

Tese apresentada à Pró-reitora de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Ciência e Tecnologia Espaciais, Área de Física e Matemática Aplicadas.

Geraldo Roberson Costa Almeida

**MÉTODO DOS MAPAS PARA ESTUDO DE TOKAMAKS
COM DESVIADORES POLOIDAIIS**

Prof.^a. Dr.^a. Marisa Roberto
Orientadora

Prof. Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes
Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP – Brasil
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão de Informação e Documentação

Roberson Costa Almeida, Geraldo
Método dos Mapas para Estudo de Tokamaks com Desviadores Poloidais / Geraldo Roberson Costa Almeida.
São José dos Campos, 2017.
85f.

Tese de doutorado – Pós-Graduação em Ciência e Tecnologia Espaciais, Área de Física e Matemática Aplicadas. – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2016. Orientador: Prof.^a. Dr.^a. Marisa Roberto

1. Mapa simplético 2. Desviadores poloidais. 3. Tokamak. I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Método dos Mapas para Estudo de Tokamaks com Desviadores Poloidais

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ROBERSON COSTA ALMEIDA, Geraldo. Método dos Mapas para Estudo de Tokamaks com Desviadores Poloidais. 2017. 85f. Tese de Doutorado em Ciência e Tecnologia Espaciais, Área de Física e Matemática Aplicadas – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Geraldo Roberson Costa Almeida

TÍTULO DO TRABALHO: Método dos Mapas para Estudo de Tokamaks com Desviadores Poloidais

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2017

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a sua autorização (do autor).

Geraldo Roberson Costa Almeida
Rua Japichaua, 310 – 41E – Jardim Matarazzo
CEP: 03813-310, São Paulo - SP

MÉTODO DOS MAPAS PARA ESTUDO DE TOKAMAKS COM DESVIADORES POLOIDAIIS

Geraldo Roberson Costa Almeida

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Brett Vern Carlson	Presidente	- ITA
Prof. ^a . Dr. ^a .	Marisa Roberto	Orientadora	- ITA
Prof. Dr.	Érico L. Rempel	Membro Interno	- ITA
Prof. Dr.	Carlos Alberto Bomfim Silva	Suplente Interno	- ITA
Prof. Dr.	Luiz Fernando Ziebell	Membro Externo	- UFRGS
Prof. Dr.	Ricardo Egydio de Carvalho	Membro Externo	- Unesp/Rio Claro
Prof. Dr.	Zwinglio de Oliveira Guimarães Filho	Suplente Externo	- USP

ITA

Dedico este trabalho ao meu filho
Mike Roberson

"A coisa mais bela que o homem pode experimentar é o mistério. É esta a emoção fundamental que esta na raiz de toda ciência e arte. O homem que desconhece este encanto, incapaz de sentir admiração e estupefação, esse já está, por assim dizer, morto e tem os olhos extintos."

Albert Einstein

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me ter concedido força e perseverança para atingir os meus objetivos.

A realização deste trabalho não seria possível sem a ajuda e encorajamento daqueles que me cercam. Peço desculpas aqueles cujo nome não aparece nesta lista, pois é impossível fazer uma lista de todos aqueles que me encorajaram e incentivaram ao longo de todos estes anos. Logo, agradeço a todos que de maneira direta e indireta que colaboraram para o desenvolvimento deste trabalho e ainda de forma particular:

A minha esposa Flávia, meu filho Mike, a minha mãe Gizelda e aos meus irmãos e aos demais familiares pelos incentivos na realização deste doutorado;

Aos professores de graduação Dr. Francisco George Brady Moreira e Dr. Jairo Rolim Lopes de Almeida, não só pela confiança em mim depositada, mas, principalmente, por ter despertado em mim à vontade e a perseverança necessária para a realização deste trabalho;

A minha orientadora Dr. Marisa Roberto pela oportunidade, suporte, incentivo, confiança, compreensão, amizade e apoio sempre presentes durante o mestrado e o doutorado;

Ao prof. Dr. Iberê Luiz Caldas pelo tempo dispensado em nossas reuniões e pela colaboração enriquecedora;

Aos professores Dr. Tiago Kroetz e Dr. Ricardo Luiz Viana pela colaboração na confecção do artigo resultante deste trabalho;

Ao meu grande amigo José Augusto pela motivação e apoio que sempre se fizeram presentes desde a época da graduação;

E a todos os professores do ITA que de forma direta ou indireta contribuíram para a minha formação.

A CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Tokamaks com divertores têm recebido muita atenção nos últimos anos. Nesta tese aplicamos uma metodologia adotada nas referências [1]–[3] para o desenvolvimento de um novo mapa simplético integrável bidimensional para descrever as linhas de campos magnéticos de equilíbrio de um plasma em um tokamak com um "single null-divertor". O método consiste na composição de curvas de potências que reproduz uma topologia com um ponto de X. As curvas invariantes obtidas por este modelo podem reproduzir uma ampla variedade de superfícies magnéticas com qualquer valor de alongação e triangularidade através da escolha dos parâmetros livres, tal como a coordenada do ponto hiperbólico. O perfil do fator de segurança também pode ser especificado, já que este não depende dos parâmetros geométricos. Assim o mapa pode reproduzir mapas realísticos para tokamaks com qualquer geometria com desviador poloidal, com a vantagem de ser computacionalmente mais rápido que códigos mais elaborados. Perturbações ressonantes podem ser introduzidas e estas podem substituir a separatriz por uma camada caótica, permitindo o estudo das estruturas das linhas de campos abertas na região entre o plasma e a parede da câmara. Os principais aspectos de transporte, tal como comprimento de conexão e "footprints" nas placas divisoras podem ser obtidos [2], [3].

Abstract

Divertor tokamaks have received much attention in recent years. In this work we apply a procedure implemented in [1]–[3] to derive a new two-dimensional integrable symplectic map to describe the equilibrium magnetic field lines of plasmas in tokamaks with a single-null divertor. The method consists in choosing potential curves that reproduce a topology with a X point. The invariant surfaces obtained by this model can reproduce a wide variety of magnetic surfaces with any values of elongation and triangularity by the choice of free parameters, such as the hyperbolic point coordinates. The safety factor profile of the map can also be specified freely, since it does not depend on the geometric parameters. Thus, this map reproduces tokamak map realistically with any geometry and with a poloidal divertor, with the advantage of being computationally faster than codes that are more elaborated. Resonant perturbations are introduced to replace the separatrix by a layer of chaotic lines, allowing the study of the structure of open magnetic field lines in the region between the plasma and the tokamak wall. The main aspects of transport, such as connection lengths and magnetic footprints on the diverter plate [2], [3] can be obtained.

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Barreira de potencial Coulombiano (Figura extraída da referência [5])	15
Figura 1.2 – Ilustração do Tokamak ITER (Figura extraída da referência [6]).....	16
Figura 1.3 – Ilustração dos elementos básicos de Tokamak (Figura extraída da referência [9]).	16
Figura 1.4 – Geometria de um campo magnético toroidal com um desviador. Na figura são mostradas as superfícies magnéticas fechadas, o ponto de X, as superfícies abertas, as placas do desviador e uma região chamada de “scrape-off-layer”, que compreende a região de confinamento e as superfícies abertas do Tokamak (Figura extraída da referência [14])	17
Figura 1.5 – Representação esquemática da seção de Poincaré (Figura extraída da referência [27]).....	18
Figura 2.1 - (a) Traçado do potencial $V(y)$ para o modelo proposto em [25] composto por seis parábolas e (b) representação esquemática da separatriz para este potencial e seus parâmetros livres. (c) Traçado do potencial $V(x,y)$ com um conjunto adicional de seis parábolas (curva em vermelho) e (d) representação esquemática da separatriz para este potencial e seus parâmetros livres. Devido a assimetria, (c) apresenta dois parâmetros livres adicionais: x'_{\min} e x'_{\max}	22
Figura 2.2 – Representação esquemática da transição entre regiões do mapa.....	28
Figura 2.3 – Representação esquemática da transição entre regiões do mapa, onde substituímos Δ por um intervalo menor δ . Neste exemplo foi adotado $n = 5$ na equação (2.51). No lado esquerdo temos a seção transversal poloidal, enquanto no lado direito temos a visão superior do reator, o qual, por questão de simplicidade, foi considerado um cilindro periódico.	29
Figura 2.4 – Curvas invariantes com parâmetros (a) $x_{\text{MAX}} = 0.25$, $x_{\text{MAX}'} = -0.15$ e (b) $x_{\text{MAX}} = 0.15$, $x_{\text{MAX}'} = -0.10$. Os demais parâmetros são: $x_{\text{MIN}} = 0.03$, $x_{\text{MIN}'} = -0.06$, $y_{\text{MAX}} = 0.15$, $y_{\text{H}2} = -0.13$, $y_{\text{S}} = -0.20$, $y_{\text{H}1} = -0.218$, $y_0 = -0.26$ e $y_{\text{MIN}} = -0.30$	35

Figura 2.5 – Curvas invariantes com parâmetros (a) $y_{MAX} = 0.20$ e (b) $y_{MAX} = 0.10$. Os demais parâmetros são $x_{MAX} = 0.25$, $x_{MAX}' = -0.15$, $x_{MIN} = 0.03$, $x_{MIN}' = -0.06$, $y_{H2} = -0.13$, $y_S = -0.20$, $y_{H1} = -0.218$, $y_0 = -0.26$ e $y_{MIN} = -0.30$.	36
Figura 2.6 – Curvas invariantes com parâmetros (a) $y_S = -0.175$ e (b) $y_S = -0.23$. Os demais parâmetros são $x_{MAX} = 0.25$, $x_{MAX}' = -0.15$, $x_{MIN} = 0.03$, $x_{MIN}' = -0.06$, $y_{MAX} = -0.15$, $y_{H2} = -0.13$, $y_{H1} = -0.218$, $y_0 = -0.26$ e $y_{MIN} = -0.30$.	37
Figura 2.7 – (a) Erro % da função ψ em função de y inicial para o lóbulo inferior, (b) para o lóbulo superior e (c) região considerada (retângulo em vermelho).	39
Figura 2.8 – Potencias traçados (a) na separatriz, (b) e (c) no interior a separatriz no lóbulo superior e (d) representação das superfícies consideradas.	41
Figura 2.9 – (a) Potencial com a configuração original (b) potencial com a nova configuração.	42
Figura 2.10 - Potenciais para (a) Figura 2.8b e (b) Figura 2.8c ajustados.	43
Figura 2.11 – Perfil do fator de segurança para a região interior $\psi < \psi_s$ e exterior ao plasma $\psi > \psi_s$, com os parâmetros $q_0 = 1.1$, $q_{95} = 3.3$ e $s_{95} = 2.67$.	46
Figura 2.12 – Representação esquemática das possíveis configurações das superfícies magnéticas utilizadas como base para obtenção do período.	47
Figura 3.1 – Limitador ergódico (Figura extraída da referência [37]).	52
Figura 3.2 – Representação da seção transversal e os sistemas de coordenadas adotados no modelo de Martin-Taylor.	53
Figura 3.3 – Representação esquemática da transição entre regiões do mapa onde a coordenada x muda de sinal.	55
Figura 3.4 – Superfície virtual simétrica (vermelho), superfície assimétrica (azul) e o limitador ergódico (verde).	57

- Figura 3.5 -- Mapas perturbados com parâmetros (a) $x_{MAX} = 2.00$, $x_{MAX}' = -2.00$, (b) $x_{MAX} = 2.00$, $x_{MAX}' = -1.50$. Os demais parâmetros são $y_S = -4.00$, $x_{MIN} = x_{MAX}/2$, $x_{MIN}' = (x_{MAX}'/x_{MAX}) * x_{MIN}$, $y_{MAX} = 4.00$, $y_{H1} = -5.00$, $y_{H2} = -2.75$, $y_0 = -6.00$ e $y_{MIN} = -7.00$, com os seguintes parâmetros de perturbação: "shear" = 2.67, $m = 3.00$ e $C = 102$. Foram consideradas 55 condições iniciais no intervalo $-4 < t < -2$, com 106 iterações para cada condição inicial.....58
- Figura 3.6 – Representação esquemática da dinâmica das linhas de campo para o padrão de escape. Definimos as coordenadas iniciais na placa verde e finais na placa vermelha. As setas representam os sentidos de rotação poloidal das linhas de campo.60
- Figura 3.7 – Representação esquemática da trajetória da linha de campo. (a) visão da seção transversal e b) visão superior do reator, o qual, por questão de simplicidade, foi considerado um cilindro periódico.61
- Figura 3.8 – Padrão de escape das linhas de campo nas placas coletoras para o caso mostrado na Figura 3.5a em termos de (a) distribuição de comprimentos de conexão na placa coletora, onde o retângulo indica uma ampliação mostrada no canto da figura, e (b) “footprints” magnéticos das linhas de campo.62
- Figura 3.9 – Padrão de escape das linhas de campo nas placas coletoras para o caso mostrado na Figura 3.5b em termos de (a) distribuição de comprimentos de conexão na placa coletora, onde o retângulo indica uma ampliação mostrada no canto da figura, e (b) “footprints” magnéticos das linhas de campo.62
- Figura 4.1 -- Mapas perturbados para os mesmos conjuntos de parâmetros da (a) Figura 3.5a e (b) Figura 3.5b. Amplitude colisional igual a 1×10^{-4}65
- Figura 4.2 – Padrão de escape das linhas de campo nas placas coletoras para o caso mostrado na Figura 3.5a em termos de (a) distribuição de comprimentos de conexão na placa coletora, e (b) “footprints” magnéticos das linhas de campo. Amplitude colisional igual a 1×10^{-4}65

Figura 4.3 – Padrão de escape das linhas de campo nas placas coletoras para o caso mostrado na Figura 3.5b em termos de (a) distribuição de comprimentos de conexão na placa coletora, e (b) “footprints” magnéticos das linhas de campo. Amplitude colisional igual a 1×10^{-4}66

Figura 4.4 – Padrão de escape das linhas de campo nas placas coletoras para o caso mostrado na Figura 3.5b em termos de (a) distribuição de comprimentos de conexão na placa coletora, e (b) “footprints” magnéticos das linhas de campo. Amplitude colisional igual a 1×10^{-3}66

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	MAPA DO DESVIADOR POLOIDAL COM TOPOLOGIA ADAPTÁVEL	20
2.1	O Método	20
2.2	Obtenção do Mapa.....	21
2.3	Modelo Para o Fator de Segurança.....	44
2.4	Cálculo do Período de Rotação.....	46
3	PERTURBAÇÃO RESSONANTE	52
3.1	Perturbação de Martin-Taylor	52
3.1.1	Implementação do método	53
3.2	Comprimentos de Conexão e “Footprints”	59
3.3	Discussão dos resultados obtidos	63
4	ADIÇÃO DE RUÍDO SIMULANDO “COLISÕES DE PARTÍCULAS”	64
4.1	Adição de ruído para simular colisões de partículas	64
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS	67
6	REFERÊNCIAS	69
	APÊNDICE A – ARTIGOS RESULTANTES DESTA TESE	73
A.1	Shaping Diverted Plasmas With Symplectic Maps.....	73
A.2	A Symplectic Map For Plasmas With Poloidal Divertor	82

1 INTRODUÇÃO

De acordo com a Agência Internacional de Energia, o consumo mundial de energia deverá crescer 37% até 2040 [4]. Cerca de 80% do consumo atual de energia tem origem em combustíveis fósseis [5], os quais além de provocar graves alterações atmosféricas deverão se esgotar em um futuro próximo (começando pelo petróleo).

A fusão é uma das opções possíveis de obtenção de energia. A produção de energia elétrica a partir da fusão de átomos leves, tal como acontece nas estrelas, irá disponibilizar uma fonte de energia de larga escala, segura e com baixo impacto ambiental. O *International Thermonuclear Experimental Reactor* - (ITER) é um projeto de reator experimental a fusão nuclear baseado na tecnologia do Tokamak, destinado a demonstrar a viabilidade científica e tecnológica da fusão (curiosamente, em latim, iter significa “caminho“) [6]

A fusão foi proposta em uma conferência nos Estados Unidos, em março de 1938, pelo físico alemão Hans Albrecht Bethe (1906-2005). Sua teoria sobre a produção de energia nas estrelas, publicada em 1939, lhe valeu o prêmio Nobel em Física de 1939 [7].

No processo da fusão, diferente da fissão, dois núcleos leves (hidrogênio, deutério ou trítio) fundem-se resultando em um produto mais leve que a soma dos reagentes (geralmente partículas alfa e nêutrons). Se a massa final for menor que a soma das massas iniciais teremos liberação de energia, de acordo com a equação de Einstein $E = mc^2$. Quando esta energia é de origem térmica, o processo é denominado fusão termonuclear.

Na reação de fusão, grandes quantidades de energia são geradas a partir de pequenas quantidades de matéria: 3.136×10^{-29} kg de combustível produz 17.59 MeV, portanto, 1 milhão de vezes mais poderosa que as reações químicas (por exemplo, cerca de um litro de combustível de fusão pode produzir a mesma quantidade que 600 toneladas de carvão).

Para que a fusão ocorra é necessário aproximar dois núcleos que, por terem cargas do mesmo sinal (positiva), repelem-se. Sendo assim, é necessária uma quantidade considerável de energia para transpor esta barreira coulombiana, conforme mostrado na Figura 1.1, e chegar à zona muito próxima ao núcleo onde se manifestam as forças nucleares.

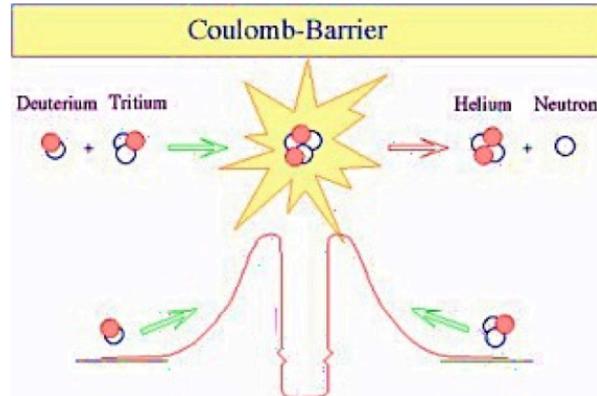


Figura 1.1 – Barreira de potencial Coulombiano (Figura extraída da referência [8])

As forças gravitacionais muito intensas nas estrelas fornecem as condições necessárias para que ocorra a fusão nuclear. No entanto, não é possível reproduzir aqui na Terra tais condições. Todavia, podemos obter a fusão nos laboratórios através do confinamento magnético ou pelo confinamento inercial. Focaremos aqui no confinamento magnético.

No confinamento magnético, trabalhamos com um gás menos denso e temperaturas mais elevadas, tipicamente da ordem de $1.5 \times 10^8 \text{K}$ (uma ordem de grandeza maior que a do núcleo do Sol). Em temperaturas tão elevadas, a matéria a ser nuclearmente fundida encontra-se sob a forma de plasma. O plasma é meio ionizado que exibe comportamento coletivo e macroscopicamente neutro. Devido a alta temperatura, toda a matéria encontra-se praticamente ionizada e podemos tratar o plasma como um fluido contínuo e carregado eletricamente. Isso é feito com o uso das equações da teoria magnetohidrodinâmica (MHD) [9].

Por ser tratar de um gás, é necessário que este plasma esteja confinado em um recipiente (reator de fusão). Uma vez que a temperatura é muito elevada, o plasma não pode tocar as paredes do reator, pois isso além de resfriar o plasma danificaria o reator. Como o plasma é um gás eletricamente carregado, podemos confiná-lo através da aplicação de campos magnéticos. Existem diversos tipos de reatores em que se pode alcançar este confinamento, o tokamak é o que mais se destaca [10]. A Figura 1.2 mostra uma representação do tokamak ITER [11].

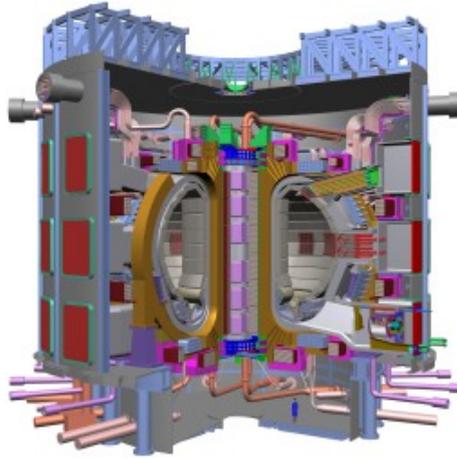


Figura 1.2 – Ilustração do Tokamak ITER (Figura extraída da referência [6])

Uma das formas de obter a fusão nuclear é através do aquecimento ôhmico aliado a fontes de aquecimento auxiliar. A corrente toroidal, a qual é chamada de corrente de plasma, é gerada a partir do transformador ôhmico, conforme mostrado na fig. 1.3.

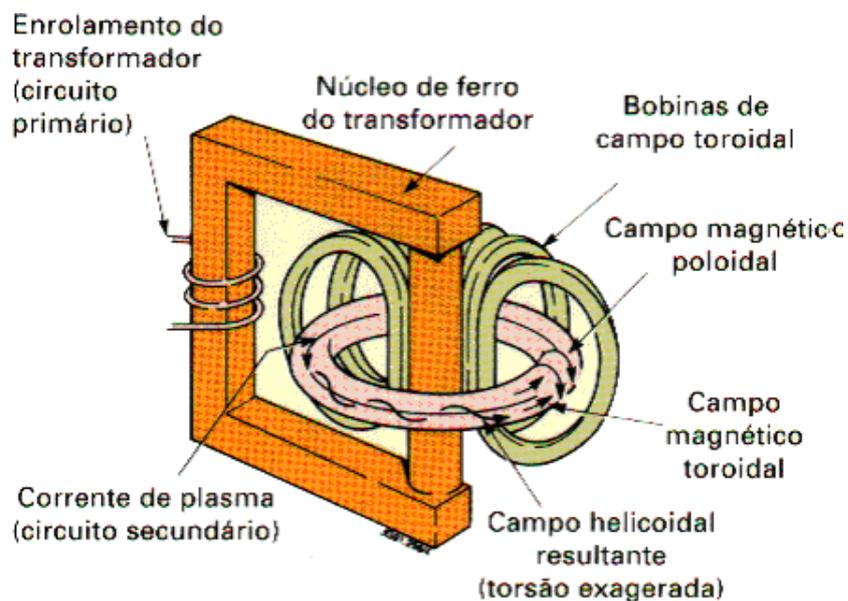


Figura 1.3 – Ilustração dos elementos básicos de Tokamak (Figura extraída da referência [12]).

O confinamento do plasma é realizado por linhas de campos helicoidais, resultado da superposição do campo toroidal (gerado por espiras em torno do toroide) e o campo poloidal (gerado pela corrente de plasma). As linhas de campos helicoidais repousam sobre superfícies toroidais, que se aninham umas sobre as outras (superfícies magnéticas). A forma da seção transversal destas superfícies, no que diz respeito a triangularidade e alongação, desempenha um importante papel na determinação da estabilidade e confinamento do plasma.

Tokamaks com desviador poloidal, o qual é o foco deste trabalho, tem recebido muita atenção nos últimos anos [13]–[16]. O propósito da utilização de um desviador é redirecionar o escape do plasma em direção a separatriz. A colocação de uma superfície coletora após a separatriz (ver Figura 1.4) redireciona o escape do plasma de uma região entre a separatriz e as placas coletoras. Nesta região as linhas de campo podem se espalhar e assim reduzir a energia das partículas bombardeando as placas coletoras. A distância entre as placas e a separatriz torna mais difícil para as impurezas (principalmente partículas neutras) retornarem ao plasma, já que podem sofrer ionização nesta região e espiralar ao redor das linhas de campo. Consideramos neste trabalho tokamaks-com um ponto de X (ou ponto hiperbólico) (Figura 1.4).

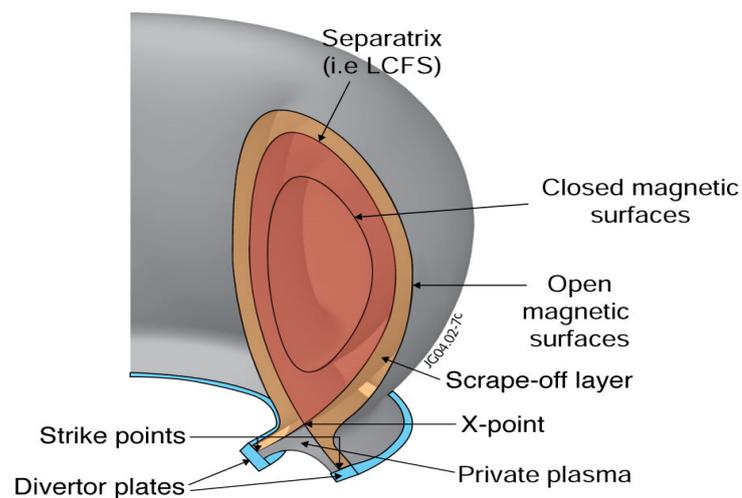


Figura 1.4 – Geometria de um campo magnético toroidal com um desviador. Na figura são mostradas as superfícies magnéticas fechadas, o ponto de X, as superfícies abertas, as placas do desviador e uma região chamada de “scrape-off-layer”, que compreende a região de confinamento e as superfícies abertas do Tokamak (Figura extraída da referência [17])

O ponto de X é formado quando o campo magnético de uma bobina externa associado ao campo magnético gerado pela corrente de plasma cria um campo magnético poloidal nulo. Uma configuração “single-null” possui apenas um ponto de X, deste ponto emanará a última superfície magnética fechada (separatriz) e irá separar a região de confinamento do plasma da região de superfícies abertas ou “scrape-off layer” (Figura 1.4).

A descrição do equilíbrio MHD é obtido por códigos que, em geral, consomem um grande tempo computacional, baseados em soluções numéricas da equação de Grad-Shafranov [18]. Por outro lado, para o estudo de fenômenos que ocorrem próximo a separatriz, tais como o estudo de escape e das impressões das linhas de campo deixadas nas paredes do tokamak, o

método de estudo das linhas de campo através de mapas integráveis são muitos mais rápidos para iterar e preservam as características do estudo dos tokamaks com desviadores [19]–[21].

Para o estudo do escape das linhas de campo é necessário incluir perturbações ressonantes, que substituem a separatriz ideal por uma camada caótica. O estudo das linhas de campo na região da separatriz é muito importante, uma vez que o padrão de deposição das partículas nas placas do divisor é dominado por fenômenos caóticos que ocorrem nesta região [2], [3], [22]–[26], os quais influenciam no confinamento.

Para a construção do mapa utilizamos uma importante ferramenta para a investigação de sistemas dinâmicos, denominada seção de Poincaré. Essa ferramenta foi introduzida em 1892 por Henri Poincaré, e ela possibilita-nos analisar a dinâmica de uma sistema n -dimensional através de uma figura com dimensão $(n-1)$. Dado um sistema tridimensional, a seção de Poincaré é o plano (superfície) localizado no espaço de fase (3D) de um sistema contínuo, o qual é interceptado por uma órbita periódica. Toda vez que a seção transversal é interceptada por essa órbita é registrado um ponto (momento versus posição). A órbita irá cruzar repetidamente a superfície caso o movimento seja limitado a uma região finita do espaço. Como resultado teremos uma coleção de pontos representados em um gráfico momento versus posição, o qual é denominado mapa de Poincaré [27]. Esse mapa define uma trajetória bidimensional do espaço de fase.

Para construção do mapa é considerado apenas um sentido de cruzamento da órbita com a seção de Poincaré. A escolha das variáveis dinâmicas que definem a seção de Poincaré assim como seus valores é arbitrária. A Figura 1.5 mostra uma representação esquemática da seção de Poincaré.

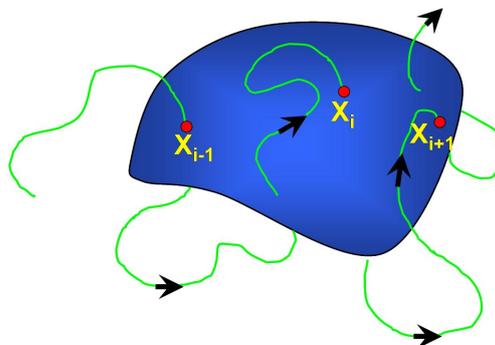


Figura 1.5 – Representação esquemática da seção de Poincaré (Figura extraída da referência [28]).

O objetivo deste trabalho é o construir um mapa simplético integrável bidimensional associado a uma hamiltoniana para descrever as linhas de campo magnético de um plasma com

um desviador, com base na metodologia adotada por [1]–[3]. O método consiste da composição de potenciais unidos suavemente formando dois pontos de mínimos locais e um ponto de máximo. Através da escolha dos parâmetros livres, tal como o ponto de X, podemos reproduzir uma ampla variedade de superfícies magnéticas invariantes. O fator de segurança pode ser escolhido livremente, uma vez que este não depende dos parâmetros geométricos.

O mapa proposto é composto por doze parábolas e visa eliminar a restrição imposta pelo modelo de seis parábolas proposto em [2], o qual ficamos limitados pela simetria em relação ao segmento que liga os pontos elípticos e hiperbólico, tornando impossível reproduzir a triangularidade neste modelo. A ideia deste modelo foi inicialmente proposta pelo Prof. Dr. Tiago Kroets em suas atividades no pós-doutorado na USP.

Essa metodologia aumenta consideravelmente a complexidade das equações, mas permite representar superfícies com um amplo conjunto de valores de triangularidade e alongação. E ainda preserva uma característica importante do modelo em que este foi baseado, o fato de podermos escolher o fator de segurança associado a cada superfície, uma vez que este independe da geometria adotada. No entanto, ambos os casos não preveem o desvio de Shafranov. Contudo, podemos considerar o modelo bastante apropriado para o estudo de tokamaks com desviadores, já que estamos interessados no estudo das linhas de campo próximas do ponto de X.

A perturbação do mapa integrável pode ser realizada através de uma perturbação ressonante para simular o efeito de um Limitador Magnético Ergódico (LME), gerando assim a região caótica próxima a separatriz passando através do ponto X, mencionada anteriormente. Com isso podemos reproduzir os principais aspectos de transporte obtidos por integração numérica das equações de linhas de campo magnético, tais como: comprimento de conexão e “footprints” magnéticos na placa do desviador [2]. A análise da topologia destas estruturas é de essencial importância para o entendimento dos padrões de deposição nas paredes do tokamak e nas placas do desviador poloidal [29], [30].

2 MAPA DO DESVIADOR POLOIDAL COM TOPOLOGIA ADAPTÁVEL

Neste capítulo aplicamos a metodologia adotada em [1]–[3] para obter um mapa que descreve as linhas de campo magnético em um tokamak com desviador. O modelo proposto neste trabalho é composto por doze parábolas unidas suavemente e possibilitará a representação de uma ampla variedade de superfícies magnéticas com amplo valores de triangularidade e alongação, sendo assim um aperfeiçoamento do modelo proposto em [2].

2.1 O Método

Em um tokamak o fluxo poloidal é uma quantidade que permanece constante no equilíbrio Magnetohidrodinâmico (MHD). Portanto, tal equilíbrio representa um sistema dinâmico integrável, já que possui uma Hamiltoniana constante (que é o fluxo poloidal) ao longo do traçado de uma linha de campo. As coordenadas das linhas de campo interceptam uma dada seção transversal de superfície poloidal, onde o ângulo toroidal faz o papel do tempo.

A ideia básica do modelo é explorar a similaridade entre a dinâmica hamiltoniana do comportamento das linhas e o movimento unidimensional de uma partícula sob ação de um potencial convenientemente escolhido. Os pontos de equilíbrio são os extremos da função potencial e podemos adaptá-la para atender os pontos fixos desejados no mapa das linhas de campo.

O método pode ser resumido nos seguintes passos:

1 - Escolha de um potencial $V(y)$ adequado na hamiltoniana:

$$\psi(x, y) = \frac{x^2}{2} + V(y) \quad (2.1)$$

com os pontos extremos localizados em valores desejados de y . Estas posições corresponder-se-ão aos pontos elípticos (O-point) e aos pontos hiperbólicos (X-points) fixados no espaço de fase nas coordenadas (x, y) . A hamiltoniana de equilíbrio é integrável em $V(y)$ e deve permitir soluções analíticas das

correspondentes equações canônicas. O potencial $V(y)$ é uma expressão auxiliar usada no método, esta permite gerar superfícies fechadas com valores de ψ constante e com uma desejada topologia.

2 – Resolver as equações de Hamilton:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{d\psi}{dx} \\ \frac{dx}{dt} = -\frac{d\psi}{dy} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(x_i, y_i, t) \\ y(x_i, y_i, t) \end{cases} \quad (2.2)$$

e assim obter soluções contínuas $(x(x_i, y_i, t), y(x_i, y_i, t))$ onde x_i e y_i são as condições iniciais para a solução.

3 – Discretização das equações contínuas

$$(x(x_i, y_i, t), y(x_i, y_i, t)) \rightarrow (x(x_i, y_i, \Delta), y(x_i, y_i, \Delta)) \quad (2.3)$$

onde Δ é o parâmetro de discretização e está relacionado com a rotação da linha de campo entre interseções com uma superfície após sucessivas aplicações das equações do mapa. No plasma em equilíbrio esta rotação é dada pela transformada rotacional e o inverso desta é usualmente denominado de fator de segurança. Como a topologia das superfícies de equilíbrio e os pontos fixos independem do parâmetro Δ , podemos reproduzir qualquer fator de segurança associado a superfície magnética que desejamos modelar através de uma escolha apropriada de $\Delta(\psi)$.

2.2 Obtenção do Mapa

Aplicamos um procedimento existente para obter um novo modelo de mapa integrável bidimensional associado a uma hamiltoniana para descrever as linhas de campo magnético de equilíbrio dos plasmas em tokamaks com um divisor. O método no qual este trabalho está baseado [2] é composto por seis parábolas. Este reproduz uma ampla variedade de superfícies magnéticas invariantes com qualquer valor de alongação através da escolha dos parâmetros livres, tal como o ponto de X. O perfil do fator de segurança também pode ser especificado livremente, uma vez que este não depende dos parâmetros geométricos.

No entanto, este modelo não é capaz de reproduzir superfícies magnéticas com triangularidade. Isto se deve ao fato das superfícies de equilíbrio obtidas através deste mapa serem caracterizadas por valores constantes de $\psi(x,y) = \frac{x^2}{2} + V(y)$. Essas superfícies serão simétricas (Figura 2.1a e Figura 2.1b), dado que a dependência em x é quadrática. Uma forma de quebrar essa simetria seria introduzir uma dependência em x no potencial $V(x,y)$. Por mais simples que seja essa dependência, não seria possível a obtenção de soluções analíticas para as equações de Hamilton, tornando inviável a obtenção do mapa.

Uma maneira de solucionar esse problema seria introduzirmos uma dependência em x não explícita. Isso é feito através da introdução de dois potenciais: um para valores positivos de x ($V(y)$) e outro para valores negativos de x ($V'(y)$). Com isso, continuamos a obter soluções analíticas para as trajetórias de fase. Tanto $V(y)$ e $V'(y)$ serão compostos por seis parábolas, totalizando 12 parábolas (Figura 2.1c e Figura 2.1d).

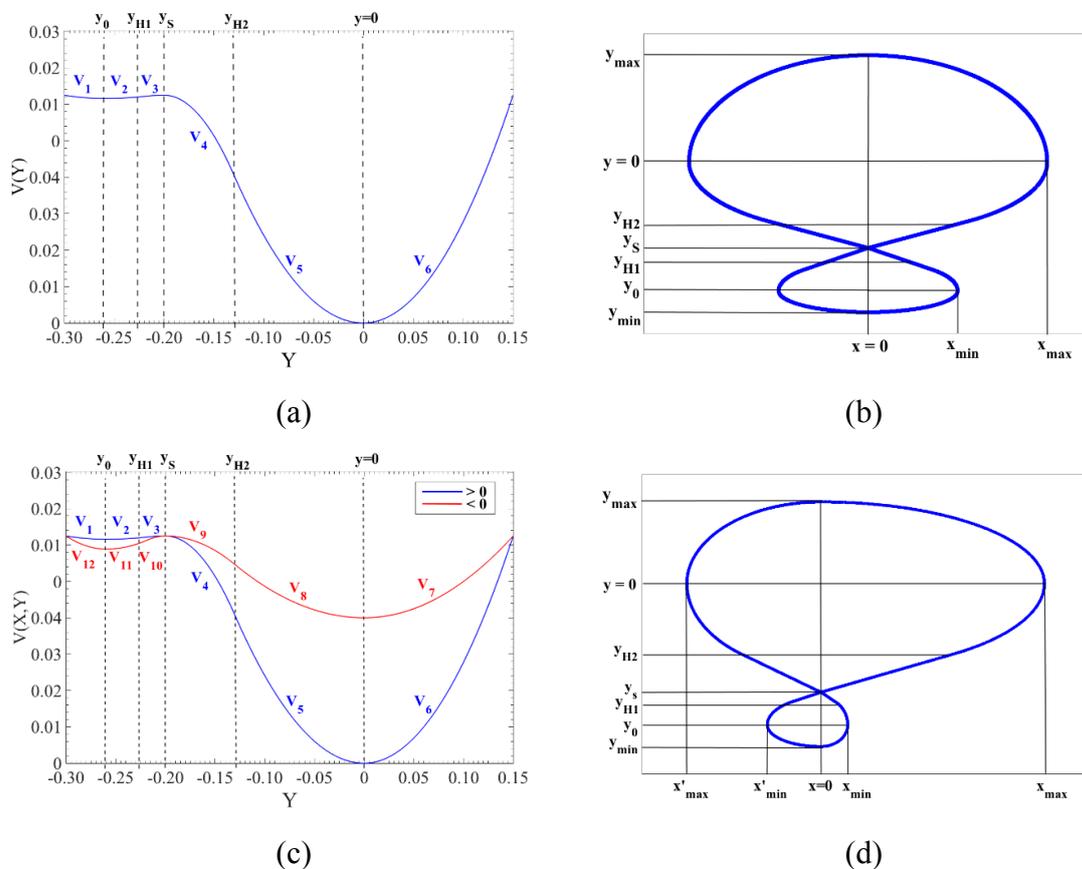


Figura 2.1 - (a) Traçado do potencial $V(y)$ para o modelo proposto em [2] composto por seis parábolas e (b) representação esquemática da separatriz para este potencial e seus

parâmetros livres. (c) Traçado do potencial $V(x,y)$ com um conjunto adicional de seis parábolas (curva em vermelho) e (d) representação esquemática da separatriz para este potencial e seus parâmetros livres. Devido a assimetria, (c) apresenta dois parâmetros livres adicionais: x'_{\min} e x'_{\max} .

Os parâmetros livres são:

- y_{MAX} : distância entre a origem e a separatriz na direção positiva de y ,
- y_{MIN} : distância entre a origem e a separatriz na direção negativa de y ,
- x_{MAX} : largura na direção de x positivo do primeiro lóbulo superior,
- x_{MIN} : largura na direção de x positivo do primeiro lóbulo inferior,
- x'_{MAX} : largura na direção de x negativo do primeiro lóbulo superior,
- x'_{MIN} : largura na direção de x negativo do primeiro lóbulo inferior,
- y_0 : ponto elíptico do lóbulo inferior;
- y_{H1} : posição vertical no lóbulo inferior a partir do qual a separatriz poder ser aproximada por uma reta,
- y_{H2} : posição vertical no lóbulo superior a partir do qual a separatriz poder ser aproximada por uma reta,
- y_{S} : ponto hiperbólico (ponto de X).

A seguir temos o potencial para as 12 parábolas:

$$V(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}a_1(y - y_0)^2 + b_2, & y \leq y_0 \text{ e } x > 0 \\ \frac{1}{2}a'_1(y - y_0)^2 + b'_2, & y \leq y_0 \text{ e } x < 0 \\ \frac{1}{2}a_2(y - y_0)^2 + b_2, & y_0 \leq y \leq y_{H1} \text{ e } x > 0 \\ \frac{1}{2}a'_2(y - y_0)^2 + b'_2, & y_0 \leq y \leq y_{H1} \text{ e } x < 0 \\ -\frac{1}{2}a_3(y - y_s)^2 + b_1, & y_{H1} \leq y \leq y_s \text{ e } x > 0 \\ -\frac{1}{2}a'_3(y - y_s)^2 + b_1, & y_{H1} \leq y \leq y_s \text{ e } x < 0 \\ -\frac{1}{2}a_4(y - y_s)^2 + b_1, & y_s \leq y \leq y_{H2} \text{ e } x > 0 \\ -\frac{1}{2}a'_4(y - y_s)^2 + b_1, & y_s \leq y \leq y_{H2} \text{ e } x < 0 \\ \frac{1}{2}a_5y^2, & y_{H2} \leq y \leq 0 \text{ e } x > 0 \\ \frac{1}{2}a'_5y^2 + b'_1, & y_{H2} \leq y \leq 0 \text{ e } x < 0 \\ \frac{1}{2}a_6y^2, & 0 \leq y \text{ e } x > 0 \\ \frac{1}{2}a'_6y^2 + b'_1, & 0 \leq y \text{ e } x < 0 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Os parâmetros dos potenciais estão relacionados com os geométricos segundo as equações a seguir:

$$b_1 = \frac{x_{\max}^2}{2} \quad (2.5)$$

$$b_2 = b_1 \frac{x_{\min}^2}{2} \quad (2.6)$$

$$b'_1 = b_1 - \frac{x_{\max}'^2}{2} \quad (2.7)$$

$$b'_2 = b_1 - \frac{x_{\min}'^2}{2} \quad (2.8)$$

$$a_1 = \frac{x_{\min}^2}{(y_{\min} - y_0)^2} \quad (2.9)$$

$$a'_1 = a_1 + \frac{2(b_2 - b'_2)}{(y_{\min} - y_0)^2} \quad (2.10)$$

$$a_2 = \frac{x_{\min}^2}{(y_{H1} - y_0)(y_s - y_0)} \quad (2.11)$$

$$a'_2 = -\frac{a'_3(y_{H1} - y_s)}{(y_{H1} - y_0)} \quad (2.12)$$

$$a_3 = \frac{-x_{\min}^2}{[(y_{H1} - y_0)(y_{H1} - y_s) - (y_{H1} - y_s)^2]} \quad (2.13)$$

$$a'_3 = \frac{2(b'_2 - b_1)}{[(y_{H1} - y_s)(y_{H1} - y_0) - (y_{H1} - y_s)^2]} \quad (2.14)$$

$$a_4 = \frac{x_{\max}^2}{[(y_{H1} - y_0)^2 - y_{H2}(y_{H2} - y_s)]} \quad (2.15)$$

$$a'_4 = \frac{2(b_1 - b'_1)}{(y_s^2 - y_{H2}y_s)} \quad (2.16)$$

$$a_5 = \frac{x_{\max}^2}{y_{H2}y_s} \quad (2.17)$$

$$a'_5 = -\frac{a'_4(y_{H2} - y_s)}{y_{H2}} \quad (2.18)$$

$$a_6 = \frac{x_{\max}^2}{y_{\max}^2} \quad (2.19)$$

$$a'_6 = a_6 - \frac{2b'_1}{y_{\max}^2} \quad (2.20)$$

A seguir temos as equações do mapa obtidas pela discretização da solução da equação de Hamilton:

- Equações para as regiões:

- **Região 1:** $y_n < y_0$

- $x > 0$

$$x_{n+1} = -(y_n - y_0)\sqrt{a_1} \sin(\sqrt{a_1}\Delta) + x_n \cos(\sqrt{a_1}\Delta) \quad (2.21)$$

$$y_{n+1} = (y_n - y_0) \cos(\sqrt{a_1}\Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a_1}} \sin(\sqrt{a_1}\Delta) + y_0 \quad (2.22)$$

- $x < 0$

$$x_{n+1} = -(y_n - y_0)\sqrt{a'_1} \sin(\sqrt{a'_1}\Delta) + x_n \cos(\sqrt{a'_1}\Delta) \quad (2.23)$$

$$y_{n+1} = (y_n - y_0) \cos(\sqrt{a'_1}\Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a'_1}} \sin(\sqrt{a'_1}\Delta) + y_0 \quad (2.24)$$

▪ **Região 2:** $y_0 < y_n < y_{H1}$

○ $x > 0$

$$x_{n+1} = -(y_n - y_0)\sqrt{a_2} \sin(\sqrt{a_2}\Delta) + x_n \cos(\sqrt{a_2}\Delta) \quad (2.25)$$

$$y_{n+1} = (y_n - y_0) \cos(\sqrt{a_2}\Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a_2}} \sin(\sqrt{a_2}\Delta) + y_0 \quad (2.26)$$

○ $x < 0$

$$x_{n+1} = -(y_n - y_0)\sqrt{a'_2} \sin(\sqrt{a'_2}\Delta) + x_n \cos(\sqrt{a'_2}\Delta) \quad (2.27)$$

$$y_{n+1} = (y_n - y_0) \cos(\sqrt{a'_2}\Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a'_2}} \sin(\sqrt{a'_2}\Delta) + y_0 \quad (2.28)$$

▪ **Região 3:** $y_{H1} < y_n < y_s$

○ $x > 0$

$$x_{n+1} = (y_n - y_s)\sqrt{a_3} \sinh(\sqrt{a_3}\Delta) + x_n \cosh(\sqrt{a_3}\Delta) \quad (2.29)$$

$$y_{n+1} = (y_n - y_s) \cosh(\sqrt{a_3}\Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a_3}} \sinh(\sqrt{a_3}\Delta) + y_s \quad (2.30)$$

○ $x < 0$

$$x_{n+1} = (y_n - y_s)\sqrt{a'_3} \sinh(\sqrt{a'_3}\Delta) + x_n \cosh(\sqrt{a'_3}\Delta) \quad (2.31)$$

$$y_{n+1} = (y_n - y_s) \cosh(\sqrt{a'_3}\Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a'_3}} \sinh(\sqrt{a'_3}\Delta) + y_s \quad (2.32)$$

▪ **Região 4:** $y_s < y_n < y_{H2}$

○ $x > 0$

$$x_{n+1} = (y_n - y_s)\sqrt{a_4} \sinh(\sqrt{a_4}\Delta) + x_n \cosh(\sqrt{a_4}\Delta) \quad (2.33)$$

$$y_{n+1} = (y_n - y_s) \cosh(\sqrt{a_4}\Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a_4}} \sinh(\sqrt{a_4}\Delta) + y_s \quad (2.34)$$

○ $x < 0$

$$x_{n+1} = (y_n - y_s)\sqrt{a'_4} \sinh(\sqrt{a'_4}\Delta) + x_n \cosh(\sqrt{a'_4}\Delta) \quad (2.35)$$

$$y_{n+1} = (y_n - y_s) \cosh(\sqrt{a'_4}\Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a'_4}} \sinh(\sqrt{a'_4}\Delta) + y_s \quad (2.36)$$

▪ **Região 5:** $y_{H2} < y_n < 0$

○ $x > 0$

$$x_{n+1} = -y_n \sqrt{a_5} \sin(\sqrt{a_5} \Delta) + x_n \cos(\sqrt{a_5} \Delta) \quad (2.37)$$

$$y_{n+1} = y_n \cos(\sqrt{a_5} \Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a_5}} \sin(\sqrt{a_5} \Delta) \quad (2.38)$$

○ $x < 0$

$$x_{n+1} = -y_n \sqrt{a'_5} \sin\left(\sqrt{a'_5} \Delta\right) + x_n \cos\left(\sqrt{a'_5} \Delta\right) \quad (2.39)$$

$$y_{n+1} = y_n \cos\left(\sqrt{a'_5} \Delta\right) + \frac{x_n}{\sqrt{a'_5}} \sin\left(\sqrt{a'_5} \Delta\right) \quad (2.40)$$

▪ **Região 6:** $y_n > 0$

○ $x > 0$

$$x_{n+1} = -y_n \sqrt{a_6} \sin(\sqrt{a_6} \Delta) + x_n \cos(\sqrt{a_6} \Delta) \quad (2.41)$$

$$y_{n+1} = y_n \cos(\sqrt{a_6} \Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a_6}} \sin(\sqrt{a_6} \Delta) \quad (2.42)$$

○ $x < 0$

$$x_{n+1} = -y_n \sqrt{a'_6} \sin\left(\sqrt{a'_6} \Delta\right) + x_n \cos\left(\sqrt{a'_6} \Delta\right) \quad (2.43)$$

$$y_{n+1} = y_n \cos\left(\sqrt{a'_6} \Delta\right) + \frac{x_n}{\sqrt{a'_6}} \sin\left(\sqrt{a'_6} \Delta\right) \quad (2.44)$$

As equações (2.21) - (2.44) são específicas para cada região e não são capazes de mapear as transições entre regiões vizinhas. Por exemplo, não podemos utilizar as equações da região 5 (equações (2.37) e (2.38)) para mapear pontos na região 6. Isso levaria a uma configuração exibida na Figura 2.2. Para a região 6 devemos utilizar as equações (2.41) e (2.42). Para o caso em questão, precisamos encontrar o ponto de transição B e o tempo gasto t_B (que representa uma fração de Δ) para a linha de campo ir do ponto A ao ponto B. Uma vez obtidos estes parâmetros utilizamo-los nas equações (2.41) e (2.42), onde o intervalo de tempo para mapeamento entre os pontos (x_B, y_B) e (x_{x+1}, y_{y+1}) será dado por $(\Delta - t_B)$.

O ponto de conexão (x_B, y_B) e o intervalo de tempo t_B são obtidos pelas versões contínuas das equações (2.37) e (2.38) e pelas hamiltonianas (2.1) para os potenciais das as regiões consideradas

$$x_B = -y_n \sqrt{a_5} \sin(\sqrt{a_5} t_B) + x_n \cos(\sqrt{a_5} t_B) \quad (2.45)$$

$$y_B = 0 = y_n \cos(\sqrt{a_5} t_B) + \frac{x_n}{\sqrt{a_5}} \sin(\sqrt{a_5} t_B) \quad (2.46)$$

Igualando a hamiltoniana do ponto $(x = x_n, y = y_n)$ a do ponto de conexão $(x = x_B, y = y_B = 0)$, obtemos

$$x_B = [x_n^2 + a_5 y_n^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.47)$$

Substituindo a equação (2.45) em (2.46), encontramos

$$t_B = \frac{1}{\sqrt{a_5}} \cos^{-1} \left[\frac{x_n x_B}{x_n^2 + a_5 y_n^2} \right] \quad (2.48)$$

Logo, de posse de t_B e das equações (2.41) e (2.42), podemos obter o ponto (x_{n+1}, y_{n+1}) ou o ponto C

$$x_{n+1} = x_n \cos(\sqrt{a_6} \Delta - t_B) \quad (2.49)$$

$$y_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{a_6}} \sin(\sqrt{a_6} \Delta - t_B) \quad (2.50)$$

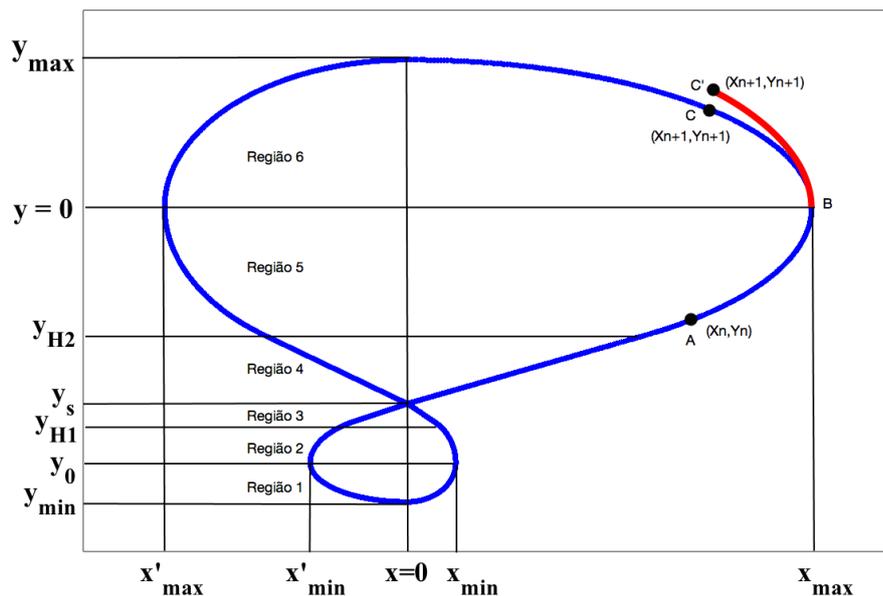


Figura 2.2 – Representação esquemática da transição entre regiões do mapa.

Procedimentos análogos são realizados para obtenção das demais transições.

Sabendo que Δ é o tempo necessário para a linha de campo dar uma volta toroidal completa, e que neste intervalo a linha de campo pode visitar diferentes regiões, este, por questão de praticidade na implementação do código, foi dividido em intervalos menores, segundo a expressão:

$$\delta = \frac{\Delta}{n} \quad (2.51)$$

onde n pode ser escolhido convenientemente. A Figura 2.3 mostra um esquema desta metodologia. Adotando $n = 5$, tem-se:

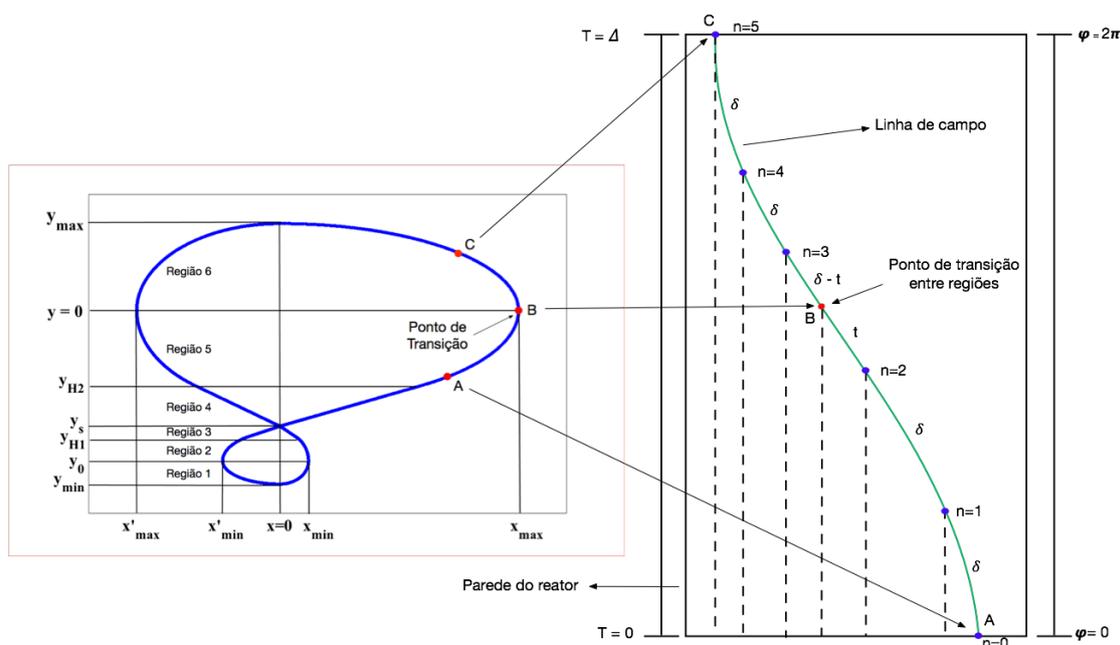


Figura 2.3 – Representação esquemática da transição entre regiões do mapa, onde substituímos Δ por um intervalo menor δ . Neste exemplo foi adotado $n = 5$ na equação (2.51). No lado esquerdo temos a seção transversal poloidal, enquanto no lado direito temos a visão superior do reator, o qual, por questão de simplicidade, foi considerado um cilindro periódico.

Com este procedimento teremos um número maior de iterações, tornando mais fácil a obtenção do tempo onde ocorrem as transições entre regiões.

A seguir temos as equações para as transições entre as regiões:

- **Região 1 para Região 2 - $x > 0$:**

$$x_{n+1} = x_{\text{trans}} \cos\left(\sqrt{a_2}(\Delta - t)\right) \quad (2.52)$$

$$y_{n+1} = \frac{x_{\text{trans}}}{\sqrt{a_2}} \sin\left(\sqrt{a_2}(\Delta - t)\right) + y_0 \quad (2.53)$$

Onde

$$x_{\text{trans}} = \sqrt{x_n^2 + a_1(y_n - y_0)^2} \quad (2.54)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \cos^{-1} \left[\frac{x_{\text{trans}} x_n}{x_n^2 + a_1(y_n - y_0)^2} \right] \quad (2.55)$$

- **Região 2 - $x > 0$ para $x < 0$:**

$$x_{n+1} = -(y_{\text{trans}} - y_0) \sqrt{a'_2} \sin\left(\sqrt{a'_2}(\Delta - t)\right) \quad (2.56)$$

$$y_{n+1} = (y_{\text{trans}} - y_0) \cos\left(\sqrt{a'_2}(\Delta - t)\right) + y_0 \quad (2.57)$$

onde

$$y_{\text{trans}} = \sqrt{\frac{x_n^2 + a_2(y_n - y_0)^2 + 2(b_2 - b'_2)}{a'_2}} + y_0 \quad (2.58)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \cos^{-1} \left[\frac{a_2(y_{\text{trans}} - y_0)(y_n - y_0)}{x_n^2 + a_2(y_n - y_0)^2} \right] \quad (2.59)$$

- **Região 2 para Região 3 - $x > 0$:**

$$x_{n+1} = (y_{H1} - y_s) \sqrt{a_3} \sinh\left(\sqrt{a_3}(\Delta - t)\right) + x_{\text{trans}} \cosh\left(\sqrt{a_3}(\Delta - t)\right) \quad (2.60)$$

$$y_{n+1} = (y_{H1} - y_s) \cosh\left(\sqrt{a_3}(\Delta - t)\right) + \frac{x_{\text{trans}}}{\sqrt{a_3}} \sinh\left(\sqrt{a_3}(\Delta - t)\right) + y_s \quad (2.61)$$

onde

$$x_{\text{trans}} = \sqrt{x_n^2 + a_2(y_n - y_0)^2 + a_3(y_{H1} - y_s)^2 + 2(b_2 - b_1)} \quad (2.62)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \cos^{-1} \left[\frac{x_{\text{trans}} x_n + a_2(y_{H1} - y_0)(y_n - y_0)}{x_n^2 + a_2(y_n - y_0)^2} \right] \quad (2.63)$$

- **Região 3 - $x > 0$ para $x < 0$:**

$$x_{n+1} = (y_{\text{trans}} - y_s) \sqrt{a'_3} \sinh\left(\sqrt{a'_3}(\Delta - t)\right) \quad (2.64)$$

$$y_{n+1} = (y_{\text{trans}} - y_s) \cosh\left(\sqrt{a_3'}(\Delta - t)\right) + y_s \quad (2.65)$$

onde

$$y_{\text{trans}} = -\sqrt{\frac{-x_n^2 + a_3(y_n - y_s)^2 + 2(b_1'' - b_1)}{a_3}} + y_s \quad (2.66)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a_3}} \cosh^{-1} \left[\frac{a_3(y_s - y_{3p})(y_n - y_s)}{x_n^2 - a_3(y_n - y_s)^2} \right] \quad (2.67)$$

- **Região 3 para Região 4 - $x > 0$:**

$$x_{n+1} = x_{\text{trans}} \cosh\left(\sqrt{a_4}(\Delta - t)\right) \quad (2.68)$$

$$y_{n+1} = \frac{x_{\text{trans}}}{\sqrt{a_4}} \sinh\left(\sqrt{a_4}(\Delta - t)\right) + y_s \quad (2.69)$$

onde

$$x_{\text{trans}} = \sqrt{x_n^2 - a_3(y_n - y_s)^2} \quad (2.70)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a_4}} \cosh^{-1} \left[\frac{-x_{\text{trans}}x_n}{-x_n^2 + a_3(y_n - y_s)^2} \right] \quad (2.71)$$

- **Região 4 para Região 5 - $x > 0$:**

$$x_{n+1} = -y_{H2} \sqrt{a_5} \sin\left(\sqrt{a_5}(\Delta - t)\right) + x_{\text{trans}} \cos\left(\sqrt{a_5}(\Delta - t)\right) \quad (2.72)$$

$$y_{n+1} = y_{H2} \cos\left(\sqrt{a_5}(\Delta - t)\right) + \frac{x_{\text{trans}}}{\sqrt{a_5}} \sin\left(\sqrt{a_5}(\Delta - t)\right) \quad (2.73)$$

onde

$$x_{\text{trans}} = \sqrt{x_n^2 - a_4(y_n - y_s)^2 - a_5 y_{H2}^2 + 2b_1} \quad (2.74)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a_3}} \cosh^{-1} \left[\frac{x_{\text{trans}}x_n - a_4(y_n y_{H2} - y_n y_s - y_s y_{H2} + y_s^2)}{x_n^2 - a_4(y_n - y_s)^2} \right] \quad (2.75)$$

- **Região 5 para Região 6 - $x > 0$:**

$$x_{n+1} = x_{\text{trans}} \cos\left(\sqrt{a_6}(\Delta - t)\right) \quad (2.76)$$

$$y_{n+1} = \frac{x_{\text{trans}}}{\sqrt{a_6}} \sinh\left(\sqrt{a_6}(\Delta - t)\right) \quad (2.77)$$

onde

$$x_{\text{trans}} = \sqrt{x_n^2 + a_5 y_n^2} \quad (2.78)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a_5}} \cos^{-1} \left[\frac{x_{\text{trans}} x_n}{x_n^2 + a_5 y_n^2} \right] \quad (2.79)$$

- **Região 6 - $x > 0$ para $x < 0$:**

$$x_{n+1} = -y_{\text{trans}} \sqrt{a'_6} \sin \left(\sqrt{a'_6} (\Delta - t) \right) \quad (2.80)$$

$$y_{n+1} = y_{\text{trans}} \cos \left(\sqrt{a'_6} (\Delta - t) \right) \quad (2.81)$$

onde

$$y_{\text{trans}} = \sqrt{\frac{x_n^2 + a_6 y_n^2 - 2b'_1}{a'_6}} \quad (2.82)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a_6}} \cos^{-1} \left[\frac{a_6 y_n y_{\text{trans}}}{x_n^2 + a_6 y_n^2} \right] \quad (2.83)$$

- **Região 6 para Região 5 - $x < 0$:**

$$x_{n+1} = y_{\text{trans}} \cos \left(\sqrt{a'_5} (\Delta - t) \right) \quad (2.84)$$

$$y_{n+1} = \frac{y_{\text{trans}}}{\sqrt{a'_5}} \sin \left(\sqrt{a'_5} (\Delta - t) \right) \quad (2.85)$$

onde

$$x_{\text{trans}} = -\sqrt{x_n^2 + a'_6 y_n^2} \quad (2.86)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a'_6}} \cos^{-1} \left[\frac{x_{\text{trans}} x_n}{x_n^2 + a'_6 y_n^2} \right] \quad (2.87)$$

- **Região 5 - $x < 0$ para $x < 0$:**

$$x_{n+1} = -y_{\text{trans}} \sqrt{a_5} \sin \left(\sqrt{a_5} (\Delta - t) \right) \quad (2.88)$$

$$y_{n+1} = y_{\text{trans}} \cos \left(\sqrt{a_5} (\Delta - t) \right) \quad (2.89)$$

onde

$$y_{\text{trans}} = -\sqrt{\frac{x_n^2 + a'_5 y_n^2 + 2b'_1}{a_5}} \quad (2.90)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a'_5}} \cos^{-1} \left[\frac{a'_5 y_{\text{trans}} y_n}{x_n^2 + a'_5 y_n^2} \right] \quad (2.91)$$

- **Região 5 para Região 4 - $x < 0$:**

$$x_{n+1} = [(y)_{H2} - y_s] \sqrt{a'_4} \sinh \left(\sqrt{a'_4} (\Delta - t) \right) + x_{\text{trans}} \cosh \left(\sqrt{a'_4} (\Delta - t) \right) \quad (2.92)$$

$$y_{n+1} = [(y)_{H2} - y_s] \cosh \left(\sqrt{a'_4} (\Delta - t) \right) + \frac{x_{\text{trans}}}{\sqrt{a'_4}} \sinh \left(\sqrt{a'_4} (\Delta - t) \right) + y_s \quad (2.93)$$

onde

$$x_{\text{trans}} = -\sqrt{x_n^2 + a'_5 (y_n^2 - y_{H2}^2)} \quad (2.94)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a'_5}} \cos^{-1} \left[\frac{x_{\text{trans}} x_n + a'_5 y_n y_{H2}}{x_n^2 + a'_5 y_n^2} \right] \quad (2.95)$$

- **Região 4 - $x < 0$ para $x > 0$:**

$$x_{n+1} = (y_{\text{trans}} - y_s) \sqrt{a_4} \sinh \left(\sqrt{a_4} (\Delta - t) \right) \quad (2.96)$$

$$y_{n+1} = (y_{\text{trans}} - y_s) \cosh \left(\sqrt{a_4} (\Delta - t) \right) + y_s \quad (2.97)$$

onde

$$y_{\text{trans}} = \sqrt{\frac{-x_n^2 + a'_4 (y_n - y_s)^2 + 2(b_1 - b'_1)}{a_4}} + y_s \quad (2.98)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a'_4}} \cosh^{-1} \left[\frac{a'_4 (y_{\text{trans}} - y_s) (y_n - y_s)}{a'_4 (y_n - y_s)^2 - x_n^2} \right] \quad (2.99)$$

- **Região 4 para Região 3 - $x < 0$:**

$$x_{n+1} = x_{\text{trans}} \cosh \left(\sqrt{a'_3} (\Delta - t) \right) \quad (2.100)$$

$$y_{n+1} = \frac{x_{\text{trans}}}{\sqrt{a'_3}} \sinh \left(\sqrt{a'_3} (\Delta - t) \right) + y_s \quad (2.101)$$

onde

$$x_{\text{trans}} = -\sqrt{x_n^2 - a'_4(y_n - y_s)^2} \quad (2.102)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a'_4}} \cos^{-1} \left[\frac{x_{\text{trans}} x_n}{x_n^2 - a'_4(y_n - y_s)^2} \right] \quad (2.103)$$

▪ **Região 3 para Região 2 - $x < 0$:**

$$x_{n+1} = -(y_{H1} - y_0) \sqrt{a'_2} \sin \left(\sqrt{a'_2} (\Delta - t) \right) + x_{\text{trans}} \cos \left(\sqrt{a'_2} (\Delta - t) \right) \quad (2.104)$$

$$y_{n+1} = (y_{H1} - y_0) \cos \left(\sqrt{a'_2} (\Delta - t) \right) + \frac{x_{\text{trans}}}{\sqrt{a'_2}} \sin \left(\sqrt{a'_2} (\Delta - t) \right) + y_0 \quad (2.105)$$

onde

$$x_{\text{trans}} = -\sqrt{x_n^2 - a'_3(y_n - y_s)^2 - a'_2(y_{H1} - y_0)^2 + 2(b'_1 - b'_2)} \quad (2.106)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a'_3}} \cosh^{-1} \left[\frac{x_{\text{trans}} x_n - a'_3(y_n - y_s)(y_{H1} - y_s)}{x_n^2 - a'_3(y_n - y_s)^2} \right] \quad (2.107)$$

▪ **Região 2 para Região 1 - $x < 0$:**

$$x_{n+1} = x_{\text{trans}} \cos \left(\sqrt{a'_1} (\Delta - t) \right) \quad (2.108)$$

$$y_{n+1} = \frac{x_{\text{trans}}}{\sqrt{a'_1}} \sin \left(\sqrt{a'_1} (\Delta - t) \right) + y_0 \quad (2.109)$$

onde

$$x_{\text{trans}} = -\sqrt{x_n^2 + a'_2(y_n - y_0)^2} \quad (2.110)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a'_2}} \cos^{-1} \left[\frac{x_{\text{trans}} x_n}{x_n^2 + a'_2(y_n - y_0)^2} \right] \quad (2.111)$$

▪ **Região 1 - $x < 0$ para $x > 0$:**

$$x_{n+1} = -(y_{\text{trans}} - y_0) \sqrt{a_1} \sin \left(\sqrt{a_1} (\Delta - t) \right) \quad (2.112)$$

$$y_{n+1} = (y_{\text{trans}} - y_0) \cos \left(\sqrt{a_1} (\Delta - t) \right) + y_0 \quad (2.113)$$

onde

$$y_{\text{trans}} = -\frac{\sqrt{x_n^2 + a'_1(y_n - y_0)^2 + 2(b'_2 - b_2)}}{a_1} + y_0 \quad (2.114)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a'_1}} \cos^{-1} \left[\frac{a'_1 (y_{\text{trans}} - y_0)(y_n - y_0)}{x_n^2 + a'_1 (y_n - y_0)^2} \right] \quad (2.115)$$

A versatilidade do modelo é ilustrada nas figuras 2.4, 2.5 e 2.6, onde são apresentadas as curvas invariantes para diferentes valores dos parâmetros geométricos, observando os efeitos nas configurações de equilíbrio. Nas figuras 2.4a e 2.4b variamos a triangularidade alterando apenas os parâmetros x_{MAX} e x'_{MAX} . Os valores dos demais parâmetros foram mantidos, exceto os valores dos parâmetros x_{MIN} e x'_{MIN} , os quais, por questão de estabilidade, são funções de x_{MAX} , x_{MIN} e x'_{MAX} através das seguintes equações:

$$x_{\text{MIN}} = \frac{x_{\text{MAX}}}{2} \quad (2.116)$$

$$x'_{\text{MIN}} = \frac{x'_{\text{MAX}} x_{\text{MAX}}}{x_{\text{MIN}}} \quad (2.117)$$

Com isso a altura máxima, altura mínima e o ponto hiperbólico permanecem inalterados.

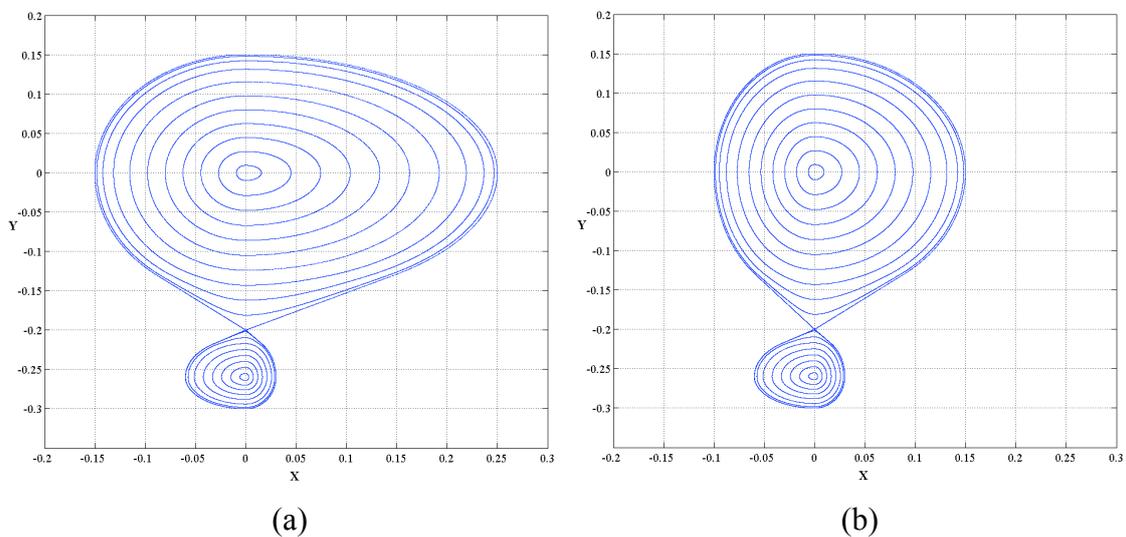


Figura 2.4 – Curvas invariantes com parâmetros (a) $x_{\text{MAX}} = 0.25$, $x'_{\text{MAX}} = -0.15$ e (b) $x_{\text{MAX}} = 0.15$, $x'_{\text{MAX}} = -0.10$. Os demais parâmetros são: $x_{\text{MIN}} = 0.03$, $x'_{\text{MIN}} = -0.06$, $y_{\text{MAX}} = 0.15$, $y_{\text{H2}} = -0.13$, $y_{\text{S}} = -0.20$, $y_{\text{H1}} = -0.218$, $y_0 = -0.26$ e $y_{\text{MIN}} = -0.30$.

Na Figura 2.5 variamos a alongação (y_{MAX}). A distância do ponto elíptico ao topo da separatriz também pode ser alterada sem que os demais parâmetros geométricos sejam alterados. O mesmo se aplica ao ponto hiperbólico (y_S).

A Figura 2.6 ilustra a influência do parâmetro geométrico y_{H2} na topologia das superfícies de equilíbrio. Este parâmetro indica quando o potencial passar a ter concavidade negativa. As equações para essa região são escritas em termos de senos e cossenos hiperbólicos. A separatriz de hipérboles é exatamente igual as linhas retas, logo o parâmetro y_{H2} define a que distância do ponto hiperbólico onde separatriz pode ser aproximada por uma linha reta. Na Figura 2.6a esse ponto está próximo ao ponto hiperbólico (y_S), enquanto na Figura 2.6b está mais próximo do ponto elíptico.

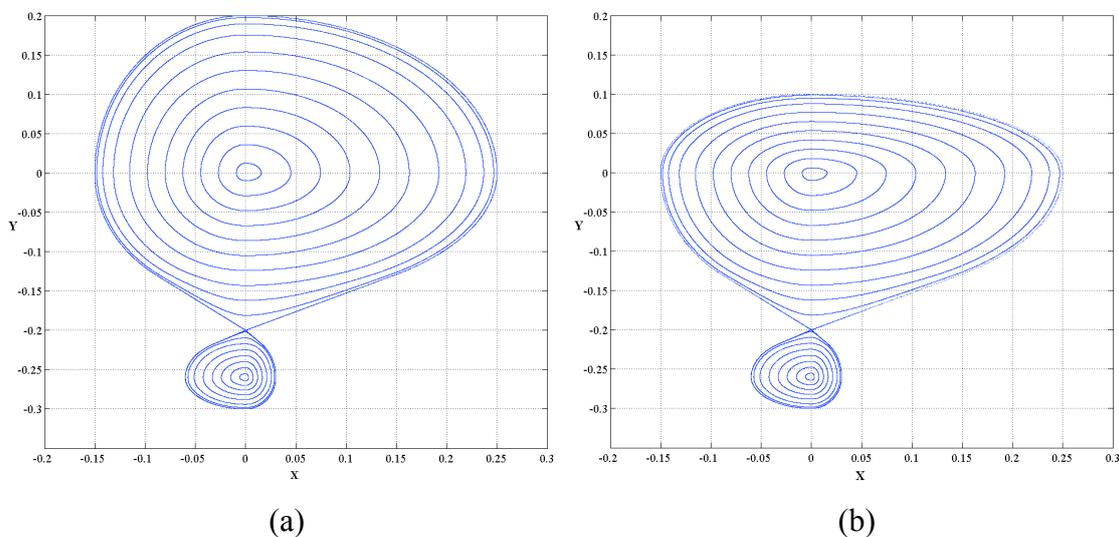


Figura 2.5 – Curvas invariantes com parâmetros (a) $y_{MAX} = 0.20$ e (b) $y_{MAX} = 0.10$. Os demais parâmetros são $x_{MAX} = 0.25$, $x'_{MAX} = -0.15$, $x_{MIN} = 0.03$, $x'_{MIN} = -0.06$, $y_{H2} = -0.13$, $y_S = -0.20$, $y_{H1} = -0.218$, $y_0 = -0.26$ e $y_{MIN} = -0.30$.

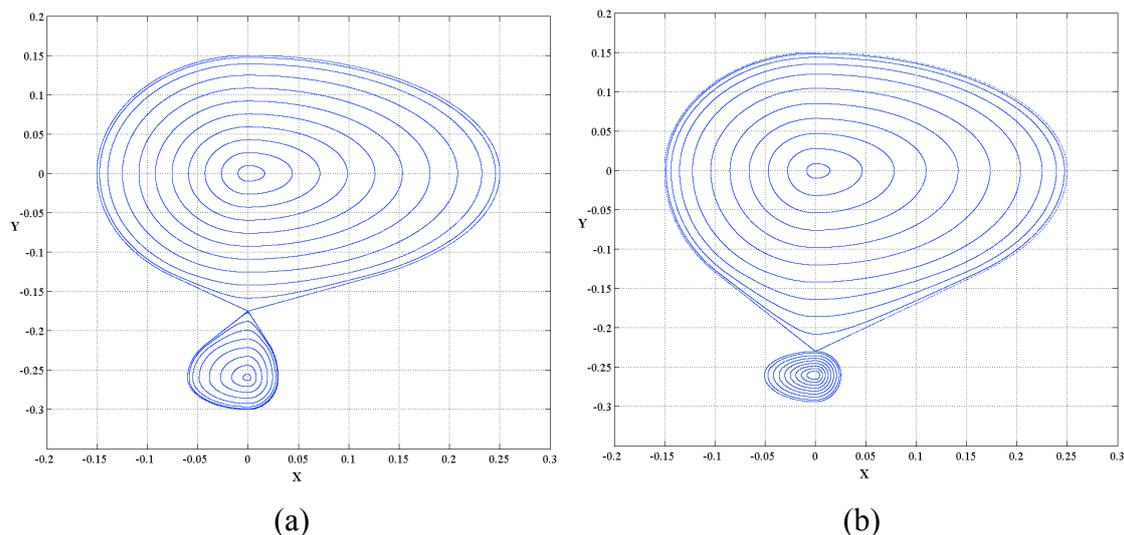


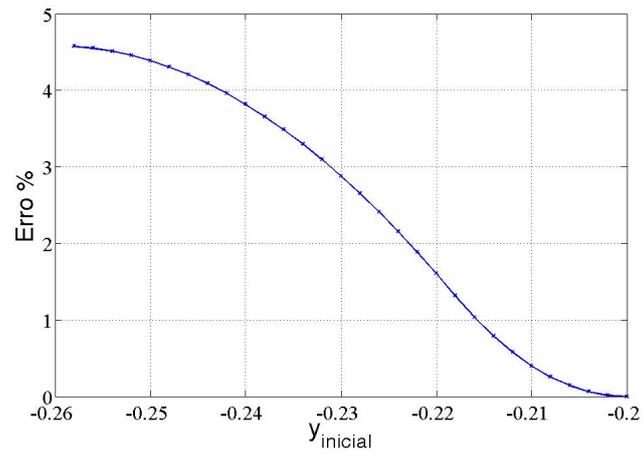
Figura 2.6 – Curvas invariantes com parâmetros (a) $y_s = -0.175$ e (b) $y_s = -0.23$. Os demais parâmetros são $x_{MAX} = 0.25$, $x'_{MAX} = -0.15$, $x_{MIN} = 0.03$, $x'_{MIN} = -0.06$, $y_{MAX} = -0.15$, $y_{H2} = -0.13$, $y_{H1} = -0.218$, $y_0 = -0.26$ e $y_{MIN} = -0.30$.

Todos os parâmetros geométricos estão em metros.

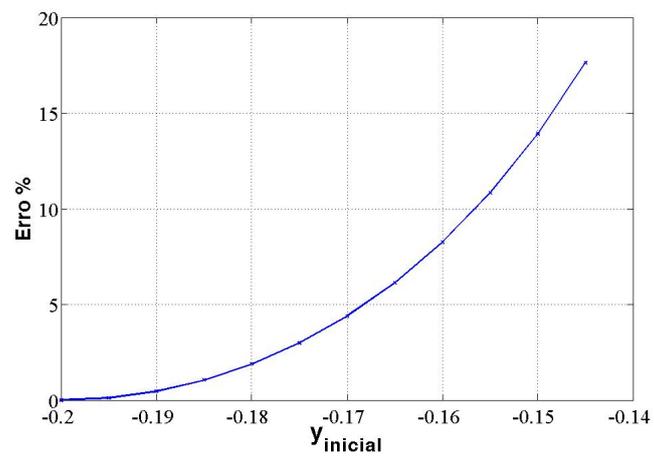
Podemos aplicar transformações semelhantes ao lóbulo inferior da separatriz, uma vez que os parâmetros são análogos ao do lóbulo superior nesta região. Assim, através das mudanças dos parâmetros livres podemos obter uma ampla variedade de configurações de superfícies de equilíbrio.

Notamos que, apesar da descontinuidade que ocorre quando a coordenada x inverte de sinal, as curvas invariantes são contínuas. Como foi mencionado anteriormente, as superfícies de equilíbrio obtidas através do mapa devem ser curvas caracterizadas por um valor constante de $\psi = \frac{x^2}{2} + V(y)$. No entanto, foi observado que o valor da hamiltoniana apenas se mantém constante na separatriz. A medida que nos afastamos dela teremos valores distintos para a hamiltoniana, um para cada conjunto de seis parábolas (6 para $x > 0$ e 6 para $x < 0$). A Figura 2.7 ilustra os erros obtidos à medida que nos aproximamos dos centros dos lóbulos a partir do ponto hiperbólico.

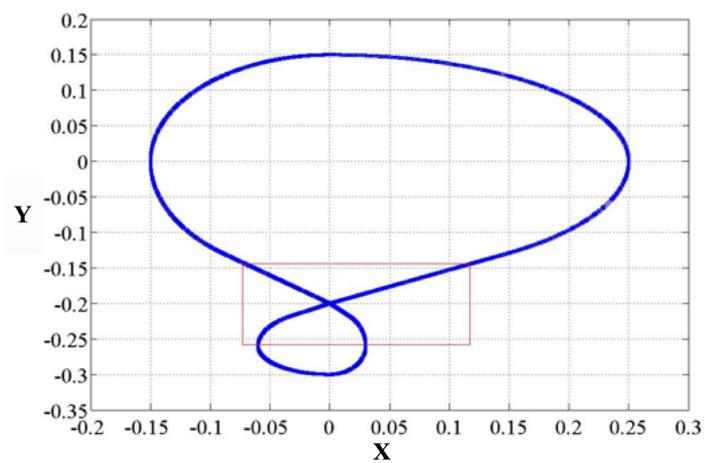
Para os gráficos a seguir foram adotados os seguintes parâmetros geométricos: $x_{MAX} = 0.25$, $x'_{MAX} = -0.15$, $x_{MIN} = 0.03$, $x'_{MIN} = -0.06$, $y_{MAX} = 0.15$, $y_{H2} = -0.13$, $y_s = -0.20$, $y_{H1} = -0.218$, $y_0 = -0.26$ e $y_{MIN} = -0.30$.



(a)



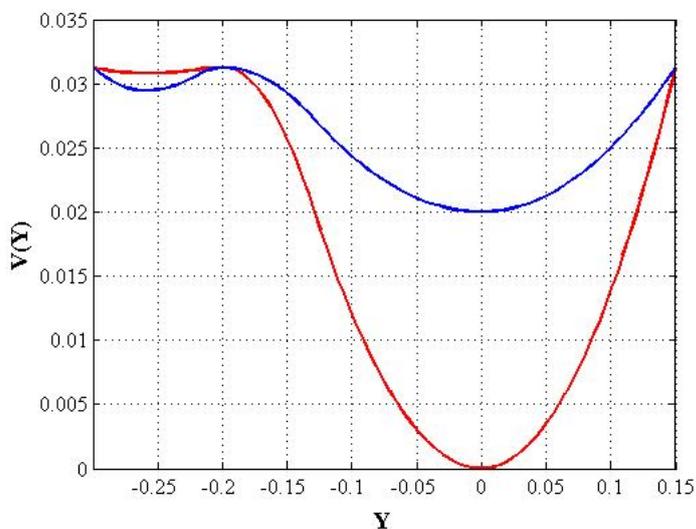
(b)



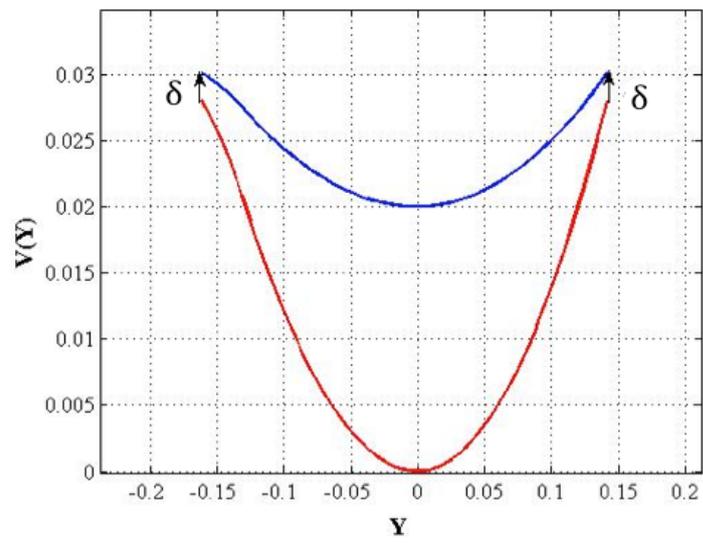
(c)

Figura 2.7 – (a) Erro % da função ψ em função de y inicial para o lóbulo inferior, (b) para o lóbulo superior e (c) região considerada (retângulo em vermelho).

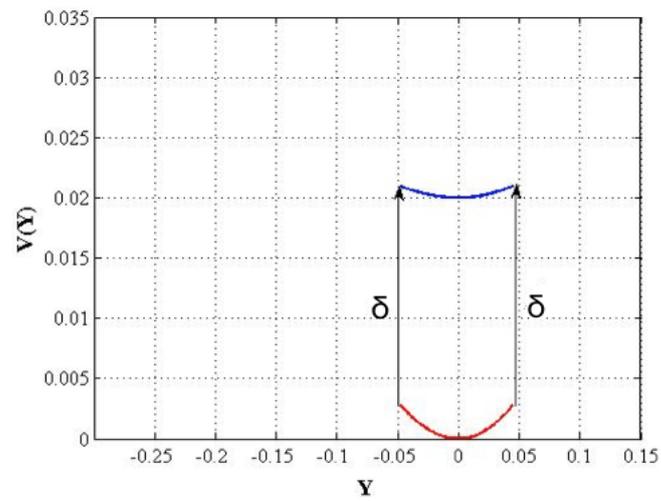
Como podemos notar, o erro, em ambos os lóbulos, apresenta um crescimento acentuado à medida que nos afastamos da separatriz. Isso ocorre porque os valores dos potenciais para x positivo e x negativo são diferentes a partir do ponto onde x muda de sinal. Neste ponto ($x = 0$) a hamiltoniana depende apenas do potencial. A Figura 2.8 ilustra essas diferenças, representada por δ (não confundir com o δ da equação (2.51)) para algumas superfícies.



(a)



(b)



(c)

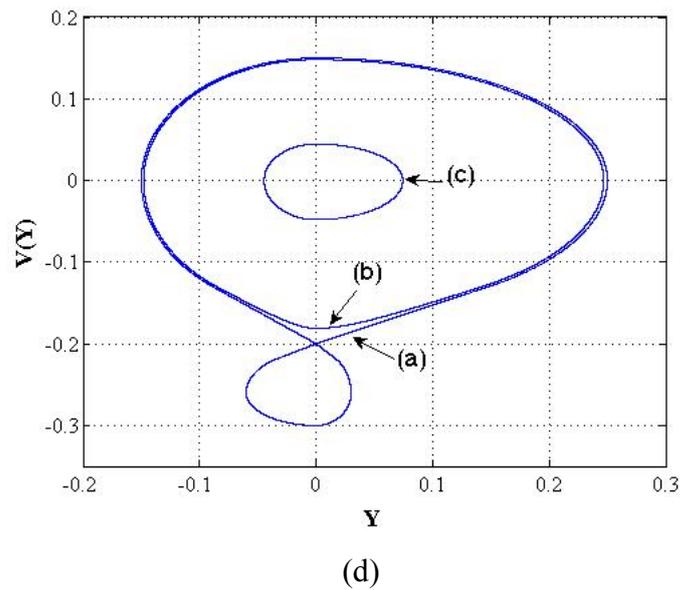
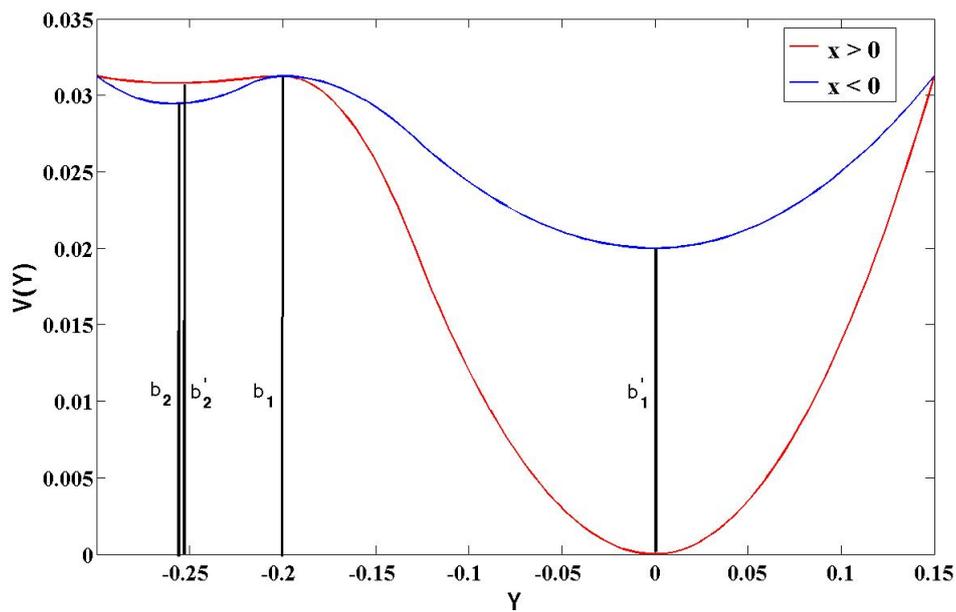
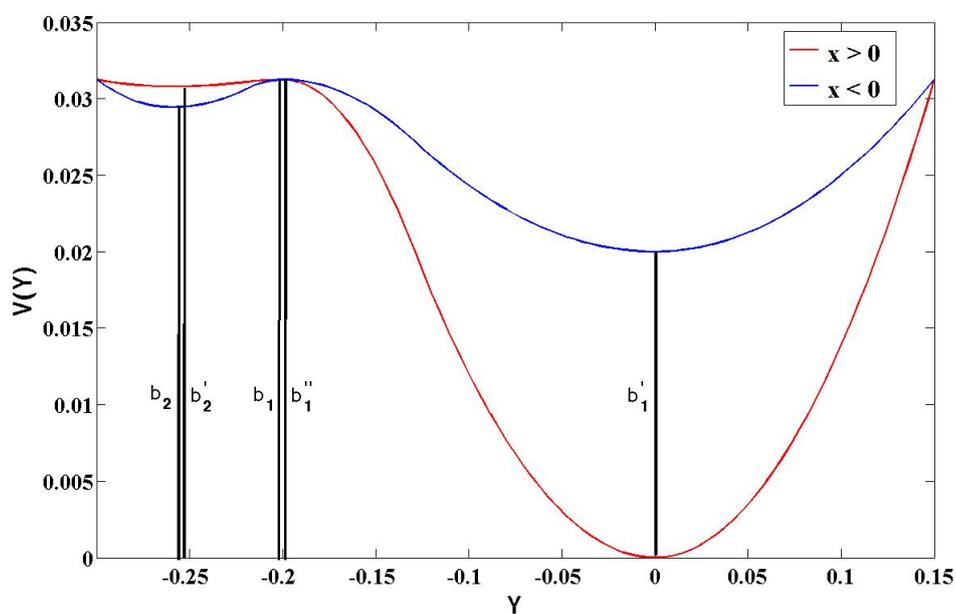


Figura 2.8 – Potenciais traçados (a) na separatriz, (b) e (c) no interior a separatriz no lóbulo superior e (d) representação das superfícies consideradas.

Corrigimos essa variação no valor da hamiltoniana ajustando o potencial associado a $x < 0$ por uma translação vertical das parábolas associadas ao potencial onde $x < 0$ por uma distância da ordem do valor de δ . Isso pode ser realizado tornando os valores dos parâmetros b'_2 e b'_1 variáveis e pela substituição do parâmetro b_1 nas equações do potencial $V(y) = -\frac{1}{2}a'_3(y - y_s)^2 + b_1$ e $V(y) = -\frac{1}{2}a'_4(y - y_s)^2 + b_1$ por um novo parâmetro b'_1 também variável, como ilustrado na Figura 2.9. Assim, para cada superfície teremos valores específicos para estes parâmetros.



(a)



(b)

Figura 2.9 – (a) Potencial com a configuração original (b) potencial com a nova configuração.

Para preservar a topologia das superfícies formadas pelo potencial associado a x negativo, os parâmetros que dependem de b'_2 e b'_1 e b_1 (a'_1 , a'_3 e a'_4) tiveram seus valores mantidos constantes.

As equações para b'_1 , b'_2 e b''_1 tornam-se:

$$b'_1 = \frac{(a_6 - a'_6)(y_{MAX}^2)}{2} \quad (2.118)$$

$$b'_2 = \frac{(a_1 - a'_1)(y_{MIN} - y_0)^2}{2} + b_2 \quad (2.119)$$

$$b''_1 = \frac{a'_4(y_{H2} - y_S)^2}{2} + \frac{a'_5 y_{H2}^2}{2} + b'_1 \quad (2.120)$$

onde y_{MAX} e y_{MIN} estão relacionadas à superfície considerada.

A Figura 2.10 os gráficos após os ajustes realizados.

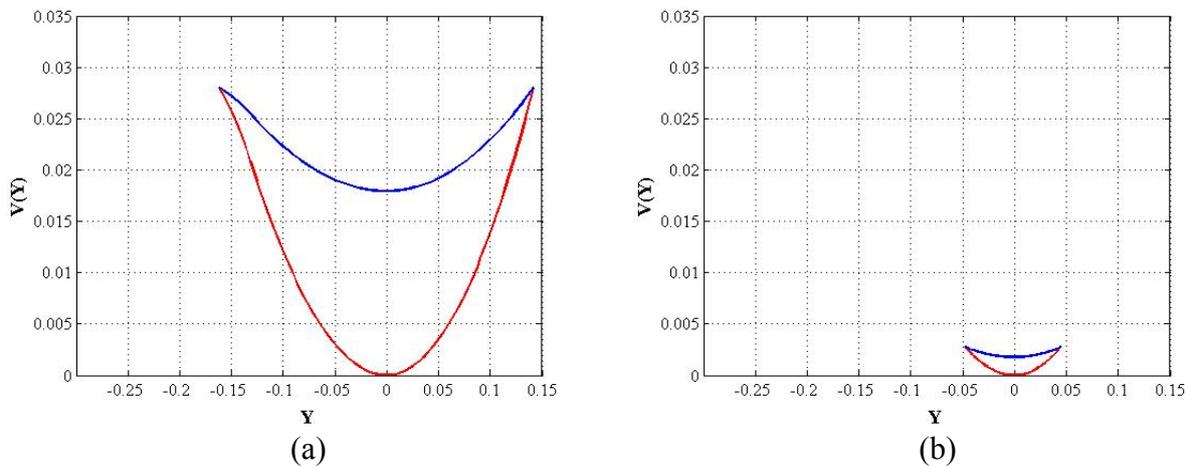


Figura 2.10 - Potenciais para (a) Figura 2.8b e (b) Figura 2.8c ajustados.

Como podemos notar, o valor de δ foi reduzido a zero. Assim o valor da hamiltoniana se mantém constante em cada superfície quando o valor de x tem seu sinal invertido.

2.3 Modelo Para o Fator de Segurança

Como foi mencionando anteriormente, a topologia das superfícies de equilíbrio independe do parâmetro Δ , logo podemos reproduzir qualquer fator de segurança associado a superfície magnética que desejamos modelar através de uma escolha apropriada de $\Delta(\psi)$. Para isso foi utilizada a mesma expressão adotada no modelo no qual este trabalho foi baseado [2], e é dado por

$$\Delta(\psi) = \frac{T(\psi)}{q(\psi)} \quad (2.121)$$

onde $T(\psi)$ é o período rotacional das curvas invariantes e $q(\psi)$ é o fator de segurança da superfície que queremos representar através da curva ψ . Desde que $T(\psi)$ seja uma função conhecida, podemos aplicar qualquer perfil de $q(\psi)$ em (2.121) para representar diferentes configurações de equilíbrio com total liberdade de escolha da topologia. Isto significa que podemos utilizar uma expressão analítica ou mesmo uma tabela para valores discretos de $q(\psi)$. Adotamos aqui o mesmo perfil do fator de segurança utilizado em [2]. Trata-se de um perfil monotônico e com singularidade em $\psi = \psi_S$, onde ψ_S é valor da hamiltonia na separatriz. A expressão para $q(\psi)$ é polinomial para $0 \leq \psi \leq \psi_{95}$, onde $\psi_{95} = 95\% \psi_S$. Para $\psi_{95} \leq \psi \leq \psi_S$ a expressão é logarítmica, ou seja

$$q(\psi) = \begin{cases} q + c_1 \psi + c_2 \psi^2 & \psi < \psi_{95} \\ \alpha \ln(\psi_S - \psi) + \beta & \psi_{95} < \psi \end{cases} \quad (2.122)$$

Para a região externa à separatriz é suposto que o modelo seja simétrico com respeito a $\psi = \psi_S$, ou seja, $\alpha \ln(\psi - \psi_S) + \beta$ para $\psi > \psi_S$.

Foram escolhidos os seguintes parâmetros físicos livres: $q_0 = q(\psi = 0)$, q_{95} , q'_{95} , onde q_{95} é o valor do fator de segurança em ψ_{95} e q'_{95} e sua derivada com respeito a ψ com $\psi = \psi_{95}$. O parâmetro q'_{95} está relacionado com o cisalhamento magnético da superfície pela expressão:

$$\hat{s}_{95} = \frac{r_{95}}{q_{95}} \frac{dq}{dr} \Big|_{r_{95}} \quad (2.123)$$

onde $r_{95} = \sqrt{2\psi_{95}}$ é o raio menor da superfície magnética caracterizada por $\psi_{95} =$ constante. A relação da derivada do fator de segurança e o “shear” magnético é dado por

$$q'_{95} = \frac{q_{95}\hat{s}_{95}}{2\psi_{95}} \quad (2.124)$$

As constantes da equação (2.122) estão relacionadas com os parâmetros físicos livres. Para o lóbulo superior, a obtenção das constantes c_1 e c_2 , segue os seguintes procedimentos:

Tomando a equação da primeira linha (2.122) e sua derivada com respeito a $\psi = \psi_{95}$, temos

$$\begin{cases} q_{95} = q_0 + c_1\psi_{95} + c_2\psi_{95}^2 \\ q'_{95} = c_1 + 2c_2\psi_{95} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} q_{95} = q_0 + c_1\psi_{95} + c_2\psi_{95}^2 & \text{(I)} \\ q'_{95}\psi_{95} = c_1\psi_{95} + 2c_2\psi_{95}^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo II – I

$$\begin{aligned} \psi_{95}q'_{95} - q_{95} &= c_1\psi_{95} + 2c_2\psi_{95}^2 - q_0 - c_1\psi_{95} - c_2\psi_{95}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi_{95}q'_{95} - q_{95} &= c_2\psi_{95}^2 - q_0 \Rightarrow c_2 = \frac{q_0 - q_{95} + q'_{95}\psi_{95}}{\psi_{95}^2} \quad \text{(III)} \end{aligned}$$

Substituindo III em II, obtém-se a constante c_1 .

$$\begin{aligned} \psi_{95}q'_{95} &= c_1\psi_{95} + 2\left(\frac{q_0 - q_{95} + q'_{95}\psi_{95}}{\psi_{95}^2}\right)\psi_{95}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow q'_{95}\psi_{95} &= c_1\psi_{95} + 2(q_0 - q_{95}) + 2q'_{95}\psi_{95} \Rightarrow \\ \Rightarrow c_1\psi_{95} &= -2(q_0 - q_{95}) + q'_{95}\psi_{95} - 2q'_{95}\psi_{95} \Rightarrow \\ c_1 &= \frac{-2(q_0 - q_{95}) - q'_{95}\psi_{95}}{\psi_{95}} \quad \text{ou} \quad c_1 = \frac{2(q_{95} - q_0) - q'_{95}\psi_{95}}{\psi_{95}} \end{aligned}$$

Para obtenção de α e β , os procedimentos seguidos foram:

Tomando a equação da segunda linha da (2.122) e sua derivada com respeito a $\psi = \psi_{95}$, temos

$$\begin{cases} q_{95} = \alpha \ln(\psi_s - \psi_{95}) + \beta \\ q'_{95} = -\frac{\alpha}{\psi_s - \psi_{95}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} q_{95} = \alpha \ln(\psi_s - \psi_{95}) + \beta & \text{(I)} \\ \alpha = q'_{95}(\psi_s - \psi_{95}) & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo II em I

$$q_{95} = q'_{95}(\psi_{95} - \psi_s) \ln(\psi_s - \psi_{95}) + \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = q_{95} - q'_{95}(\psi_{95} - \psi_s) \ln(\psi_s - \psi_{95})$$

Logo

$$\alpha = q'_{95}(\psi_{95} - \psi_s) \quad (2.125)$$

$$\Rightarrow \beta = q_{95} - q'_{95}(\psi_{95} - \psi_s) \ln(\psi_s - \psi_{95}) \quad (2.126)$$

Na Figura 2.11 estão ilustrados os dois perfis de segurança ($\psi < \psi_s$ e $\psi > \psi_s$), ambos com os parâmetros $q_0 = 1.1$, $q_{95} = 3.3$ e $\hat{s}_{95} = 2.67$.

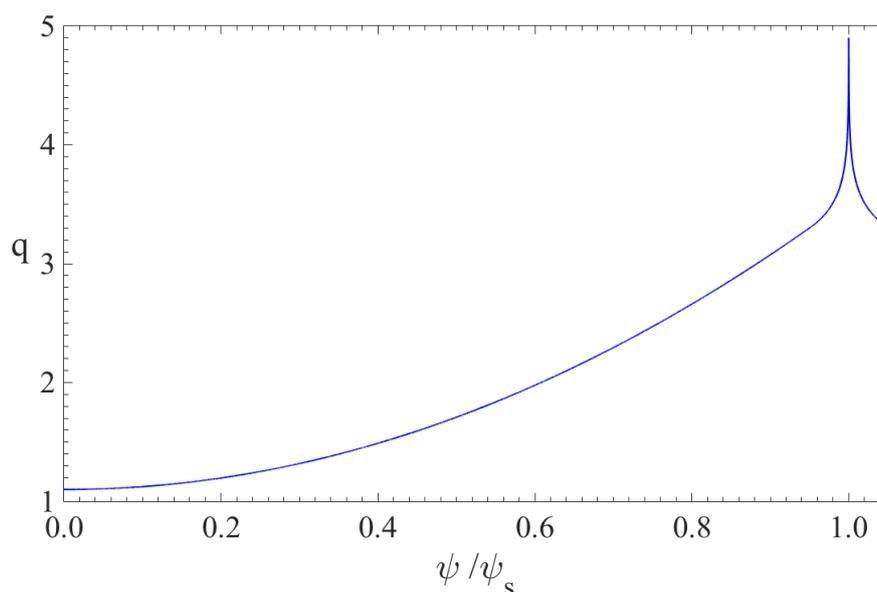


Figura 2.11 – Perfil do fator de sugurança para a região interior $\psi < \psi_s$ e exterior ao plasma $\psi > \psi_s$, com os parâmetros $q_0 = 1.1$, $q_{95} = 3.3$ e $\hat{s}_{95} = 2.67$.

2.4 Cálculo do Período de Rotação

O período de rotação $T(\psi)$ da superfície magnética é a composição dos tempos que a linha de campo leva para percorrer cada região de $V(x,y)$. A Figura 2.12 ilustra as possíveis configurações que as superfícies-magnéticas podem assumir. Como podemos notar há cinco configurações, cada uma marcada com uma cor diferente.

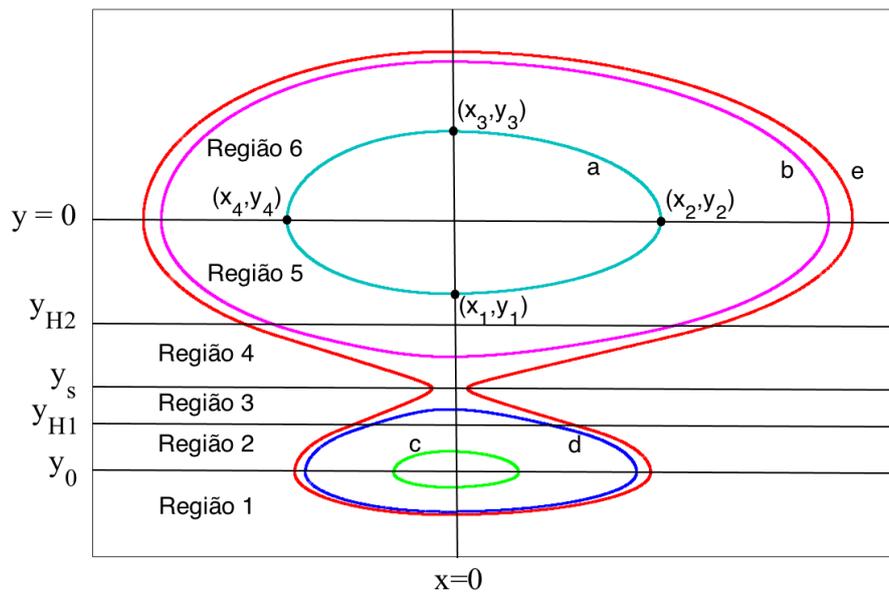


Figura 2.12 – Representação esquemática das possíveis configurações das superfícies magnéticas utilizadas como base para obtenção do período.

Para ilustrar os procedimentos para obtenção dos períodos rotacionais, vamos tomar como exemplo a superfície magnética (a) da Figura 2.12. Como podemos notar, a superfície percorre quatro regiões (região 5 para $x > 0$, região 5 para $x < 0$, região 6 para $x > 0$ e região 6 para $x < 0$), logo é necessário obter quatro intervalos de tempo. Para o primeiro intervalo de tempo t_{12} , tempo gasto para transformar o ponto (x_1, y_1) no ponto (x_2, y_2) , utilizamos as versões contínuas das equações (2.37) e (2.38)

$$x_2 = -y_1 \sqrt{a_5} \sin(\sqrt{a_5} t_{12}) \quad (2.127)$$

$$y_2 = 0 = y_1 \cos(\sqrt{a_5} t_{12}) \quad (2.128)$$

onde $(x_n, y_n) = (x_1, y_1) = (0, y_1)$ e $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_3, y_3) = (x_3, 0)$. Logo, de (2.128) podemos escrever

$$t_{12} = \frac{\pi}{2\sqrt{a_5}} \quad (2.129)$$

Para obtermos o segundo intervalo de tempo t_{23} , tempo gasto para transformar o ponto (x_2, y_2) no ponto (x_3, y_3) , utilizamos as versões contínuas das equações (2.41) e (2.42)

$$x_3 = 0 = x_n \cos(\sqrt{a_6} t_{23}) \quad (2.130)$$

$$y_3 = \frac{x_2}{\sqrt{a_6}} \sin(\sqrt{a_6} t_{23}) \quad (2.131)$$

onde $(x_n, y_n) = (x_2, y_2) = (x_2, 0)$ e $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_3, y_3) = (0, y_3)$. Assim, de (2.130) temos

$$t_{23} = \frac{\pi}{2\sqrt{a_6}} \quad (2.132)$$

No cálculo do tempo t_{34} , tempo gasto para transformar o ponto (x_3, y_3) no ponto (x_4, y_4) , utilizamos as versões contínuas das equações (2.43) e (2.44)

$$x_4 = -\sqrt{a'_6} \sin(\sqrt{a'_6} t_{34}) \quad (2.133)$$

$$y_4 = 0 = y_n \cos(\sqrt{a'_6} t_{34}) \quad (2.134)$$

com $(x_n, y_n) = (x_3, y_3) = (0, y_3)$ e $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_4, y_4) = (x_4, 0)$. Assim, de (2.134) obtemos

$$t_{34} = \frac{\pi}{2\sqrt{a'_6}} \quad (2.135)$$

Por último, obtemos o tempo t_{41} utilizando as versões contínuas das equações (2.39) e (2.40)

$$x_1 = 0 = x_4 \cos(\sqrt{a'_5} t_{34}) \quad (2.136)$$

$$y_1 = \frac{x_4}{\sqrt{a'_5}} \sin(\sqrt{a'_5} t_{34}) \quad (2.137)$$

Tomando $(x_n, y_n) = (x_4, y_4) = (x_4, 0)$ e $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1) = (0, y_1)$. Logo, de (2.136) obtemos

$$t_{41} = \frac{\pi}{2\sqrt{a'_5}} \quad (2.138)$$

O período total para a superfície magnética (a) é a composição dos períodos dados pelas equações (2.129), (2.131), (2.135) e (2.138), como mostrado a seguir

$$T_a = t_{12} + t_{23} + t_{34} + t_{41} = \frac{\pi}{2\sqrt{a_5}} + \frac{\pi}{2\sqrt{a_6}} + \frac{\pi}{2\sqrt{a'_6}} + \frac{\pi}{2\sqrt{a'_5}} \quad (2.139)$$

Os períodos das demais superfícies são dados por:

- Para a superfície (a): $y > y_s$ e $\psi < \frac{1}{2}a_5y_{H2}^2$ para $x > 0$ ou $\psi < \frac{1}{2}a_5y_{H2}^2 + b'_1$ para $x < 0$ (superfície magnética elíptica interna à separatriz)

$$T = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a_5}} + \frac{1}{\sqrt{a'_5}} + \frac{1}{\sqrt{a_6}} + \frac{1}{\sqrt{a'_6}} \right) \quad (2.140)$$

- Para a superfície (b): $y > y_s$ e $\frac{1}{2}a_5y_{H2}^2 < \psi < \psi_s$ para $x > 0$ ou $\frac{1}{2}a_5y_{H2}^2 + b'_1 < \psi < \psi_s$ para $x < 0$ (superfície magnética com contribuição hiperbólica interna à separatriz).

$$\begin{aligned} T = & \frac{\pi}{2\sqrt{a_5}} + \frac{\pi}{2\sqrt{a_6}} + \frac{1}{\sqrt{a_4}} \cosh^{-1} \left(\frac{a_4(y_{H2} - y_s)^2}{2\psi_s - 2\psi} \right)^{1/2} \\ & + \frac{1}{\sqrt{a'_4}} \cosh^{-1} \left(\frac{a'_4(y_{H2} - y_s)^2}{2b'_1 - 2\psi} \right)^{1/2} \\ & + \frac{1}{\sqrt{a_5}} \cos^{-1} \left(\frac{2\psi - a_5y_{H2}^2}{2\psi} \right)^{1/2} \\ & + \frac{1}{\sqrt{a'_5}} \cos^{-1} \left(\frac{2\psi - a'_5y_{H2}^2 - 2b'_1}{2\psi - 2b'_1} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.141)$$

- Para a superfície (c): $y < y_s$ e $\psi < \left[\frac{1}{2}a_2(y_{H1} - y_0)^2 + b_2 \right]$ para $x > 0$ ou $\psi < \left[\frac{1}{2}a'_2(y - y_0)^2 + b'_2 \right]$ para $x < 0$ (superfície magnética elíptica interna à separatriz na região do divisor).

$$T = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a'_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a'_2}} \right) \quad (2.142)$$

- Para a superfície (d): $y < y_S$ e $\left[\frac{1}{2}a_2(y_{H1} - y_0)^2 + b_2 \right] < \psi < \psi_S$ para $x > 0$ ou $\psi < \left[\frac{1}{2}a'_2(y - y_0)^2 + b'_2 \right]$ para $x < 0$ (superfície magnética elíptica interna à separatriz na região do divisor)

$$\begin{aligned}
T = & \frac{\pi}{2\sqrt{a_1}} + \frac{\pi}{2\sqrt{a'_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} \cos^{-1} \left(\frac{2\psi - a_2(y_{H1} - y_0)^2 - 2b_2}{2\psi - 2b_2} \right)^{1/2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{a'_2}} \cos^{-1} \left(\frac{2\psi - a'_2(y_{H1} - y_0)^2 - 2b'_2}{2\psi - 2b'_2} \right)^{1/2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{a_3}} \cosh^{-1} \left(\frac{2\psi_S - a_2(y_{H1} - y_0)^2 - 2b_2}{2\psi_S - 2\psi} \right)^{1/2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{a'_3}} \cosh^{-1} \left(\frac{2b''_1 - a'_2(y_{H1} - y_0)^2 - 2b_2}{2b''_1 - 2\psi} \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{2.143}$$

- Para a superfície (e): $\psi < \psi_S$ (superfície externa à separatriz)

$$\begin{aligned}
T = & \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{2\sqrt{a'_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_6}} + \frac{1}{\sqrt{a'_6}} \right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{a_2}} \cos^{-1} \left(\frac{2\psi - a_2(y_{H1} - y_0)^2 - 2b_2}{2\psi - 2b_2} \right)^{1/2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{a'_2}} \cos^{-1} \left(\frac{2\psi - a'_2(y_{H1} - y_0)^2 - 2b'_2}{2\psi - 2b'_2} \right)^{1/2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{a_3}} \cosh^{-1} \left(\frac{2\psi - 2\psi_s + a_3(y_{H1} - y_0)^2}{2\psi - 2\psi_s} \right)^{1/2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{a'_3}} \cosh^{-1} \left(\frac{2\psi - 2b'_1 + a'_3(y_{H1} - y_s)^2}{2\psi - 2b'_1} \right)^{1/2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{a_4}} \cosh^{-1} \left(\frac{2\psi - 2\psi_s + a_4(y_{H2} - y_0)^2}{2\psi - 2\psi_s} \right)^{1/2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{a'_4}} \cosh^{-1} \left(\frac{2\psi - 2b'_1 + a'_4(y_{H1} - y_s)^2}{2\psi - 2b'_1} \right)^{1/2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{a_5}} \cos^{-1} \left(\frac{2\psi - a_5 y_{H2}^2}{2\psi} \right)^{1/2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{a'_5}} \cos^{-1} \left(\frac{2\psi - a'_5 y_{H2}^2 - 2b'_1}{2\psi - 2b'_1} \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{2.144}$$

No próximo capítulo será introduzida uma perturbação não integrável ao modelo proposto para simular o efeito de um Limitador Magnético Ergódico. Este modelo gera uma região caótica próxima a separatriz passando através do ponto de X, permitindo, assim, o estudo da estrutura das linhas de campo magnético entre o plasma e a parede da câmara.

3 PERTURBAÇÃO RESSONANTE

Neste capítulo, iremos mostrar como o modelo pode ser utilizado para a realização de estudos dos principais aspectos do transporte, tal como comprimento de conexão e “footprints” magnéticos. Para isso simulamos o efeito de uma perturbação magnética ressonante. Essa perturbação é robusta na borda do tokamak e cai exponencialmente ao penetrar no plasma [31]–[33]. O dispositivo gerador da perturbação é constituído de m pares de condutores conduzindo corrente elétrica na direção oposta a corrente do plasma [34], [35]. Essas correntes estão em posições toroidais específicas e ocupam uma fina seção toroidal.

Veremos também que uma das vantagens do modelo de mapas, no qual este trabalho está baseado, é a capacidade de incluirmos diferentes perturbações ressonantes não-integráveis, pois o modelo permite a total separação da parte integrável da não-integrável.

3.1 Perturbação de Martin-Taylor

Utilizamos neste trabalho o modelo de Martin-Taylor [36] para simular o efeito de uma perturbação magnética ressonante. O objetivo do método de Martin-Taylor é simular um tokamak com uma perturbação provocada por um Limitador Magnético Ergódico (Figura 3.1).

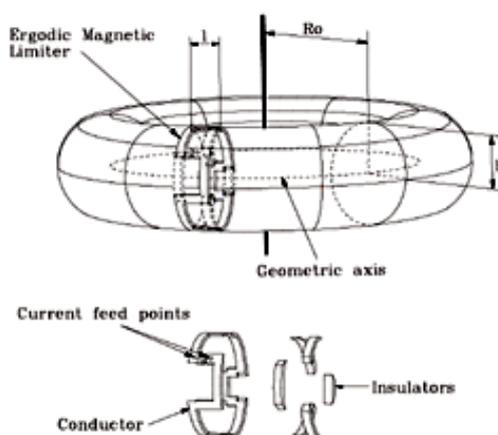


Figura 3.1 – Limitador ergódico (Figura extraída da referência [37]).

A aplicação desse método gera um mapa que é a composição de dois mapas: um integrável representando as linhas de campo de equilíbrio e um não-integrável representando o efeito do limitador ergódico. O mapa perturbado atua sobre uma seção transversal do tokamak, conforme mostrado na Figura 3.2.

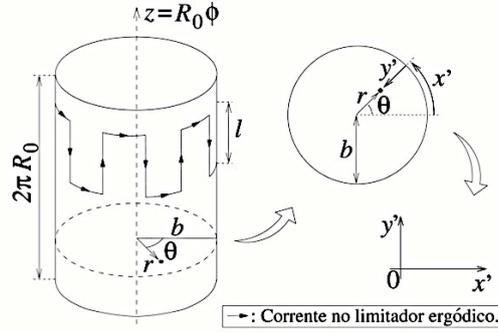


Figura 3.2 – Representação da seção transversal e os sistemas de coordenadas adotados no modelo de Martin-Taylor.

3.1.1 Implementação do método

No modelo de Martin-Taylor, a linha de campo que entra no limitador ergódico no ponto (x_1, y_1) (seção transversal) emerge no ponto (x_2, y_2) e isso é realizado através dos seguintes passos:

As coordenadas (x_1, y_1) que entram no limitador ergódico são transformadas em coordenadas poloidais (r, θ) . Para isso são utilizadas as seguintes expressões:

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (3.1)$$

$$\theta = \text{atang2}(y, x) \quad (3.2)$$

Portanto, x' e y' (Figura 3.2) são obtidos através das expressões:

$$y' = r_c - r \quad (3.3)$$

$$x' = r_c\theta \quad (3.4)$$

onde r_c é o raio menor do tokamak (o qual também corresponde ao raio do limitador).

Após este procedimento aplicamos a perturbação, conforme segue

$$x'' = x' - Ce^{-\frac{my'}{r_c}} \cos\left(\frac{mx'}{r_c}\right) \quad (3.5)$$

$$y'' = y' + \frac{r_c}{m} \log\left\{\cos\left[\frac{mx'}{r_c} - Ce^{-\frac{my'}{r_c}} \cos\left(\frac{mx'}{r_c}\right)\right]\right\} - \frac{r_c}{m} \log\left\{\cos\left(\frac{mx'}{r_c}\right)\right\} \quad (3.6)$$

onde C é a constante de perturbação e m o modo de perturbação.

Por fim, é realizada uma transformação de coordenadas para obtermos as coordenadas cartesianas (x_2, y_2) que saem do limitador ergódico. Estes passos são repetidos sempre que a linha de campo entrar no limitador após uma volta toroidal.

Constatamos que quando a triangularidade é considerada os resultados obtidos, ao aplicarmos a perturbação ao modelo, apresentam comportamentos que assemelham-se a comportamentos dissipativos e de ganhos de energia. No caso de semelhança com perda de energia, as linhas de campo localizadas no interior da separatriz espiralam para dentro em direção aos centros dos lóbulos superior e inferior. No caso de semelhança com ganho de energia, as linhas de campo, localizadas no exterior da separatriz, espiralam para fora. Isso ocorre devido a quebra de simetria em relação ao eixo y , pois passamos a ter dois conjuntos distintos de 6 parábolas e conseqüentemente dois períodos ($T(\psi)$ para $x > 0$ e $T'(\psi)$ para $x < 0$). Logo, como cada superfície magnética é caracterizada por um valor constante q (fator de segurança) e de acordo com a equação (2.121), temos também dois valores para o parâmetro Δ , os quais são dados por

$$\Delta_{x>0}(\psi) = \frac{T(\psi)}{q(\psi)} \quad (3.7)$$

$$\Delta_{x<0}(\psi) = \frac{T'(\psi)}{q(\psi)} \quad (3.8)$$

Assim, as equações do mapa (2.21) - (2.113) devem ser atualizadas para considerar os parâmetros Δ correspondentes.

Devemos considerar também as transições onde a coordenada x tem seu sinal invertido. Um exemplo dessa situação é mostrado na Figura 3.3. Como se tratam de duas

regiões com períodos diferentes, a obtenção de t_2 deve ser função de ambos os períodos, e assim preservar o valor do fator de segurança na transição.

Para o caso em questão, adotamos a seguinte expressão:

$$\frac{\Delta(\psi)}{T(\psi)} = \frac{t_1}{T(\psi)} + \frac{t_2}{T'(\psi)} \Rightarrow t_2 = \frac{(\Delta(\psi) - t_1)(T'(\psi))}{T(\psi)} \quad (3.9)$$

onde t_1 é tempo gasto para a linha de campo ir do ponto A ao ponto B (dado pela equação (2.83)) e t_2 é o tempo gasto para ir do ponto B ao ponto C.

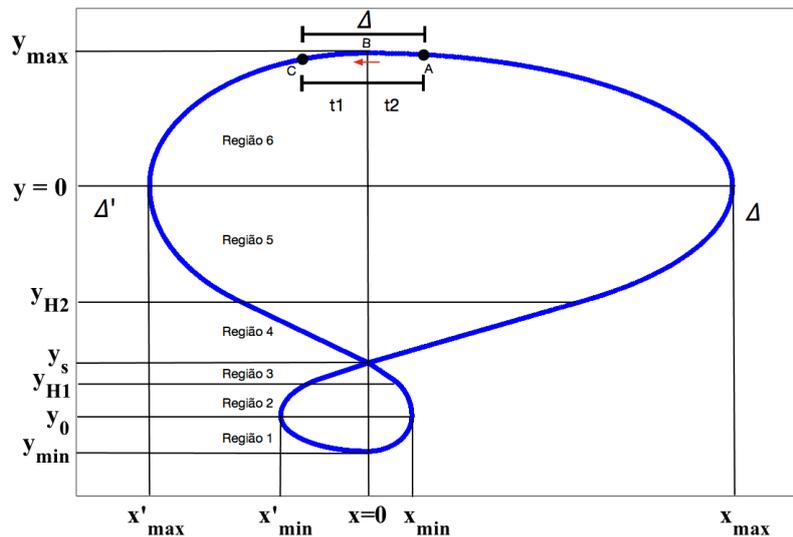


Figura 3.3 – Representação esquemática da transição entre regiões do mapa onde a coordenada x muda de sinal.

Notamos que este procedimento apenas inclui um termo de correção dado por $T'(\psi)/T(\psi)$ nas equações da transição considerada, no caso as equações (2.80) e (2.81). Analogamente obtemos os tempos para as demais transições onde há mudança de sinal da coordenada x .

A seguir temos as equações de transição corrigidas para as regiões onde a coordenada x muda de sinal:

- **Região 1 - $x < 0$ para $x > 0$:**

$$x_{n+1} = -(y_{\text{trans}} - y_0)\sqrt{a_1} \sin\left(\sqrt{a_1}(\Delta_{x<0} - t)\right) \frac{T(\psi)}{T'(\psi)} \quad (3.10)$$

$$y_{n+1} = (y_{\text{trans}} - y_0) \cos\left(\sqrt{a_1}(\Delta_{x<0} - t)\right) \frac{T(\psi)}{T'(\psi)} + y_0 \quad (3.11)$$

- **Região 2 - $x > 0$ para $x < 0$:**

$$x_{n+1} = -(y_{\text{trans}} - y_0) \sqrt{a'_2} \sin\left(\sqrt{a'_2}(\Delta_{x>0} - t)\right) \frac{T'(\psi)}{T(\psi)} \quad (3.12)$$

$$y_{n+1} = (y_{\text{trans}} - y_0) \cos\left(\sqrt{a'_2}(\Delta_{x>0} - t)\right) \frac{T'(\psi)}{T(\psi)} + y_0 \quad (3.13)$$

- **Região 3 - $x > 0$ para $x < 0$:**

$$x_{n+1} = (y_{\text{trans}} - y_s) \sqrt{a'_3} \sinh\left(\sqrt{a'_3}(\Delta_{x>0} - t)\right) \frac{T'(\psi)}{T(\psi)} \quad (3.14)$$

$$y_{n+1} = (y_{\text{trans}} - y_s) \cosh\left(\sqrt{a'_3}(\Delta_{x>0} - t)\right) \frac{T'(\psi)}{T(\psi)} + y_s \quad (3.15)$$

- **Região 4 - $x < 0$ para $x > 0$:**

$$x_{n+1} = (y_{\text{trans}} - y_s) \sqrt{a_4} \sinh\left(\sqrt{a_4}(\Delta_{x<0} - t)\right) \frac{T(\psi)}{T'(\psi)} \quad (3.16)$$

$$y_{n+1} = (y_{\text{trans}} - y_s) \cosh\left(\sqrt{a_4}(\Delta_{x<0} - t)\right) \frac{T(\psi)}{T'(\psi)} + y_s \quad (3.17)$$

- **Região 5 - $x < 0$ para $x < 0$:**

$$x_{n+1} = -y_{\text{trans}} \sqrt{a_5} \sin\left(\sqrt{a_5}(\Delta_{x<0} - t)\right) \frac{T(\psi)}{T'(\psi)} \quad (3.18)$$

$$y_{n+1} = y_{\text{trans}} \cos\left(\sqrt{a_5}(\Delta_{x<0} - t)\right) \frac{T(\psi)}{T'(\psi)} \quad (3.19)$$

- **Região 6 - $x > 0$ para $x < 0$:**

$$x_{n+1} = -y_{\text{trans}} \sqrt{a'_6} \sin\left(\sqrt{a'_6}(\Delta_{x>0} - t)\right) \frac{T'(\psi)}{T(\psi)} \quad (3.20)$$

$$y_{n+1} = y_{\text{trans}} \cos\left(\sqrt{a'_6}(\Delta_{x>0} - t)\right) \frac{T'(\psi)}{T(\psi)} \quad (3.21)$$

Verificamos também que o modelo de perturbação de Martin-Taylor não funciona bem em superfícies com geometrias assimétricas. A solução que propomos foi transformar as coordenadas dos pontos pertencentes a superfície real (ou original) assimétrica em

pontos com coordenadas pertencentes a uma superfície simétrica virtual e nesses pontos aplicamos a perturbação e em seguida retornamos para a superfície original através de uma transformada inversa. Essa transformação apenas se aplica a coordenada x , enquanto y permanece com seu valor original (Figura 3.4).

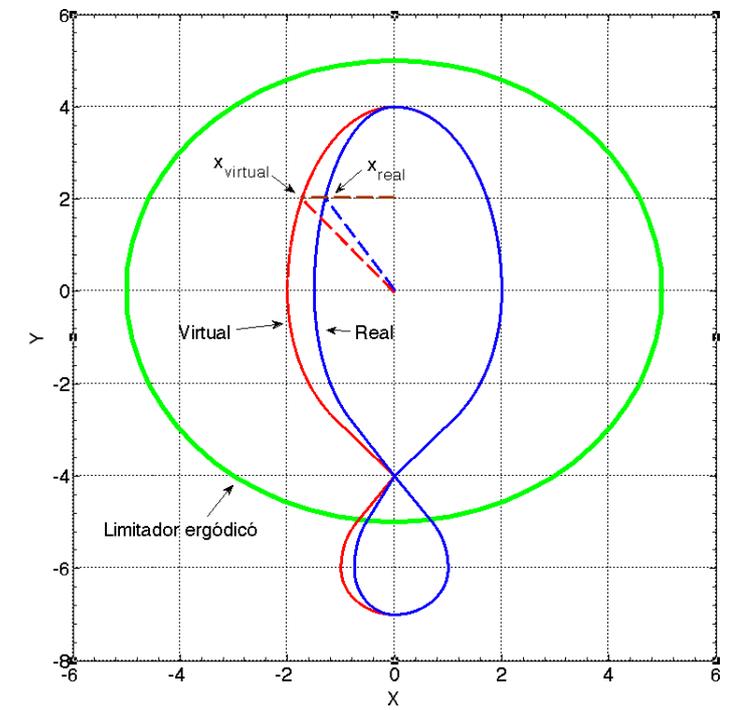


Figura 3.4 – Superfície virtual simétrica (vermelho), superfície assimétrica (azul) e o limitador ergódico (verde).

A transformação da coordenada x real (ou original) é realizada pela equação:

$$x_{\text{virtual}} = \frac{x_{\text{real}}}{x'_{\text{max}}/x_{\text{max}}} \quad (3.22)$$

O processo reverso é dado por:

$$x_{\text{real}} = x_{\text{virtual}} \frac{x'_{\text{max}}}{x_{\text{max}}} \quad (3.23)$$

Esses procedimentos só ocorrem quando a linha de campo entra no limitador, ou seja, quando a linha de campo intercepta a seção transversal da superfície poloidal. A seguir são apresentados alguns resultados obtidos com estes procedimentos. Na Figura 3.5a

apresentamos as superfícies perturbadas sem triangularidade. Ao compararmos esse gráfico com o que possui triangularidade (Figura 3.5b) notamos uma certa semelhança, principalmente no interior do lóbulo superior. Tais semelhanças poderiam nos levar a supor que poderíamos apenas tomar com base o mapa da Figura 3.5a para realizarmos uma transformação de coordenadas para incluir a triangularidade. Funcionaria como um espécie de achatamento de um dos lados (no caso, o lado esquerdo). Mas isso não alteraria o período do mapa original e conseqüentemente teríamos os mesmos comprimentos de conexão e “footprints”, uma vez que estes estão relacionados ao período (abordaremos este assunto mais adiante na próxima seção). O valor do período depende dos parâmetros livres e conseqüentemente da topologia das superfícies.

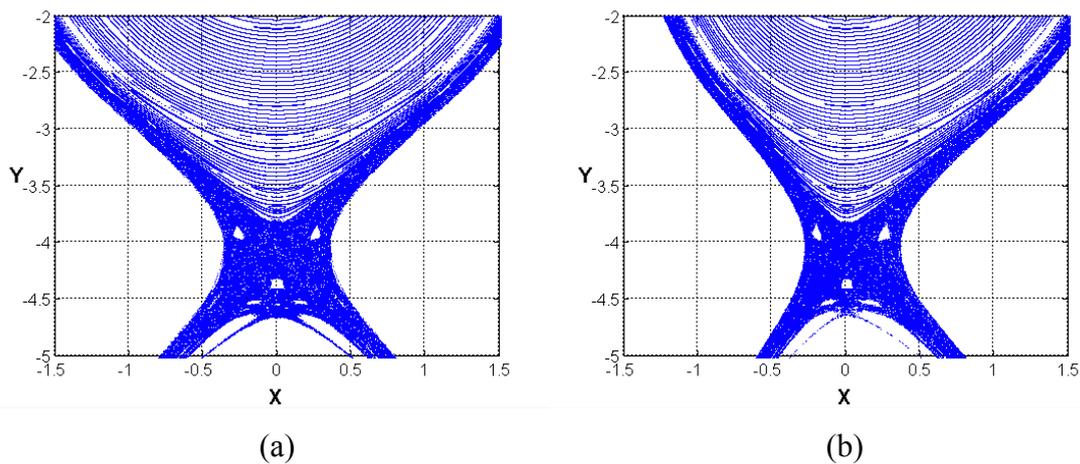


Figura 3.5 - Mapas perturbados com parâmetros (a) $x_{MAX} = 2.00$, $x'_{MAX} = -2.00$, (b) $x_{MAX} = 2.00$, $x'_{MAX} = -1.50$. Os demais parâmetros são $y_S = -4.00$, $x_{MIN} = x_{MAX}/2$, $x'_{MIN} = (x'_{MAX}/x_{MAX}) * x_{MIN}$, $y_{MAX} = 4.00$, $y_{H1} = -5.00$, $y_{H2} = -2.75$, $y_0 = -6.00$ e $y_{MIN} = -7.00$, com os seguintes parâmetros de perturbação: "shear" = 2.67, $m = 3.00$ e $C = 10^2$. Foram consideradas 55 condições iniciais no intervalo $-4 < t < -2$, com 10^6 iterações para cada condição inicial.

Em resumo, para o modelo de 12 parábolas reproduzir adequadamente as superfícies com perturbação, devemos considerar:

1. Os períodos de cada conjunto de potenciais ($T(\psi)$ e $T'(\psi)$), pois devem ser considerados separadamente na obtenção do parâmetro Δ (equações (3.7) e (3.8)).

2. As transições entre regiões onde ocorrem a mudança de sinal da coordenada x , pois o cálculo do tempo de transição deve levar em conta o período de cada região.
3. A topologia assimétrica da superfície, pois esta deve ser simétrica no momento da aplicação da perturbação. A topologia deve ser restaurada a sua forma original com base nas novas coordenadas resultantes da perturbação.

3.2 Comprimentos de Conexão e “Footprints”

Como já foi mencionado, a inclusão de uma perturbação magnética ressonante substitui a separatriz ideal por uma camada caótica. Essa camada caótica é interceptada por placas divisoras. É importante entender o padrão de escape das linhas de campo magnético, pois é necessário evitar um alto aquecimento localizado nessas placas, e é esperado uma certa uniformidade nos padrões de deposição. Estes padrões são denominados de “footprints” e geralmente são caracterizados por serem muito irregulares [38]–[42].

A energia com a qual as partículas atingem as placas divisoras podem ser analisadas através do tempo que a linha de campo magnético leva para atingir a placa divisora. Linhas de campo que levam muito tempo para atingir a placa divisora podem vir próximas ao centro da região do plasma e assim trazer consigo partículas muito energéticas.

Na Figura 3.6 temos uma representação da dinâmica das linhas de campo para o padrão de escape que estamos considerando. Nesta figura temos duas placas divisoras, uma verde e outra vermelha, localizadas na coordenada y_{H1} e em lados opostos em relação ao eixo y . É esperado que as linhas de campo com trajetórias que se iniciam na placa verde eventualmente interceptem a placa vermelha após evoluírem através da camada caótica próxima a separatriz.

O ponto exato x_F onde a linha de campo atinge a placa geralmente ocorre entre iterações (Figura 3.7). No caso, entre as iterações $n = 11$ e $n = 12$. Como x_F se encontra na região 3 para $x < 0$ (Figura 2.2), podemos encontrar ponto (x_F, y_{H1}) utilizando um

procedimento similar ao usado na seção 2.2 para esta região. Logo, de acordo com as equações (2.31) e (2.32), o ponto final é dado por

$$x_F = (y_n - y_s) \sqrt{a'_3} \sinh\left(\sqrt{a'_3} t\right) + x_n \cosh\left(\sqrt{a'_3} t\right) \quad (3.24)$$

$$y_{H1} = (y_n - y_s) \cosh\left(\sqrt{a'_3} t\right) + \frac{x_n}{\sqrt{a'_3}} \sinh\left(\sqrt{a'_3} t\right) + y_s \quad (3.25)$$

onde t é o tempo decorrido entre o ponto (x_n, y_n) e o ponto (x_F, y_{H1}) . Das equações (3.24) e (3.25) encontramos

$$x_F = -\sqrt{x_n^2 - a'_3(y_n - y_s)^2 - a_2(y_{H1} - y_0)^2 + 2(b_1 - b_2)} \quad (3.26)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{a_3}} \cosh^{-1} \left[\frac{x_F x_n - a^3 (y_n - y_s)(y_{H1} - y_s)}{x_n^2 - a^3 (y_n - y_s)^2} \right] \quad (3.27)$$

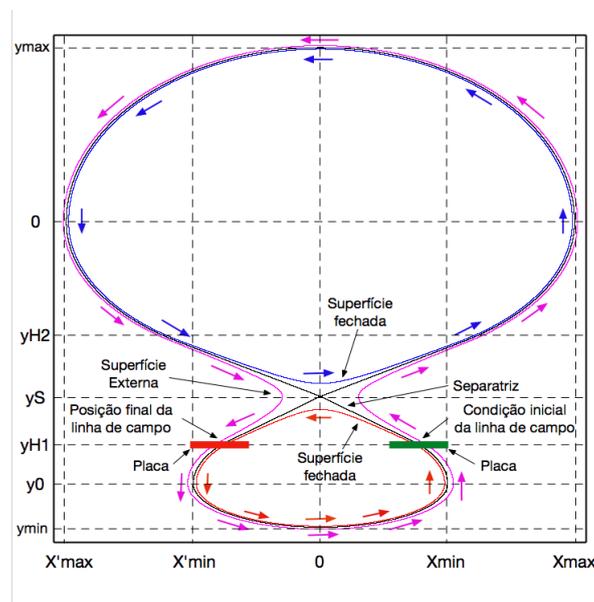


Figura 3.6 – Representação esquemática da dinâmica das linhas de campo para o padrão de escape. Definimos a coordenadas iniciais na placa verde e finais na placa vermelha. As setas representam os sentidos de rotação poloidal das linhas de campo.

O tempo total decorrido até a linha de campo interceptar a placa vermelha é dado por t_F . Ele é obtido somando-se todos os tempos das iterações anteriores com o tempo t (Figura 3.7), uma vez que cada iteração é caracterizada pelo intervalo de tempo δ . O ângulo

toroidal \varnothing_F no qual a linha intercepta a placa diversora está relacionado com o tempo total t_F até que isso ocorra. Logo, podemos escrever as equações para a obtenção dos “footprints” e dos comprimentos de conexão, as quais são dadas, respectivamente, por

$$\varnothing_F = 2\pi \frac{t_F}{\Delta_n} \quad (3.28)$$

$$C_C = N + \frac{t_F}{\Delta_n} \quad (3.29)$$

onde N é número de voltas toroidais completadas até que a linha de campo intercepte a placa vermelha e $\Delta_n \equiv \Delta(\psi(x_n, y_n))$ é o Δ para a superfície corrente, pois a linha de campo pode ter sofrido perturbações ao longo de sua trajetória.

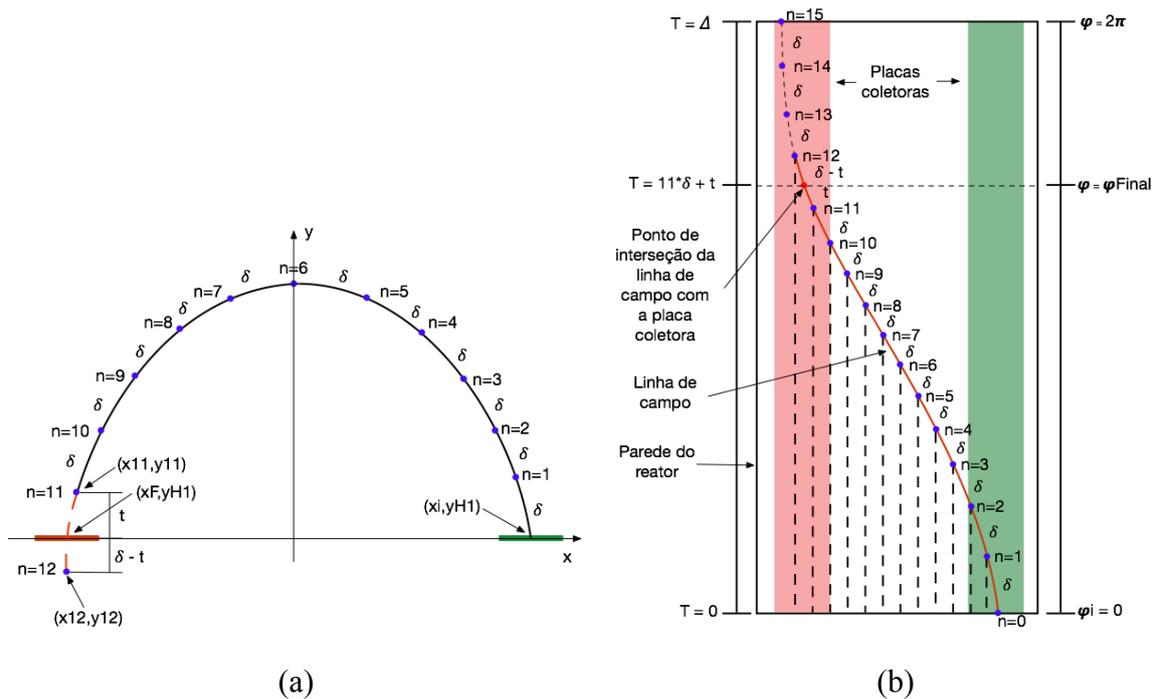


Figura 3.7 – Representação esquemática da trajetória da linha de campo. (a) visão da seção transversal e b) visão superior do reator, o qual, por questão de simplicidade, foi considerado um cilindro periódico.

Os padrões de escape são ilustrados nas figuras 3.8 e 3.9. Os comprimentos de conexão foram obtidos adotando-se $\Delta x_i = x_i - x_{S+}$, onde x_{S+} é o valor da posição horizontal da separatriz e x_i o valor inicial da coordenada horizontal da linha de campo,

ambos localizadas na placa verde (Figura 3.6). Valores positivos de Δx_i implicam em posições externas a separatriz e valores negativos em posições internas a separatriz. Os “footprints” foram obtidos adotando-se $\Delta x_f = x_f - x_{S-}$, onde x_{S-} é o valor da posição horizontal da separatriz e x_f é o valor final da coordenada horizontal da linha de campo, ambos localizadas na placa vermelha (Figura 3.6). Nesse caso, valores positivos de Δx_f implicam em posições internas a separatriz e valores negativos em posições externas a separatriz. Variamos os valores de x_i de forma que os valores de Δx_i ficassem limitados ao intervalo de -5.0×10^{-3} a 5.0×10^{-3} .

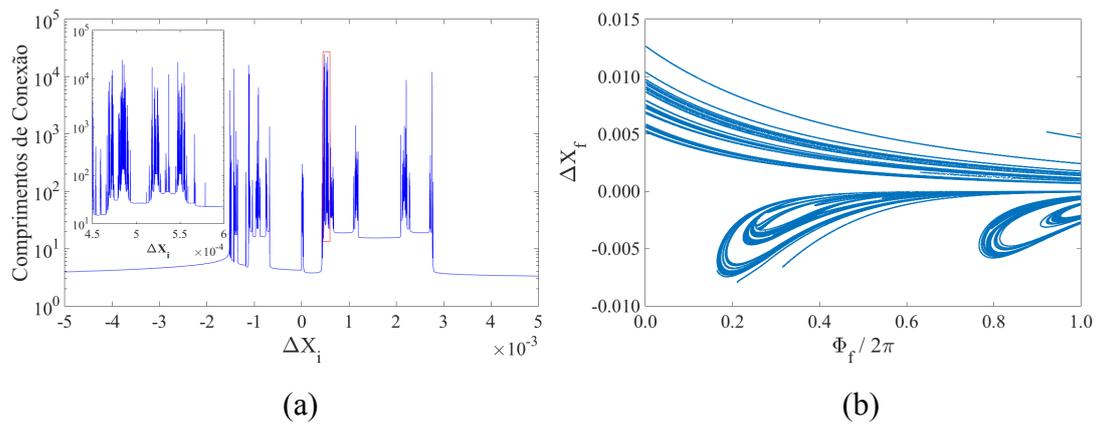


Figura 3.8 – Padrão de escape das linhas de campo nas placas coletoras para o caso mostrado na Figura 3.5a em termos de (a) distribuição de comprimentos de conexão na placa coletora, onde o retângulo indica uma ampliação mostrada no canto da figura, e (b) “footprints” magnéticos das linhas de campo.

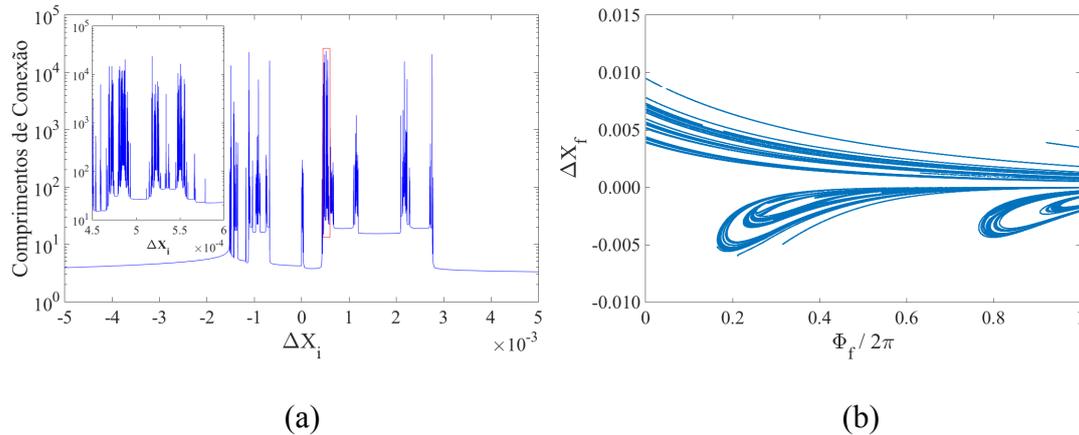


Figura 3.9 – Padrão de escape das linhas de campo nas placas coletoras para o caso mostrado na Figura 3.5b em termos de (a) distribuição de comprimentos de conexão na placa coletora, onde o retângulo indica uma ampliação mostrada no canto da figura, e (b) “footprints” magnéticos das linhas de campo.

3.3 Discussão dos resultados obtidos

A distribuição dos comprimentos de conexão exibidos nas figuras 3.8a e 3.9a apresenta um alto grau de não-uniformidade com um grande número de picos apresentando uma distribuição aparentemente fractal, como pode ser notado nas ampliações que constam nas figuras. Apesar da grande maioria das linhas de campo possuírem comprimentos de conexão que variam em torno de 3 a 100 voltas toroidais, nos picos, o comprimento de conexão pode ultrapassar a 10^4 voltas toroidais. Linhas de campo com elevados comprimentos de conexão podem vir do centro da região caótica, trazendo consigo partículas energéticas com o correspondente aquecimento das placas divisoras. Logo, a análise dos padrões de escape é de fundamental importância, uma vez que a combinação de um grande aquecimento com distribuição irregular conduz a ataques localizados que podem danificar as placas divisoras durante a operação do tokamak. As impressões deixadas pelas linhas na placa do divisor (ou “footprints”) estão ilustradas nas figuras 3.8a e 3.9b, onde podemos notar a aparente distribuição fractal.

Como pode ser observado, apesar da similaridade entre os resultados exibidos nas figuras 3.8 e 3.9, à adoção da triangularidade resulta em um maior comprimento de conexão e uma maior concentração dos “footprints” próximo a separatriz.

4 ADIÇÃO DE RUÍDO SIMULANDO “COLISÕES DE PARTÍCULAS”

O transporte de partículas no interior do plasma também é caracterizado pelas colisões. No capítulo anterior consideramos que as partículas no plasma são guiadas pelas linhas de campo magnético e que essas não sofrem colisões em sua trajetória. Isso pode ser válido em plasmas de baixa densidade, onde o tempo de colisão é maior que o tempo característico médio. No entanto, em plasmas suficientemente densos o efeito colisional deve ser considerado, o qual pode ser realizado adicionando um ruído às linhas de campo magnético [43], [44].

4.1 Adição de ruído para simular colisões de partículas

Para simular os efeitos colisionais em nosso modelo [18][44], [45], incluímos termos aleatórios diretamente nas coordenadas das linhas de campo, na iteração que antecede a entrada dessas no limitador ergódico através das equações

$$x_n = x_n + \rho \cos \theta \quad (4.1)$$

$$y_n = y_n + \rho \sin \theta \quad (4.2)$$

onde ρ é a amplitude colisional e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ é uma fase randômica. A escolha do valor de ρ pode ser feita através da análise do livre caminho médio obtido para o ITER [45] [46].

O efeito colisional nos comprimentos de conexão e nos “footprints” estão ilustrados nas Figuras 4.1, 4.2 e 4.3 onde adotamos uma amplitude colisional $\rho = 1 \times 10^{-4}$. Na Figura 4.4 adotamos uma amplitude $\rho = 1 \times 10^{-3}$.

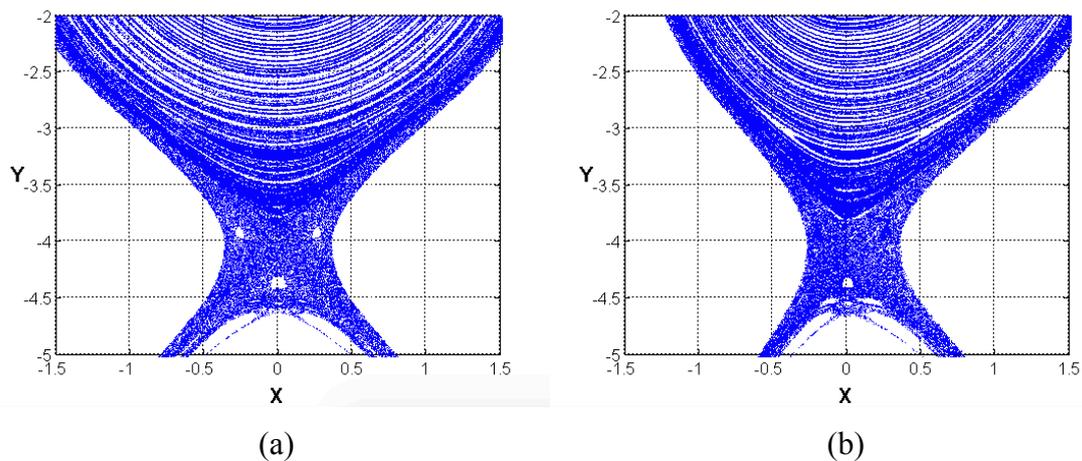


Figura 4.1 -- Mapas perturbados para os mesmos conjuntos de parâmetros da (a) Figura 3.5a e (b) Figura 3.5b. Amplitude colisional igual a 1×10^{-4} .

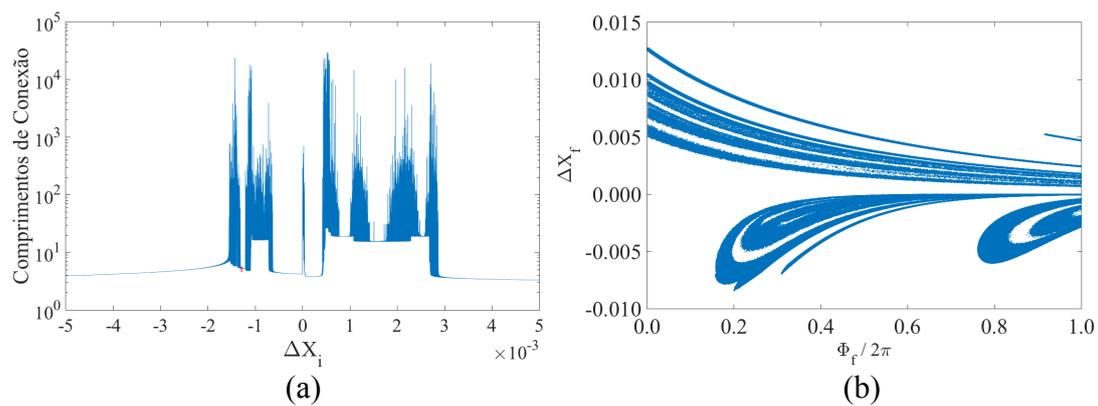


Figura 4.2 – Padrão de escape das linhas de campo nas placas coletoras para o caso mostrado na Figura 3.5a em termos de (a) distribuição de comprimentos de conexão na placa coletora, e (b) “footprints” magnéticos das linhas de campo. Amplitude colisional igual a 1×10^{-4} .

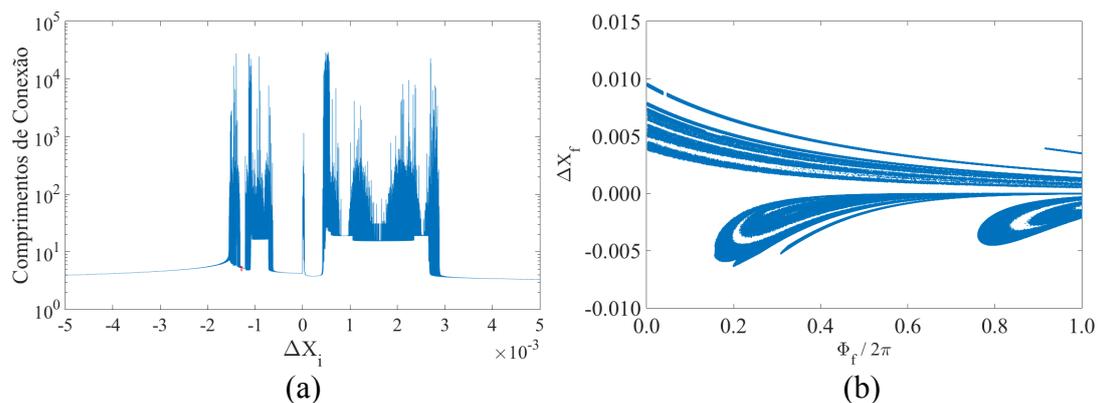


Figura 4.3 – Padrão de escape das linhas de campo nas placas coletoras para o caso mostrado na Figura 3.5b em termos de (a) distribuição de comprimentos de conexão na placa coletora, e (b) “footprints” magnéticos das linhas de campo. Amplitude colisional igual a 1×10^{-4} .

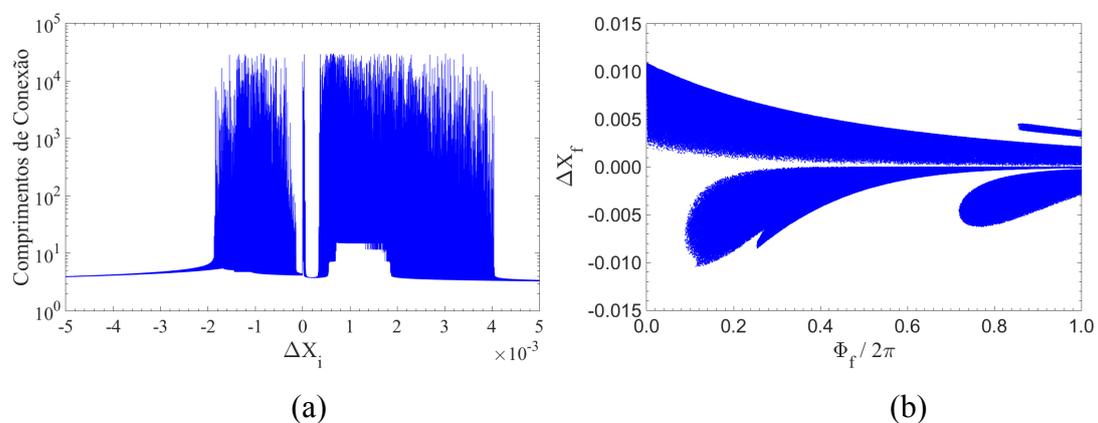


Figura 4.4 – Padrão de escape das linhas de campo nas placas coletoras para o caso mostrado na Figura 3.5b em termos de (a) distribuição de comprimentos de conexão na placa coletora, e (b) “footprints” magnéticos das linhas de campo. Amplitude colisional igual a 1×10^{-3} .

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS

O modelo de mapa integrável desenvolvido neste trabalho apresenta uma grande capacidade de reproduzir a dinâmica das linhas de campos em tokamaks assimétricos com “single-null divertor”.

A inclusão das seis parábolas com base no modelo proposto em [2] elevou consideravelmente a complexidade do modelo e levou a necessidade de ajustes para solucionar alguns problemas. Destacam-se a translação das novas parábolas através de inclusão de novos parâmetros livres para garantir que o sistema permanecesse conservativo com o valor constante da hamiltoniana em todo o percurso na superfície de equilíbrio, e o ajuste referente a geometria assimétrica quando a perturbação é incluída. Como resultado temos um mapa com as vantagens de permanecer integrável, ser simplético e não perturbado, com triangularidade, perfil de fator segurança independente da topologia das superfícies e permitir a inclusão de outros mapas perturbados, para simular diferentes efeitos ressonantes. Ressalta-se que a grande vantagem de mapas obtidos desta forma reside no fato de que é possível separar a parte integrável da não-integrável e desta forma diferentes tipos de perturbações poderão ser incluídas, tais como campos de erro devido a assimetrias nas bobinas que sempre estarão presentes em descargas reais. Portanto, o mapa pode ser utilizado para investigar os padrões de deposição em termos dos diferentes parâmetros de equilíbrio. Os “footprints” revelam a distribuição de pontos de impacto na parede do tokamak os quais estão relacionados com os comprimentos de conexão de uma forma bastante complexa quando a perturbação é introduzida. A impressão que as linhas de campo deixam na parede do tokamak estão relacionadas com os perfis de temperatura na borda, portanto o conhecimento de tais impressões fornece pistas da real distribuição das partículas energéticas na parede do tokamak. Foram também incluídos termos colisionais, simulando o efeito de transporte de partículas sob influência de perturbações ressonantes.

Como perspectiva para trabalhos futuros, sugerimos confrontar os resultados obtidos aqui com os obtidos experimentalmente em tokamaks tais como o ITER e o DIII-

D e com isso verificar sua aplicabilidade ou mesmo verificar a necessidade de aperfeiçor o modelo proposto.

6 REFERÊNCIAS

- [1] P. Abbamonte and P. J. Morrison, “Constructing symplectic maps for application to magnetostatics and Hamiltonian mechanics,” no. June, 1994.
- [2] T. Kroetz, M. Roberto, I. L. Caldas, R. L. Viana, and P. J. Morrison, “Divertor map with freedom of geometry and safety factor profile,” *Plasma Phys. Control. Fusion*, vol. 54, no. 4, p. 45007, Apr. 2012.
- [3] T. Kroetz, M. Roberto, and I. L. Caldas, “Integrable maps with non-trivial topology: application to divertor configurations,” *Nucl. ...*, vol. 50, no. 3, p. 34003, Mar. 2010.
- [4] WEO, “World Energy Outlook,” *Int. Energy Agency*, p. 690 pp., 2014.
- [5] A. Z. Amin, C. Clini, M. Eckhart, S. Gireesh, B. Pradhan, M. Kappiah, H.-J. Koch, E. Kumar, L. Junfeng, B. Lohani, E. M. Galàn, P. Mubiru, K. Nassiep, Z. Ould-Dada, R. Pachauri, W. Palz, M. Radka, M. S. Salvadores, G. Thompson, I. Togola, and P. Tulej, “World Council for Renewable Energy (WCRE).”
- [6] A. J. O. Zimmermann, H. R. Z. Sandim, and A. F. Padilha, “Os novos aços inoxidáveis eurofer utilizados em fusão nuclear,” *Rev. Esc. Minas*, vol. 63, no. 2, pp. 287–292, 2010.
- [7] K. De Souza, O. Filho, and M. De F, “Astronomia e Astrofísica,” 2003.
- [8] Payap and U. C. I. Systems, “Lecture7 – Computer Information Systems.” [Online]. Available: <http://cis.payap.ac.th/?p=3666>. [Accessed: 01-Mar-2017].
- [9] J. P. Freidberg, *Ideal Magnetohydrodynamics*, Plenum Pre. New York, 1987.
- [10] J. WESSON and D. J. Campbell, *TOKAMAKS*, 3rd ed. New York: Clarendon Press, 2004.
- [11] R. Aymar, “Summary of the ITER final design report,” *ITER Doc. G A0 FDR*, 2001.
- [12] H. R. Alahuar, C. Club, D. E. D. E. D. E. D. E. D. E. D. E. G. Golf, G. Golf, I. Benissa, O. N. Oliva, L. A. Sella, and D. O. N. C. Altea, “Untitled Document,” 2003. [Online]. Available: <http://www.cfn.ist.utl.pt/pt/consultorio/listB.html>. [Accessed: 05-Mar-2017].
- [13] S. S. Abdullaev, M. Jakubowski, M. Lehnen, O. Schmitz, and B. Unterberg, “On description of magnetic stochasticity in poloidal divertor tokamaks,” *Phys. Plasmas*, vol. 15, no. 4, 2008.
- [14] T. E. Evans, R. A. Moyer, and P. Monat, “Modeling of stochastic magnetic flux loss from the edge of a poloidally diverted tokamak,” *Phys. Plasmas*, vol. 9, no. 12, pp.

- 4957–4967, 2002.
- [15] S. S. Abdullaev, “Model of a magnetic field in poloidal divertor tokamaks affected by resonant magnetic perturbations,” *Phys. Plasmas*, vol. 16, no. 3, pp. 1–5, 2009.
- [16] T. E. Evans, J. H. Yu, M. W. Jakubowski, O. Schmitz, J. G. Watkins, and R. A. Moyer, “A conceptual model of the magnetic topology and nonlinear dynamics of ELMs,” *J. Nucl. Mater.*, vol. 390–391, no. 1, pp. 789–792, 2009.
- [17] “Separatrix | EUROfusion.” [Online]. Available: <https://www.eurofusion.org/glossary/separatrix/>. [Accessed: 05-Mar-2017].
- [18] J. F. Artaud, V. Basiuk, F. Imbeaux, M. Schneider, J. Garcia, G. Giruzzi, P. Huynh, T. Aniel, F. Albajar, J. M. Ané, A. Bécoulet, C. Bourdelle, A. Casati, L. Colas, J. Decker, R. Dumont, L. G. Eriksson, X. Garbet, R. Guirlet, P. Hertout, G. T. Hoang, W. Houlberg, G. Huysmans, E. Joffrin, S. H. Kim, F. Köchl, J. Lister, X. Litaudon, P. Maget, R. Masset, B. Pégourié, Y. Peysson, P. Thomas, E. Tsitrone, and F. Turco, “The CRONOS suite of codes for integrated tokamak modelling,” *Nucl. Fusion*, vol. 50, no. 4, p. 43001, 2010.
- [19] M. . Jakubowski, S. . Abdullaev, K. . Finken, and the T. Team, “Modelling of the magnetic field structures and first measurements of heat fluxes for TEXTOR-DED operation,” *Nucl. Fusion*, vol. 44, pp. S1–S11, 2004.
- [20] S. S. Abdullaev, K. H. Finken, and K. H. Spatschek, “Asymptotical and mapping methods in study of ergodic divertor magnetic field in a toroidal system,” *Phys. Plasmas*, vol. 6, no. 1, pp. 153–174, 1999.
- [21] S. . S. Abdullaev, K. . H. Finken, M. . W. Jakubowski, S. . V Kasilov, M. Kobayashi, D. Reiser, D. Reiter, a. . M. Runov, and R. Wolf, “Overview of magnetic structure induced by the TEXTOR-DED and the related transport,” *Nucl. Fusion*, vol. 43, pp. 299–313, 2003.
- [22] S. S. Abdullaev, “Mappings of magnetic field lines in poloidal divertor tokamaks,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 691, pp. 275–298, 2006.
- [23] A. Wingen, M. Jakubowski, K. H. Spatschek, S. S. Abdullaev, K. H. Finken, and M. Lehnen, “Traces of stable and unstable manifolds in heat flux patterns,” *Phys. Plasmas*, vol. 14, no. 4, 2007.
- [24] M. W. Jakubowski, O. Schmitz, S. S. Abdullaev, S. Brezinsek, K. H. Finken, A. Kr??mer-Flecken, M. Lehnen, U. Samm, K. H. Spatschek, B. Unterberg, and R. C. Wolf, “Change of the magnetic-field topology by an ergodic divertor and the effect on the plasma structure and transport,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, no. 3, pp. 1–4, 2006.
- [25] M. E. Fenstermacher, T. E. Evans, T. H. Osborne, M. J. Schaffer, M. P. Aldan, J. S. Degraessie, P. Gohil, I. Joseph, R. A. Moyer, P. B. Snyder, R. J. Groebner, M. Jakubowski, A. W. Leonard, and O. Schmitz, “Effect of island overlap on edge

- localized mode suppression by resonant magnetic perturbations in DIII-D,” *Phys. Plasmas*, vol. 15, no. 5, 2008.
- [26] M. W. Jakubowski, M. Lehnen, K. H. Finken, O. Schmitz, S. S. Abdullaev, B. Unterberg, R. C. Wolf, and the T. Team, “Influence of the Dynamic Ergodic Divertor on the heat deposition pattern in TEXTOR at different collisionalities,” *Plasma Phys. Control. Fusion*, vol. 49, pp. S109–S121, 2007.
- [27] I. C. Percival and D. Richards, *Introduction to dynamics*, 2nd ed. Cambridge University Press, 1982.
- [28] T. Kroetz, “Transporte em Sistemas Caóticos Descritos por Mapas com Aplicação em Plasmas de Fusão,” Tese de Doutorado, ITA, São José dos Campos, 2010.
- [29] M. Lehnen, S. S. Abdullaev, S. Brezinsek, K. H. Finken, D. Harting, M. von Hellermann, M. W. Jakubowski, R. Jaspers, A. Kirschner, A. Pospieszczyk, D. Reiter, U. Samm, O. Schmitz, G. Sergienko, B. Unterberg, and R. Wolf, “The effect of the magnetic topology on particle recycling in the ergodic divertor of TEXTOR,” *J. Nucl. Mater.*, vol. 363–365, no. 1–3, pp. 377–381, 2007.
- [30] M. W. Jakubowski, A. Wingen, S. S. Abdullaev, K. H. Finken, M. Lehnen, K. H. Spatschek, and R. C. Wolf, “Observation of the heteroclinic tangles in the heat flux pattern of the ergodic divertor at TEXTOR,” *J. Nucl. Mater.*, vol. 363–365, no. 1–3, pp. 371–376, 2007.
- [31] F. Karger and K. Lackner, “Resonant helical divertor,” *Phys. Lett. A*, vol. 61, no. 6, pp. 385–387, 1977.
- [32] W. Engelhardt and W. Feneberg, “Influence of an ergodic magnetic limiter on the impurity content in a tokamak,” *J. Nucl. Mater.*, vol. 76–77, no. C, pp. 518–520, 1978.
- [33] W. Feneberg and G. H. Wolf, “A helical magnetic limiter for boundary layer control in large tokamaks,” *Nucl. Fusion*, vol. 21, no. 6, pp. 669–676, 1981.
- [34] a Vannucci, I. C. Nascimento, and I. L. Caldas, “Disruptive instabilities in the discharges of the TBR-1 small Tokamak,” *Plasma Phys. Control. Fusion*, vol. 31, no. 2, pp. 147–156, 2000.
- [35] C. J. a Pires, E. a O. Saettone, M. Y. Kucinski, a Vannucci, and R. L. Viana, “Magnetic field structure in the TCABR tokamak due to ergodic limiters with a non-uniform current distribution: theoretical and experimental results,” *Plasma Phys. Control. Fusion*, vol. 47, no. 10, pp. 1609–1632, 2005.
- [36] T. Martin and J. Taylor, “Ergodic behaviour in a magnetic limiter,” *Plasma Phys. Control. Fusion*, vol. 26, no. 1B, pp. 321–340, Jan. 1984.
- [37] E. C. E. da Silva, “Efeitos da Geometria Toroidal na Atuação de Campos Helicoidais Ressonantes em Tokamaks,” Tese de Doutorado, USP, São Paulo.

- [38] R. K. W. Roeder, B. I. Rapoport, and T. E. Evans, “Explicit calculations of homoclinic tangles in tokamaks,” *Phys. Plasmas*, vol. 10, no. 9, pp. 3796–3799, 2003.
- [39] H. Frerichs, O. Schmitz, D. Reiter, T. E. Evans, and Y. Feng, “Striation pattern of target particle and heat fluxes in three dimensional simulations for DIII-D,” *Phys. Plasmas*, vol. 21, no. 2, pp. 1–5, 2014.
- [40] A. Kirk, J. Harrison, Y. Liu, E. Nardon, I. T. Chapman, and P. Denner, “Observation of lobes near the X point in resonant magnetic perturbation experiments on MAST,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, no. 25, 2012.
- [41] T. E. Evans, R. K. W. Roeder, J. a Carter, B. I. Rapoport, M. E. Fenstermacher, and C. J. Lasnier, “Experimental signatures of homoclinic tangles in poloidally diverted tokamaks,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 7, pp. 174–190, 2005.
- [42] a. Wingen, T. E. Evans, and K. H. Spatschek, “High resolution numerical studies of separatrix splitting due to non-axisymmetric perturbation in DIII-D,” *Nucl. Fusion*, vol. 49, p. 55027, 2009.
- [43] A. B. Schelin, I. L. Caldas, R. L. Viana, and S. Benkadda, “Collisional effects in the tokamap,” *Phys. Lett. Sect. A Gen. At. Solid State Phys.*, vol. 376, no. 1, pp. 24–30, 2011.
- [44] P. Beaufume, M. A. Dubois, and M. S. M. Benkadda, “Diffusion in the noisy Chirikov-Taylor mapping,” *Phys. Lett. A*, vol. 147, no. 2–3, pp. 87–91, 1990.
- [45] T. Kroetz, C. G. L. Martins, M. Roberto, and I. L. Caldas, “Set of wires to simulate tokamaks with poloidal divertor,” *J. Plasma Phys.*, vol. 79, no. 5, pp. 751–757, 2013.
- [46] C. G. L. Martins, “TOPOLOGIA DE CAMPOS MAGNÉTICOS EM TOKAMAKS,” Tese de doutorado, ITA, São José dos Campos Paulo, conx, 2013.

APÊNDICE A – ARTIGOS RESULTANTES DESTA TESE

A.1 Shaping Diverted Plasmas With Symplectic Maps

Shaping Diverted Plasmas With Symplectic Maps

Geraldo Roberson, Marisa Roberto, Iberê Luiz Caldas, Tiago Kroetz, and Ricardo Luiz Viana

Abstract—We construct an area preserving and integrable map to represent magnetic surfaces with triangularity in single-null divertor tokamaks. The magnetic surfaces obtained by the map can assume different asymmetric geometries and the position of X-point, through the choices of values for some free parameters. The safety factor profile is independent of the geometric parameters and can also be chosen arbitrarily. We combine the divertor integrable map with a nonintegrable map that simulates the effect of external magnetostatic perturbations. The application of this methodology permits to obtain the escape patterns of magnetic field lines on the divertor plates.

Index Terms—Divertor, escape, plasma shape.

I. INTRODUCTION

IN tokamak plasmas, the magnetic field lines wind around isobaric toroidal surfaces called magnetic surfaces [1]. The shape of cross section of these magnetic surfaces plays an important role on plasma stability and confinement in fusion reactors [2]. Moreover, divertor tokamaks present an ideal separatrix with one or two X-points, which separate the closed from the open surfaces, define the plasma border, and divert the particles which escape from the plasma to the divertor plates [3]. External and internal resonances between plasma and perturbation magnetic fields replace the ideal separatrix by a stochastic layer of chaotic magnetic field lines, which are guided to the collector plates [4], [5]. The escaping ions recombine at the plates forming a neutral gas, which can be pumped away from the reactor interior. The divertor of ITER is designed to withstand a heat load of 5–10 MW/m² coming from alpha particles resulting from fusion reactions taking place in the plasma core [6]. The equilibrium description of these surfaces uses large codes based on numerical solutions of Grad–Shafranov equation [7], [8]. This methodology, although necessary for the careful design of the divertor plates, is too time-consuming for studying basic phenomena related to the field line dynamics near the separatrix.

A discrete mapping of magnetic field lines is obtained from the iteration of recurrence equations that provide the

intersections of magnetic field lines with a plane defined by considering a constant toroidal angle. The main advantage of symplectic maps is to represent hamiltonian systems, which require small computer time to obtain a large number of intersection points, and is particularly useful in numerical studies of transport and escape in the tokamak edge region [9], [10].

Accordingly, a sizeable number of previous investigations have used discrete maps to investigate phenomenological aspects of field lines and pattern deposition in divertor configurations. Some of these maps were obtained directly from the magnetic field equations [11]–[14] from a procedure of generalized Poincaré integrals described in [15]. Other divertor maps were obtained from a mathematical construction of appropriate generating functions and canonical transformations [16]–[19]. Unfortunately, the discretization procedure used in these maps inserts a nonphysical perturbation, which is proportional to the discretization parameter. Recently, Punjabi and coworkers have developed divertor maps with the same topology of DIII-D surfaces by fitting experimental data of discharges in order to find appropriate expressions for the equilibrium Hamiltonian [20]–[24].

However, in the above procedures to obtain discrete mappings for diverted tokamaks, there are limitations on the plasma shape, which makes some of the previous mappings too particularly related to given geometries. In order to overcome these limitations, we obtained in this paper integrable and symplectic maps, which can represent equilibrium magnetic surfaces in a single null divertor tokamak, such that the geometry of the separatrix (and consequently the internal and external surfaces) can be tailored by free parameters that give magnetic surfaces with triangularity. The safety factor associated to the surfaces can also be chosen independently of the geometry configuration adopted. The mappings have been obtained from the trajectory integration method originally introduced to describe single-null diverted tokamaks [25], [26].

This paper is organized as follows. In Section II, we outline the basics of the method used for obtaining the field line map. Section III presents an application of the divertor map so obtained with a magnetic perturbation caused by a resonant magnetic perturbation (RMP), as well as in our numerical results. Section IV presents the conclusions.

II. DIVERTOR FIELD LINE MAPPING

A. Trajectory Integration Method

The trajectory integration method of discrete map construction was initially applied to obtain a single-null divertor maps, but with a little freedom of equilibrium configuration choices [25], [26]. The improvement on the methodology presented in this paper is to consider a modification that

Manuscript received October 15, 2016; revised December 13, 2016; accepted December 27, 2016. Date of publication February 16, 2017; date of current version March 8, 2017. This work was supported in part by the São Paulo Research Foundation (FAPESP), Brazil, under Grant 2015/16471-8 and Grant 2011/19296-1, in part by CNPq, Brazil, under Grant 446905/2014-3, and in part by CAPES, Brazil.

G. Roberson and M. Roberto are with the Departamento de Física, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos 12228-900, Brazil (e-mail: ger_rca@yahoo.com.br; marisar@ita.br).

I. L. Caldas is with the Instituto de Física, University of São Paulo, São Paulo 05315-970, Brazil (e-mail: ibere@if.usp.br).

T. Kroetz is with the Departamento de Física, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco 85503-390, Brazil (e-mail: kroetz@utfpr.edu.br).

R. L. Viana is with the Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba 81531-990, Brazil (e-mail: viana@fisica.ufpr.br).

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TPS.2017.2649882

allows the construction of asymmetric integrable surfaces with a given shape. As a consequence, the map we are to obtain can represent magnetic surfaces of a plasma column with triangularity.

Basically, the procedure to obtain the map can be summarized as follows. The first step is a choice of an adequate expression $V(x, y)$ in a field-line Hamiltonian

$$\Psi(x, y) = \frac{x^2}{2} + V(x, y) \quad (1)$$

with maxima and minima located in appropriate values of x and y . These positions correspond to the elliptic and hyperbolic fixed points in the phase space for the magnetic surface shape we want to describe. The Hamiltonian (1) is integrable and $V(x, y)$ must allow analytical solutions for the Hamilton equations

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}. \quad (2)$$

From the latter, an auxiliary expression can be used to generate closed surfaces with the topology desired for the magnetic surfaces represented by the map. In order to obtain asymmetric surfaces in the x -direction, the expression $V(x, y)$ must present a dependence on both spatial variables. A simple way to fulfill the requirement of analytical solutions for the Hamilton equations is to suppose a piecewise dependence for $V(x, y)$ on the x -variable. Proceeding this way, we are able to find the continuous solutions $[x(x_i, y_i, t); y(x_i, y_i, t)]$, where x_i and y_i are the initial conditions for solutions, and to discretize these continuous solutions by making the transformation $[x(x_i, y_i, t); y(x_i, y_i, t)] \rightarrow [x_{n+1}(x_n, y_n, \Delta); y_{n+1}(x_n, y_n, \Delta)]$, in such a way that the resulting equations compose the discrete map equations. The parameter Δ is related to the rotation rate of points on the surface of section, given by the safety factor of the corresponding magnetic surface. Since the surface topology and the fixed points are independent of Δ , we can reproduce any desirable safety factor profile by imposing an appropriate dependence $\Delta(\Psi)$ independently of the chosen geometry.

B. Equilibrium Model

1) *Geometry*: We need a double-well shaped $V(x, y)$, with different depths for positive and negative values of x , in order to create curves in phase space that exhibits two closed regions delimited by a separatrix between them, as single null magnetic surfaces. The expression for $V(x, y)$ with the desired properties will be written as two sets of six parabolas smoothly joint in the connection points, so as to ensure the integrability of the Hamilton equations. The first set represents the region of plasma at the inner side of the tokamak chamber, by considering the negative values of x . The second set of parabolas represents the region of plasma at the outer side of the tokamak chamber, and corresponds to positive the x -values. The continuous solutions for Hamilton equations in each region will be oscillatory in t for positive concavity of $V(x, y)$ with respect to y , and hyperbolic for regions of negative concavity relatively to the y -variable. The large number of

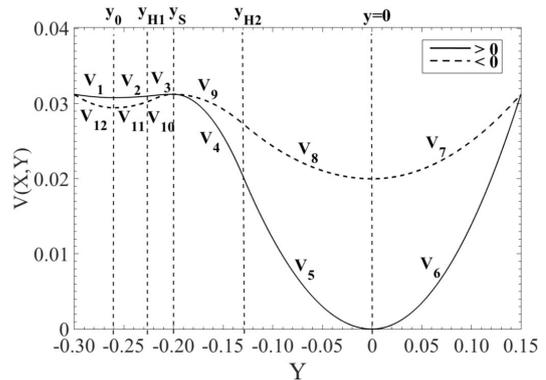


Fig. 1. Function $V(x, y)$ used by the method. Solid dotted line: positive (negative) values of x . Six parabolic branches compose each curve.

pieces so obtained offers a number of free parameters capable to adjust the geometry of the surfaces with a high flexibility.

The expressions for $V(x, y)$ in each one of the regions are given by

$$\begin{aligned} & [a_1(y - y_0)^2]/2 + b_2, \quad y \leq y_0 \quad \text{and} \quad x > 0 \\ & [a'_1(y - y_0)^2]/2 + b'_2, \quad y \leq y_0 \quad \text{and} \quad x < 0 \\ & [a_2(y - y_0)^2]/2 + b_2, \quad y_0 \leq y \leq y_{H1} \quad \text{and} \quad x > 0 \\ & [a'_2(y - y_0)^2]/2 + b'_2, \quad y_0 \leq y \leq y_{H1} \quad \text{and} \quad x < 0 \\ & -[a_3(y - y_s)^2]/2 + b_1, \quad y_{H1} \leq y \leq y_s \quad \text{and} \quad x > 0 \\ & -[a'_3(y - y_s)^2]/2 + b'_1, \quad y_{H1} \leq y \leq y_s \quad \text{and} \quad x < 0 \\ & -[a_4(y - y_s)^2]/2 + b_1, \quad y_s \leq y \leq y_{H2} \quad \text{and} \quad x > 0 \\ & -[a'_4(y - y_s)^2]/2 + b'_1, \quad y_s \leq y \leq y_{H2} \quad \text{and} \quad x < 0 \\ & a_5 y^2/2, \quad y_{H2} \leq y \leq 0 \quad \text{and} \quad x > 0 \\ & a'_5 y^2/2 + b'_1, \quad y_{H2} \leq y \leq 0 \quad \text{and} \quad x < 0 \\ & a_6 y^2/2, \quad 0 \leq y \quad \text{and} \quad x > 0 \\ & a'_6 y^2/2 + b'_1, \quad 0 \leq y \quad \text{and} \quad x < 0. \end{aligned} \quad (3)$$

We show in Fig. 1 the curve of $V(x, y)$ for a set of geometric parameters values. The figure also shows the connection points y_0 , y_{H1} , y_s , and y_{H2} delimiting the regions of $V(x, y)$.

The continuous trajectories can be obtained by solving (2) in each parabolic region. The internal plasma surfaces will correspond to the solutions for $y > y_s$ and $\Psi < b_1$ while the private flux surfaces will correspond to the solutions for $\Psi < b_1$ and $y < y_s$. The external surfaces present $\Psi > b_1$. After applying the discretization procedure, we obtain the map equations described on the Appendix.

For our objectives, we intend to relate the parameters in the above expressions with geometric parameters that describe the separatrix formed in phase space for the solutions of Hamilton equations. The geometric parameters possible to be fitted are: x_{MAX} , x'_{MAX} , x_{MIN} , x'_{MIN} , y_{MAX} , y_{MIN} , y_0 , y_{H1} , y_{H2} , and y_s . The meaning of each one of these parameters can be observed in Fig. 2.

The relations between the geometric parameters of separatrix and the parameters in (3) defining $V(x, y)$ can be found by keeping in mind the continuity requirement of $V(x, y)$ and its

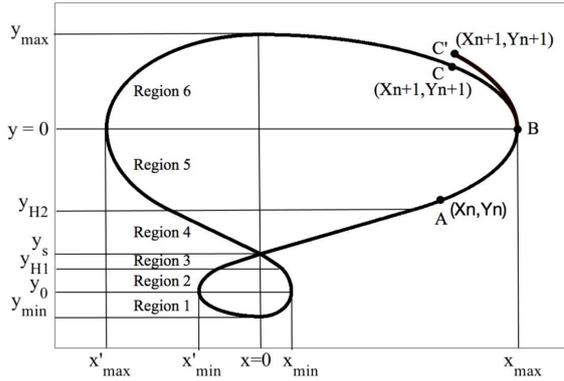


Fig. 2. Schematic of the separatrix revealing the regions, where the function $V(x, y)$ is described by different parabolas and the geometric interpretation of parameters x_{MAX} , x'_{MAX} , x_{MIN} , x'_{MIN} , y_{MAX} , y_{MIN} , y_0 , y_{H1} , y_{H2} , and y_S .

first derivative. The relations obtained through this procedure are

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{x_{MAX}^2}{2}, & b_2 &= b_1 - \frac{x_{MIN}^2}{2} \\
 b'_1 &= b_1 - \frac{x'^2_{MAX}}{2}, & b'_2 &= b_1 - \frac{x'^2_{MIN}}{2} \\
 a_1 &= \frac{x_{MIN}^2}{(y_{MIN} - y_0)^2}, & a'_1 &= a_1 + \frac{2(b_2 - b'_2)}{(y_{MIN} - y_0)^2} \\
 a_2 &= \frac{x_{MIN}^2}{(y_{H1} - y_0)(y_S - y_0)}, & a'_2 &= -a'_3 \frac{y_{H1} - y_S}{(y_{H1} - y_0)} \\
 a_3 &= \frac{-x_{MIN}^2}{[(y_{H1} - y_0)(y_{H1} - y_S) - (y_{H1} - y_S)^2]} \\
 a'_3 &= \frac{2(b'_2 - b_1)}{[(y_{H1} - y_S)(y_{H1} - y_0) - (y_{H1} - y_S)^2]} \\
 a_4 &= \frac{x_{MAX}^2}{(y_{H1} - y_0)^2 - y_{H2}(y_{H2} - y_S)} \\
 a'_4 &= \frac{2(b_1 - b'_1)}{y_S^2 - y_S y_{H2}}, & a_5 &= \frac{x_{MAX}^2}{y_{H2} y_S} \\
 a'_5 &= -a'_4 \frac{y_{H2} - y_S}{y_{H2}}, & a_6 &= \frac{x_{MAX}^2}{y_{MAX}^2}, & a'_6 &= a_6 - \frac{2b'_1}{y_{MAX}^2}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

The map equations are obtained from the discretization of continuous solutions for each considered region, but these equations are not able to map a point from a specific region indicated in (3) to another. As an example, we cannot use the discretized solutions of Hamilton equations to map (x_n, y_n) into (x_{n+1}, y_{n+1}) if $y_n < 0 < y_{n+1}$. This situation is shown in Fig. 2. The map equations we used in this case must change to the correspondent value of $V(x, y)$ in the correct region at the exact point of transition from one region to another. To do this change, we need the value $x_{y=0}$ of the corresponding connection point and the fraction of the discrete parameter Δ necessary to go from (x_n, y_n) to $(x_{y=0}, y = 0)$. In the example shown in Fig. 2, the transition occurs from regions 5 to 6. After computing $x_{y=0}$ and the fraction of Δ , we can use the map equations corresponding to region 6. There results a

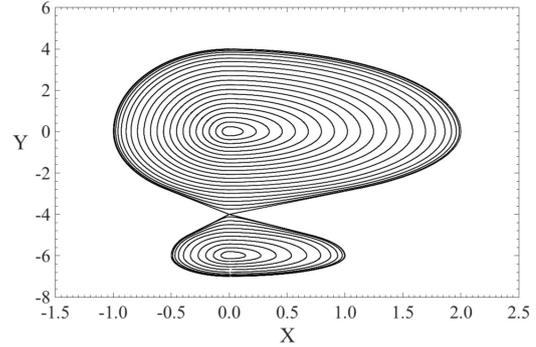


Fig. 3. Poincaré map for geometric parameters $x_{MAX} = 2$, $x'_{MAX} = -1.0$, $x_{MIN} = 1$, $x'_{MIN} = -0.5$, $y_{MAX} = 4$, $y_{MIN} = -7$, $y_{H1} = -5$, $y_{H2} = -2.75$, $y_S = -4 e$, and $y_0 = -6$.

connection map, which is used to accomplish the transition between regions 5 and 6. The complete expression of $V(x, y)$ presents 12 connection points. Therefore, the complete integrable map will be composed of 24 parts.

Some of the invariant surfaces traced with the map are shown in Fig. 3 for geometric parameters described in the caption. All the geometric parameters are in meters. We choose these in order to obtain asymmetric integrable surfaces with a large triangularity. As the topology does not depends on Δ values, we fix $\Delta = 1$ for all surfaces.

2) *Safety Factor Profile*: The continuous solution for the Hamiltonian expressed in (1) presents the same invariant curves in phase space of the magnetic surfaces we want to map. When we substitute the continuous time t by a discrete parameter Δ with a dependence on Ψ , the resulting map presents winding numbers (inverse of safety factor) typically different from the original continuous system and can be arbitrarily set by choosing a dependence $\Delta(\Psi)$ without affecting the chosen topology.

However, the winding number of the original continuous system must be known in order to change to the desirable safety factor profile. If we adopt $\Delta = 1$ for all values of Ψ , the map will present a safety factor profile identical to the period of rotation associated with the continuous system. We must use a Δ value equal to

$$\Delta = \frac{T(\Psi)}{q(\Psi)} \tag{5}$$

to change the original rotation of a surface Ψ , where $T(\Psi)$ is the rotation period of invariant surfaces $\Psi = const.$ associated with continuous system and $q(\Psi)$ is the safety factor of magnetic surface we intend to represent by the invariant curve $\Psi = const.$. The function $T(\Psi)$ can be found by obtaining the “time” spent (measured in the number of map iterations) by the continuous trajectory in each region. After determining Δ , we find the analytical expression for the rotation period associated with the surfaces. There will be different expressions for each Ψ interval.

Since the function $T(\Psi)$ is known, we apply any safety factor profile $q(\Psi)$ in (5) and represent different equilibrium configurations with total freedom of choice the plasma shape.

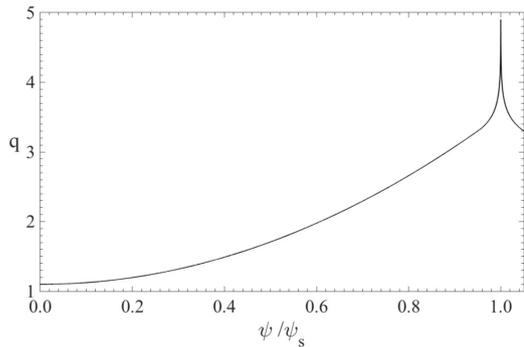


Fig. 4. Safety factor profile model for the plasma region surfaces $\Psi/\Psi_S < 1$ and external surfaces to the separatrix $\Psi/\Psi_S > 1$. We use the parameters $q(0) = 1.1$, $q_{95} = 3.3$, and $\hat{s}_{95} = 2.67$.

If we do not have an analytical expression for the safety factor profile, it turns out that even a table of discrete values of $q(\Psi)$ can be applied to this relation. For simplicity, we choose a monotonic profile for the safety factor with singularity at $\Psi = \Psi_S$. The expression of $q(\Psi)$ with these features can be algebraic until Ψ_{95} and logarithmic between Ψ_{95} and Ψ_S

$$q(\Psi) = \begin{cases} q_0 + c_1\Psi + c_2\Psi^2, & \Psi \leq \Psi_{95} \\ \alpha \ln(\Psi_S - \Psi) + \beta, & \Psi > \Psi_{95}. \end{cases} \quad (6)$$

We opted to choose the following free parameters: $q_0 = q(\Psi = 0)$, q_{95} , and q'_{95} , where we define q'_{95} as the derivative of safety factor profile with respect to Ψ taken at $\Psi = \Psi_{95}$, and q_{95} is the safety factor value at Ψ_{95} .

The magnetic shear of the surface $\Psi_{95} = \text{const.}$ is defined in terms of the local derivative of q as follows:

$$\hat{s}_{95} = \frac{r_{95}}{q_{95}} \left. \frac{dq}{dr} \right|_{r_{95}} \quad (7)$$

where r_{95} is the minor radius of the $\Psi_{95} = \text{const.}$ curve at midplane, which is given by $r_{95} = \sqrt{2\Psi_{95}}$. On applying the chain rule, we relate the shear \hat{s}_{95} with the derivative q'_{95} by

$$q'_{95} = \frac{q_{95}\hat{s}_{95}}{2\Psi_{95}}. \quad (8)$$

The constants on (6) can be related with the free parameters by smoothness condition of $q(\Psi)$ at Ψ_{95}

$$c_1 = \frac{2(q_{95} - q_0) - q'_{95}\Psi_{95}}{\Psi_{95}} \quad (9)$$

$$c_2 = \frac{q_0 - q_{95} + q'_{95}\Psi_{95}}{\Psi_{95}^2} \quad (10)$$

$$\alpha = q'_{95}(\Psi_{95} - \Psi_S) \quad (11)$$

$$\beta = q_{95} - q'_{95}(\Psi_{95} - \Psi_S) \ln(\Psi_S - \Psi_{95}). \quad (12)$$

The model for the external region surface ($\Psi > \Psi_S$) was considered reflected at $\Psi = \Psi_S$. In Fig. 4, we depicted two safety factor profiles, both using $q_0 = 1.1$ and $q_{95} = 3.3$, with shear parameter value at Ψ_{95} . We considered $\hat{s}_{95} = 2.67$.

III. NUMERICAL APPLICATION

We simulate the effect of an RMP in order to show how the divertor map can be used to study the field line dynamics of the stochastic layer. An arrangement of external currents to the plasma creates a perturbing magnetic field that is stronger in the vicinity of tokamak wall and decays exponentially as it penetrates into the tokamak plasma [27]–[29]. One design for the RMP consists of m pairs of conductors carrying electric currents in the opposite toroidal directions [30], [31]. These currents are located at a specific toroidal position and occupy a thin toroidal section.

The impulsive character of the resonant perturbation allows us to compose a map by the integrable divertor map followed by a perturbative map. The integrable divertor map application represents a toroidal turn of a magnetic field line through the tokamak until the RMP position. The next application of a perturbative map represents the mapping of a field line just before the RMP region to after this region. The model proposed by Martin and Taylor [32] consists of a perturbed map written in the coordinates (ρ, α) related to the poloidal coordinates (r, θ) through $\rho = r_c - r$ and $\alpha = r_c\theta$, where r_c is the minor radius of the tokamak chamber. A field line entering the RMP at (ρ_1, α_1) emerges from it at (ρ_2, α_2) , where

$$\alpha_2 = \alpha_1 - C e^{-m\rho_1/r_c} \cos\left(\frac{m\alpha_1}{r_c}\right) \quad (13)$$

$$\rho_2 = \rho_1 + \frac{r_c}{m} \ln \left\{ \cos\left[\frac{m\alpha_1}{r_c}\right] - C \frac{m}{r_c} e^{-m\rho_1/r_c} \cos\left(\frac{m\alpha_1}{r_c}\right) \right\} - \frac{r_c}{m} \ln \left[\cos\left(\frac{m\alpha_1}{r_c}\right) \right]. \quad (14)$$

The constant C in (14) stands for the perturbation amplitude and is related to the physical parameters by $C = \mu_0 g m I_h / \pi r_c B_0$, where μ_0 is the permeability of free space, I_h is the current flowing on the limiter segments, and B_0 is the equilibrium toroidal field. In our simulations, we fix $C = 10^{-2}$, $r_c = 5$, and $m = 3$ and use parameters from the safety factor profiles equilibrium shown in Fig. 4. By applying the maps, we calculate $(x_n, y_n) \rightarrow (x^*, y^*)$ through the integrable divertor map M_D followed by the application of the perturbing map M_P , which gives $(x^*, y^*) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1})$. It requires a change of Δ value each time the field line emerges from the limiter region, since after the impulsive perturbation, the field lines jump to another magnetic surface $\Psi(x_{n+1}, y_{n+1})$, which has a different safety factor. So, we must apply (5) to select a correct Δ parameter so as to map the field line to the next toroidal turn.

A. Plasma Surface of Section

The phase portrait shown in Fig. 5 was obtained by considering 55 initial conditions along the line $x = 0$ in the interval $y = [-4, -2]$, each one considered during 10^6 iterations. As we expected, although all the initial conditions are taken in the plasma region, some chaotic magnetic field lines close to border occupy a region external to the ideal separatrix. The ideal separatrix was replaced by a stochastic layer, which fills a phase space area depending on the intensity of perturbation.

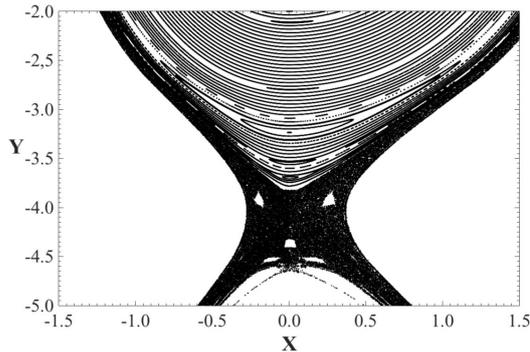


Fig. 5. Poincaré map for perturbation parameters $C = 10^{-2}$ and $m = 3$ for the equilibrium $\xi_{95} = 2.67$. The geometric parameters are the same of Fig. 3.

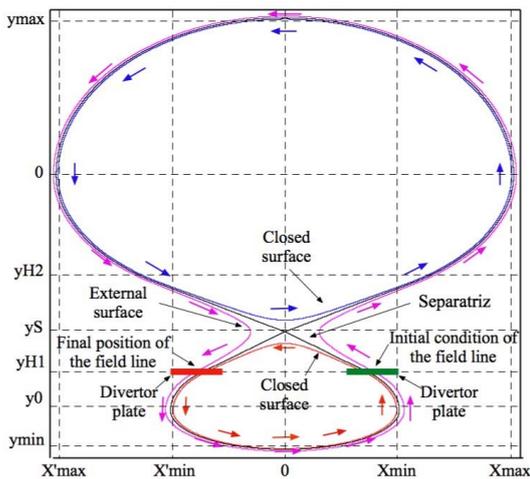


Fig. 6. Schematic of the dynamics exhibited by the map in different regions. To obtain the escape pattern, we consider initial conditions at x_{MIN} and y_{H1} and the escape is defined at the position x_{MIN} and y_{H1} .

The position $y = -5$ is where we imagine to be located a collector plate reached by the escaping magnetic field lines.

B. Perturbed Escape Pattern

Since the divertor plates intercept the chaotic region, which replaced the separatrix in the presence of the RMP, it is important to understand the perturbed escape pattern toward the divertor plates. In particular, since we want to avoid highly localized thermal loads, it is necessary to see if the deposition pattern at the divertor plates is more or less uniform. These deposition patterns are called magnetic footprints and are usually characterized by very irregular stripped patterns [33]–[37]. Moreover, field lines that take a long time (measured in the number of map iteration) to hit the divertor plates may come from the core of the chaotic region, thus bringing energetic particles to the divertor plates.

In Fig. 6, we show schematically the type of escape we are dealing with. There are two divertor plates, a green one and a red one at y_{H1} , symmetrically located with respect to the

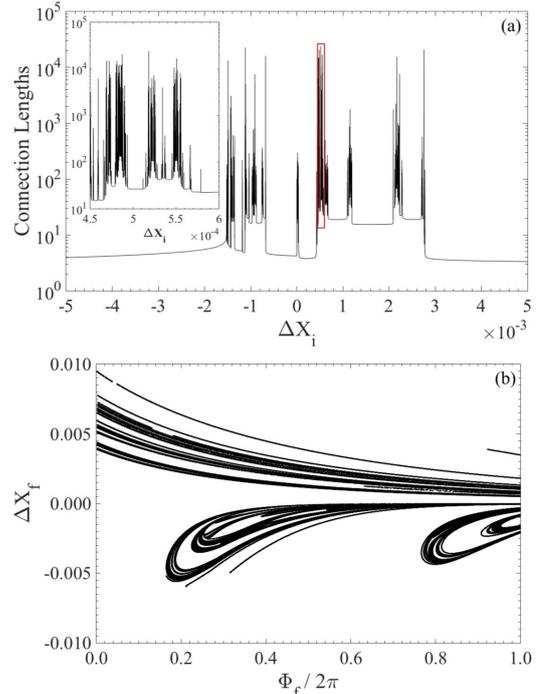


Fig. 7. Escape pattern of magnetic field lines on the collector plate for the case shown in Fig. 5 in terms of (a) connection lengths distribution at the collector plate, where the rectangle indicates an enlargement shown at the corner of the figure, and (b) footprint of magnetic field lines.

x-point, at the points x_{min} and x'_{min} . An initial condition placed on the green plate is expected to evolve through a chaotic orbit originated in the vicinity of the separatrix and it eventually reaches the red plate.

The number of toroidal turns necessary for the field line to reach the divertor plates is called the connection length, which is given by

$$C_L = N + \frac{t_F}{\Delta_N} \quad (15)$$

where N is an integer number of toroidal turns before we stop the iteration to locate the exact hitting point and $\Delta_N = \Delta(\Psi(x_n, y_n))$, which corresponds to Δ parameter for the considered surface, since the trajectories can have perturbations along its trajectory. Note that the magnetic field lines start trajectories in coordinates (x_i, y_{H1}, Φ_i) near nonperturbed separatrix (green plate in Fig.6) and end trajectories at coordinates (x_F, y_{H1}, Φ_F) (red plate in Fig.6). The position x_F , the exact final position of the field line can be calculated using the continuous version of map equations to then calculate the “time” t_F . Thus, the field line takes this “time” until it reaches the plate at the final toroidal angle Φ_F , which is given by

$$\Phi_F = 2\pi \frac{t_F}{\Delta_n}. \quad (16)$$

The distribution of connection lengths on the collector (red) plate as a function of the initial position (on the green divertor plate) is shown in Fig. 7(a). This distribution is

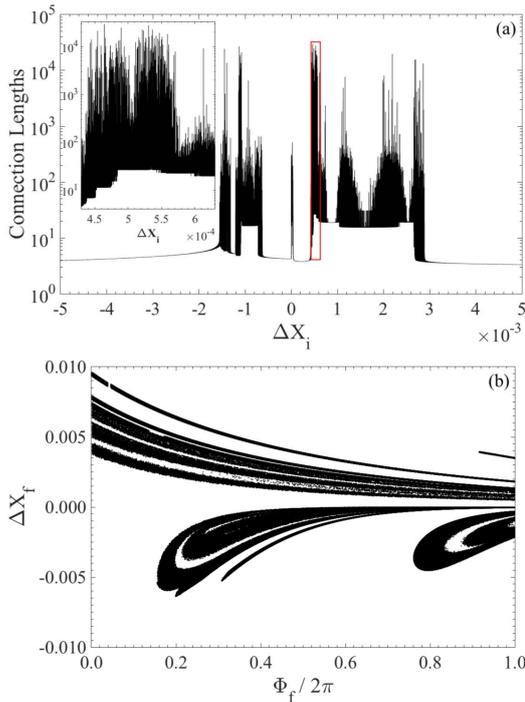


Fig. 8. Same of Fig. 7 considering the collision effect. The collisional amplitude is 1×10^{-4} .

highly nonuniform, presenting a large number of sharp peaks with an apparently fractal distribution (the effect can be best appreciated by the magnification shown in the inset). Moreover, although most of the escaping field lines have small connection lengths (between 3 and 100 toroidal turns), in the sharp peaks, we can have field lines with connection lengths higher than 10^4 . This is particularly important, since the latter are expected to carry energetic particles from the plasma core and the corresponding heat loadings are higher on the divertor plates. The combination of large heat loading with irregular distribution leads to localized attacks that may damage the divertor plates during the operation of the tokamak. The magnetic footprints related to this situation are shown in Fig. 7(b), where we can see the apparent fractal distribution of the loadings.

In the above description, we consider that the plasma particles follow the magnetic field lines, which is a lowest-order approximation, since the various drifts are neglected. If the collision time is larger than the mean characteristic time, it is also possible to neglect the effect of particle collisions. However, if the plasma is dense enough, we have to take into account the collisional effect, which can be done by adding a noisy term in the divertor field line mapping [38], [39].

The effect of collisions in the connection length distribution and in the magnetic footprints is shown in Fig. 8(a) and (b), respectively. We choose a collisional amplitude a value of 1×10^{-4} , which is roughly related to nonuniform temperature profile in ITER [40], [41]. We observe that the chief effect

of the collisions is that the particles suffer a dispersion proportional to the noise level and thus the magnetic footprints become blurry thanks to it. Moreover, the distribution of the connection lengths, although continue to be highly uniform, does not exhibit the fractality (or self-similarity) present in the noiseless case.

IV. CONCLUSION

We present in this paper, an integrable map capable to reproduce magnetic field lines dynamics in asymmetric single-null divertor tokamaks. The advantages of the map are: ensure the symplectic and nonperturbed character of equilibrium configuration with triangularity and safety factor profile with great freedom, independence of geometry and safety factor profile, and the possibility of composition with other perturbed map, which can simulate the effects of different resonances. The field line strike position between consecutive iterations can be naturally obtained by using the continuous version of map equations. This map can be used to investigate the dependence of stability and deposition patterns in terms of different equilibrium parameters.

APPENDIX

DIVERTOR MAP EQUATIONS

The equation of asymmetric divertor map for each region is as follows.

- 1) For $y_n < y_0$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -(y_n - y_0)\sqrt{a} \sin(\sqrt{a}\Delta) + x_n \cos(\sqrt{a}\Delta) \\ y_{n+1} &= (y_n - y_0) \cos(\sqrt{a}\Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{a}\Delta) + y_0 \end{aligned}$$

where $a = a_1$ for $x > 0$ and $a = a'_1$ for $x < 0$.

- 2) For $y_0 < y_n < y_{H1}$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -(y_n - y_0)\sqrt{a} \sin(\sqrt{a}\Delta) + x_n \cos(\sqrt{a}\Delta) \\ y_{n+1} &= (y_n - y_0) \cos(\sqrt{a}\Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{a}\Delta) + y_0 \end{aligned}$$

where $a = a_2$ for $x > 0$ and $a = a'_2$ for $x < 0$.

- 3) For $y_{H1} < y_n < y_S$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (y_n - y_S)\sqrt{a} \sinh(\sqrt{a}\Delta) + x_n \cosh(\sqrt{a}\Delta) \\ y_{n+1} &= (y_n - y_S) \cosh(\sqrt{a}\Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a}} \sinh(\sqrt{a}\Delta) + y_S \end{aligned}$$

where $a = a_3$ for $x > 0$ and $a = a'_3$ for $x < 0$.

- 4) For $y_S < y_n < y_{H2}$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (y_n - y_S)\sqrt{a} \sinh(\sqrt{a}\Delta) + x_n \cosh(\sqrt{a}\Delta) \\ y_{n+1} &= (y_n - y_S) \cosh(\sqrt{a}\Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a}} \sinh(\sqrt{a}\Delta) + y_S \end{aligned}$$

where $a = a_4$ for $x > 0$ and $a = a'_4$ for $x < 0$.

- 5) For $y_{H2} < y_n < 0$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -y_n \sqrt{a} \sin(\sqrt{a}\Delta) + x_n \cos(\sqrt{a}\Delta) \\ y_{n+1} &= y_n \cos(\sqrt{a}\Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{a}\Delta) \end{aligned}$$

where $a = a_5$ for $x > 0$ and $a = a'_5$ for $x < 0$.

6) For $y_n > 0$

$$x_{n+1} = -y_n \sqrt{a} \sin(\sqrt{a} \Delta) + x_n \cos(\sqrt{a} \Delta)$$

$$y_{n+1} = y_n \cos(\sqrt{a} \Delta) + \frac{x_n}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{a} \Delta)$$

where $a = a_6$ for $x > 0$ and $a = a'_6$ for $x < 0$.

REFERENCES

- [1] A. H. Boozer, "Physics of magnetically confined plasmas," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 76, p. 1071, Jan. 2005.
- [2] S. Y. Medvedev *et al.*, "The negative triangularity tokamak: Stability limits and prospects as a fusion energy system," *Nucl. Fusion*, vol. 55, p. 063013, May 2015.
- [3] J. G. Cordey, R. J. Goldston, and R. R. Parker, "Progress toward a tokamak fusion reactor," *Phys. Today*, vol. 45, pp. 1–22, Jan. 1992.
- [4] I. Joseph *et al.*, "Calculation of stochastic thermal transport due to resonant magnetic perturbations in DIII-D," *Nucl. Fusion*, vol. 48, p. 045009, Mar. 2008.
- [5] T. Eich, A. Herrmann, and J. Neuhauser, "Nonaxisymmetric energy deposition pattern on ASDEX upgrade divertor target plates during type-I edge-localized modes," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 195003, Nov. 2003.
- [6] *Final Report of the ITER Engineering Design Activities*, ITER EDA document 21, IAEA, Vienna, Austria, Aug. 2001.
- [7] T. A. Casper, W. H. Meyer, L. D. Pearlstein, and A. Portone, "ITER shape controller and transport simulations," *Fusion Eng. Design*, vol. 83, pp. 552–556, Apr. 2008.
- [8] M. Brix *et al.*, "Accuracy of EFIT equilibrium reconstruction with internal diagnostic information at JET," *Rev. Sci. Instrum.*, vol. 78, p. 10F325, May 2008.
- [9] E. C. da Silva, I. L. Caldas, and R. L. Viana, "Field line diffusion and loss in a tokamak with an ergodic magnetic limiter," *Phys. Plasmas*, vol. 6, pp. 2855–2865, Mar. 2001.
- [10] E. C. da Silva, I. L. Caldas, and R. L. Viana, "The structure of chaotic magnetic field lines in a tokamak with external nonsymmetric magnetic perturbations," *IEEE Trans. Plasma Sci.*, vol. 29, no. 4, pp. 617–631, Aug. 2001.
- [11] S. S. Abdullaev *et al.*, "Overview of magnetic structure induced by the TEXTOR-DED and the related transport," *Nucl. Fusion*, vol. 43, no. 5, p. 299, Apr. 2003.
- [12] S. S. Abdullaev, K. H. Finken, M. Jakubowski, and M. S. Lehnen, "Mappings of stochastic field lines in poloidal divertor tokamaks," *Nucl. Fusion*, vol. 46, no. 4, p. S113, Mar. 2006.
- [13] S. S. Abdullaev, "Model of a magnetic field in poloidal divertor tokamaks affected by resonant magnetic perturbations," *Phys. Plasmas*, vol. 16, p. 030701, Oct. 2009.
- [14] S. S. Abdullaev, "Stable and unstable manifolds, and the structure of magnetic footprints," *Nucl. Fusion*, vol. 54, pp. 064004-1–064004-11, May 2014.
- [15] S. S. Abdullaev, "Canonical maps near separatrix in Hamiltonian systems," *Phys. Rev. E, Stat. Phys. Plasmas Fluids Relat. Interdiscip. Top.*, vol. 70, p. 046202, Oct. 2004.
- [16] A. Punjabi, A. Verma, and A. Boozer, "Stochastic broadening of the separatrix of a tokamak divertor," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 69, p. 3322, Dec. 1992.
- [17] A. Punjabi, H. Ali, and A. Boozer, "Symmetric simple map for a single-null divertor tokamak," *Phys. Plasmas*, vol. 4, pp. 337–346, Jan. 1997.
- [18] A. Punjabi, H. Ali, and A. Boozer, "Effects of dipole perturbation on the stochastic layer and magnetic footprint in single-null divertor tokamaks," *Phys. Plasmas*, vol. 10, pp. 3992–4003, Sep. 2003.
- [19] H. Ali, A. Punjabi, A. Boozer, and T. Evans, "The low MN map for single-null divertor tokamaks," *Phys. Plasmas*, vol. 11, pp. 1908–1919, Apr. 2004.
- [20] A. Punjabi, H. Ali, T. Evans, and A. Boozer, "Modeling of stochastic broadening in a poloidally diverted discharge with piecewise analytic symplectic mapping flux functions," *Phys. Plasmas*, vol. 15, p. 082507, Aug. 2008.
- [21] A. Punjabi and A. Ali, "Symplectic approach to calculation of magnetic field line trajectories in physical space with realistic magnetic geometry in divertor tokamaks," *Phys. Plasmas*, vol. 15, p. 122502, Dec. 2008.
- [22] A. Punjabi and A. Ali, "An accurate symplectic calculation of the inboard magnetic footprint from statistical topological noise and field errors in the DIII-D," *Phys. Plasmas*, vol. 18, p. 022509, Feb. 2011.
- [23] A. Punjabi and A. Boozer, "Homoclinic tangle in tokamak divertors," *Phys. Lett. A*, vol. 278, pp. 2410–2416, Jun. 2014.
- [24] A. Punjabi, "Homoclinic tangle of the ideal separatrix in the DIII-D tokamak from (30, 10) + (40, 10) perturbation," *Phys. Plasmas*, vol. 21, pp. 122516-1–122516-13, Dec. 2014.
- [25] T. Kroetz, M. Roberto, I. L. Caldas, R. L. Viana, P. J. Morrison, and P. Abbamonte, "Integrable maps with non-trivial topology: Application to divertor configurations," *Nucl. Fusion*, vol. 50, p. 034003, Feb. 2010.
- [26] T. Kroetz, M. Roberto, I. L. Caldas, R. L. Viana, and P. J. Morrison, "Divertor map with freedom of geometry and safety factor profile," *Plasma Phys. Control. Fusion*, vol. 54, p. 045007, Mar. 2012.
- [27] F. Karger and K. Lackner, "Resonant helical divertor," *Phys. Lett. A*, vol. 61, pp. 385–387, Jun. 1977.
- [28] W. Engelhardt and W. Feneberg, "Influence of an ergodic magnetic limiter on the impurity content in a tokamak," *J. Nucl. Mater.*, vols. 76–77, pp. 518–520, Oct. 1978.
- [29] W. Feneberg and G. H. Wolf, "A helical magnetic limiter for boundary layer control in large tokamaks," *Nucl. Fusion*, vol. 21, no. 6, p. 669, 1981.
- [30] A. Vannucci, I. C. Nascimento, and I. L. Caldas, "Disruptive instabilities in the discharges of the TBR-1 small tokamak," *Plasma Phys. Controlled Fusion*, vol. 31, no. 2, p. 147, 1989.
- [31] C. J. A. Pires, E. A. O. Saettone, M. Y. Kucinski, A. Vannucci, and R. L. Viana, "Magnetic field structure in the TCABR tokamak due to ergodic limiters with a non-uniform current distribution: Theoretical and experimental results," *Plasma Phys. Control Fusion*, vol. 47, p. 1609, Sep. 2005.
- [32] T. J. Martin and J. B. Taylor, "Ergodic behaviour in a magnetic limiter," *Plasma Phys. Control. Fusion*, vol. 26, p. 321, Oct. 1984.
- [33] R. K. W. Roeder, B. I. Rapoport, and T. E. Evans, "Explicit calculations of homoclinic tangles in tokamaks," *Phys. Plasmas*, vol. 1, p. 3796, Aug. 2003.
- [34] A. Wingen, T. E. Evans, and K. H. Spatschek, "High resolution numerical studies of separatrix splitting due to non-axisymmetric perturbation in DIII," *Nucl. Fusion*, vol. 49, p. 042504, Apr. 2009.
- [35] T. E. Evans, R. K. W. Roeder, J. A. Carter, B. I. Rapoport, M. E. Fenstermacher, and C. J. Lasnier, "Experimental signatures of homoclinic tangles in poloidally diverted tokamaks," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 7, no. 7, p. 174, Apr. 2005.
- [36] H. Frerichs, O. Schmitz, D. Reiter, T. E. Evans, and Y. Feng, "Striation pattern of target particle and heat fluxes in three dimensional simulations for DIII-D," *Phys. Plasmas*, vol. 21, p. 020702, Feb. 2014.
- [37] A. Kirk, J. Harrison, Y. Liu, E. Nardon, I. T. Chapman, P. Denner, and The MAST Team, "Observation of lobes near the X point in resonant magnetic perturbation experiments on MAST," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 255003, Jun. 2012.
- [38] P. Beaufume, M. A. Dubois, and M. S. M. Benkadda, "Diffusion in the noisy Chirikov–Taylor mapping," *Phys. Lett. A*, vol. 147, pp. 87–91, Jul. 1990.
- [39] A. B. Schelin, I. L. Caldas, R. L. Viana, and S. Benkadda, "Collisional effects in the tokamak," *Phys. Lett. A*, vol. 376, pp. 24–30, Nov. 2011.
- [40] J. F. Artaud *et al.*, "The CRONOS suite of codes for integrated tokamak modelling," *Nucl. Fusion*, vol. 50, p. 043001, Mar. 2010.
- [41] T. Kroetz, C. G. L. Martins, M. Roberto, and I. L. Caldas, "Set of wires to simulate tokamaks with poloidal divertor," *J. Plasma Phys.*, vol. 79, pp. 751–757, Apr. 2013.

Geraldo Roberson received the B.Sc. degree in physics from the Federal University of Pernambuco, Recife, Brazil, and the M.Sc. degree in plasma physics from the Technological Institute of Aeronautics, São Jose dos Campos, Brazil, where he is currently pursuing the Ph.D. degree in sciences and space technologies.

Marisa Roberto received the B.S. degree in physics from the Catholic University of São Paulo, São Paulo, Brazil, in 1982, the M.S. degree from the Space Research Institute, São Jose dos Campos, Brazil, in 1986, and the Ph.D. degree in plasma physics from the Aeronautic Institute of Technology (ITA), in São Jose dos Campos, in 1992.

In 1999 and 2004, she was a Visiting Scholar with the University of California at Berkeley, Berkeley, CA, USA. She is currently a Full Professor with the Physics Department, ITA. Her current research interests include plasma physics for technological applications and chaos.

Iberê Luiz Caldas was born in Santos, Brazil, in 1948. He received the B.S. and Ph.D. degrees in physics from the Institute of Physics of University of São Paulo (IF-USP), São Paulo, Brazil, in 1970 and 1979, respectively.

In 1977, 1979, 1983, 1984, and 1988, he was a Guest Scientist with the Max-Planck-Institut fuer PlasmaPhysik, Garching bei München, Germany. Since 1995, he has been a Full Professor with IF-USP. His current research interests include plasma physics and chaos.

Ricardo Luiz Viana received the Ph.D. degree in plasma physics from the Institute of Physics, Universidade de São Paulo, Brazil, in 1991.

In 1987, he was a Visiting Scholar with the Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, College Park, MD, USA. He has been a Professor with the Physics Department, Universidade Federal do Paraná Curitiba, Curitiba, Brazil, since 1989. He has authored 190 papers and supervised ten doctoral theses, and three post-doctoral works.

Tiago Kroetz received the Ph.D. degree in plasma physics from the Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, Brazil, in 2010.

Since 2010, he has been involved in research about nonlinear dynamics applied to plasma physics and mechanical systems, and also extended to the field of research on the physics education. He has been a Professor with the Physics Academic Department, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, Brazil, since 2012.

A.2 A Symplectic Map For Plasmas With Poloidal Divertor

A Symplectic Map For Plasmas With Poloidal Divertor

G. Roberson¹, M. Roberto¹, I. L. Caldas²

¹ *Department of Physics, Aeronautic Institute of Technology, São José dos Campos, Brazil*

² *Institute of Physics, São Paulo University, São Paulo, Brazil*

ABSTRACT

We apply a procedure implemented in [1,2,3] to derive a new two-dimensional integrable symplectic map to describe the equilibrium magnetic field lines of plasmas in tokamaks with a single-null divertor. The invariant surfaces obtained by this map can reproduce a wide variety of magnetic surfaces with elongation (κ) and triangularity (δ) determined by the choice of free parameters, such as the hyperbolic point coordinates. The safety factor profile of the map can also be specified. These maps can be applied to simulate quite well plasma edge tokamak configurations with poloidal divertor in transport investigations. Resonant magnetic perturbations are introduced, replacing the map separatrix by a chaotic layer and allowing the study of open magnetic field line structure in the region between the plasma and the tokamak wall. The main aspects of transport, such as connection lengths and magnetic footprints on the divertor plate [1,2,3] are also presented.

1 – INTRODUCTION

An integrable two-dimensional symplectic map is developed to obtain magnetic field lines in tokamaks with a divertor, following the methodology described in references [1,2,3]. The proposed model consists of twelve parabolic branches jointed smoothly and it aims to eliminate the limitation imposed in the model [3], which does not provide magnetic surfaces with triangularity. The model allows representing surfaces with large sets of values of triangularity and elongation. In this map we apply a resonant perturbation to study the chaotic magnetic field line transport near the separatrix.

2 – THE METHOD

The trajectory integration method can be summarized in the following steps [1,2,3]:

i – Choose an appropriate function $V(x)$ in a Hamiltonian denoted by ψ :

$$\psi = \frac{x^2}{2} + V(y) \quad (1)$$

ii – Solve Hamilton's equations:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{d\psi}{dx} \\ \frac{dx}{dt} = -\frac{d\psi}{dy} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(x_i, y_i, t) \\ y(x_i, y_i, t) \end{cases} \quad (2)$$

iii – Discretize the continuous solutions by transformation:

$$(x(x_i, y_i, t), y(x_i, y_i, t)) \rightarrow (x(x_i, y_i, \Delta), y(x_i, y_i, \Delta)). \quad (3)$$

The parameter Δ is the discretization parameter and is related to the rotational transform of each invariant surface. In an equilibrium plasma this rotation is given by the safety factor. As topology of invariant surfaces independent of the Δ we can reproduce any safety factor associated magnetic surface we want to model through the appropriate choice of $\Delta(\psi)$ [3], which can be given by:

$$\Delta(\psi) = \frac{T(\psi)}{q(\psi)} \quad (4)$$

where $T(\psi)$ is the rotational period of the invariant curve ψ and $q(\psi)$ is the safety factor of the magnetic surface that we want to represent by the invariant curve ψ .

3 –EQUILIBRIUM MAGNETIC FIELD MODEL

The invariant curves as a diverted plasma shape are obtained by using two-dimensional potential (for $x > 0$ and $x < 0$) in which each curve consists of six parabolic branches matching smoothly to preserve the integrability of Hamilton's equations, as shown in Fig. 1. The positions of the local minima correspond to elliptic points and local maximum corresponds to the hyperbolic point (X point).

The main geometric parameters of the separatrix are shown in Fig 2, which can vary freely.

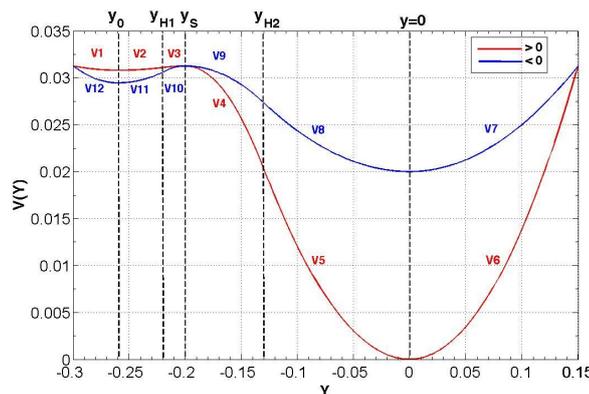


Fig 1. The potential $V(y)$ for the proposed map. The curve plotted in red is the potential for $x > 0$ and the curve plotted in blue is the potential for $x < 0$. Six parabolic branches compose each curve.

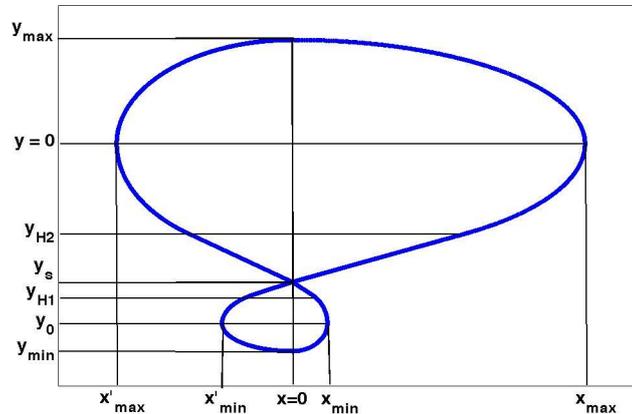


Fig 2. Schematic view of geometric parameters.

To illustrate the versatility of the model we show in Fig. 3 two configurations with different triangularity and elongation. A monotonic safety factor profile was used to reproduce these configurations.

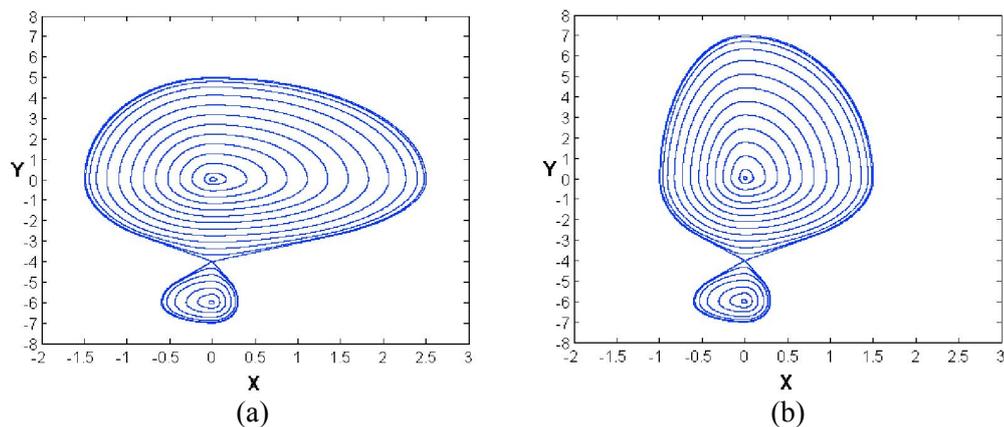


Fig 3. Invariant surfaces with parameters (a) $x_{MAX} = 2.5$, $x'_{MAX} = -1.5$, $x_{MIN} = 0.8$, $x'_{MIN} = -0.6$, $y_{MAX} = 5.0$, $y_{H2} = -2.75$, $y_S = -4.0$, $y_{H1} = -5.0$, $y_0 = -6.0$, $y_{MIN} = -7.0$ and (b) $x_{MAX} = 1.5$, $x'_{MAX} = -1.0$, $x_{MIN} = 0.8$, $x'_{MIN} = -0.6$, $y_{MAX} = 7.0$, $y_{H2} = -2.75$, $y_S = -4.0$, $y_{H1} = -5.0$, $y_0 = -6.0$, $y_{MIN} = -7.0$.

Thus, through the changes of free parameters we can obtain a wide variety of configurations of surfaces of equilibrium. We call attention that our map describes diverted magnetic fields without toroidal corrections. However, close the separatrix $1/x$ is nearly constant, so we can get a good approximation for the equilibrium field in large aspect ratio tokamaks.

4 – DIVERTOR MAP WITH MARTIN TAYLOR PERTURBATION

We use the non-integrable Martin Taylor map [4] to introduce an ergodic limiter perturbation. The total field line map $(x_n, y_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1})$ considers integrable divertor map M_D , yielding $(x_n, y_n) \rightarrow (x^*, y^*)$, and the perturbing map M_P , which gives $(x^*, y^*) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1})$ [3].

5 – RESULTS AND CONCLUSIONS

Initially we are considering a simpler case with only elongation (without triangularity) to include a perturbation in this proposed geometry (see Fig. 4). The model reproduces the results quite well compared to those obtained in [3].

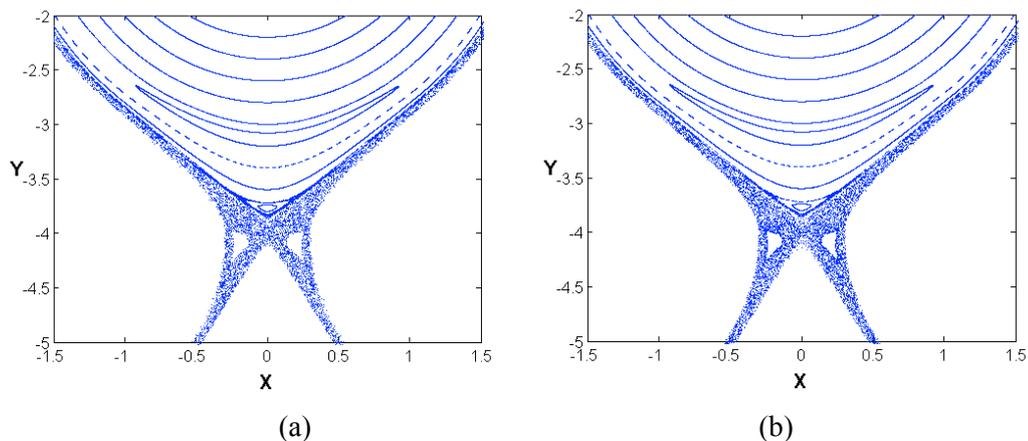


Fig. 4. Perturbed Map for (a) the model described in ref. [3] and (b) The model proposed here both with shear = 1.80 and $m = 3$.

The next step we are going to consider the cases with triangularity and thus be able to reproduce more realistic configurations of magnetic field lines. The chaotic layer formed near the separatrix can be studied, as the transport of field lines and deposition patterns in the divertor plates.

The authors would like to thank Brazilian scientific agencies for the financial support: CAPES and FAPESP, Grants 2013/03401-6 and 2011/19269-11.

REFERENCES

- [1] P. M. Abbamonte, P. J. Morrison. Report IFSR638 (1994), Austin, Texas.
- [2] T. Kroetz, M. Roberto, I. L. Caldas, R. L. Viana, P. J. Morrison and P. M. Abbamonte. Nuclear Fusion 50 (2010) 034003,
- [3] T. Kroetz, M. Roberto, I. L. Caldas, R. L. Viana and P. J. Morrison. Plasma Physics, Control Fusion 54 (2012) 045007.
- [4] T. J. Martin and J. B. Taylor 1984 Plasma Phys. Control. Fusion 26 321

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO			
1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO TD	2. DATA	3. REGISTRO N°	4. N° DE PÁGINAS 85
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: MÉTODO DOS MAPAS PARA ESTUDO DE TOKAMAKS COM DESVIADORES POLOIDAI			
6. AUTOR(ES): Geraldo Roberson Costa Almeida			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: 1. Tokamak, 2. Mapa, 3. Integrável, 4. Simplético, 5. Divertor, 6. Triangularidade, 6. Elongação.			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO:			
10. APRESENTAÇÃO: X Nacional Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Ciência e Tecnologia Espaciais. Área de Física e Matemática Aplicadas. Orientador: Prof. ^a Dr. ^a . Marisa Roberto Defesa em 08/06/2017. Publicada em 2017.			
11. RESUMO: Tokamaks com divertores têm recebido muita atenção nos últimos anos. Nesta tese aplicamos uma metodologia adotada nas referências [1]–[3] para o desenvolvimento de um novo mapa simplético integrável bidimensional para descrever as linhas de campos magnéticos de equilíbrio de um plasma em um tokamak com um "single null-divertor". O método consiste na composição de curvas de potenciais que reproduz a topologia com um ponto de X. As curvas invariantes obtidas por este modelo podem reproduzir uma ampla variedade de superfícies magnéticas com qualquer valor de elongação e triangularidade através da escolha dos parâmetros livres, tal como a coordenada do ponto hiperbólico. O perfil do fator de segurança também pode ser especificado, já que este não depende dos parâmetros geométricos. Assim o mapa pode reproduzir mapas realísticos para tokamaks com qualquer geometria com divisor poloidal, com a vantagem de ser computacionalmente mais rápido que códigos mais elaborados. Perturbações ressonantes podem ser introduzidas e estas podem substituir a separatriz por uma camada caótica, permitindo o estudo das estruturas das linhas de campos abertas na região entre o plasma e a parede da câmara. Os principais aspectos de transporte, tal como comprimento de conexão e "footprints" nas placas divisoras podem ser obtidos [2], [3].			
12. GRAU DE SIGILO: (X) OSTENSIVO () RESERVADO () SECRETO			