analogamente:

$$\frac{1}{\sqrt{c^2 - D \frac{\rho^2}{a^2}}} \approx \frac{1}{c} + \frac{1}{2} \frac{D}{c^3} \frac{\rho^2}{a^2} + \frac{3}{8} \frac{D^2}{c^5} \frac{\rho^4}{a^4} \quad (C.13b)$$

$$\frac{1}{[c^2 - D \rho^2/a^2]^{3/2}} \approx \frac{1}{c^3} + \frac{3}{2} \frac{D}{c^5} \frac{\rho^2}{a^2} + \frac{15}{8} \frac{D^2}{c^7} \frac{\rho^4}{a^4} \quad (C.13c)$$

Substituindo as expressões (C.13) em (C.10), chegamos

a:

$$I \approx R_0 \left\{ \left[ c - \frac{1}{2} \frac{D}{c} \frac{\rho^2}{a^2} - \frac{1}{8} \frac{D^2}{c^3} \frac{\rho^4}{a^4} \right] + \right. \\ \left. - \frac{D}{2} (1+1) \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{\rho}{R_0} \cos \theta \left[ \frac{1}{c} + \frac{1}{2} \frac{D}{c^3} \frac{\rho^2}{a^2} + \frac{3}{8} \frac{D^2}{c^5} \frac{\rho^4}{a^4} \right] + \right.$$

$$- \frac{D^2}{8} (1+1)^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2 \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos^2 \theta \left[ \frac{1}{C^3} + \frac{3}{2} \frac{D}{C^5} \frac{\rho^2}{a^2} + \frac{15}{8} \frac{D^2}{C^7} \frac{\rho^4}{a^4} \right] \} . \quad (C.14)$$

Comparando os termos numericamente, verificamos que não tem sentido manter todos os termos das últimas expansões, pois estes já são correções do termo principal. Desprezaremos então o último termo da segunda expansão e manteremos somente o primeiro termo da última delas. A expressão para  $I$  ficará finalmente:

$$I \simeq R_0 \left\{ C - \frac{1}{2} \frac{D}{C} \frac{\rho^2}{a^2} - \frac{1}{8} \frac{D^2}{C^3} \frac{\rho^4}{a^4} - \frac{D}{2} (1+1) \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \frac{\rho}{R_0} \cos \theta \cdot \left[ \frac{1}{C} + \frac{1}{2} \frac{D}{C^3} \frac{\rho^2}{a^2} \right] - \frac{D^2}{8C^3} (1+1)^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2 \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos^2 \theta \right\} \quad (C.15)$$

Para obtermos a expansão de  $B_p$  substituiremos então (C.15) e (C.2) em (C.6)

$$B_p \simeq \frac{\mu_0}{2\pi R_0} \left[ 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos \theta + \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos^2 \theta + \frac{\rho^3}{R_0^3} \cos^3 \theta + \frac{\rho^4}{R_0^4} \cos^4 \theta \right] .$$

$$R_0 \left\{ C - \frac{1}{2} \frac{D}{C} \frac{\rho^2}{a^2} - \frac{1}{8} \frac{D^2}{C^3} \frac{\rho^4}{a^4} - \frac{D}{2} (1+1) \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \frac{\rho}{R_0} \cos \theta \cdot \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{2} \frac{D}{C^3} \frac{\rho^2}{a^2} \right) - \frac{D^2}{8C^3} (1+1)^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2 \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos^2 \theta \right\} \quad (C.16)$$

Normalmente levaríamos em conta apenas termos da expansão até segunda ordem. Porém, como o termo principal é muito maior que os outros (da ordem de  $10^3$  a  $10^7$ ) para considerarmos os termos de correção, precisamos manter a expansão do termo principal até quarta ordem. Ficamos então com a seguinte expressão (V.15c):

$$B_{\varphi} \simeq \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ C \left( 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta + \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos^2\theta + \frac{\rho^3}{R_0^3} \cos^3\theta + \frac{\rho^4}{R_0^4} \cos^4\theta \right) - \frac{1}{2} \frac{D}{C} \frac{\rho^2}{a^2} \left( 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta \right) - \frac{D}{2C} (1+1) \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{\rho}{R_0} \cos\theta \left( 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta \right) \right\} \quad (C.17)$$

## C.2- EXPANSÃO DA COMPONENTE $A_{\varphi}$ DO POTENCIAL VETOR

Obtivemos a seguinte expressão para a componente  $A_{\varphi}$  do potencial vetor:

$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0 I \rho R_0}{4\pi} \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{1}{R_0 - \rho \cos\theta} \left[ 1 - (1+1) \frac{\rho}{R_0} \cos\theta \right] \quad (C.18)$$

Expandindo o denominador em potências de  $\rho/R_0$  :

$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0 I \rho}{4\pi} \left\{ 1 - \frac{\rho^2}{a^2} - (1+1) \frac{\rho}{R_0} \cos\theta + (1+1) \frac{\rho^3}{a^2 R_0} \cos\theta \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta + \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos^2\theta \right\} \quad (C.19)$$

Vamos desprezar termos de potências maiores do que segunda ordem. Porém, alguns termos de potência mais baixa são numericamente da mesma ordem que estes, portanto não serão levados em consideração.

$$A_{\varphi} \simeq \frac{\mu_0 I \rho}{4\pi} \left\{ 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta + \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos^2\theta - \frac{\rho^2}{a^2} \left( 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta + \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos^2\theta \right) - \frac{\rho}{R_0} (1+1) \cos\theta \left( 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta \right) + \frac{\rho^3}{a^2 R_0} (1+1) \cos\theta \left( 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos\theta \right) \right\} \quad (C.20)$$

## APÊNDICE D

### D.1-OBTENÇÃO DO POTENCIAL ESCALAR PARA UMA HÉLICE CILÍNDRICA

Obtemos nos dois primeiros itens deste apêndice os potenciais vetor e escalar criados por uma corrente elétrica em uma hélice enrolada ao redor de um cilindro de raio  $b$  (considerado como uma aproximação de um tokamak com razão-de-aspecto grande).

Na ausência de correntes o campo magnético pode ser calculado a partir de um potencial escalar  $\Phi$  que satisfaz a equação de Laplace:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (D.1)$$

onde  $\rho, \theta, z$  são as coordenadas cilíndricas.

A hélice é descrita pelas seguintes equações:

$$u = m\theta - \frac{n}{R_0} z = m\theta - kz, \quad (D.2a)$$

$$\rho = b. \quad (D.2b)$$

Utilizando então a variável  $u$ , ficamos com a seguinte equação:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \left\{ \frac{m^2}{\rho^2} + k^2 \right\} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = 0. \quad (D.3)$$

Vamos considerar uma separação de variáveis para obter a solução da equação (D.3):

$$\Phi = R(\rho) U(u). \quad (D.4)$$

Substituindo (D.4) em (D.3) chegamos a:

$$\frac{1}{R\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left\{ \frac{m^2}{\rho^2} + k^2 \right\} \frac{1}{U} \frac{d^2U}{du^2} = 0. \quad (D.5)$$

Portanto:

$$\frac{d^2U}{du^2} = \lambda U, \quad (D.6)$$

e a solução desta equação é:

$$U = \alpha e^{-\sqrt{\lambda}u} + \beta e^{+\sqrt{\lambda}u} \quad (D.7)$$

Mas, a variável  $u$  deve ser uma variável periódica, pois a hélice é periódica, então:

$$\lambda = -N^2, \quad N \text{ inteiro}, \quad (D.8)$$

o que implica que:

$$U = A \operatorname{sen} Nu + B \cos Nu \quad (D.9)$$

A equação para a variável  $\rho$  tem a seguinte forma:

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \left\{ \frac{m^2}{\rho^2} + k^2 \rho \right\} N^2 R = 0. \quad (D.10)$$

Fazemos então a seguinte mudança de variáveis:

$$x = Nk\rho \quad (D.11a)$$

$$y(x) = R(\rho), \quad (D.11b)$$

e a equação (D.10) se torna:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left( 1 + \frac{m^2 N^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (D.12)$$

A solução destas equações são as funções de Bessel de primeira  $I_{Nm}$  e de segunda espécie  $K_{Nm}$  de ordem  $Nm$  (Butkov 78).

$$y = A_{Nm} I_{Nm}(x) + B_{Nm} K_{Nm}(x). \quad (D.13)$$

Ou ainda:

$$R = A_{Nm} I_{Nm}(Nkp) + B_{Nm} K_{Nm}(Nkp). \quad (D.14)$$

Lembrando que o seno e cosseno diferem apenas por uma fase, e que a solução para o potencial escalar é tomada como o produto das funções (D.9) e (D.10), temos que:

$$\Phi(\rho, u) = B_0 z + \sum_{Nm=1}^{\infty} \left[ A_{Nm} I_{Nm}(Nkp) + B_{Nm} K_{Nm}(Nkp) \right] \cos N u. \quad (D.15)$$

O primeiro termo da equação (D.15) representa um campo uniforme na direção z. Como  $K_{Nm}$  diverge na origem, a solução para a região interna ao cilindro é dada por:

$$\Phi_i(\rho, u) = B_0 z + \sum_{Nm=1}^{\infty} A_{Nm} I_{Nm}(Nkp) \cos N u. \quad (D.16)$$

Por outro lado, a solução na região externa às hélices, obtida de maneira análoga é:

$$\Phi_e(\rho, u) = \sum_{Nm=1}^{\infty} B_{Nm} K_{Nm}(Nkp) \cos N u. \quad (D.17)$$

Para obter as constantes arbitrárias da equação (D.16), consideramos que há uma densidade superficial de correntes na hélice:

$$\vec{l} = \vec{l}_\theta + \vec{l}_z \quad (D.18)$$

Utilizando as equações (D.2) que caracterizam a hélice,

e que seu passo é  $2\pi m/k$ , temos que o ângulo formado pela hélice e o sentido positivo do eixo z é:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{k}{m} b. \quad (D.19)$$

Para um fio fino conduzindo uma corrente I, por uma hélice e fazendo uma expansão em série de Fourier, vale:

$$i_z = \frac{I}{b} \delta(u) = \frac{I}{2\pi b} + \sum_{Nm=1}^{\infty} \frac{I}{\pi b} \cos Nu \quad (D.20a)$$

$$i_\theta = \operatorname{tg} \delta i_z = \frac{k}{m} \frac{I}{2\pi} + \sum_{Nm=1}^{\infty} \frac{k}{m} \frac{I}{\pi} \cos Nu, \quad (D.20b)$$

onde

$$u = m\theta - kz$$

Observamos que as equações (D.20) consistem de uma superposição de termos de correntes uniformes e harmônicas, que têm a forma:

$$i_{zNm} = \frac{I}{\pi b} \cos Nu, \quad (D.21a)$$

$$i_{\theta Nm} = \frac{kI}{m\pi} \cos Nu. \quad (D.21b)$$

Quando  $f = b$  as seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas:

$$B_{\rho}^i = B_{\rho}^e \quad (D.22a)$$

$$B_{\theta}^i - B_{\theta}^e = -\mu_0 i_{zNm} \quad (D.22b)$$

$$B_z^i - B_z^e = \mu_0 i_{\theta Nm} \quad (D.22c)$$

Lembrando que:

$$\mathbf{B} = \nabla \Phi \quad (D.23)$$

e com as equações (D.16), (D.17), (D.21) e (D.22), obtemos :

$$A_{Nm} = \frac{\mu_0 k b I}{m \pi} K'_{Nm}(Nkb), \quad (D.24)$$

onde utilizamos ainda a propriedade (Fernandes et al 85):

$$I'_l(x) K_l(x) - I_l(x) K'_l(x) = \frac{1}{x} \quad (D.25)$$

Uma hélice conduzindo uma corrente elétrica, cria ainda um campo uniforme, cujo potencial é dado por:

$$\Phi_0^i = \frac{\mu_0 n I}{2\pi R_0 m} z \quad (D.26a)$$

ou seja:

$$B_0 = \frac{\mu_0 n I}{2\pi R_0 m} \quad (D.26b)$$

Portanto das equações (D.24), (D.25) e (D.16), chegamos que o potencial escalar interno ao cilindro é:

$$\Phi_i = \frac{\mu_0 I n}{2\pi R_0 m} \left\{ z + 2b \sum_{Nm=1}^{\infty} K'_{Nm}(Nkb) I_{Nm}(Nkp) \sin Nu \right\}$$

Esta é a expressão utilizada em (VI.8).

## D.2-POTENCIAL VETOR DE UMA HÉLICE CILÍNDRICA

A partir da equação obtida no item anterior para uma hélice cilíndrica, vamos obter o potencial vetor que descreve este mesmo sistema.

Como o campo magnético, na ausência de correntes tem divergente e gradiente nulos, podemos obtê-lo a partir de um potencial vetor  $A$  e de um potencial escalar  $\Phi$ . Portanto:

$$B_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \quad (D.28a)$$

$$B_\theta = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (D.28b)$$

$$B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (D.28c)$$

Escolhendo um gauge em que  $A_z$ ; as equações (D.28) se reduzem a:

$$-\frac{\partial A_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \quad (D.29a)$$

$$\frac{\partial A_\rho}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad (D.29b)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (D.29c)$$

Substituindo a expressão (D.16) em (D.29), temos que:

$$-\frac{\partial A_\theta}{\partial z} = \sum_{Nm=1}^{\infty} Nk A_{Nm} I'_{Nm}(Nk\rho) \mu_n Nu. \quad (D.30)$$

Integrando em  $z$ , lembrando que, como há simetria helicoidal,  $z$  e  $\theta$  sempre aparecem acoplados como  $u$ , obtemos:

$$A_\theta = - \sum_{Nm=1}^{\infty} A_{Nm} I'_{Nm}(Nk\rho) \cos Nu + f(\rho). \quad (D.31)$$

Substituindo agora (D.16) em (D.29b) e integrando, chegamos à seguinte expressão:

$$A_\rho = - \frac{1}{\rho} \sum_{Nm=1}^{\infty} \frac{m}{k} A_{Nm} I_{Nm}(Nk\rho) \mu_n Nu + g(\rho). \quad (D.32)$$

Estas duas componentes do potencial vetor devem satisfazer a expressão de  $B_z$  calculada a partir do potencial escalar. Igualando as expressões de  $B_z$  obtidas a partir do potencial escalar (D.16) e do potencial vetor (D.30) e (D.31), concluímos que a seguinte equação deve ser satisfeita:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{f}{\rho} = B_0. \quad (D.33)$$

Portanto:

$$f = \frac{B_0 \rho}{2}. \quad (D.34)$$

Além disto o argumento da somatória também deve ser nulo. Isto pode ser demonstrado, utilizando a seguinte relação entre as funções de Bessel, obtida a partir de suas relações de recorrência (Morozov 66):

$$I_n''(x) + \frac{1}{x} I_n'(x) - \left[1 + \frac{n^2}{x^2}\right] I_n(x) = 0. \quad (D.35)$$

A função  $f$  é arbitrária e a escolhemos como nula. Então, utilizando as expressões para  $A_{Nm}$  (D.24) e  $B_0$  (D.26b), chegamos à seguinte expressão (VI.10) para o potencial vetor:

$$A_\rho = -\frac{\mu_0 b I}{\pi \rho} \sum_{Nm=1}^{\infty} K'_{Nm}(Nkb) I_{Nm}(Nk\rho) \cos Nu \quad (D.36a)$$

$$A_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{n}{mR_0} \left[ \rho - 4b \sum_{Nm=1}^{\infty} K'_{Nm}(Nkb) I'_{Nm}(Nk\rho) \cos Nu \right]$$

$$A_z = 0 \quad \begin{matrix} (D.36b) \\ (D.36c) \end{matrix}$$

### D.3- POTENCIAL ESCALAR DE PARES DE HÉLICES CILÍNDRICAS

Consideramos agora,  $m$  pares de fios finos enrolados helicoidalmente em uma superfície cilíndrica de raio  $b$ . Os fios adjacentes igualmente espaçados conduzem correntes em sentidos

opostos e a separação angular entre dois fios vizinhos num plano normal à superfície cilíndrica é de  $\pi/m$ .

Um destes condutores é descrito pela equação da hélice:

$$u = m\theta - kz = \text{constante}, \quad (D.37)$$

então um condutor  $j$  qualquer será descrito por:

$$(m\theta - j\pi) - kz = \text{constante}. \quad (D.38)$$

O potencial escalar criado pelos  $m$  pares de correntes é então, de acordo com a equação (D.27):

$$\Phi = \sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j \frac{\mu_0 n I}{2\pi R_0 m} \left\{ z + 2b \sum_{Nm=1}^{\infty} K'_{Nm}(Nkb) I_{Nm}(Nkp) \mu_0 n N [(m\theta - j\pi) - kz] \right\} \quad (D.39)$$

Verificamos que a somatória do primeiro termo é nula. Por outro lado, a somatória dos senos é dada por:

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j \mu_0 n N [(m\theta - j\pi) - kz] = \begin{cases} 2m \mu_0 n N (m\theta - kz), & N \text{ ímpar} \\ 0, & N \text{ par} \end{cases} \quad (D.40)$$

Portanto, o potencial escalar de  $m$  pares de hélices cilíndricas é:

$$\Phi_m = \frac{2\mu_0 I b}{\pi} k \sum_{Nm=1}^{\infty} K'_{Nm}(Nkb) I_{Nm}(Nkp) \mu_n N(m\theta - kz),$$

(D.41)

sendo  $N$  ímpar. Esta é a expressão (VI.17).

#### D.4-POTENCIAL VETOR DE PARES DE HÉLICES CILÍNDRICAS

Para calcularmos o potencial vetor que gera o mesmo campo que o potencial escalar (D.41), utilizaremos novamente as equações (D.29).

De (D.29a) e (D.41) obtemos:

$$-\frac{\partial A_\theta}{\partial z} = \frac{2\mu_0 I b}{\pi} k^2 \sum_{Nm=1}^{\infty} N K'_{Nm}(Nkb) I'_{Nm}(Nkp) \mu_n N(m\theta - kz)$$

(D.42)

Integrando esta expressão em  $z$ , lembrando que para uma simetria helicoidal  $\theta$  e  $z$  aparecem somente na forma de  $u$ :

$$A_\theta = -\frac{2\mu_0 I b}{\pi} k \sum_{Nm=1}^{\infty} K'_{Nm}(Nkb) I'_{Nm}(Nkp) \cos N(m\theta - kz) + f(\rho)$$

(D.43)

Substituindo (D.41) em (D.29b):

$$\frac{\partial A_\rho}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{2\mu_0 I b k}{\pi} \sum_{Nm=1}^{\infty} Nm K'_{Nm}(Nkb) I_{Nm}(Nkp) \cos N(m\theta - kz). \quad (D.44)$$

Integrando em  $z$ , teremos:

$$A_\rho = -\frac{1}{\rho} \frac{2\mu_0 I b}{\pi} \sum_{Nm=1}^{\infty} m K'_{Nm}(Nkb) I_{Nm}(Nkp) \mu m N(m\theta - kz) + g(\rho). \quad (D.45)$$

A componente  $z$  do campo magnético deve ser a mesma calculada a partir do potencial vetor ou do potencial escalar. Utilizando a identidade (D.35), mostramos que o argumento da somatória é nulo. Além disto,  $f$  e  $g$  podem ser escolhidos arbitrariamente e as tomamos nulas. Assim, o potencial vetor é dado por:

$$A_\rho = -\frac{1}{\rho} \frac{2\mu_0 I b}{\pi} \sum_{Nm=1}^{\infty} m K'_{Nm}(Nkb) I_{Nm}(Nkp) \mu m N(m\theta - kz) \quad (D.46a)$$

$$A_\theta = -\frac{2\mu_0 I b k}{\pi} \sum_{Nm=1}^{\infty} K'_{Nm}(Nkb) I_{Nm}(Nkp) \cos N(m\theta - kz) \quad (D.46b)$$

$$A_z = 0. \quad (D.46c)$$

Como a amplitude dos termos do potencial vetor diminui conforme o produto  $Nm$  aumenta, consideramos apenas um dos harmônicos da somatória. Além disto, como  $\rho/R_0$ , utilizamos a aproximação para pequenos argumentos para as funções de Bessel (Butkov 78):

$$I_\ell(x) \simeq \frac{1}{\Gamma(\ell+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\ell \quad (D.47a)$$

$$K_\ell(x) \simeq \frac{T(\ell)}{2} \left(\frac{\ell}{x}\right)^\ell \quad (\text{D.47b})$$

Com estas expressões, o potencial vetor será dado pela equação (VI.14):

$$A_\rho \simeq \frac{\mu_0 m I}{2\pi b} \frac{R_0}{Nn} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{Nm-1} \sin N(m\theta - kz) \quad (\text{D.48a})$$

$$A_\theta \simeq \frac{\mu_0 m I}{\pi} \frac{R_0}{Nnb} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{Nm-1} \cos N(m\theta - kz) \quad (\text{D.48b})$$

$$A_z = 0 \quad (\text{D.48c})$$

#### D.5-POTENCIAL ESCALAR PARA PARES DE HÉLICES TOROIDAIS:

Consideramos  $m$  pares de condutores finos enrolados em um toro circular de raio menor  $b$  e raio maior  $R_0$ . Os fios adjacentes, igualmente espaçados, conduzem uma corrente  $I$  em sentidos opostos. Vamos calcular o potencial vetor deste sistema a partir do potencial escalar.

Este problema foi solucionado nas coordenadas toroidais usuais, sendo o enrolamento das hélices descrito pela equação:

$$u = m(w + \delta \mu n w) + n\varphi = \text{constante}. \quad (\text{D.49})$$

onde o segundo termo representa um enrolamento não-linear. A solução obtida para este problema (Kucinski et al 87) foi :

$$\begin{aligned}
\Phi = & \left( \frac{\cosh \varphi - \cos w}{\cosh \varphi_0} \right)^{1/2} \frac{\mu \mu_0 I}{\pi N} \left\{ \left( \frac{e^{\varphi_0}}{e^{\varphi}} \right)^{Nm+1/2} J_0(Nm\delta) \mu n Nu + \right. \\
& + \left( \frac{e^{\varphi_0}}{e^{\varphi}} \right)^{Nm+3/2} \left\{ \frac{(Nm+2)}{(Nm+4)} \frac{b}{4R_0} J_0(Nm\delta) + \frac{Nm}{(Nm+1)} \left[ \frac{\delta}{2} J_0(Nm\delta) + \right. \right. \\
& \left. \left. + J_1(Nm\delta) \right] \right\} \mu n (Nu+w) + \left( \frac{e^{\varphi_0}}{e^{\varphi}} \right)^{Nm-1/2} \left[ \frac{Nm}{(Nm-1)} \frac{b}{4R_0} J_0(Nm\delta) + \right. \\
& \left. + \frac{Nm}{(Nm-1)} \left[ \frac{\delta}{2} J_0(Nm\delta) - J_1(Nm\delta) \right] \right] \mu n (Nu-w) \left. \right\}. \quad (D.50)
\end{aligned}$$

onde  $J_0$  e  $J_1$  são funções cilíndricas de Bessel.

Utilizaremos a simplificação que o enrolamento é linear, portanto:

$$\delta = 0.$$

Ficamos então com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\Phi = & \left( \frac{\cosh \varphi - \cos w}{\cosh \varphi_0} \right)^{1/2} \frac{\mu \mu_0 I}{\pi N} \left\{ \left( \frac{e^{\varphi_0}}{e^{\varphi}} \right)^{Nm+1/2} \mu n Nu + \right. \\
& + \left( \frac{e^{\varphi_0}}{e^{\varphi}} \right)^{Nm+3/2} \frac{(Nm+2)}{(Nm+1)} \frac{b}{4R_0} \mu n (Nu+w) +
\end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{e^{\rho_0}}{e^{\rho}} \right)^{Nm-1/2} \frac{Nm}{(Nm-1)} \frac{b}{4R_0} \mu n (Nu - \omega) \left. \right\}. \quad (D.51)$$

Vamos fazer então uma mudança de variáveis das coordenadas toroidais para as coordenadas polares locais. Entre elas há as seguintes relações (Kucinski et al 87, Okano 89), que não são válidas muito perto do eixo magnético:

$$\bar{e}^{\rho} = \bar{e}^{\rho_0} \frac{\rho}{b} \quad (D.52a) \quad \omega \approx \pi - \theta \quad (D.52b)$$

$$\left( \frac{\cosh \rho - \cos \omega}{\cosh \rho_0} \right)^{1/2} \approx \left( \frac{e^{\rho_0}}{e^{\rho}} \right)^{-1/2} (1 - \bar{e}^{\rho} \cos \omega) \quad (D.52c)$$

$$e^{\rho_0} = \frac{2R_0}{b} \quad (D.52d) \quad \bar{e}^{\rho} = \frac{\rho}{2R_0} \quad (D.52e)$$

A lei de enrolamento, utilizando a expressão (D.52b), e considerando um enrolamento linear torna-se:

$$\mu = m (\pi - \theta) + n\varphi = \text{constante} \quad (D.53)$$

Com as equações (D.52) e (D.53), o potencial escalar será da aproximadamente por:

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{n\mu_0 I}{\pi N} (-1)^{Nm+1} \left( 1 + \frac{\rho}{R_0} \cos \theta \right) \left\{ \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm} \mu n N (m\theta - n\varphi) + \right. \\ & \left. - \frac{b}{4R_0} \left[ \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm+1} \frac{(Nm+2)}{(Nm+1)} \mu n [(Nm-1)\theta - Nn\varphi] + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm-1} \frac{Nm}{(Nm+1)} \mu n \left[ (Nm+1)\theta - Nn\psi \right] \left. \right\} \quad (D.52)$$

Esta é a expressão utilizada em (VI.21) para o potencial escalar de uma hélice toroidal.

#### D.6-POTENCIAL VETOR MÉDIO DA RESSONANCIA $[(Nm-1)\theta - Nn\psi]$

Nos próximos itens vamos calcular os potenciais vetores médios das ressonâncias vizinhas à ressonância principal  $Nm$ . Consideramos cada termo do potencial escalar como o potencial de uma determinada ressonância, pois na vizinhança de uma delas as outras são desprezíveis. Utilizando o segundo termo da expressão (D.52), temos que:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} = & - \frac{\mu_0 I}{4\pi N} (-1)^{Nm+1} \left( 1 + \frac{\rho}{2R_0} \cos\theta \right) \frac{b}{4R_0} \frac{(Nm+2)}{(Nm+1)} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm+1} \\ & \cdot \mu n \left[ (Nm-1)\theta - Nn\psi \right] \end{aligned} \quad (D.53)$$

As componentes  $\theta$  e  $\psi$  do campo magnético calculado a partir do gradiente deste potencial escalar são:

$$\begin{aligned} \bar{B}_\theta = & \frac{\mu_0 I}{4\pi N} (-1)^{Nm+1} \frac{b}{4R_0} \frac{(Nm+2)}{(Nm+1)} \left\{ \frac{1}{2R_0} \mu n \theta \mu n \left[ (Nm-1)\theta - Nn\psi \right] + \right. \\ & \left. - \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2R_0} \cos\theta \right) (Nm-1) \mu n \left[ (Nm-1)\theta - Nn\psi \right] \right\} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{Nm+1} \end{aligned} \quad (D.54a)$$

$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0 I n}{4\pi} (-1)^{Nm+1} \frac{b}{4R_0^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\rho}{R_0} \cos\theta\right) \frac{(Nm+2)}{(Nm+1)} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{Nm+1} \cdot \cos[(Nm-1)\theta - Nn\varphi] \quad (D.54b)$$

Utilizando a definição do fluxo toroidal:

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\theta \int_0^\rho B_{\varphi} \rho \, d\rho \, d\theta, \quad (D.55)$$

temos que o fluxo toroidal referente a este campo magnético é dado por:

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{\mu_0 I}{8\pi^2} (-1)^{Nm+1} \frac{nb}{R_0^2} \frac{(Nm+2)}{(Nm+1)} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{Nm+1} \left\{ \frac{\rho^2}{(Nm+3)} \frac{Nm[(Nm-1)\theta - Nn\varphi]}{(Nm-1)} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{4R_0} \frac{\rho^3}{(Nm+4)} \left[ \frac{Nm N(m\theta - n\varphi)}{Nm} + \frac{Nm[(Nm-2)\theta - Nn\varphi]}{(Nm-2)} \right] \right\} \quad (D.56) \end{aligned}$$

Por outro lado, o fluxo poloidal é:

$$\Pi = \int_0^\rho B_{\theta} (R_0 - \rho \cos\theta) \, d\rho \quad (D.57)$$

Para a expressão (D.54a) chegamos ao seguinte fluxo poloidal:

$$\Pi = \frac{m\mu_0 I}{\pi N} (-1)^{Nm+1} \frac{b}{4R_0} \frac{Nm+2}{Nm+1} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{Nm+1} \cdot \left\{ \frac{\rho}{2} \frac{1}{Nm+2} \right.$$

$$\cos\theta \sin[(Nm-1)\theta - Nn\varphi] - \left[ \frac{R_0}{Nm+2} + \frac{\rho}{2} \frac{1}{Nm+2} \cos\theta \right] (Nm-1)$$

$$\cos[(Nm-1)\theta - Nn\varphi] - \frac{\rho^2}{2R_0} \frac{1}{Nm+3} \sin\theta \cos\theta \sin[(Nm-1)\theta - Nn\varphi] +$$

$$\left. \left[ \frac{\rho}{Nm+2} + \frac{\rho^2}{2R_0} \frac{\cos\theta}{(Nm+3)} \right] (Nm-1) \cos\theta \cos[(Nm-1)\theta - Nn\varphi] \right\} \quad (D.58)$$

Segundo Boozer (Boozer 86) o potencial vetor é definido como:

$$A = \frac{1}{\rho} \gamma \hat{e}_\theta - \frac{1}{R_0 - \rho \cos\theta} T \hat{e}_\varphi \quad (D.59)$$

Utilizando a definição acima e desprezando os termos de potência maior que  $\rho/R_0$ , chegamos ao seguinte potencial vetor:

$$\bar{a}_\theta = \frac{1}{8\pi^2} (-1)^{Nm+1} \frac{m\mu_0 I n}{\pi} \frac{b}{4R_0^2} \frac{Nm+2}{Nm+1} \frac{\rho}{Nm+3} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{Nm+1} \cdot \frac{\sin[(Nm-1)\theta - Nn\varphi]}{Nm-1} \quad (D.60a)$$

$$\bar{a}_\varphi = \frac{m\mu_0 I}{\pi N} (-1)^{Nm+1} \frac{b}{4R_0} \frac{Nm+2}{Nm+1} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{Nm+1}$$

$$\left\{ \frac{\rho}{2R_0} \frac{1}{Nm+2} \mu n \theta \mu n \left[ (Nm-1)\theta - Nn\varphi \right] + \left[ \frac{1}{Nm+1} + \frac{\rho \cos\theta}{2R_0(Nm+2)} \right] \right.$$

$$(Nm-1) \cos \left[ (Nm-1)\theta - Nn\varphi \right] + \frac{\rho}{R_0} \left[ \frac{Nm-1}{Nm+1} - \frac{Nm-1}{Nm+2} \right] \cos\theta .$$

$$\left. \cos \left[ (Nm-1)\theta - Nn\varphi \right] \right\} \quad (D.60b)$$

Calculando a média no ângulo poloidal em um caminho

com :

$$u = \left(m - \frac{1}{N}\right) \theta - n\varphi = \text{CONSTANTE}, \quad (D.61)$$

chegamos ao seguinte potencial vetor médio (VII.33):

$$\bar{a}_\theta = \frac{m\mu_0 I n}{8\pi^2} (-1)^{Nm+1} \frac{b}{R_0^2} \frac{Nm+2}{Nm+1} \frac{\rho}{(Nm+3)(Nm-1)} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{Nm+1} \mu n Nu \quad (D.62a)$$

$$\bar{a}_\varphi = \frac{m\mu_0 I}{\pi N} (-1)^{Nm+1} \frac{b}{4R_0} \frac{(Nm+2)(Nm-1)}{(Nm+1)^2} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{Nm+1} \cos Nu \quad (D.62b)$$

### D.7- POTENCIAL VETOR MÉDIO DA RESSONÂNCIA $[(Nm+1)\theta - Nn\varphi]$

Analogamente ao que fizemos no item anterior, o potencial escalar da ressonância  $[(Nm+1)\theta - Nn\varphi]$  é dado pelo último termo da equação (D.52):

$$\Phi_+ = - \frac{m^2 \mu_0 I}{\pi} (-1)^{Nm+1} \frac{b}{4R_0} \left(1 + \frac{\rho}{2R_0} \cos\theta\right) \left(\frac{\rho}{b}\right)^{Nm-1} \frac{\mu n [(Nm+1)\theta - Nn\varphi]}{(Nm+1)} \quad (D.63)$$

O campo magnético referente a este potencial escalar é:

$$\begin{aligned} B_\theta^+ &= \frac{m \mu_0 I n}{\pi} (-1)^{Nm+1} \frac{b}{4R_0} \frac{1}{(Nm+1)} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{Nm-1} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{2R_0} \mu n \theta \mu n [(Nm+1)\theta - Nn\varphi] - \left(1 + \frac{\rho}{2R_0} \cos\theta\right) (Nm+1) \cos [(Nm+1)\theta - Nn\varphi] \right\} \quad (D.64a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_\varphi^+ &= \frac{m^2 \mu_0 I N n}{\pi} (-1)^{Nm+1} \frac{b}{4R_0^2} \frac{1}{Nm+1} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{Nm-1} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\rho}{R_0} \cos\theta\right) \\ &\cdot \cos [(Nm+1)\theta - Nn\varphi] \quad (D.64b) \end{aligned}$$

Os fluxos toroidal e poloidal calculados a partir das definições (D.55) e (D.57) para o campo magnético (D.64) são respectivamente:

$$\begin{aligned} \chi_+ &= \frac{m^2 \mu_0 I}{8\pi^2} (-1)^{Nm+1} \frac{b}{4R_0^2} \frac{nN}{(Nm+1)} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{Nm-1} \left\{ \frac{\rho^2}{Nm+1} \mu n [(Nm+1)\theta - Nn\varphi] + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{4R_0} \frac{\rho^3}{Nm+2} \left[ \frac{\mu n [(Nm+2)\theta - Nn\varphi]}{Nm+2} + \frac{\mu n N(m\theta - n\varphi)}{Nm} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\vec{A}_+ = \frac{m^2 \mu_0 I}{4\pi} (-1)^{Nm+1} \frac{b}{4R_0^2} \frac{nN}{Nm+1} \left\{ \frac{f}{Nm} + \frac{3}{2} \frac{f^2}{R_0} \frac{1}{Nm+1} \cos\theta + \right. \\ \left. - \left[ \frac{f^2}{R_0} \frac{1}{Nm+1} + \frac{3}{2} \frac{f^3}{R_0^2} \frac{1}{Nm+2} \cos\theta \right] \cos\theta \right\} \left( \frac{f}{b} \right)^{Nm-1} \cdot \\ \cos[(Nm+1)\theta - Nn\varphi] \quad (D.65b)$$

Utilizando a expressão (D.59), desprezando os termos de potência maior que , o potencial vetor é dado por:

$$a_\theta^+ = \frac{m^2 \mu_0 I}{8\pi^2} (-1)^{Nm+1} \frac{b}{R_0^2} \frac{Nn}{(Nm+1)^2} \rho \left( \frac{f}{b} \right)^{Nm-1} \mu_n [(Nm+1)\theta - Nn\varphi] \quad (D.66a)$$

$$a_\varphi^+ = - \frac{m^2 \mu_0 I}{4\pi} \frac{b}{4R_0^2} \frac{Nn}{Nm+1} \left( \frac{f}{b} \right)^{Nm-1} \cos[(Nm+1)\theta - Nn\varphi] \quad (D.66b)$$

Calculando a média no ângulo poloidal, em um caminho onde:

$$u = \left[ \left( m + \frac{1}{N} \right) \theta - n\varphi \right] = \text{constante}, \quad (D.67)$$

Verificamos que o potencial vetor médio é igual ao potencial vetor calculado em (D.66).

APÊNDICE E

Programa Utilizado para a Obtenção de Superfícies Magnéticas

```

.....
PROGRAMA PSIEP
.....
PROGRAMA DESTINADO A CALCULOS DE SUPERFICIES
MAGNETICAS USANDO EXPRESSOES TEORICAS E PARA-
METROS EXPERIMENTAIS DE TOKAMAKS
.....
O PROGRAMA DEVE SER LINKADO COM A BIBLIOTECA
DIGLIB QUE ATUALMENTE SE ENCONTRA NA AREA
[CPIRES.WPS_LIB]
.....
O PROCEDIMENTO COMPLETO E' DA SEQUINTE FORMA
.....
FOR NOME_DO_PROGRAMA
LINK NOME_DO_PROGRAMA,CPIRES.WPS_LIB;DIGLIB/LIB
.....
WANDERLEY PIRES DE SA
SUZANA JUNQUEIRA DE CAMARGO
LABORATORIO DE FISICA DE PLASMA - USP
NOVEMBRO DE 1988/JANEIRO DE 1989
.....
VAX 780 - VMS 4.7          IFUSP
.....

```

```

PROGRAM PSIEP
BLOCO COMMON USADO PELA BIBLIOTECA DIGLIB
INCLUDE 'GDCCHR.PRM'
COMMON /GDCCHR/ DEVID, XLENM, YLENM, XRES, YRES,
1   NDCLRS, IDVSTS, NFLINE, XCLIPD, YCLIPD
REAL MI, MIO, MNC_EQ, NM_EQ, MN_EQ, NHM_EQ, MNC_PT, NM_PT, MN_PT, NHM_PT
1   , MNC_PC, NM_PC, MN_PC, NHM_PC
1   M_EQ, N_EQ, NH_EQ, M_PT, N_PT, NH_PT, M_PC, N_PC, NH_PC
DIMENSION Z(90,90)
COMMON /PLOT/ IDEV, XSCAL, YSCAL
NAMelist /PAR_TOKAMAK/ RAID_A, RAID_B, RAID_R, CURR_IP,
1   CURR_IE, CURR_HL
NAMelist /PAR_EQU_PER/ M_EQ, N_EQ, NH_EQ,
1   M_PT, N_PT, NH_PT,
2   M_PC, N_PC, NH_PC, LAMB, L
NAMelist /PAR_GRAFICO/ XMIN, XMAX, YMIN, YMAX,
1   IDEV, XSCAL, YSCAL
NAMelist /PAR_CONTOR/ RAID_MIN, RAID_MAX, NLEVEL
DATA NX, NY /90,90/

```

-----FUNCOES DECLARACAO

```

FES - EQUILIBRIO DE SHAFRANOV
FPT - PERTURBACAO TOROIDAL
FPC - PERTURBACAO CILINDRICA
FBS - ...

```

F3F - PERTURBACAO DE TRES FIOS

```

-----
FES1(RA) = MI*(B*(RA/2.+RA**3/(8.*RAIC_R*RAIO_R)+RA**5/(16.*RAIO_R**4))
1      -A*RA**3/(8.*B*RAIO_A*RAIO_A)-
2      A*(LAMB+1)/(2*B)*(RA**3/(8*RAIO_R*RAIO_R)+
3      RA**5/(12*RAIO_R*RAIO_R*RAIO_A*RAIC_A)))
FES2(RA) = MN_EQ*MI*CURRE_IP*(1.+RA*RA/(2.*RAIC_R*RAIC_R)-
1      RA*RA/(RAIO_A*RAIO_A)*(1.+RA*RA/(2.*RAIO_R*RAIO_R))-
2      RA*RA*(LAMB+1.)/(2.*RAIO_R*RAIO_R)-
3      RA**4*(LAMB+1.)/(2.*RAIO_A*RAIO_A*RAIC_R*RAIO_R))
FES(RA) = FES1(RA)+FES2(RA)

FPT(RA,X) = CPT1*RA**((NHM_PT+1.)*SIN(NHM_PT*ACOS(X/RA)))+
2      CPT2*RA**NHM_PT*COS(NHM_PT*ACOS(X/RA))

FPC(RA,X) = CPC1*(CPC2*RA+CPC3*RA**((NH_PC-1.)*COS(NH_PC*ACOS(X/RA))))

FPS(RA,X) = MI*CURRE_IP*RAIC_R*(1.-RA*RA/(RAIC_A*RAIO_A))*
1      (1.-(LAMB+1.)*RA/RAIC_R*X/RA)

F3F(RA,X) = C3F*(RA/RAIO_B)**((NH_PC-1)*COS(NH_PC*ACOS(X/RA)))

```

-----LEITURA DOS PARAMETROS

```

-----
OPEN(UNIT=1,FILE='INPUT_ARQ.DAT',TYPE='OLD')
READ(1,PAR_TOKAMAK)
READ(1,PAR_EQU_PER)
READ(1,PAR_GRAFICO)
READ(1,PAR_CONTOR)
CLOSE(UNIT=1)

```

-----CALCULO DAS CONSTANTES

```

-----
DX = (XMAX-XMIN)/(NX-1)
DY = (YMAX-YMIN)/(NY-1)

A = 2*CURRE_IP*CURRE_IP*(5./4.-LAMB)/(RAIO_A*RAIC_A)
B = SQRT(A+(CURRE_IE*CURRE_IE)/(RAIC_R*RAIO_R))
PI = 3.141592654
MIO = 4*PI*1.E-07
MI = 1.E-07
MNC_EQ = M_EQ/N_EQ*MI*CURRE_IP
MNC_PT = M_PT/N_PT*MI*CURRE_IP
MNC_PC = M_PC/N_PC*MI*CURRE_IP
NHM_EQ = NH_EQ*M_EQ
NHM_PT = NH_PT*M_PT
NHM_PC = NH_PC*M_PC
MN_EQ = M_EQ/N_EQ
MN_PT = M_PT/N_PT
MN_PC = M_PC/N_PC
NM_EQ = N_EQ/M_EQ
NM_PT = N_PT/M_PT
NM_PC = N_PC/M_PC
CPT1 = -(MIO*CURRE_HL/(2.*PI*PI*RAIO_R*RAIO_B**NHM_PT))*
1      N_PT/(NHM_PT*(NHM_PT+2.)*L)

```

```

CPT2 = -(MIO*CURR_HL/(PI*RAIO_B**NHM_PT))*MN_PT/NH_PT*L
CPC1 = MI*CURR_HL
CPC3 = 2.*(RAIO_R/(RAIO_B**NH_PC))*MN_PC/NH_PC
CPC2 = NM_PC/RAIO_R
C3F = MIO*L*CURR_HL/PI*MN_PC/NH_PC*RAIO_R/RAIO_B

```

-----MENU DE CONTROLE

```

TYPE 1
FORMAT(/,' PSIEP - PLOTS TEORICOS DE SUPERFICIES DE CONTORNO',
1 //,' GRAFICOS POSSIVEIS: ',
2 //,' EQUILIBRIO.....( 1 )',
3 /,' PERTURBACAO TOROIDAL.....( 2 )',
4 /,' PERTURBACAO CILINDRICA.....( 3 )',
5 /,' EQUILIBRIO + PERTURBACAO TOROIDAL.....( 4 )',
6 /,' EQUILIBRIO + PERTURBACAO CILINDRICA.....( 5 )',
7 /,' PSI DE SHAFRANOV.....( 6 )',
8 /,' EQUILIBRIO RC.....( 7 )',
9 /,' EQUILIBRIO RC + PERTURBACAO TOROIDAL.....( 8 )',
1 /,' EQUILIBRIO RC + PERTURBACAO CILINDRICA... ( 9 )',
1 /,' PERTURBACAO DE 3 FIOS.....( 10 )',
1 /,' EQUILIBRIO + PERTURBACAO 3 FIOS.....( 11 )',
2 //,' HELP - MOSTRA ESTE MENU.....( 12 )',
3 //,' EXIT - SAI DO PROGRAMA.....( 13 )',///)
00 TYPE 10
00 FORMAT(' $ ENTRE TIPO DE GRAFICO (HELP = 10) : ')
ACCEPT 11,IPL0T
01 FORMAT(I3)

```

```

GO TO(10001,10002,10003,10004,10005,10006,10007,10008,10009,
1 10010,10011,5001,5002)IPL0T

```

-----EQUILIBRIO SHAFRANOV

```

01 CONTINUE
ZMIN = 1E30
ZMAX = -1E30
DO 101 I=1,NX
X = XMIN + (I-1)*DX
DO 101 J=1,NY
Y = YMIN + (J-1)*DY
RO = FXY(X,Y)
Z(I,J) = 0.0
Z(I,J) = FES(RO)
ZMIN = AMIN1(ZMIN,Z(I,J))
ZMAX = AMAX1(ZMAX,Z(I,J))
IF(RO.GT.RAIO_MAX) Z(I,J)=100
01 CONTINUE
CALL PLOT0R(XMIN,XMAX,YMIN,YMAX,ZMIN,ZMAX,NLEVEL,Z,NX,NY,' X ',' Z ',
1 ' SUPERFICIES DE FLUXO : EQUILIBRIO ')
READ(5,500)
00 FORMAT()
GO TO 10000

```

```

DO 102 I=1,NX
X = XMIN + (I-1)*DX
  DO 102 J=1,NY
  Y = YMIN + (J-1)*DY
  RC = FXY(X,Y)
  Z(I,J) = 0.0
  Z(I,J) = FPT(RC,X)
  ZMIN = AMIN1(ZMIN,Z(I,J))
  ZMAX = AMAX1(ZMAX,Z(I,J))
  IF(RC.GT.RAIO_MAX) Z(I,J)=100
2 CONTINUE
CALL PLOTTER(XMIN,XMAX,YMIN,YMAX,ZMIN,ZMAX,NLEVEL,Z,NX,NY,' X ',' Z ',
1 ' SUPERFICIES DE FLUXO : PERTURBACAO TOROIDAL ')
READ(5,500)!500 FORMAT()
GO TO 10000

```

-----PERTURBACAO CILINDRICA

```

0003 CONTINUE
ZMIN = 1E30
ZMAX = -1E30
DO 103 I=1,NX
X = XMIN + (I-1)*DX
  DO 103 J=1,NY
  Y = YMIN + (J-1)*DY
  RC = FXY(X,Y)
  Z(I,J) = 0.0
  Z(I,J) = FPC(RC,X)
  ZMIN = AMIN1(ZMIN,Z(I,J))
  ZMAX = AMAX1(ZMAX,Z(I,J))
  IF(RC.GT.RAIO_MAX) Z(I,J)=100
3 CONTINUE
CALL PLOTTER(XMIN,XMAX,YMIN,YMAX,ZMIN,ZMAX,NLEVEL,Z,NX,NY,' X ',' Z ',
1 ' SUPERFICIES DE FLUXO : PERTURBACAO CILINDRICA ')
READ(5,500)!500 FORMAT()
GO TO 10000

```

-----EQUILIBRIO SHAFRANOV + PERTURBACAO TOROIDAL

```

0004 CONTINUE
ZMIN = 1E30
ZMAX = -1E30
DO 104 I=1,NX
X = XMIN + (I-1)*DX
  DO 104 J=1,NY
  Y = YMIN + (J-1)*DY
  RC = FXY(X,Y)
  Z(I,J) = 0.0
  Z(I,J) = FES(RC) + FPT(RC,X)
  ZMIN = AMIN1(ZMIN,Z(I,J))
  ZMAX = AMAX1(ZMAX,Z(I,J))
  IF(RC.GT.RAIO_MAX) Z(I,J)=100
4 CONTINUE
IF(RAIO_MIN.NE.0.0) ZMIN = FES(RAIO_MIN)
CALL PLOTTER(XMIN,XMAX,YMIN,YMAX,ZMIN,ZMAX,NLEVEL,Z,NX,NY,' X ',' Z ',

```

```
1 SUPERFICIES DE FLUXO : EQUILIBRIO + PERTURBACAO TOROIDAL ' )  
READ(5,500)!500 FORMAT()  
GO TO 10000
```

```
-----EQUILIBRIO SHAFRANOV + PERTURBACAO CILINDRICA
```

```
005 CONTINUE  
ZMIN = 1E30  
ZMAX = -1E30  
DO 105 I=1,NX  
X = XMIN + (I-1)*DX  
DO 105 J=1,NY  
Y = YMIN + (J-1)*DY  
RC = FXY(X,Y)  
Z(I,J) = 0.0  
Z(I,J) = FES(RC) + FPC(RC,X)  
ZMIN = AMIN1(ZMIN,Z(I,J))  
ZMAX = AMAX1(ZMAX,Z(I,J))  
IF(RC.GT.RAIO_MAX) Z(I,J)=100
```

```
CONTINUE  
IF(RAIO_MIN.NE.0.0) ZMIN = FES(RAIO_MIN)  
CALL PLOTTER(XMIN,XMAX,YMIN,YMAX,ZMIN,ZMAX,NLEVEL,Z,NX,NY,' X ',' Z ',  
1 SUPERFICIES DE FLUXO : EQUILIBRIO + PERTURBACAO CILINDRICA ' )  
READ(5,500)!500 FORMAT()  
GO TO 10000
```

```
-----PSI DE SHAFRANOV
```

```
006 CONTINUE  
ZMIN = 1E30  
ZMAX = -1E30  
DO 106 I=1,NX  
X = XMIN + (I-1)*DX  
DO 106 J=1,NY  
Y = YMIN + (J-1)*DY  
RC = FXY(X,Y)  
Z(I,J) = 0.0  
Z(I,J) = FPS(RC,X)  
ZMIN = AMIN1(ZMIN,Z(I,J))  
ZMAX = AMAX1(ZMAX,Z(I,J))  
IF(RC.GT.RAIO_MAX) Z(I,J)=100
```

```
CONTINUE  
CALL PLOTTER(XMIN,XMAX,YMIN,YMAX,ZMIN,ZMAX,NLEVEL,Z,NX,NY,' X ',' Z ',  
1 SUPERFICIES DE FLUXO : PSI DE SHAFRANOV ' )  
READ(5,500)!500 FORMAT()  
GO TO 10000
```

```
-----EQUILIBRIO RC - ROBERTO CLEMENTE
```

```
007 CONTINUE  
AO OPERACIONAL POR ENQUANTO  
GO TO 10000
```

```
-----EQUILIBRIO RC + PERTURBACAO TOROIDAL
```

```
008 CONTINUE  
AO OPERACIONAL POR ENQUANTO  
GO TO 10000
```

```
-----EQUILIBRIO RC + PERTURBACAO CILINDRICA
```

```
009 CONTINUE
NAO OPERACIONAL POR ENQUANTO
GO TO 10000
```

```
-----PERTURBACAO DE TRES FIOS
```

```
010 CONTINUE
ZMIN = 1E30
ZMAX = -1E30
DO 199 I=1,NX
X = XMIN + (I-1)*DX
DO 199 J=1,NY
Y = YMIN + (J-1)*DY
RC = FXY(X,Y)
Z(I,J) = 0.0
Z(I,J) = F3F(RC,X)
ZMIN = AMIN1(ZMIN,Z(I,J))
ZMAX = AMAX1(ZMAX,Z(I,J))
IF(RC.GT.RAIO_MAX) Z(I,J)=100
CONTINUE
IF(RAIO_MIN.NE.0.0) ZMIN = FES(RAIO_MIN)
CALL PLOTTER(XMIN,XMAX,YMIN,YMAX,ZMIN,ZMAX,NLEVEL,Z,NX,NY,' X ',' Z ',
1 ' SUPERFICIES DE FLUXO : PERTURBACAO 3 FIOS')
READ(5,500)!500 FORMAT()
GO TO 10000
```

```
-----EQUILIBRIO + PERTURBACAO DE 3 FIOS
```

```
011 CONTINUE
ZMIN = 1E30
ZMAX = -1E30
DO 185 I=1,NX
X = XMIN + (I-1)*DX
DO 185 J=1,NY
Y = YMIN + (J-1)*DY
RC = FXY(X,Y)
Z(I,J) = 0.0
Z(I,J) = FES(RC) + F3F(RC,X)
ZMIN = AMIN1(ZMIN,Z(I,J))
ZMAX = AMAX1(ZMAX,Z(I,J))
IF(RC.GT.RAIO_MAX) Z(I,J)=100
CONTINUE
IF(RAIO_MIN.NE.0.0) ZMIN = FES(RAIO_MIN)
CALL PLOTTER(XMIN,XMAX,YMIN,YMAX,ZMIN,ZMAX,NLEVEL,Z,NX,NY,' X ',' Z ',
1 ' SUPERFICIES DE FLUXO : EQUILIBRIO + PERTURBACAO 3 FIOS')
READ(5,500)!500 FORMAT()
GO TO 10000
```

```
02 CALL EXIT
END
```

```
FUNCTION FXY(X,Y)
FXY = SQRT(X*X + Y*Y)
RETURN
END
```

1 SUBROUTINE PLOTER(XMIN,XMAX,ZMIN,ZMAX,ZMIN1,ZMAX1,NCNTR,  
PSIX,NX,NZ,XLABEL,YLABEL,TITLE)

BLOCO COMMON USADO PELA BIBLIOTECA DIGLIB  
INCLUDE 'GDCCHR.PRM'  
COMMON /GDCCHR/ DEVID, XLENM, YLENM, XRES, YRES,  
1 NDCLRS, IDVBTS, NFLINE, XCLIPD, YCLIPD  
DIMENSION CONLEV(200)  
BYTE IZ(90,90)  
BYTE XLABEL(2),YLABEL(2),TITLE(2)  
COMMON /PLOT/ IDEV,XSCAL,YSCAL

10 TYPE 10  
FORMAT('\$XSCAL AND YSCAL: ') ! NO CASO DE QUERER  
ACCEPT \*, XSCAL,YSCAL ! USAR VIA TERMINAL  
TYPE 1 ! O CONTROLE DO  
FORMAT('\$ENTER DIGLIB DEVICE NUMBER: ') ! TAMANHO DO GRAFICO  
ACCEPT 2, IDEV ! E TIPO DE TERMINAL  
FORMAT(I5) ! APAGAR  
CALL DEVSEL(IDEV,4,IERR) ! OS C DO COMENTARIO

DO 100 J=1,NCNTR  
CONLEV(J) = ZMIN1 + J\*(ZMAX1-ZMIN1)/FLOAT(NCNTR+1)  
CONTINUE  
CALL BGNPLT  
CALL FULMAP  
CALL MAPSIZE(0.0,XSCAL,0.0,YSCAL,0.0)  
CALL MAPIT(XMIN,XMAX,ZMIN,ZMAX,XLABEL,YLABEL,TITLE,0)  
CALL CONTOR(PSIX,NX,IZ,NX,NZ,XMIN,XMAX,ZMIN,ZMAX,NCNTR,CONLEV)  
CALL ENDPLT  
CALL RLSDEV  
RETURN  
END

## REFERÊNCIAS

- AMES W. F., 1972, "Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering", volume II, Academic Press.
- ARTHUR M. D. e CASE K. M., 1982, "Gradient Theory for Completely Integrable Hamiltonian Systems", Journal of Mathematical Physics 23, 1771.
- BENJAMIM T. B., BONA J. L., MAHONEY J. J., 1972, "Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems", Philosophical Transactions of the Royal Society of London 272, 47.
- BOOZER A. H., 1983, "Evaluation of the Structure of Ergodic Fields", Physics of Fluids 26, 1288.
- BOOZER A. H., 1986, "Helicity Content and Applications of Helicity", Physics of Fluids 29, 4123.
- BUTKOV E., 1978, "Física Matemática", Editora Guanabara Dois S. A.
- CALDAS I. L. e TASSO H., 1979, "Constants of Motion of Nonlinear Equations in an Extended Poisson Formalism", Lettere Nuovo Cimento 24, 500.
- CALDAS I. L. e VANUCCI A., 1985, "Equilíbrio e Instabilidades do Plasma em Tokamaks", Publicações IFUSP P-523.
- CARY J. R. e LITTLEJOHN R. G., 1982, "Noncanonical Hamiltonian Mechanics and Its Application to Magnetic Field Line Flow", Annals of Physics 151, 1.

- CARY J. R., 1983, "Vacuum Magnetic Field with Dense Flux Surfaces", Physical Review Letters 49, 276.
- CARY J. R., 1984, "Construction of Three-Dimensional Vacuum Magnetic Fields with Dense Nested Flux Surfaces", Physics of Fluids 27, 119.
- CASE K. M. e ROOS A. M., 1982, "Sine-Gordon and Modified Korteweg - de Vries charges", Journal of Mathematical Physics 21, 392.
- CHERN S.S. (editor), 1984, "Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations", série "Mathematical Sciences Research Institut Publications", Springer - Verlag.
- FERNANDES A. S. e CALDAS I. L., 1985, "Campos Ressonantes criados por Correntes Elétricas Helicoidais em Tokamaks", Publicações IFUSP P-539.
- FERNANDES A. S., HELLER M. V. A. P. e CALDAS I. L., 1988, "The destruction of Magnetic Surfaces by Resonant Helical Windings", Plasma Physics and Controlled Fusion 30, 1203.
- FUCHSSTEINER B. e FOKAS A. S., 1981, "Symplectic Structures, their Bäcklund Transformation and Hereditary Symmetries", Physica 4D, 47.
- GRAD H., 1985, "Theory and Aplications of the Nonexistence of Simple Toroidal Plasma Equilibrium", International Journal of Fusion Energy 3, 33.
- GREENE J. M. e JOHNSON J. L., 1965, "Hydromagnetic Equilibrium and Stability", Advances in Theoretical Physics 1, 195.

- HIETARINTA J., 1987, "Direct Methods for the Search of the Second Invariant", Physics Reports 147, 87.
- HILL E. L., 1951, "Hamilton's Principle and The Conservation Theorems of Mathematical Physics", Review of Modern Physics 23, 253.
- JOHNSON S. F., 1979, "Two Applications of Similarity Analysis", dissertação de mestrado (Iowa University), não publicada.
- JOHNSON S. F., LONNGREN K. E. e NICHOLSON D. R., 1979, "On the Invariants of the Nonlinear Schrödinger Equation ", Physics Letters 74A, 393.
- KAIFEN H. e SALAT A., 1988, "Hysteresis in the Nonlinear Driven Drift and KdV Equations", Report IPP 6/275 (Max Planck Institut für Plasmaphysik)
- KARPMAN V. I., 1975, "Nonlinear Waves in Dispersive Media", Oxford Pergamon Press.
- KRUSKAL M. D., MIURA R. M., GARDNER C. S. e ZABUSKY N. J., 1970, "Korteweg - de Vries Equation and Generalisations. V Uniqueness and Nonexistence of Polynomial Conservation Laws", Journal of Mathematical Physics 11, 952.
- KUCINSKI M. Y. e CALDAS I. L., 1987, "Toroidal Helical Fields", Zeitschrift für Naturforschung 42a, 1124.
- LAX P. D., 1975, "Periodic Solutions of the KdV Equation", Communications on Pure and Applied Mathematics 28, 141.
- MAGRI F., 1978, "A Simple Model of the Integrable Hamiltonian Equation", Journal of Mathematical Physics 19, 1156.

- MCGUINNESS M. J., 1978, "The Conserved Densities of the Korteweg - de Vries Equation", Journal of Mathematical Physics 19, 2285.
- MIYAMOTO K., 1978, "Recent Stellerator Research", Nuclear Fusion 18, 243.
- MOROZOV A. I. e SOLOV'EV L. S., 1966, Reviews of Plasma Physics 2, Consultants Bureau.
- OKANO V., 1989, Dissertação de Mestrado em Desenvolvimento no IFUSP.
- ORAEVSKY V. N., TASSO H. e WOBIG H., 1969, "Nonlinear Drift Waves in a Plasma with a Temperature Gradient", Anais de "3th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research", Novosibirsk 1968, IAEA I-671.
- PULSATOR TEAM, 1985, "The Pulsator Tokamak", Nuclear Fusion 25, 1059.
- ROBINSON D. C., 1985, "Ten Years of Results from the TOSCA device", Nuclear Fusion 25, 1101.
- SCHEN H. e AMES W. F., 1974, "On Invariant Solutions of the Korteweg - de Vries Equation", Physics Letters 49A, 313.
- SHAFRANOV V. D., 1960, "Equilibrium of a Plasma Toroid in a Magnetic Field", Soviet Physics JETP 37, 775.
- TASSO H., 1967, "Shock Like Drift Waves", Physics Letters 24A, 618.
- UETA A. Y., 1985, Dissertação de Mestrado apresentada no IFUSP, não publicada.