

Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Curso de Física, Área de Física de Plasmas

**Tiago Kroetz**

# **LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO CAÓTICAS EM TOKAMAKS**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:

Prof. Dra. Marisa Roberto

Orientador

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Co-orientador

Prof. Dr. Homero Santiago Maciel

Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro

São José dos Campos, SP - Brasil

2006

## Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

### Divisão Biblioteca Central do ITA/CTA

Kroetz, Tiago

Linhas de Campo Magnético Caóticas em Tokamaks / Tiago Kroetz.

São José dos Campos, 2006.

91f.

Tese de Mestrado – Curso de Física. Área de Física de Plasmas – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2006. Orientador: Prof. Dra. Marisa Roberto. Co-orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas.

1. Tokamak. 2. Limitador ergótico. 3. Modos ressonantes. I. Centro Técnico Aeroespacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Física. II. Título.

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

KROETZ, Tiago. **Linhas de Campo Magnético Caóticas em Tokamaks**. 2006. 91f. Tese de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Tiago Kroetz

TÍTULO DO TRABALHO: Linhas de Campo Magnético Caóticas em Tokamaks.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2006

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

---

Tiago Kroetz

Av. Doutor Nelson D'Avila, 1125, BL-A AP-107

CEP 12.245-903 – São José dos Campos–SP

# LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO CAÓTICAS EM TOKAMAKS

**Tiago Kroetz**

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Brett Vern Carlson	Presidente	-	ITA
Prof. Dra.	Marisa Roberto	Orientador	-	ITA
Prof. Dr.	Iberê Luiz Caldas	Co-orientador	-	USP
Prof. Dr.	Carlos Alberto Bomfim Silva	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dr.	Rubens de Melo Marinho Junior	Membro Interno	-	ITA
Prof. Dr.	Ricardo Magnus Osorio Galvao	Membro Externo	-	CBPF

Aos meus pais, por terem me  
apoiado em todos os momentos  
de minha vida.

E a Danielle por ter me feito  
alguém mais feliz!

# Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha família, meus maiores incentivadores e responsáveis por eu estar hoje concluindo esta importante etapa da vida profissional. Por toda confiança depositada e por todo carinho dedicado.

A Danielle, que me proporciona momentos maravilhosos desde quando nos conhecemos. Sem seu apoio este trabalho teria sido certamente mais difícil.

A Professora Marisa, pela orientação, atenção, paciência, confiança e amizade.

Ao Professor Iberê, pelas produtivas discussões e sugestões sobre o trabalho.

Aos meus queridos amigos: Alexandre, Diogo, Rafael, Ricardo e Tiago, pelas histórias colecionadas durante a faculdade, desabafos, festas, conversas de bar e cervejas tomadas. Mesmo estando tão longe de todos, vocês continuam sendo meus melhores amigos.

Ao Professor Rubens Marinho e aos colegas e amigos César e Clóvis, pela atenção dedicada ao me ensinar e incentivar a escrever esta dissertação em  $\text{\LaTeX}$ .

A todo o pessoal do Departamento de Física do ITA, colegas, professores, funcionários, por propiciarem um ambiente de trabalho agradável e produtivo.

Por fim, gostaria de agradecer à CAPES, pelo apoio financeiro sem o qual não conseguiria desenvolver este trabalho.



*“Toda a nossa ciência, comparada com a realidade, é primitiva e infantil - e, no entanto, é a coisa mais preciosa que temos .”*

— ALBERT EINSTEIN

# Resumo

Investigamos nesta dissertação o comportamento das linhas de campo magnético caóticas em tokamaks. Estas linhas surgem devido à perturbações ressonantes com os campos magnéticos de equilíbrio, que podem aparecer naturalmente no plasma ou serem produzidas devido à ação externa. Produzimos numericamente esta perturbação simulando a ação de um dispositivo chamado limitador magnético ergódico (LME). A motivação para esta investigação de linhas caóticas é um possível melhoramento no confinamento do plasma em tokamaks e um maior controle da interação plasma-borda. Tratamos, primeiramente neste trabalho, a configuração de equilíbrio dos campos magnéticos. Em seguida aplicamos o formalismo hamiltoniano para descrevermos o traçado das linhas de campo na configuração de equilíbrio. Obtivemos também a hamiltoniana total do sistema sob a perturbação gerada pelo LME. Através das equações de Hamilton para o sistema perturbado escrevemos as equações de um mapa estroboscópico que fornecem as coordenadas canônicas da linha de campo na posição de cada anel do LME. A partir do mapa estroboscópico traçamos diversos mapas de Poincaré para diferentes modos ressonantes perturbados e intensidades de perturbação. Explicamos a formação das cadeias de ilhas, os fenômenos de reconexão e bifurcação e identificamos e caracterizamos a existência de linhas de campo caóticas no tokamak devido à perturbação. O escape destas linhas de campo magnético para a borda do tokamak também foi estudado. Para isso, foram obtidos os mapas de conexão, bacias de escape e os “footprints”. Estes fornecem, respectivamente, o número de voltas que uma dada linha de campo magnético percorre no toróide até alcançar a parede, a localização das linhas ao chegarem na parede, assim como as impressões deixadas pelas linhas nas paredes. Estas impressões consistem numa distribuição de manchas nas paredes do toróide, fornecendo um padrão de escape não uniforme com uma estrutura complexa.

# Abstract

*In this work the behavior of chaotic magnetic field lines in tokamaks is investigated. Resonant perturbations create these lines. An ergodic magnetic limiter (EML) was used to create a perturbation in the equilibrium magnetic field. Chaotic magnetic field lines can improve both the plasma confinement and the plasma-wall interactions in tokamaks. The Hamiltonian formalism was used to describe the field lines in equilibrium and under the action of the EML. The Poincaré maps were obtained for several values of the perturbation current and different resonant modes. The reconnection and bifurcation phenomena were explained. The escape of the field lines toward the wall was also studied. The connection maps, the escape basins and the footprints were obtained. For a given magnetic field line, the following was obtained: the number of turns until it reaches the wall, its localization and the footprint left on the tokamak's wall.*

# Sumário

LISTA DE FIGURAS . . . . .	xii
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS . . . . .	xvii
<b>1 INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>2 EQUILÍBRIO MHD . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>2.1 Sistema de Coordenadas . . . . .</b>	<b>23</b>
2.1.1 Coordenadas Polares Locais . . . . .	24
2.1.2 Coordenadas Toroidais . . . . .	24
2.1.3 Coordenadas Polares Toroidais . . . . .	25
<b>2.2 Equação de Grad-Shafranov . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>2.3 Campos Magnéticos de Equilíbrio . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>2.4 Fator de Segurança . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>3 FORMALISMO HAMILTONIANO PARA LINHAS DE CAMPO . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>3.1 Configuração de Equilíbrio . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>3.2 Campo Perturbativo . . . . .</b>	<b>39</b>
3.2.1 Enrolamento Helicoidal Ressonante (EHR) . . . . .	40
3.2.2 Limitador Magnético Ergódico (LME) . . . . .	43
3.2.3 Hamiltoniana de Perturbação Gerada pelo LME . . . . .	44

---

4	MAPAS DE POINCARÉ . . . . .	47
4.1	Formação das Cadeias de Ilhas . . . . .	48
4.2	Efeito da Perturbação nas Linhas de Campo . . . . .	51
4.3	Reconexão e Bifurcação . . . . .	58
4.4	Linhas de Campo Caóticas . . . . .	60
5	ESCAPE DAS LINHAS DE CAMPO . . . . .	65
5.1	Estudo dos Comprimentos de Conexão . . . . .	65
5.2	Bacias de Escape . . . . .	72
5.3	“Footprints” . . . . .	76
5.4	Percentual de incidência . . . . .	79
6	CONCLUSÃO . . . . .	81
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	84
	ANEXO A – MAPAS DE CONEXÃO . . . . .	87
	ANEXO B – BACIAS DE ESCAPE . . . . .	90
	ANEXO C – “FOOTPRINTS” . . . . .	91

# Lista de Figuras

FIGURA 1.1 – Representação esquemática de um tokamak. . . . .	20
FIGURA 2.1 – Superfícies parametrizadas no sistema de coordenadas polares toroidais. . . . .	26
FIGURA 2.2 – Perfil radial normalizado do componente poloidal do campo magnético. . . . .	30
FIGURA 2.3 – Perfil radial normalizado do componente toroidal do campo magnético em $\theta_t = 0$ . . . . .	30
FIGURA 2.4 – Superfícies magnéticas representadas em coordenadas cilíndricas. . . . .	31
FIGURA 2.5 – Esquema indicando a inclinação local de uma linha de campo magnético. . . . .	32
FIGURA 2.6 – Perfil radial normalizado do fator de segurança. Os valores dos parâmetros usados foram $\gamma = 0,8$ e $\beta = 3,0$ . . . . .	34
FIGURA 3.1 – Traçado das variáveis $\vartheta$ (linha preta) e $\theta_t$ (linha vermelha) em relação a $\varphi_t$ de uma linha de campo localizada sobre uma superfície magnética de $q = 4$ . . . . .	38
FIGURA 3.2 – Visão esquemática de um EHR de $(m_0, n_0) = (4, 1)$ em um tokamak. . . . .	40
FIGURA 3.3 – Dependência do fator de modulação $\lambda$ com o fator de segurança da superfície ressonante. Foram usados os valores de parâmetros $\gamma = 0,8$ e $\beta = 3,0$ . . . . .	42
FIGURA 3.4 – Visão esquemática de um LME em um tokamak. Abaixo temos a visão de um único anel de LME. . . . .	44

FIGURA 4.1 – Mapa de Poincaré para dez condições iniciais com corrente de perturbação $I_h = 0\%I_p$ . Os parâmetros de equilíbrio foram $\gamma = 0,78$ ; $\beta = 3,0$ e $\lambda = 0,3538$ . . . . .	52
FIGURA 4.2 – Mapa de Poincaré 4.1 representado em coordenadas cilíndricas. . . . .	52
FIGURA 4.3 – Mapa de Poincaré para dez condições iniciais com corrente de perturbação $I_h = 0,43\%I_p$ e demais parâmetros da figura 4.1. . . . .	53
FIGURA 4.4 – Mapa de Poincaré 4.3 representado em coordenadas cilíndricas. . . . .	53
FIGURA 4.5 – Mapa de Poincaré para dez condições iniciais com corrente de perturbação $I_h = 1,57\%I_p$ . . . . .	54
FIGURA 4.6 – Mapa de Poincaré 4.5 representado em coordenadas cilíndricas. . . . .	54
FIGURA 4.7 – Mapa de Poincaré para dez condições iniciais com corrente de perturbação $I_h = 1,86\%I_p$ . . . . .	55
FIGURA 4.8 – Mapa de Poincaré 4.7 representado em coordenadas cilíndricas. . . . .	55
FIGURA 4.9 – Mapa de Poincaré para dez condições iniciais com corrente de perturbação $I_h = 2,57\%I_p$ . . . . .	56
FIGURA 4.10 – Mapa de Poincaré 4.9 representado em coordenadas cilíndricas. . . . .	56
FIGURA 4.11 – Figura esquemática mostrando as cadeias de ilhas superior e inferior e os pontos fixos (a) antes, (b) durante, e (c) depois da reconexão. E (d) depois da bifurcação. . . . .	59
FIGURA 4.12 – Mapas de Poincaré com corrente de perturbação (a) $I_h = 1,14\%I_p$ , (b) $I_h = 1,43\%I_p$ , (c) $I_h = 2,71\%I_p$ e (d) $I_h = 5,43\%I_p$ respectivamente antes, durante e depois da reconexão e durante a bifurcação. . . . .	60
FIGURA 4.13 – Mapas de Poincaré com as trajetórias usadas nos espectros de potência para $I_h = 2,71\%I_p$ . Os parâmetros usados foram $\gamma = 0,8$ ; $\beta = 3,0$ e $\lambda = 0,45319$ e modo de perturbação $(m_0, n_0) = (4, 1)$ . . . . .	62
FIGURA 4.14 – Espectros de potência para a cadeia (a) primária e (b) secundária da figura 4.13 (a). . . . .	63

FIGURA 4.15 – Espectros de potência para a superfície (a) superior e (b) inferior da figura 4.13 (b). . . . .	63
FIGURA 4.16 – Espectros de potência para a cadeia em 4.13 (c) e para a superfície instável em 4.13 (d). . . . .	64
FIGURA 5.1 – Grade de condições iniciais representadas no mapa de Poincaré. Utilizamos os valores $\gamma = 0,8$ ; $\beta = 3,0$ ; $\lambda = 0,45319$ ; $I_h = 8,57\%I_p$ e modo de perturbação $(m_0, n_0) = (4, 1)$ . . . . .	67
FIGURA 5.2 – Mapas de conexão para as condições iniciais representadas em 5.1 em uma escala (a) $N$ de 1 a 10 (ou maior que 10) e (b) $N$ de 1 a 200 (ou maior que 200). . . . .	67
FIGURA 5.3 – Grade de condições iniciais representadas no mapa de Poincaré. Utilizamos os valores $\gamma = 0,8$ ; $\beta = 3,0$ ; $\lambda = 0,45319$ ; $I_h = 11\%I_p$ e modo de perturbação $(m_0, n_0) = (4, 1)$ . . . . .	68
FIGURA 5.4 – Mapas de conexão para as condições iniciais representadas em 5.3 em uma escala (a) $N$ de 1 a 10 (ou maior que 10) e (b) $N$ de 1 a 200 (ou maior que 200). . . . .	68
FIGURA 5.5 – Grade de condições iniciais representadas no mapa de Poincaré. Utilizamos os valores $\gamma = 0,8$ ; $\beta = 3,0$ ; $\lambda = 0,5895$ ; $I_h = 8,57\%I_p$ e modo de perturbação $(m_0, n_0) = (5, 1)$ . . . . .	69
FIGURA 5.6 – Mapas de conexão para as condições iniciais representadas em 5.5 em uma escala (a) $N$ de 1 a 10 (ou maior que 10) e (b) $N$ de 1 a 200 (ou maior que 200). . . . .	69
FIGURA 5.7 – Grade de condições iniciais representadas no mapa de Poincaré. Utilizamos os valores $\gamma = 0,8$ ; $\beta = 3,0$ ; $\lambda = 0,5895$ ; $I_h = 11\%I_p$ e modo de perturbação $(m_0, n_0) = (5, 1)$ . . . . .	70
FIGURA 5.8 – Mapas de conexão para as condições iniciais representadas em 5.7 (a) em uma escala (a) $N$ de 1 a 10 (ou maior que 10) e (b) $N$ de 1 a 200 (ou maior que 200). . . . .	70

FIGURA 5.9 – Mapas de conexão para as condições iniciais representadas em 5.7 (b) em uma escala (a) $N$ de 1 a 10 (ou maior que 10) e (b) $N$ de 1 a 200 (ou maior que 200).	70
FIGURA 5.10 – Percentuais de ocorrência com $N$ variando de 1 a 10 para as grades das figuras (a) 5.1, (b) 5.3, (c) 5.5, (d) (5.7 (a)) e (e) (5.7 (b)).	71
FIGURA 5.11 – Bacias de escape para as condições iniciais representadas nas figuras (a) 5.1 e (b) 5.3.	73
FIGURA 5.12 – Bacias de escape para as condições iniciais representadas nas figuras (a) 5.5 e (b) (5.7 (a)).	74
FIGURA 5.13 – Bacia de escape para as condições iniciais representadas na figura 5.7 (b).	74
FIGURA 5.14 – “Footprints” do modo de perturbação $(4, 1)$ , parâmetros $\gamma = 0, 8$ ; $\beta = 3, 0$ ; $\lambda = 0, 45319$ e corrente de perturbação $I_h =$ (a) $8, 57\%I_p$ e (b) $11\%I_p$ .	77
FIGURA 5.15 – “Footprints” do modo de perturbação $(5, 1)$ , parâmetros $\gamma = 0, 8$ ; $\beta = 3, 0$ ; $\lambda = 0, 5895$ e corrente de perturbação $I_h =$ (a) $8, 57\%I_p$ e (b) $11\%I_p$ .	78
FIGURA 5.16 – Percentuais de incidência para o modo de perturbação $(4, 1)$ com parâmetros $\gamma = 0, 8$ ; $\beta = 3, 0$ ; $\lambda = 0, 45319$ e corrente de perturbação $I_h =$ (a) $8, 57\%I_p$ e (b) $11\%I_p$ .	79
FIGURA 5.17 – Percentuais de incidência para o modo de perturbação $(5, 1)$ com parâmetros $\gamma = 0, 8$ ; $\beta = 3, 0$ ; $\lambda = 0, 5895$ e corrente de perturbação $I_h =$ (a) $8, 57\%I_p$ e (b) $11\%I_p$ .	80
FIGURA A.1 – Grades de condições iniciais representadas no mapa de Poincaré. Utilizamos $(m_0, n_0) = (4, 1)$ ; $\gamma = 0, 8$ ; $\beta = 3, 0$ ; $\lambda = 0, 45319$ ; $I_h =$ (a) $8, 57\%I_p$ e (b) $11\%I_p$ .	87

FIGURA A.2 – Mapas de conexão para as condições iniciais representadas em: (a) A.1 (a) em uma escala $N$ de 1 a 10 (ou maior que 10), (b) A.1 (a) em uma escala $N$ de 1 a 200 (ou maior que 200), (c) A.1 (b) em uma escala $N$ de 1 a 10 (ou maior que 10) e (d) A.1 (b) em uma escala $N$ de 1 a 200 (ou maior que 200). . . . .	88
FIGURA A.3 – Grades de condições iniciais representadas no mapa de Poincaré. Utilizamos $(m_0, n_0) = (5, 1)$ ; $\gamma = 0, 8$ ; $\beta = 3, 0$ ; $\lambda = 0, 5895$ ; $I_h =$ (a) $8, 57\%I_p$ e (b) $11\%I_p$ . . . . .	88
FIGURA A.4 – Mapas de conexão para as condições iniciais representadas em: (a) A.3 (a) em uma escala $N$ de 1 a 10 (ou maior que 10), (b) A.3 (a) em uma escala $N$ de 1 a 200 (ou maior que 200), (c) A.3 (b) em uma escala $N$ de 1 a 10 (ou maior que 10) e (d) A.3 (b) em uma escala $N$ de 1 a 200 (ou maior que 200). . . . .	89
FIGURA B.1 – Bacias de escape para as condições iniciais representadas na figura (a) A.1 (a) e (b) A.1 (b). . . . .	90
FIGURA B.2 – Bacias de escape para as condições iniciais representadas na figura (a) A.3 (a) e (b) A.3 (b). . . . .	90
FIGURA C.1 – “Footprints” do modo de perturbação $(4, 1)$ , parâmetros $\gamma = 0, 8$ ; $\beta = 3, 0$ ; $\lambda = 0, 45319$ e corrente de perturbação $I_h =$ (a) $8, 57\%I_p$ e (b) $11\%I_p$ . . . . .	91
FIGURA C.2 – “Footprints” do modo de perturbação $(5, 1)$ , parâmetros $\gamma = 0, 8$ ; $\beta = 3, 0$ ; $\lambda = 0, 5895$ e corrente de perturbação $I_h =$ (a) $8, 57\%I_p$ e (b) $11\%I_p$ . . . . .	91

# Lista de Abreviaturas e Siglas

MHD Magnetohidrodinâmica

KAM Kolmogorov Arnold Moser

EHR Enrolamento Helicoidal Resonante

LME Limitador Magnético Ergódico

DFT Transformada Discreta de Fourier

# 1 Introdução

Uma das formas possíveis de obtenção de energia é por fusão nuclear. Ao contrário da fissão, neste processo dois núcleos leves (hidrogênio, deutério ou trítio) fundem-se resultando em produtos mais leves que os reagentes (geralmente partículas alfa e nêutrons). Segundo a equação de Einstein,  $E = mc^2$ , se a massa nuclear final for menor que a soma das massas iniciais, teremos uma liberação de energia que obedece esta relação. Os núcleos são inibidos de realizarem tal reação devido à barreira imposta pelo potencial coulombiano. A fusão ocorre quando os núcleos conseguem energia suficiente para “tunelar” esta barreira de potencial. Quando esta energia é de origem térmica, o processo recebe o nome de fusão termonuclear.

Em estrelas, a forte força gravitacional comprime a matéria, de forma que, equilibra a força de expansão causada pela pressão em temperaturas típicas de estrelas. Assim têm-se reações termonucleares controladas e estáveis. Na Terra, além de não podermos contar com um campo gravitacional tão intenso, é impossível termos uma densidade de matéria tão grande. É mais razoável trabalharmos com um gás menos denso a uma temperatura maior (da ordem de dez vezes a temperatura do núcleo do Sol, sendo esta última  $\approx 1,5 \times 10^7 K$ ). Nesta temperatura a matéria a ser nuclearmente fundida encontra-se sob forma de plasma. O plasma é, basicamente, um gás ionizado, macroscopicamente neutro. Temos também que nesta temperatura necessária para fusão ( $\sim 10^8 K$ ), praticamente toda

a matéria está ionizada e podemos tratar o plasma como um fluido contínuo e carregado eletricamente. Fazemos isso através do uso das equações magnetohidrodinâmicas (MHD).

Este plasma precisa estar confinado em algum recipiente (reator de fusão), por tratar-se de um gás. Em uma temperatura tão elevada não pode-se permitir que o plasma entre em contato com as paredes do reator, pois isso resfriaria o plasma e danificaria a máquina. Por estarmos tratando de um gás eletricamente carregado podemos, felizmente, confiná-lo através da aplicação de campos eletromagnéticos. Existem diversos tipos de reatores em que se pode alcançar este confinamento (stellarators [1], reverse field pinches [2], [3], etc.) Discutiremos nesta dissertação aspectos de campos magnéticos aplicados a um destes tipos de reatores: o tokamak.

Tokamaks (acrônimo russo para câmara toroidal magnética) é um toróide no qual uma câmara de vácuo contém uma coluna de plasma. O plasma é formado pelo aquecimento ôhmico de um gás que preenche a câmara. Basicamente isto se dá por uma bobina primária externa que gera campos elétricos pulsados no interior do tokamak, fazendo com que o plasma funcione como o circuito secundário de um grande transformador. Este plasma é confinado pela superposição de dois campos magnéticos principais: o campo toroidal produzido por espiras em torno da câmara, e o campo poloidal gerado pela própria corrente de plasma. As linhas de campo magnético resultante são então helicoidais e jazem em torno de superfícies toroidais internas umas às outras (superfícies magnéticas).

A geometria básica de um tokamak é mostrada na figura 1.1, onde denotamos por  $b$  e  $R_0$  o raio menor e raio maior do toróide, respectivamente. A coluna de plasma possui um raio  $a < b$ . O campo magnético de equilíbrio poloidal e toroidal aponta na direção da menor e da maior curvatura, respectivamente. A configuração de linhas de campo resultante pode ser descrita usando um sistema de coordenadas apropriado, ao invés das

coordenadas usuais  $(r, \theta, \phi)$  ou  $(R, \phi, Z)$ , que será abordado no Capítulo 2.

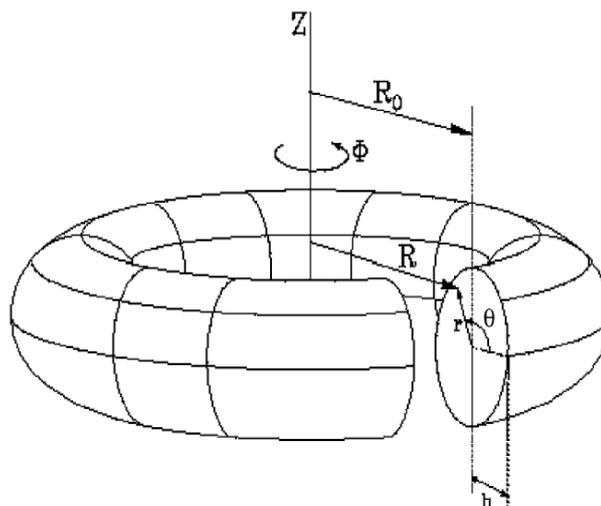


FIGURA 1.1 – Representação esquemática de um tokamak.

Este confinamento, no entanto, não é perfeito. Apesar de considerarmos, em uma aproximação de ordem zero, que as partículas do plasma seguem a trajetória das linhas de campo, elas também estão sujeitas às velocidades de deriva [4]. Estas derivas tornam a trajetória das partículas bastante complexa e surgem devido à variação espacial dos campos. Isto leva à existência de outras forças atuando sobre as partículas além da força de Lorentz. Além disso o plasma pode sofrer várias instabilidades [5], [6] que são precedidas por oscilações no campo poloidal, e podem levar à extinção da corrente de plasma. As partículas que colidem com a parede do tokamak acabam então tornando-se um problema tecnológico, poluindo e resfriando o plasma com impurezas arrancadas da parte interna do tokamak em processos denominados de “sputtering”.

Uma camada de linhas magnéticas caóticas próximas à borda do plasma pode gerar uma região de alto coeficiente de difusão e alta densidade de partículas [7], [8]. A concentração de impurezas na região central do plasma deve ser proporcional ao inverso deste coeficiente de difusão e da densidade [9]. Além disso essa região caótica pode também uniformizar o fluxo de energia térmica para a parede do tokamak, evitando ataques lo-

calizados na estrutura. Sendo assim, torna-se interessante a produção e compreensão de linhas de campo magnético caóticas em tokamaks e a investigação de seus efeitos.

Estes campos surgem no plasma devido à perturbações ressonantes com os campos magnéticos de equilíbrio. Estas perturbações podem ser geradas externamente através de condutores adequadamente enrolados na câmara, carregando uma corrente de perturbação. Devido às diversas janelas de diagnóstico e equipamentos de medição em torno do tokamak, fica inaplicável este enrolamento. Utilizamos então um dispositivo derivado desta idéia: O Limitador Magnético Ergódico (LME), que são fatias deste enrolamento.

Esta dissertação divide-se em 6 capítulos. No capítulo 2 faremos uma breve abordagem sobre o sistema de coordenadas polar-toroidal usado neste trabalho. Usaremos as equações MHD aplicadas a um perfil de densidade de corrente toroidal não monotônico para obtermos a equação de Grad-Shafranov, caracterizando o equilíbrio do plasma. A partir da solução para esta equação, na aproximação de alta razão de aspecto, obtivemos os campos magnético de equilíbrio, definindo e calculando o fator de segurança para estes campos.

No capítulo 3 aplicamos o formalismo hamiltoniano para descrevermos o traçado das linhas de campo magnético. Para isto fez-se uso das coordenadas de ação e ângulo, presente no formalismo de Hamilton-Jacobi. Com isto calcula-se a hamiltoniana total que descreve as linhas de campo sob a perturbação ressonante. Através das equações de Hamilton chegamos às equações de um mapa simplético estroboscópico que fornece as coordenadas canônicas da linha de campo em cada anel do LME.

Os mapas de Poincaré são tratados no capítulo 4. Explicamos lá o surgimento das cadeias de ilhas magnéticas e mostramos que a hamiltoniana total, quando desenvolvida em série de Taylor em torno da ressonância, reduz-se à hamiltoniana de um pêndulo não-

linear com a diferença de um termo cúbico. Mostramos os efeitos da aplicação de uma corrente de perturbação em dez superfícies magnéticas específicas. Explicamos também a ocorrência dos fenômenos de reconexão e bifurcação de duas cadeias de ilhas irmãs. Por fim, caracterizamos o surgimento de linhas de campo magnético caóticas no plasma devido à perturbação.

No capítulo 5 estudamos o escape das linhas caóticas para as paredes do tokamak. Este escape pode ser melhor compreendido através dos: mapas de conexão, bacias de escape, “footprints” e percentuais de incidência. Eles referem-se, respectivamente, à quantidade de voltas toroidais que uma linha de campo realiza antes de escapar, o local para onde uma linha de campo escapa dada uma determinada condição inicial, as impressões deixadas pelas linhas nas paredes da câmara e a quantidade de linhas de campo que incidem em cada posição de escape específica.

As conclusões sobre o trabalho e as considerações finais encontram-se no capítulo 6.

## 2 Equilíbrio MHD

O ponto de partida para o estudo das linhas de campo magnético caóticas em Tokamaks é a configuração de equilíbrio. Esta configuração é obtida através das equações da teoria magnetohidrodinâmica (MHD). Tais equações podem, quando existir simetria azimutal, ser sintetizadas em uma só equação diferencial parcial, a chamada equação de Grad-Shafranov. A resolução de tal equação torna-se mais simples ao escolhermos um sistema de coordenadas que além de representar corretamente a simetria do sistema também simplifica-se ao considerar um tokamak de alta razão de aspecto ( $R_0/a \gg 1$ ).

Neste capítulo faremos uma breve abordagem sobre o sistema de coordenadas utilizado, obteremos a equação de Grad-Shafranov neste sistema (considerando alta razão de aspecto) e os campos magnéticos de equilíbrio derivados da solução desta equação. Por fim, definiremos e calcularemos o fator de segurança.

### 2.1 Sistema de Coordenadas

O sistema de coordenadas polares toroidais foi proposto por Kucinski *et al.* [10] a fim de melhor representar a simetria do sistema que será estudado. Trataremos a seguir três sistemas: O sistema polar local, o toroidal e finalmente o sistema polar toroidal. Assim representaremos as coordenadas de um sistema em termos de outro anteriormente tratado.

### 2.1.1 Coordenadas Polares Locais

Estas coordenadas resultam em seções transversais  $\varphi = cte.$  representadas pelas coordenadas polares  $(r, \theta)$ . Na figura 1.1 usou-se este sistema para representarmos o tokamak. Em termos das coordenadas cilíndricas  $(R, \phi, Z)$  podemos escrever as coordenadas polares locais  $(r, \theta, \varphi)$  como:

$$R = R_0 + r \cos \theta, \quad (2.1)$$

$$Z = r \sin \theta, \quad (2.2)$$

$$\phi = \varphi, \quad (2.3)$$

onde  $R_0$  é a posição do eixo geométrico do toróide, conforme mostrado na figura 1.1.

### 2.1.2 Coordenadas Toroidais

Da mesma maneira que as coordenadas polares locais, as coordenadas toroidais  $(\xi, \omega, \varphi)$  também podem ser relacionadas com as cilíndricas  $(R, \phi, Z)$ . Esta relação é dada por [11]:

$$R = \frac{R'_0 \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \omega}, \quad (2.4)$$

$$Z = \frac{R'_0 \sin \omega}{\cosh \xi - \cos \omega}, \quad (2.5)$$

$$\phi = \varphi. \quad (2.6)$$

Neste sistema as superfícies  $\xi = cte.$  formam toróides de raio menor  $a = R'_0 / \sinh \xi$  e raio maior  $R = R'_0 \coth \xi$ , onde  $R'_0$  é a coordenada do eixo geométrico neste sistema de coordenadas. Tomando  $\omega = cte.$  teremos o traçado de superfícies esféricas de raio

$R'_0/\sinh\omega$  e centradas no eixo  $Z$  em  $Z = R'_0 \cot\omega$ . Deve-se salientar que a coordenada do eixo geométrico,  $R'_0$ , não é coincidente com a do eixo geométrico,  $R_0$ , descrito para coordenadas polares locais.

Apesar do sistema toroidal ser mais sofisticado que o sistema de coordenadas polares locais, ainda é insatisfatório para a resolução do nosso problema. As superfícies de coordenadas constantes ainda não coincidem com as superfícies magnéticas que serão abordadas mais adiante. Também os cálculos analíticos tornam-se demasiadamente complexos.

### 2.1.3 Coordenadas Polares Toroidais

A fim de conciliar simplicidade e simetria, Kucinski *et al.* [10] propuseram o sistema de coordenadas polares toroidais. Este sistema será usado neste trabalho para expressar a configuração de equilíbrio no tokamak.

Escrevemos as coordenadas polares toroidais  $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$  em termos das coordenadas toroidais  $(\xi, \omega, \varphi)$  como:

$$r_t = \frac{R'_0}{\cosh\xi - \cos\omega}, \quad (2.7)$$

$$\theta_t = \pi - \omega, \quad (2.8)$$

$$\varphi_t = \varphi, \quad (2.9)$$

onde

$$R^2 = R'_0{}^2 \left[ 1 - 2 \frac{r_t}{R'_0} \cos\theta_t - \left( \frac{r_t}{R'_0} \right)^2 \sin^2\theta_t \right]. \quad (2.10)$$

relaciona o eixo do sistema polar toroidal com a coordenada cilíndrica  $R$ .

Na figura 2.1 foram traçadas algumas superfícies  $r_t = cte.$  e  $\theta_t = cte.$  em  $\varphi_t = 0$ . Nota-

se que a curvatura das superfícies  $r_t = cte.$  não é constante ao longo das mesmas. Assim, estas não formam circunferências concêntricas como no caso das coordenadas polares locais.

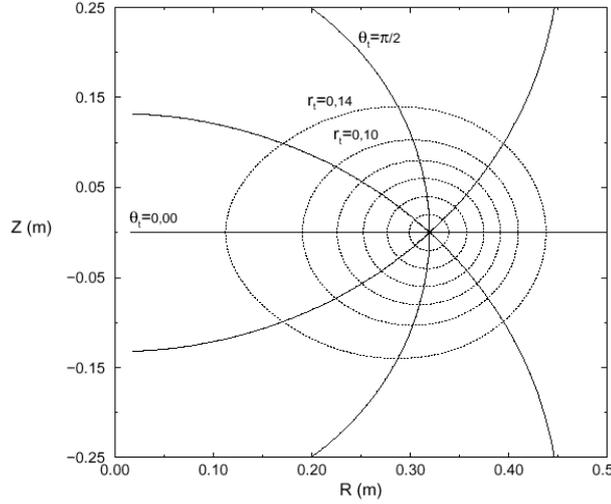


FIGURA 2.1 – Superfícies parametrizadas no sistema de coordenadas polares toroidais.

Percebe-se pela figura que os efeitos de toroidicidade estão intrínsecos neste sistema de coordenadas. Além disso estas coordenadas possuem a vantagem de coincidirem com as polares locais no limite de alta razão de aspecto ( $r \ll R'_0$ ). As seguintes relações entre as coordenadas polares locais e polares toroidais tornam possível a verificação desta afirmação:

$$r_t = r \left[ 1 - \frac{r}{R'_0} \cos \theta + \left( \frac{r}{2R'_0} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.11)$$

$$\sin \theta_t = \sin \theta \left[ 1 - \frac{r}{R'_0} \cos \theta + \left( \frac{r}{2R'_0} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (2.12)$$

## 2.2 Equação de Grad-Shafranov

As equações MHD reúnem as equações de Maxwell e as de Navier-Stokes de forma a fornecer uma descrição do plasma como um fluido contínuo. Sob configurações eixo-

simétricas na condição de equilíbrio (derivadas temporais nulas) estas equações podem ser sintetizadas numa única equação diferencial parcial elíptica denominada equação de Grad-Shafranov [12].

Sob condições de equilíbrio as equações MHD são expressas:

$$\nabla P = \vec{J} \times \vec{B}, \quad (2.13)$$

$$\mu_0 \vec{J} = \nabla \times \vec{B}, \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.15)$$

onde  $P$  é a pressão,  $\vec{J}$  é a densidade de corrente elétrica e  $\vec{B}$  é o campo magnético de equilíbrio. Obtemos de (2.13) que  $\vec{J} \cdot \nabla P = \vec{B} \cdot \nabla P = 0$ . Assim, tanto o campo magnético quanto a densidade de corrente encontram-se sobre superfícies isobáricas ou superfícies magnéticas. Além da condição (2.13) as superfícies magnéticas precisam ser fechadas para assegurar o confinamento do plasma. Considerando então um plasma de simetria azimutal com densidade de corrente na direção toroidal, as superfícies magnéticas devem formar toróides inscritos uns aos outros. A superfície mais interna, no limite de  $r_t \rightarrow 0$ , leva o nome de eixo magnético.

Podemos associar a cada superfície magnética um respectivo fluxo magnético poloidal  $2\pi\Psi_p$ . Este é o fluxo de linhas de campo passando através de um plano que estende-se do eixo magnético até a superfície magnética específica, circulando todo o eixo maior. Como o fluxo poloidal será constante em todos os pontos da superfície magnética,  $\Psi_p$  agirá como um rótulo de cada superfície. Outra quantidade superficial será o fluxo da densidade de corrente poloidal  $2\pi I$ . Este fluxo é referente ao mesmo plano especificado para o fluxo

poloidal. Sendo  $I$ ,  $\Psi_p$  e a pressão  $P$  quantidades superficiais, podemos considerar  $P(\Psi_p)$  e  $I(\Psi_p)$ .

A equação  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  permite-nos escrever o campo magnético de equilíbrio em termos do gradiente de uma função escalar independente da coordenada azimutal. Podemos então utilizar  $\Psi_p$  para expressar o campo de equilíbrio. Em coordenadas polares toroidais  $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$  esta expresssão é dada por [13]

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_\varphi}{r_t \sinh \xi} \times \nabla \Psi_p + B_\varphi \frac{\vec{e}_\varphi}{r_t \sinh \xi}, \quad (2.16)$$

onde  $\xi$  é a coordenada toroidal em relação a qual define-se a coordenada polar toroidal  $r_t$  em (2.7).

Calculando  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  e fazendo uso do restante das equações MHD, encontramos a equação de Grad-Shafranov, que deve ser satisfeita para  $\Psi_p$ . Em coordenadas polares-toroidais a equação de Grad-Shafranov é escrita [10] como

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_t} \frac{\partial}{\partial r_t} \left( r_t \frac{\partial \Psi_p}{\partial r_t} \right) + \frac{1}{r_t^2} \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial \theta_t^2} = \mu_0 J_\varphi(\Psi_p) + \mu_0 R_0'^2 \frac{dP}{d\Psi_p} \left( 2 \frac{r_t}{R_0'} \cos \theta_t + \frac{r_t^2}{R_0'^2} \sin^2 \theta_t \right) + \\ + \frac{r_t}{R_0'} \left[ \cos \theta_t \left( 2 \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial r_t^2} + \frac{1}{r_t} \frac{\partial \Psi_p}{\partial r_t} \right) + \sin \theta_t \left( \frac{1}{r_t^2} \frac{\partial \Psi_p}{\partial \theta_t} - \frac{2}{r_t} \frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial \theta_t \partial r_t} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde o componente toroidal de  $\vec{J}$  é dado por

$$J_\varphi(\Psi_p) = -R_0'^2 \frac{dP}{d\Psi_p} - \frac{d}{d\Psi_p} \left( \frac{1}{2} \mu_0 I \right). \quad (2.18)$$

Vemos então que para se obter a solução da equação (2.17), as funções  $P(\Psi_p)$  e  $I(\Psi_p)$  precisam ser conhecidas *a priori*.

Neste trabalho será considerado sempre um tokamak de alta razão de aspecto ( $r_t/R_0' \rightarrow$

0). Além disso podemos admitir a aproximação que  $\Psi_p(r_t)$  não depende da coordenada poloidal  $\theta_t$ . Estas aproximações simplificam (2.17) a:

$$\frac{1}{r_t} \frac{d}{dr_t} \left( r_t \frac{d\Psi_p}{dr_t} \right) = \mu_0 J_\varphi(r_t). \quad (2.19)$$

Cálculos mostraram [13] que as superfícies magnéticas assim obtidas, admitindo-se  $\Psi_p(r_t)$ , diferiram muito pouco das calculadas considerando uma correção de primeira ordem  $\delta\Psi_p(r_t, \theta_t)$ . Isto garante a validade da aproximação acima. Entretanto convém notar que  $\Psi_p(r_t) = \Psi_p(r, \theta)$ , pois  $r_t = r_t(r, \theta)$ .

A equação de Grad-Shafranov (2.19) coincide com a obtida para um plasma cilíndrico considerando coordenadas polares locais. As soluções para  $\Psi_p$ , no entanto, diferem entre si nestes casos. Apesar de terem a mesma forma analítica, os fluxos poloidais não são os mesmos devido à não coincidência das coordenadas  $r$  e  $r_t$ . Tomando-se uma seção transversal  $\varphi_t = 0$  as superfícies magnéticas obtidas de  $\Psi_p(r_t)$  formam círculos não-concêntricos, deslocados para fora. Este deslocamento é conhecido como deslocamento de Shafranov e deve-se à toroidicidade do sistema.

Nota-se agora, de (2.19), que assumir as funções  $P(\Psi_p)$  e  $I(\Psi_p)$  *a priori* equivale a admitirmos  $J_\varphi$  *a priori*. Vamos considerar nesta dissertação um perfil radial não-monotônico de  $J_\varphi$ , como observado em algumas experiências [14].

$$J_\varphi = \frac{I_p R_0'}{\pi a^2} \frac{(\gamma + 2)(\gamma + 1)}{\beta + \gamma + 2} \left( 1 + \beta \frac{r_t^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{r_t^2}{a^2} \right)^\gamma. \quad (2.20)$$

Nesta equação  $I_p$  é a corrente total de plasma,  $\gamma$  e  $\beta$  são parâmetros ajustáveis e  $a$  é o raio da coluna de plasma.

Substituindo (2.20) em (2.19) encontramos:

$$\frac{d\Psi_p}{dr_t} = \frac{\mu_0 I_p R'_0}{2\pi r_t} \left[ 1 - \left( 1 + \beta' \frac{r_t^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{r_t^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right], \quad (2.21)$$

onde  $\beta' \equiv \beta(\gamma + 1)/(\beta + \gamma + 2)$ .

## 2.3 Campos Magnéticos de Equilíbrio

Da equação (2.16) podemos obter as expressões para os componentes do campo magnético. Estes serão:

$$B_{r_t} = -\frac{1}{R'_0 r_t} \frac{\partial \Psi_p}{\partial \theta_t} = 0, \quad (2.22)$$

$$B_{\theta_t} = \frac{1}{R'_0 r_t} \frac{\partial \Psi_p}{\partial r_t} = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi r_t^2} \left[ 1 - \left( 1 + \beta' \frac{r_t^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{r_t^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right], \quad (2.23)$$

$$B_{\varphi_t} = -\frac{\mu_0 I}{R^2} = \frac{\mu_0 I_e}{2\pi R_0'^2} \left[ 1 - 2 \frac{r_t}{R_0'} \cos \theta_t \right]^{-1}, \quad (2.24)$$

sendo que  $I_e \approx -2\pi I$  [13] é a corrente elétrica externa que produz o campo toroidal.

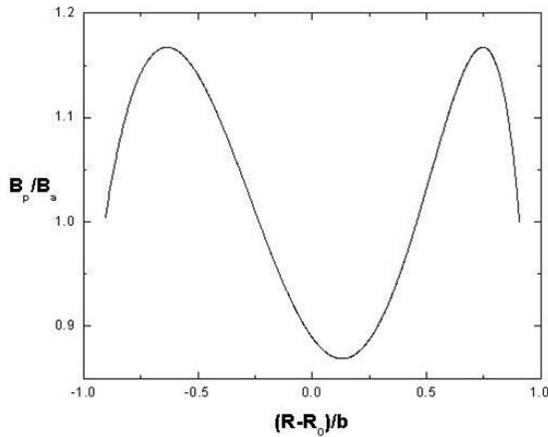


FIGURA 2.2 – Perfil radial normalizado do componente poloidal do campo magnético.

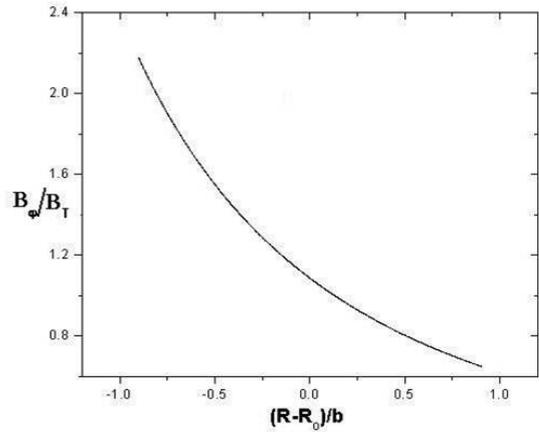


FIGURA 2.3 – Perfil radial normalizado do componente toroidal do campo magnético em  $\theta_t = 0$ .

Nas figuras 2.2 e 2.3 foram traçados os perfis radiais dos componentes do campo

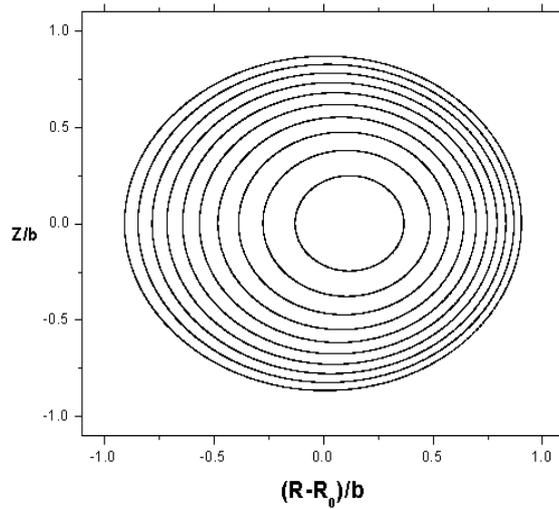


FIGURA 2.4 – Superfícies magnéticas representadas em coordenadas cilíndricas.

magnético. O eixo das abcissas refere-se a valores radiais normalizados em relação ao raio menor  $b$ . O eixo das ordenadas é referente aos componentes  $B_{\theta_t}(r_t)$  e  $B_{\varphi_t}(r_t)$  normalizados respectivamente em relação a  $B_a = B_{\theta_t}(a)$  e  $B_T = B_{\varphi_t}(0)$ . Os parâmetros usados foram  $\gamma = 0,8$  e  $\beta = 3,0$ .

Nota-se que o campo poloidal é aproximadamente simétrico e apresenta um “buraco” central. A quase-simetria é devido a fraca influência da toroidicidade do sistema nesta componente. Já a concavidade central acontece devido ao perfil de  $J_\varphi$  admitido, que também tem esta característica. O campo toroidal é visivelmente mais intenso no lado interno do tokamak. A toroidicidade exerce aqui um efeito muito maior. Este fato deve-se a uma maior concentração de espiras que geram o campo toroidal no lado interno da câmara.

Observando a figura 2.4 percebemos claramente que as superfícies magnéticas não formam círculos concêntricos, como já havíamos antecipado. Fica também explícito agora o desvio do eixo magnético em relação ao eixo geométrico  $R_0$  (desvio de Shafranov), anteriormente descrito. Torna-se claro então a ineficiência do uso de coordenadas polares locais para descrever o sistema.

## 2.4 Fator de Segurança

As linhas de campo magnético resultantes da soma dos componentes poloidal e toroidal terão um formato helicoidal. Como vimos na figura 2.4 as superfícies magnéticas não possuem simetria poloidal. Com isto a helicidade das linhas de campo não é constante, sendo mais intensa na região externa (onde  $B_{\varphi_t}$  é menos intenso) e menos intensa na região interna do tokamak (onde  $B_{\varphi_t}$  é mais intenso).

Para descrevermos uma linha em termos de suas coordenadas precisamos resolver a equação

$$\vec{B} \times d\vec{l} = 0, \quad (2.25)$$

onde  $d\vec{l}$  é um elemento infinitesimal da linha de campo. Como a linha de campo não se propaga radialmente  $dr_t = 0$ . Isto permite-nos expressar (2.25) como

$$\frac{d\varphi_t}{d\theta_t} = \frac{B_{\varphi_t}}{B_{\theta_t}}. \quad (2.26)$$

Podemos definir uma inclinação local das linhas de campo  $\nu = d\varphi_t/d\theta_t$ . Na figura

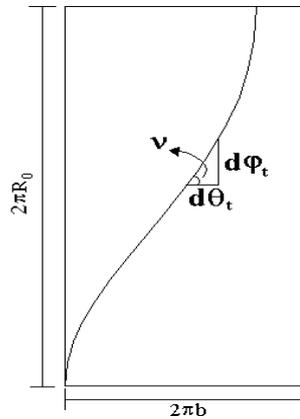


FIGURA 2.5 – Esquema indicando a inclinação local de uma linha de campo magnético.

2.5 mostramos esquematicamente uma linha de campo e sua respectiva inclinação local

bidimensionalmente. Neste esquema  $b$  é o raio menor do tokamak e  $R_0$  é o eixo geométrico.

A partir de  $\nu$  podemos definir uma inclinação média das linhas de campo, denominada fator de segurança, dado por

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu d\theta_t. \quad (2.27)$$

O nome fator de segurança se deve ao fato de que precisa-se de um valor para  $q \geq 1$  no eixo magnético para que o plasma seja estável [15].

Substituindo (2.26) em (2.27) obtemos

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{B_{\varphi_t}}{B_{\theta_t}} d\theta_t. \quad (2.28)$$

Integrando agora para as expressões dos campos magnéticos dadas por (2.23) e (2.24) obtemos para o fator de segurança

$$q(r_t) = q_c(r_t) \left[ 1 - 4 \left( \frac{r_t}{R'_0} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (2.29)$$

em que

$$q_c(r_t) = q_c(a) \frac{r_t^2}{a^2} \left[ 1 - \left( 1 + \beta' \frac{r_t^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{r_t^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right]^{-1}. \quad (2.30)$$

Na equação (2.30) o valor de  $q_c(a) = I_e a^2 / I_p R_0'^2$ . Portanto a corrente total de plasma  $I_p$  é escolhida ao impormos um valor para  $q(a)$ . Neste trabalho usou-se um valor  $q(a) \approx 5$ ,  $I_e = 4 \times 10^6$  A,  $a = 0,18$  m e  $R_0 = 0,61$  m resultando em um valor para  $I_p = 7 \times 10^4$  A.

A figura 2.6 mostra o perfil radial do fator de segurança utilizando os parâmetros  $\beta = 3,0$  e  $\gamma = 0,8$ . Podemos perceber que ao impormos um  $J_\varphi$  não monotônico o fator de segurança apresenta o mesmo tipo de perfil radial. Sendo assim existirão dois valores de  $r_t$  com um mesmo fator de segurança. Este aspecto será crucial, como veremos adiante,

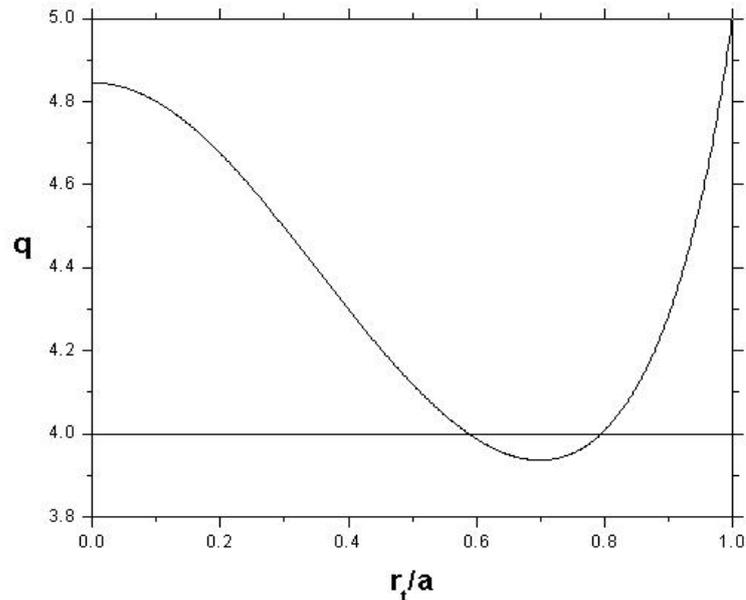


FIGURA 2.6 – Perfil radial normalizado do fator de segurança. Os valores dos parâmetros usados foram  $\gamma = 0,8$  e  $\beta = 3,0$ .

na caracterização do sistema na presença de campos magnéticos perturbativos.

Como foi definido, o fator de segurança passa a representar uma média da helicidade das linhas de campo. Mais especificamente é uma média do ângulo toroidal percorrido enquanto uma linha de campo executa uma volta no sentido poloidal. Portanto, quando uma superfície magnética possui um valor de  $q = m/n$  racional teremos linhas de campo que se fecham após completar  $m$  voltas no sentido toroidal e  $n$  no sentido poloidal. Se o valor de  $q$  for irracional significa que a linha de campo nunca retorna a posição inicial, ocupando (em um tempo infinito) todos os pontos da superfície magnética.

# 3 Formalismo Hamiltoniano para Linhas de Campo

O formalismo hamiltoniano é uma elegante e prática maneira de se descrever sistemas dinâmicos conservativos. As poderosas ferramentas que foram desenvolvidas neste cenário ao longo dos anos (teoria clássica de perturbação, transformações canônicas, equação de Hamilton-Jacobi, teoria KAM (Kolmogorov Arnold Moser), etc.) possibilita-nos uma grande simplificação no tratamento de equações de movimento.

Neste capítulo escreveremos a equação (2.25), que fornece o traçado das linhas de campo, como equações de movimento utilizando este belo formalismo. Para isto a variável cíclica  $\varphi_t$  pode ser considerada análoga à variável tempo  $t$  presente em sistemas dinâmicos. As outras coordenadas do traçado das linhas de campo serão relacionadas com a posição e momento canônico conjugados de uma hamiltoniana.

Além disso também será considerada uma perturbação espacialmente periódica, gerada por Enrolamentos Helicoidais Resonantes (EHR) no tokamak. Escreveremos o potencial magnético gerado por estes condutores. Descreveremos também o Limitador Magnético Ergódico (LME): um dispositivo derivado do EHR. Por fim, representaremos a hamiltoniana do sistema perturbado pela ação do LME.

### 3.1 Configuração de Equilíbrio

A equação (2.25) descreve as coordenadas de uma linha de campo através de

$$\frac{d\theta_t}{d\varphi_t} = \frac{B_{\theta_t}}{B_{\varphi_t}}, \quad (3.1)$$

$$\frac{dr_t}{d\varphi_t} = \frac{B_{r_t}}{B_{\varphi_t}}. \quad (3.2)$$

No entanto as coordenadas  $(r_t, \theta_t)$  não permitem-nos escrever as equações acima na forma de equações de Hamilton. Apesar de estarmos tratando um sistema conservativo (mesmo quando sob a ação de perturbações) as equações (3.1) e (3.2) não respeitam o Teorema de Liouville. Este teorema afirma que para sistemas conservativos a área ocupada no espaço de fase para um conjunto de condições iniciais é constante ao evoluirmos dinamicamente este sistema. Para satisfazer esta condição precisamos introduzir novas variáveis a partir de  $r_t$  e  $\theta_t$ , de forma que as novas variáveis constituam um par canonicamente conjugado.

O sistema tratado é conservativo e possui a coordenada  $\theta_t$  periódica, ou seja,  $\theta_t = \theta_t + 2\pi$ . Estas características são necessárias e suficientes para utilizarmos as coordenadas de ação  $J$  (não confundir com a densidade de corrente  $\vec{J}$ ) e ângulo  $\vartheta$ , derivadas da equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo [16]. A coordenada de ação será o momento canonicamente conjugado e o ângulo será a posição canônica. Para que utilizemos estas coordenadas, a hamiltoniana do sistema deve ser representada apenas em termos de  $J$ . Sendo assim as equações de Hamilton ficam

$$\frac{dJ}{d\varphi_t} = -\frac{\partial H_0(J)}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{d\vartheta}{d\varphi_t} = \frac{\partial H_0(J)}{\partial J} = \Omega(J). \quad (3.3)$$

Integrando as equações (3.3) obtemos

$$J = cte., \quad \vartheta = \Omega(J)\varphi_t + \vartheta_0. \quad (3.4)$$

Precisamos agora estabelecer a relação entre  $(r_t, \theta_t)$  e  $(J, \vartheta)$ . Como  $J$  deve ser constante em  $\varphi_t$ , podemos fazer uso da simetria azimutal do sistema e definir  $J$  como o fluxo de campo magnético toroidal normalizado. Esta quantidade é claramente constante em relação à coordenada  $\varphi_t$ , satisfazendo a condição expressa por (3.4), e é dada por

$$\begin{aligned} J(r_t) &= \frac{1}{2\pi R'_0 B_T} \int B_{\varphi_t} d\sigma_3 \\ &= \frac{1}{4} \left[ 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{r_t^2}{R_0^2}} \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde  $\sigma_3$  é o elemento de área  $\varphi_t = cte.$  em relação a qual o fluxo do campo  $B_{\varphi_t}$  será considerado. Sendo assim, podemos concluir que cada superfície magnética será relacionada com um valor de  $J$  específico.

A taxa de variação de  $\vartheta$  em relação a  $\varphi_t$  deve depender unicamente de  $J$  segundo (3.4). Como  $J = J(r_t)$  podemos representar o fator de segurança como  $q(J)$ . Existirá portanto um fator de segurança específico para as linhas pertencentes a uma mesma superfície magnética. A teoria permite-nos então definir  $\Omega \equiv 1/q(J)$ . Podemos notar de (3.4) que para uma superfície magnética de fator de segurança racional  $q(J) = m/n$  temos a equação do traçado de  $\vartheta$  dada por:

$$m\vartheta - n\varphi_t = cte. \quad (3.6)$$

A variável  $\vartheta$  dependerá linearmente de  $\varphi_t$  e seu valor em  $\varphi_t = 0$  será relacionado com a *cte.* da equação (3.6). Esta dependência em relação à  $\varphi_t$  não acontece para  $\theta_t$ . Neste caso a relação deixa de ser linear e passa a ser governada pela equação diferencial (3.1). Na figura 3.1 estão representados os traçados de  $\vartheta$  e  $\theta_t$  em relação a  $\varphi_t$ . Foi escolhido um valor de  $q(J) = m/n = 4/1$ . Para o traçado de  $\theta_t$  foi selecionado um  $r_t^0$  correspondente a  $q(r_t^0) = 4$  em função do qual tomamos  $B_{\theta_t}(r_t^0)$ , e  $B_{\varphi_t}(r_t^0, \theta_t)$  em (3.1). A maneira

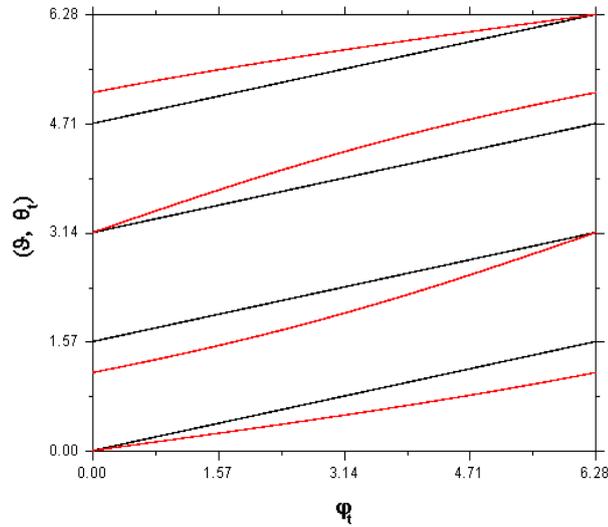


FIGURA 3.1 – Traçado das variáveis  $\vartheta$  (linha preta) e  $\theta_t$  (linha vermelha) em relação a  $\varphi_t$  de uma linha de campo localizada sobre uma superfície magnética de  $q = 4$ .

de relacionarmos o traçado destas variáveis nos fornece então a transformação canônica  $\theta_t \rightarrow \vartheta$ . Esta relação é dada por Boozer [17] como:

$$\begin{aligned} \vartheta(r_t, \theta_t) &= \frac{1}{q(r_t)} \int_0^{\theta_t} \frac{B_{\varphi_t}}{B_{\theta_t}} d\theta_t \\ &= 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sqrt{1 + 2 \frac{r_t}{R_0'}}}{\sqrt{1 - 2 \frac{r_t}{R_0'}}} \left( \frac{\sin \theta_t}{1 + \cos \theta_t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Obtivemos então através das equações (3.5) e (3.7) a transformação canônica  $(r_t, \theta_t) \rightarrow (J(r_t), \vartheta(r_t, \theta_t))$ . Resta-nos agora encontrar a hamiltoniana que governa estas variáveis. Havíamos definido anteriormente que  $\Omega \equiv 1/q(J)$ . Da equação (3.3) temos claramente a

relação entre  $\Omega$  e  $H(J)$ . Sendo assim

$$H_0(J) = \int_0^J \frac{dJ}{q(J)} = \int_0^{r_t} \frac{dJ/dr_t}{q(r_t)} dr_t. \quad (3.8)$$

Mas também temos que

$$\frac{dJ}{dr_t}/q(r_t) = \frac{1}{B_T R_0^2} \frac{d\Psi_p(r_t)}{dr_t}, \quad (3.9)$$

onde  $d\Psi_p/dr_t$  é dado pela equação (2.21). Substituindo então (3.9) em (3.8) concluímos que:

$$H_0(J) = \frac{1}{B_T R_0^2} \Psi_p(J). \quad (3.10)$$

## 3.2 Campo Perturbativo

Pretende-se agora adicionar um termo perturbativo  $\epsilon H_1(J, \vartheta, \varphi_t)$  à hamiltoniana de equilíbrio  $H_0$ . Com isto o sistema deixa de ser integrável, ou seja, não valem mais as relações (3.3). A dependência explícita da variável  $\varphi_t$  em  $H_1$  deixa evidente a quebra de simetria do sistema. Como  $H_1$  dependerá de duas variáveis angulares podemos, sem perda de generalidade, representá-la como uma série de Fourier nestas variáveis

$$H_1 = \sum_{m,n} A_{m,n}(J) e^{i(m\vartheta - n\varphi_t)}. \quad (3.11)$$

Na equação acima  $m$  e  $n$  são os números que caracterizam e representam os modos toroidal e poloidal, respectivamente. Os coeficientes  $A_{m,n}(J)$  estão relacionados com o tipo específico de perturbação.

### 3.2.1 Enrolamento Helicoidal Ressonante (EHR)

Para produzirmos uma perturbação que possa ser representada pela equação (3.11) sugere-se usar um Enrolamento Helicoidal Ressonante (EHR). O EHR consiste em um par de condutores carregando, cada um, uma corrente de perturbação  $I_h$  em direções opostas, enrolados de maneira adequada em torno do tokamak. Os condutores devem fechar-se sobre si após realizarem  $m_0$  voltas toroidais e  $n_0$  poloidais. Além disso o passo de enrolamento deve coincidir com o a maneira que as linhas de campo realizam o traçado. Ou seja, o enrolamento dos condutores deve obedecer a lei

$$m_0\vartheta - n_0\varphi_t = u, \quad (3.12)$$

onde  $u$  é  $m_0$  vezes o valor de  $\vartheta$  no início do enrolamento, ou seja, em  $\varphi_t = 0$ . Usa-se para cada um dos dois condutores os valores  $u = 0$  e  $u = \pi$ . Os valores de  $m_0$  e  $n_0$  na equação (3.12) são referentes à superfície magnética com  $q(J) = m_0/n_0$  em que deseja-se produzir uma ressonância perturbativa principal.

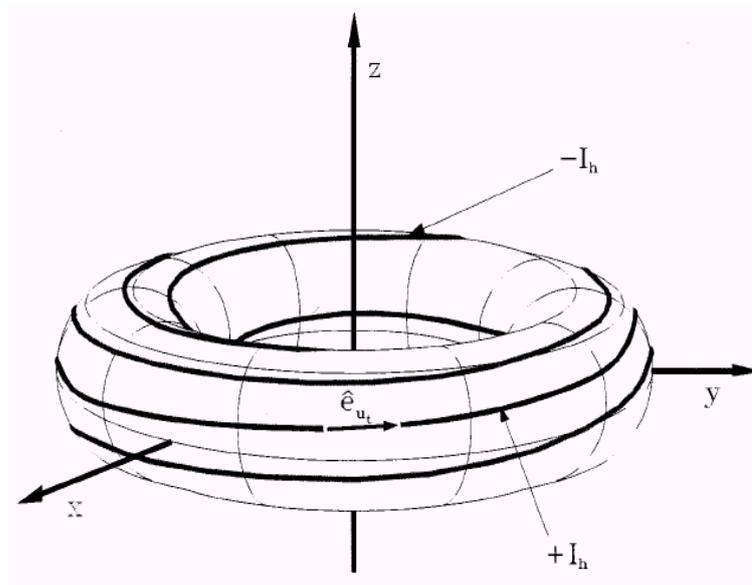


FIGURA 3.2 – Visão esquemática de um EHR de  $(m_0, n_0) = (4, 1)$  em um tokamak.

É importante, para o cálculo do potencial gerado pelo EHR, expressarmos a lei de enrolamento em termos do ângulo  $\theta_t$ . Para isto desenvolve-se a variável  $\vartheta$  em uma série de Fourier [13] dada por

$$\vartheta = \theta_t + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l(r_t) \sin(l\theta_t). \quad (3.13)$$

Tomando apenas a correção de primeira ordem, obtemos a dependência

$$\vartheta = \theta_t + \lambda \sin \theta_t, \quad (3.14)$$

onde  $\lambda$  é dado por

$$\lambda = \alpha_1 = \sqrt{1 - 4 \left( \frac{r_t}{R'_0} \right)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!} 2 \left( \frac{r_t}{R'_0} \right)^{2k+1}. \quad (3.15)$$

a lei de enrolamento em termos de  $\theta_t$  é dada então por

$$m_0(\theta_t + \lambda \sin \theta_t) - n_0 \varphi_t = u. \quad (3.16)$$

Vemos pela equação (3.15) que o fator de modulação  $\lambda$  depende de  $r_t$ . Fica então implícita sua dependência com o fator de segurança  $q(r_t)$ . Sendo assim, cada modo de enrolamento  $(m_0, n_0)$  será relacionado com um  $q = m_0/n_0$  a partir do qual calcula-se  $\lambda$ . Na figura 3.3 podemos notar a dependência entre  $\lambda$  e  $q(J)$ . O fato de  $q(J)$  ser não monotônico implica que um mesmo  $q(J)$  seja relacionado a dois valores de  $\lambda$ . Cada um dos dois valores irá beneficiar a ressonância com uma das duas superfícies que possuem o mesmo  $q(J)$ .

Para obtermos  $H_1$  gerado pelo EHR precisamos resolver a equação  $\vec{B}_P = \nabla \Phi_M$ , onde  $\vec{B}_P$  é o campo magnético perturbativo e  $\Phi_M$  é o potencial escalar magnético gerado pelo

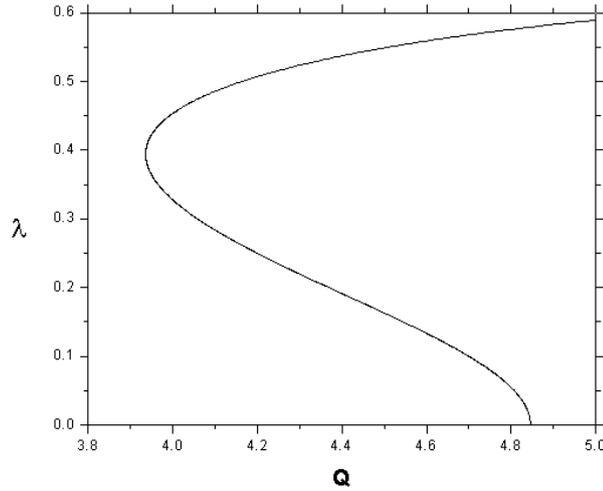


FIGURA 3.3 – Dependência do fator de modulação  $\lambda$  com o fator de segurança da superfície resonante. Foram usados os valores de parâmetros  $\gamma = 0,8$  e  $\beta = 3,0$

EHR. O campo magnético  $\vec{B}_P$  pode ser escrito como um gradiente, pois está sendo calculado em uma região considerada livre de densidades de correntes, ou seja,  $\nabla \times \vec{B}_P = 0$ . Sendo assim  $\vec{B}_P$  passa a ser um campo conservativo. O potencial escalar  $\Phi_M$  é então obtido [18] resolvendo a equação de Laplace. O potencial vetor  $\vec{A}_M$  correspondente a  $\Phi_M$ , tal que  $\vec{B}_P = \nabla \times \vec{A}_M$ , possui componente azimutal dado por [18]

$$A_{\varphi_t} = -\frac{\mu_0 I_h R'_0}{\pi} \sum_{k=-m_0}^{m_0} \mathcal{J}_k(m_0 \lambda) \left( \frac{r_t}{b_t} \right)^{(m_0+k)} e^{i[(m_0+k)\theta_t - n_0 \varphi_t]}. \quad (3.17)$$

Nesta equação  $b_t$  é o valor do raio da câmara, onde estão enrolados os condutores. As funções  $\mathcal{J}_k$  são funções de Bessel cilíndricas de ordem inteira.

Os componentes do campo magnético perturbativo serão representados em termos de  $A_{\varphi_t}$  como

$$B_{P_{r_t}} = -\frac{1}{r_t R'_0} \frac{\partial A_{\varphi_t}}{\partial \theta_t}, \quad (3.18)$$

$$B_{P_{\theta_t}} = \frac{1}{r_t R'_0} \frac{\partial A_{\varphi_t}}{\partial r_t}, \quad (3.19)$$

$$B_{P_{\varphi_t}} = 0. \quad (3.20)$$

Comparando as equações (3.18)-(3.19) com (2.22)-(2.23) percebemos que os componentes do campo de equilíbrio dependem de  $\Psi_p$  da mesma maneira que os componentes do campo de perturbação dependem de  $A_{\varphi_t}$ . Com isto podemos representar a hamiltoniana total do sistema como:

$$\begin{aligned} H &= H_0(J) + H_1(J, \vartheta, \varphi_t) \\ &= \frac{1}{B_T R_0^2} \Psi_p(J) + \frac{1}{B_T R_0^2} A_{\varphi_t}(J, \vartheta, \varphi_t). \end{aligned} \quad (3.21)$$

### 3.2.2 Limitador Magnético Ergódico (LME)

Como foi visto anteriormente, pode-se criar perturbações ressonantes utilizando um EHR. No entanto, existem problemas práticos que dificultam a utilização deste dispositivo em tokamaks. Existe um grande número de janelas de diagnóstico em torno da câmara, dificultando o enrolamento dos condutores da maneira especificada na seção anterior.

Foi proposto então por F. Karger [8] e W. Engelhardt [7], a idéia do limitador magnético ergódico. O LME consiste em  $N_a$  anéis de largura  $\ell$ , representando fatias de EHRs, envolvendo “poloidalmente” o tokamak. Sendo assim cada anel deve possuir  $m_0$  pares de condutores, orientados na direção toroidal e cada par carregando uma corrente  $I_h$  em sentidos opostos. A maneira que os condutores são arranjados no LME deve continuar obedecendo a lei de enrolamento (3.16). Ou seja, o LME consiste de “pedaços” do EHR extendendo-se em um comprimento finito  $\ell$  na direção toroidal. Usamos neste trabalho uma valor para  $\ell = 0,08\text{m}$ . Vemos a seguir uma figura esquemática do LME e de um anel específico.

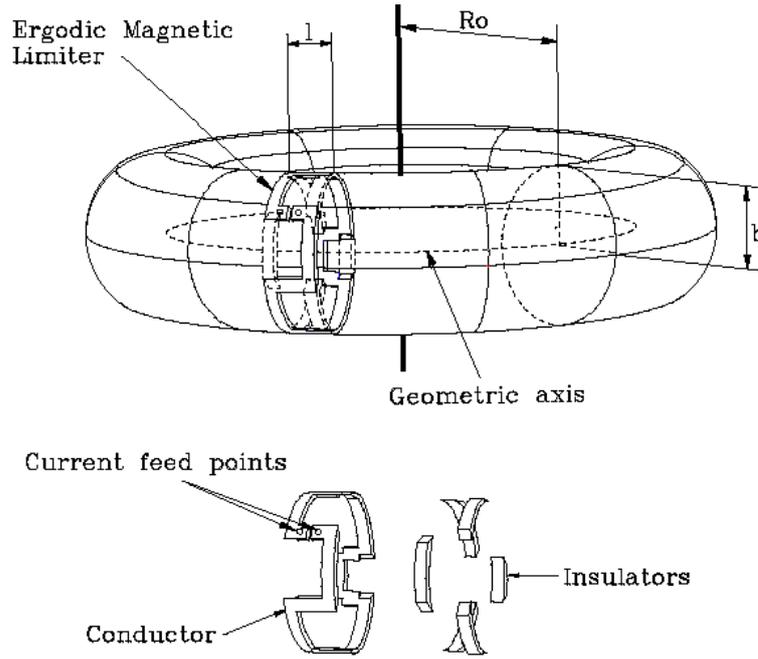


FIGURA 3.4 – Visão esquemática de um LME em um tokamak. Abaixo temos a visão de um único anel de LME.

### 3.2.3 Hamiltoniana de Perturbação Gerada pelo LME

Vimos na descrição do LME que este não passa de fatias estreitas de um EHR. Assim a sua ação pode ser definida como funções delta na posição dos anéis limitadores. A hamiltoniana perturbada então passa a ser escrita como

$$H_1 = \frac{1}{B_T R_0^2} A_{\varphi_t}(J, \vartheta, \varphi_t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\varphi_t - k \frac{2\pi}{N_a}\right), \quad (3.22)$$

onde  $N_a$  é o número de anéis limitadores. Com isto podemos escrever a hamiltoniana total do sistema

$$H(J, \vartheta, \varphi_t) = H_0(J) + \epsilon H_1(J, \vartheta, \varphi_t), \quad (3.23)$$

onde o parâmetro de perturbação é dado por

$$\epsilon = 2 \left( \frac{\ell}{2\pi R_0'} \right) \left( \frac{I_h}{I_e} \right). \quad (3.24)$$

As equações de Hamilton passam agora a ser escritas como

$$\frac{dJ}{d\varphi_t} = -\frac{\partial H_0(J)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \epsilon H_1(J, \vartheta, \varphi_t)}{\partial \vartheta} = 0 + \epsilon f, \quad (3.25)$$

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi_t} = \frac{\partial H_0(J)}{\partial J} + \frac{\partial \epsilon H_1(J, \vartheta, \varphi_t)}{\partial J} = 1/q(J) + \epsilon g, \quad (3.26)$$

em que temos:

$$f = -\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta}, \quad g = \frac{\partial H_1}{\partial J}. \quad (3.27)$$

Como  $H_1$  terá valor não nulo somente em  $\varphi_t = k2\pi/N_a$  as coordenadas canônicas  $(J, \vartheta)$  terão um comportamento regular, dado pelas equações (3.4), em valores de  $\varphi_t$  não coincidentes com a posição dos anéis. Sendo assim podemos escrever um mapa  $\hat{M}$  que relaciona as coordenadas canônicas  $(J_{n+1}, \vartheta_{n+1})$  em  $\varphi_t = \varphi_{t(n+1)}$  com as coordenadas  $(J_n, \vartheta_n)$  na posição  $\varphi_t = \varphi_{t(n)}$ , onde  $(\varphi_{t(n)}, \varphi_{t(n+1)} \dots \varphi_{t(N_a)})$  são as posições dos  $N_a$  anéis do LME. Definimos o mapa estroboscópico então como [19]

$$(J_{n+1}, \vartheta_{n+1}) = \hat{M}(J_n, \vartheta_n). \quad (3.28)$$

As equações (3.25) e (3.26) fornecem:

$$J_{n+1} = J_n + \epsilon f(J_{n+1}, \vartheta_n, \varphi_n), \quad (3.29)$$

$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_n + \frac{2\pi/N_a}{q(J_{n+1})} + \epsilon g(J_{n+1}, \vartheta_n, \varphi_n), \quad (3.30)$$

$$\varphi_{t(n+1)} = \varphi_{t(n)} + \frac{2\pi}{N_a}. \quad (3.31)$$

Podemos então mapear as linhas de campo através deste modelo impulsivo para as

equações de Hamilton. Isto reduz severamente o tempo computacional gasto comparado à integração numérica das equações diferenciais para os campos magnéticos. Este aspecto possibilitou-nos analisar as linhas de campo através de vários métodos da dinâmica não-linear com um tempo computacional razoável.

## 4 Mapas de Poincaré

O Mapa de Poincaré é uma ferramenta muito útil que possibilita-nos analisar a dinâmica de um sistema  $n$ -dimensional através de uma figura com dimensão  $(n - 1)$ . Para um sistema hamiltoniano dependente do tempo e com um grau de liberdade este mapa consiste em um espaço de fase bidimensional (momento vs. posição) onde é representada, através de pontos, a configuração do sistema em intervalos de tempo fixo. Quando o sistema apresenta alguma periodicidade costuma-se usar este período como intervalo de tempo.

Como no nosso caso a coordenada  $\varphi_t$  desempenha o papel do tempo em um sistema dinâmico, o Mapa de Poincaré será um espaço de fase ( $J$  vs.  $\vartheta$ ) onde os valores destas coordenadas serão registrados em valores de  $\varphi_t = 0, 2\pi, \dots, 2n\pi$ . Para isto é dado um conjunto de condições iniciais que forneçam um grande número de possibilidades de evolução do sistema. Temos, portanto, o Mapa de Poincaré  $\hat{M}^{N_a}$  sendo definido a partir do mapa estroboscópico (3.29)-(3.31) como

$$(J_{n+N_a}, \vartheta_{n+N_a}) = \hat{M}^{N_a}(J_n, \vartheta_n). \quad (4.1)$$

Neste capítulo mostraremos algumas características do Mapa de Poincaré para linhas magnéticas sob a perturbação de um LME. Discutiremos a formação de cadeias de ilhas ao redor de superfícies magnéticas de fator de segurança racional. Faremos também uma

breve discussão sobre os fenômenos de reconexão e bifurcação de cadeias irmãs e a formação da barreira de transporte. Faremos, por fim, uma descrição das linhas magnéticas caóticas que se formam devido à perturbação.

## 4.1 Formação das Cadeias de Ilhas

Quando um sistema integrável e não degenerado  $H_0(J)$  é perturbado por uma função  $\epsilon H_1$ , tal que,  $H_1(J, \vartheta + 2\pi) = H_1(J, \vartheta)$  e  $\epsilon$  é suficientemente pequeno ( $\epsilon H_1 \ll 1$ ) podemos aplicar os resultados da teoria KAM [20]. Esta teoria prova (de maneira fortemente não trivial) que para a maioria das condições iniciais o movimento é predominantemente quase-periódico, isto é, suas coordenadas canônicas continuam confinadas em superfícies toroidais (embora um pouco deformadas).

Para o caso específico, temos que, ao adicionarmos o termo perturbativo na hamiltoniana de equilíbrio a maioria das superfícies magnéticas toroidais não serão destruídas, mas na verdade, apenas deformadas. Estas superfícies serão aquelas cujos  $q(J)$  assumem valores suficientemente irracionais. As superfícies destruídas, aquelas com valores de  $q(J) = m/n$  racional, terão um número par  $2m$  de pontos sobreviventes sendo que a metade deles será estável (ou elíptico) e a outra metade será instável (ou hiperbólico), segundo o teorema de Poincaré-Birkhoff [21]. Segundo o mesmo teorema teremos uma cadeia de ilhas do tipo pendulares circulando os pontos elípticos. A medida que aumentamos a perturbação os pontos elípticos vão tornando-se instáveis e as ilhas que o cercam vão, da mais externa à mais interna, deixando de ser curvas fechadas e acabam se “dissolvendo” no espaço de fase. Este processo semeia o aparecimento de linhas caóticas no tokamak.

No nosso caso a teoria KAM não é válida. Isto porque estamos tratando de um sistema degenerado. A característica não-monotônica do fator de segurança, evidenciada na figura 2.6, faz com que um valor de  $q$  esteja relacionado com dois valores de  $J$  diferentes. Assim, a teoria KAM não descreve os fenômenos de reconexão e bifurcação de duas cadeia de ilhas, que serão abordados adiante. Outro fato não descrito pela teoria é a existência de ilhas que não apresentam características pendulares (isto é, não aumentam o tamanho com  $\sqrt{\epsilon}$ ). No entanto, o fato das superfícies racionais serem destruídas e as irracionais serem poupadas ainda é observado. Apesar de se formarem cadeias de ilhas em torno de todas as superfícies racionais, elas serão mais pronunciadas nas superfícies ressonantes com a perturbação principal  $m_0/n_0$ .

Para saber como se dá a ressonância de uma superfície de  $q = m_0/n_0$  com uma perturbação de modo  $(m_0, n_0)$  precisamos desenvolver a hamiltoniana em série de Taylor em torno de  $J_1^*$  e  $J_2^*$  correspondentes a este valor de fator de segurança [22], [23]. Além disso devemos “pinçar” da série de Fourier (3.11) que representa  $H_1$  o termo responsável pela ressonância escolhida. Temos então que a hamiltoniana, representando a função delta como uma série de Fourier, pode ser expressa da seguinte forma:

$$H(J, \vartheta, \varphi_t) = H_0(J) + \epsilon \sum_{m=0}^{2m_0} \sum_{s=-\infty}^{\infty} A_m(J) \cos[m_0 \vartheta - (n_0 + sN_a) \varphi_t] \quad (4.2)$$

Para analisarmos o comportamento local faremos  $m = m_0$  e  $s=0$ . Devemos lembrar que  $dH_0/dJ = \Omega(J) = n/m$  e ao tomarmos valores em  $J = J^*$  teremos  $\Omega_0(J^*) = n_0/m_0$ . Fazendo então o desenvolvimento em Taylor até o terceiro termo de  $H$  e desprezando o termo constante por não contribuir nas equações de Hamilton obtemos:

$$H \approx \Omega_0(J^*)\Delta J + \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{dJ} \Big|_{J=J^*} (\Delta J)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^2\Omega}{dJ^2} \Big|_{J=J^*} (\Delta J)^3 + \epsilon A_{m_0}(J^*) \cos(m_0\vartheta - n_0\varphi_t), \quad (4.3)$$

onde

$$\Delta J = J - J^*. \quad (4.4)$$

A variável  $\varphi_t$  é eliminada da expressão através de uma transformação canônica de variáveis  $(\Delta J, \vartheta) \rightarrow (\Delta J', \vartheta')$ . Esta transformação é feita através da função geratriz

$$S(\Delta J', \vartheta, \varphi_t) = \left( \vartheta - \frac{n_0}{m_0} \varphi_t \right) \Delta J'. \quad (4.5)$$

Temos portanto a seguinte transformação canônica:

$$\Delta J = \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \rightarrow \Delta J' = \Delta J, \quad (4.6)$$

$$\vartheta' = \frac{\partial S}{\partial \Delta J'} \rightarrow \vartheta' = \vartheta - \frac{n_0}{m_0} \varphi_t, \quad (4.7)$$

$$H' = H + \frac{\partial S}{\partial \varphi_t} = H - \frac{n_0}{m_0} \Delta J'. \quad (4.8)$$

Substituindo as expressões (4.6)-(4.8) em (4.3) e definindo

$$M \equiv \frac{d\Omega}{dJ} \Big|_{J=J^*}, \quad W \equiv -\frac{1}{2} \frac{d^2\Omega}{dJ^2} \Big|_{J=J^*}, \quad K \equiv \epsilon A_{m_0}(J^*), \quad (4.9)$$

chegamos à seguinte hamiltoniana local

$$H'(J', \vartheta') = \frac{M}{2} \Delta J'^2 - \frac{W}{3} \Delta J'^3 + K \cos(m_0\vartheta'). \quad (4.10)$$

Se  $W = 0$  esta hamiltoniana reduz-se à de um pêndulo não-linear. Devido à característica não pendular das ilhas, causada pela degenerescência do sistema, necessitamos realizar o desenvolvimento em Taylor até o termo cúbico.

As equações de Hamilton para a hamiltoniana quase-pendular ficam então

$$\frac{d\Delta J'}{d\varphi_t} = m_0 K \sin(m_0 \vartheta'), \quad \frac{d\vartheta'}{d\varphi_t} = \Delta J' (M - W \Delta J'). \quad (4.11)$$

Teremos nas equações acima dois conjuntos de pontos de equilíbrio, correspondendo aos pontos sobreviventes das superfícies  $J_1^*$  e  $J_2^*$ , respectivamente. São eles  $(\Delta J' = 0, \vartheta' = l\pi/m_0)$  e  $(\Delta J' = M/W, \vartheta' = l\pi/m_0)$ , onde  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Cada conjunto de pontos fixos terá uma metade de pontos hiperbólicos e outra metade de pontos elípticos.

## 4.2 Efeito da Perturbação nas Linhas de Campo

Traçaremos agora alguns mapas de Poincaré para dez condições iniciais que, na ausência de perturbação, correspondem a dez superfícies magnéticas. Os pontos vermelhos nos mapas marcam  $(J, \vartheta)$  iniciais de onde se começa a iterar o mapa  $\hat{M}^{N_a}$ . Cada condição inicial foi iterada 5000 vezes, registrando assim, 5000 pontos no mapa de Poincaré. O modo de perturbação principal escolhido foi  $(m_0, n_0) = (4, 1)$ . Os valores dos parâmetros de equilíbrio foram  $\gamma = 0,78$ ;  $\beta = 3,0$  e  $\lambda = 0,3538$ . Os mapas foram representados em coordenadas canônicas  $(J, \vartheta)$  e cilíndricas  $(R, Z)$ . As condições iniciais foram as mesmas para todos os mapas, mudando somente o valor de  $I_h$  de um mapa para outro.

Notamos que quando  $I_h = 0$ , ou seja, na condição de equilíbrio, os valores de  $J$  são constantes correspondendo à superfícies magnéticas toroidais regulares conforme a figura

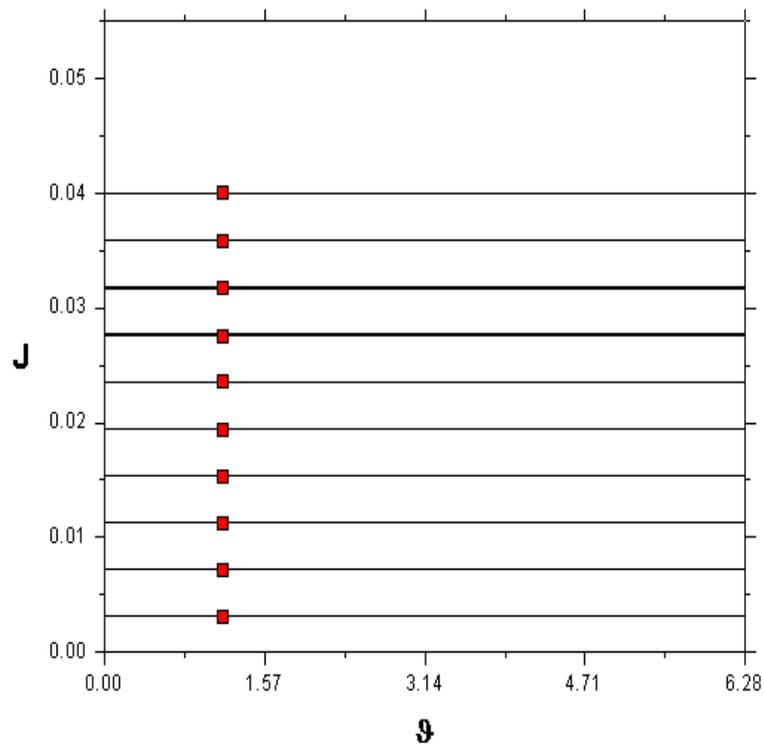


FIGURA 4.1 – Mapa de Poincaré para dez condições iniciais com corrente de perturbação  $I_h = 0\% I_p$ . Os parâmetros de equilíbrio foram  $\gamma = 0,78$ ;  $\beta = 3,0$  e  $\lambda = 0,3538$ .

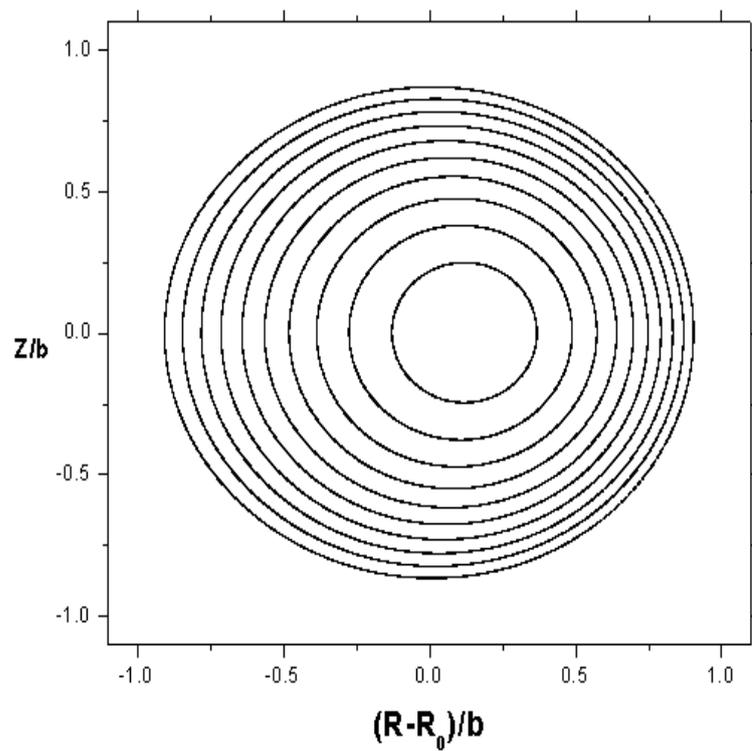


FIGURA 4.2 – Mapa de Poincaré 4.1 representado em coordenadas cilíndricas.

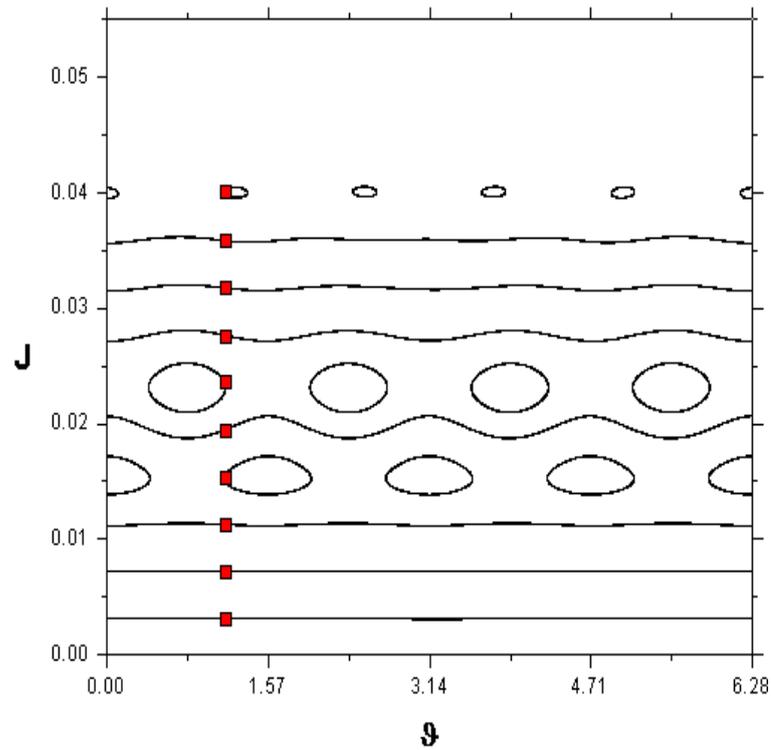


FIGURA 4.3 – Mapa de Poincaré para dez condições iniciais com corrente de perturbação  $I_h = 0,43\%I_p$  e demais parâmetros da figura 4.1.

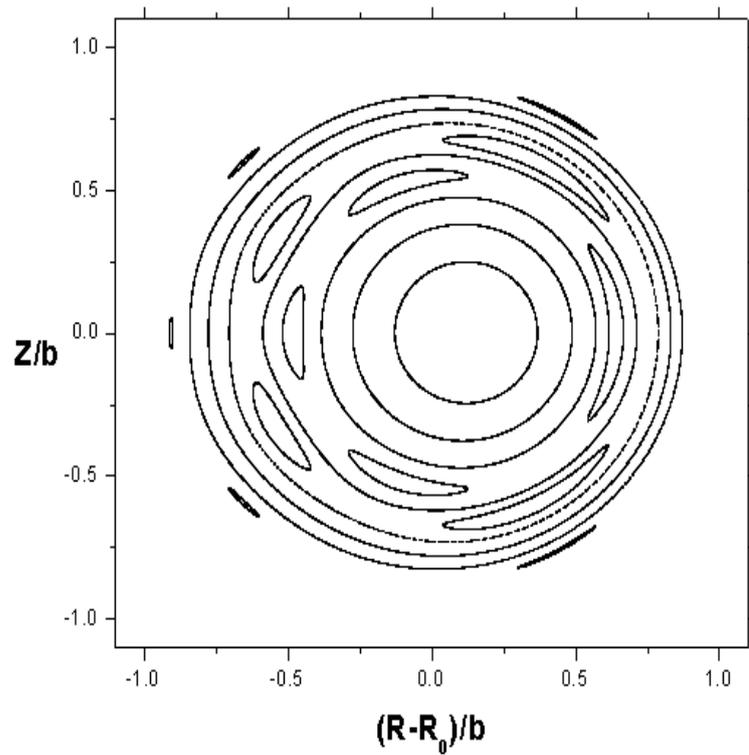


FIGURA 4.4 – Mapa de Poincaré 4.3 representado em coordenadas cilíndricas.

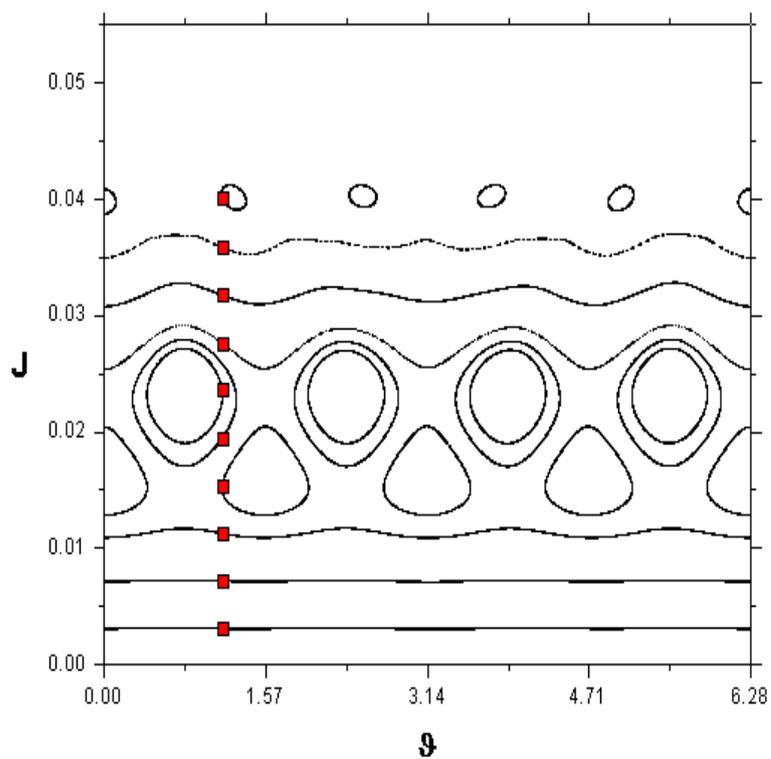


FIGURA 4.5 – Mapa de Poincaré para dez condições iniciais com corrente de perturbação  $I_h = 1,57\%I_p$ .

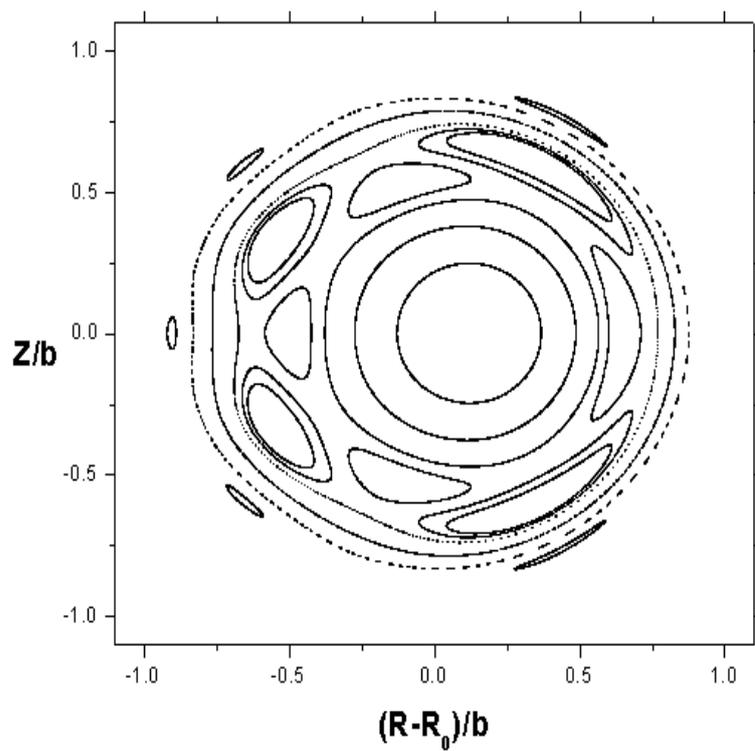


FIGURA 4.6 – Mapa de Poincaré 4.5 representado em coordenadas cilíndricas.

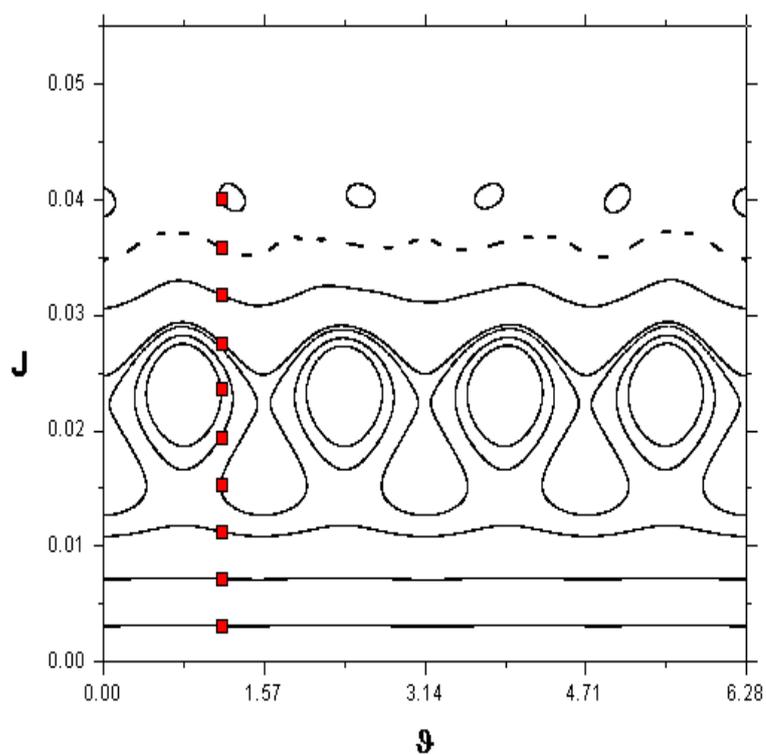


FIGURA 4.7 – Mapa de Poincaré para dez condições iniciais com corrente de perturbação  $I_h = 1,86\%I_p$ .

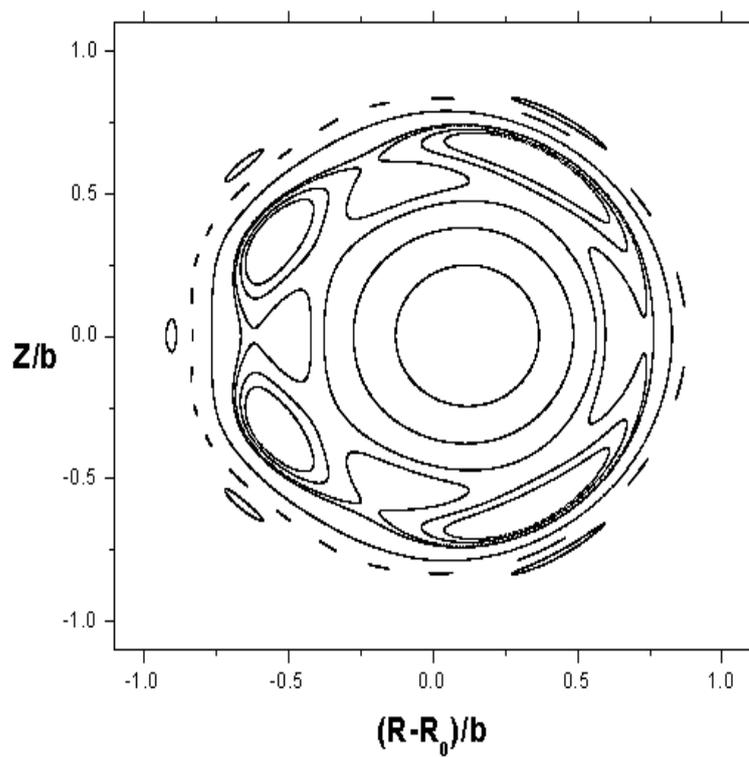


FIGURA 4.8 – Mapa de Poincaré 4.7 representado em coordenadas cilíndricas.

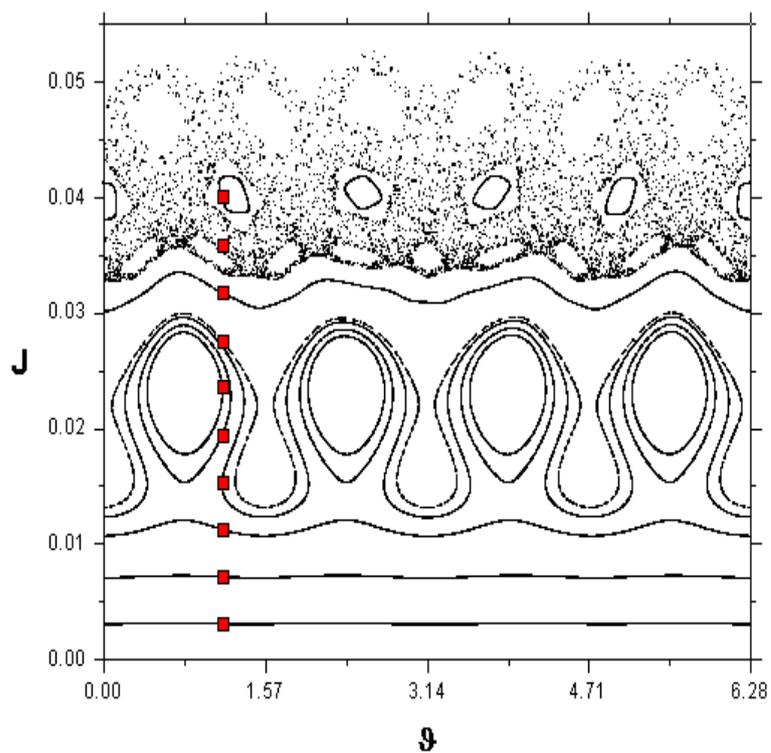


FIGURA 4.9 – Mapa de Poincaré para dez condições iniciais com corrente de perturbação  $I_h = 2,57\%I_p$ .

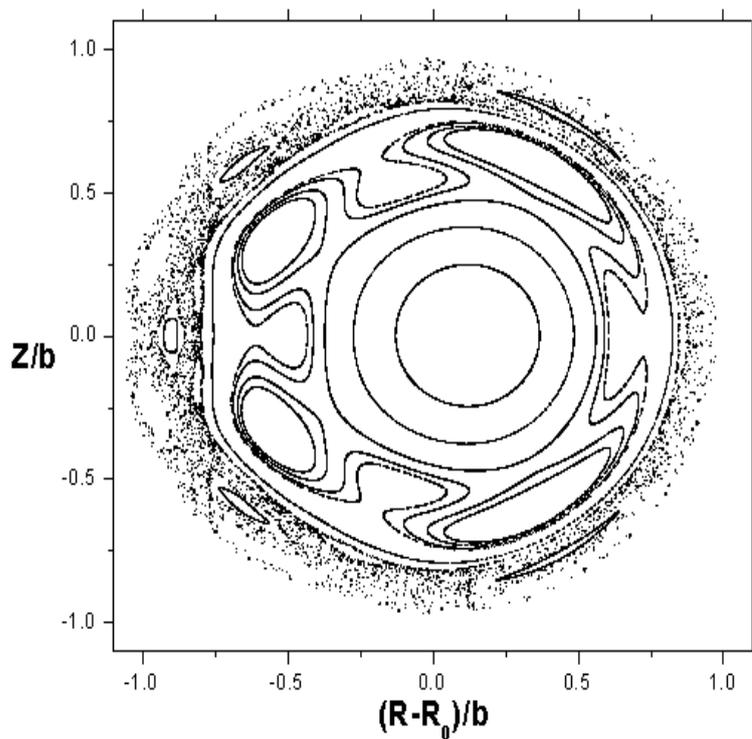


FIGURA 4.10 – Mapa de Poincaré 4.9 representado em coordenadas cilíndricas.

## 4.1 e 4.2

Quando a perturbação assume um valor não nulo, vemos pela figura 4.3 e 4.4 que as superfícies próximas àquelas de fator de segurança  $q = 4/1$  formam cadeias de quatro ilhas em torno dos quatro pontos elípticos que restaram. Como existem dois valores de  $J$  cujo  $q = 4/1$ , temos duas cadeias de quatro ilhas cada. Além disso a superfície próxima à que possui  $q = 5/1$  formará cinco ilhas em torno dos cinco pontos elípticos que sobreviveram ao extermínio da superfície racional. Na região próxima à  $q = 5/1$  o fator de segurança passa a ter localmente um comportamento monotônico, conforme a figura 2.6. Sendo assim, teremos somente uma cadeia de cinco ilhas no mapa.

À medida que aumentamos ainda mais o valor de  $I_h$ , superfícies mais afastadas passam a fazer parte da cadeia de ilhas devido ao aumento da importância da perturbação. Isto pode ser visto na figura 4.5 e 4.6. É importante dizer que todas as inúmeras superfícies racionais darão origem a cadeias de ilhas, mas muitas vezes o tamanho é tão pequeno que não conseguimos observá-las na resolução do mapa.

Por não obedecer a teoria KAM na região onde  $q = 4/1$  as ilhas nem sempre são dissolvidas no mapa com o aumento de  $I_h$ , aumentando assim seu tamanho sem deixar de formar curvas fechadas. Devido a isto, ilhas da cadeia inferior passam a orbitar em torno dos pontos elípticos superiores, como podemos ver na figura 4.7 e 4.8, explorando as duas cadeias. Isto ocorre após o fenômeno de reconexão que será abordado a seguir. Na região próxima à cadeia 5/1 a teoria KAM passa a valer devido à monotonicidade local e observamos o início da perda de estabilidade da superfície próxima à cadeia.

Aumentando ainda mais a corrente de perturbação vemos nas figuras 4.9 e 4.10 a destruição completa da superfície próxima à 5/1 e sua dissolução em todo o mapa. Seus pontos chegam a contornar cadeias de ilhas de outros modos mas não formam um curva

fechada em torno de alguma delas. Veremos adiante que na verdade estas superfícies “dissolvidas” representam uma linha de campo caótica.

### 4.3 Reconexão e Bifurcação

Por termos escolhido um perfil de densidade de corrente toroidal  $J_\varphi$  não-monotônico, o fator de segurança apresentará este mesmo tipo de perfil. Como havíamos antecipado, os fenômenos de reconexão e bifurcação são conseqüências da não validade da teoria KAM na região não monotônica do fator de segurança. Sendo assim, quando a perturbação ressonante principal é  $(m_0, n_0) = (4, 1)$ , por exemplo, formar-se-ão no mapa de Poincaré duas cadeias de quatro ilhas cada. Cada cadeia orbita em torno dos pontos elípticos sobreviventes das superfícies  $J_1^*$  e  $J_2^*$ , em que,  $q(J_1^*) = q(J_2^*) = 4/1$ .

À medida que aumentamos o valor de  $I_h$  o tamanho destas cadeias também aumenta. Uma vez que nesta região não ocorre a obediência à teoria KAM, o tamanho pode aumentar sem a perda de estabilidade das superfícies mais externas da cadeia e sua dissolução no mapa. Este aumento no tamanho acontece até que o ponto mais baixo (alto) da cadeia superior (inferior) esteja na mesma posição que o ponto hiperbólico da cadeia inferior (superior). Neste caso não existem mais superfícies separando as duas cadeias. Dizemos então que ocorreu a reconexão das cadeias de ilhas. Se continuarmos a aumentar a corrente  $I_h$  teremos um cenário pós-reconexão onde uma mesma curva aberta pode contornar os pontos elípticos superior e inferior.

Aumentando ainda mais  $I_h$  observamos a junção dos pontos hiperbólicos da cadeia superior com os elípticos da inferior. Desaparece assim a cadeia de ilhas inferior em uma bifurcação sela-centro. A este fenômeno dá-se o nome de bifurcação. Apresentamos na

figura 4.11 um esquema indicando os estágios que antecedem e sucedem estes fenômenos.

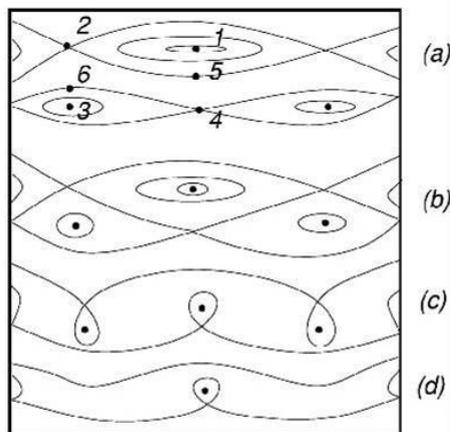


FIGURA 4.11 – Figura esquemática mostrando as cadeias de ilhas superior e inferior e os pontos fixos (a) antes, (b) durante, e (c) depois da reconexão. E (d) depois da bifurcação.

Os pontos 1 e 3 são os pontos elípticos pertencentes a cadeia superior e inferior, respectivamente. Já os pontos 2 e 4 são os hiperbólicos superior e inferior. O ponto 5 é o ponto mais baixo da cadeia superior e o 6 é o mais alto da cadeia inferior. Traçamos nas figuras 4.12 os mapas de Poincaré antes, durante e depois da reconexão, e também o mapa durante a bifurcação, exemplificando o que foi dito. Os parâmetros usados foram  $\gamma = 0,78$ ;  $\beta = 3,0$  e  $\lambda = 0,3538$  e perturbou-se o modo  $(m_0, n_0) = (4, 1)$ .

Vemos na figura 4.12 (d) a cadeia de 5 ilhas bastante deformada devido à perturbação. A região com alta densidade de pontos na localização da extinta cadeia de ilhas inferior recebe o nome de barreira de transporte [24], [23], [25]. As linhas de campo com condição inicial nesta região realizarão um grande número de voltas toroidais ( $> 10000$ ) antes de atingirem a parede do tokamak.

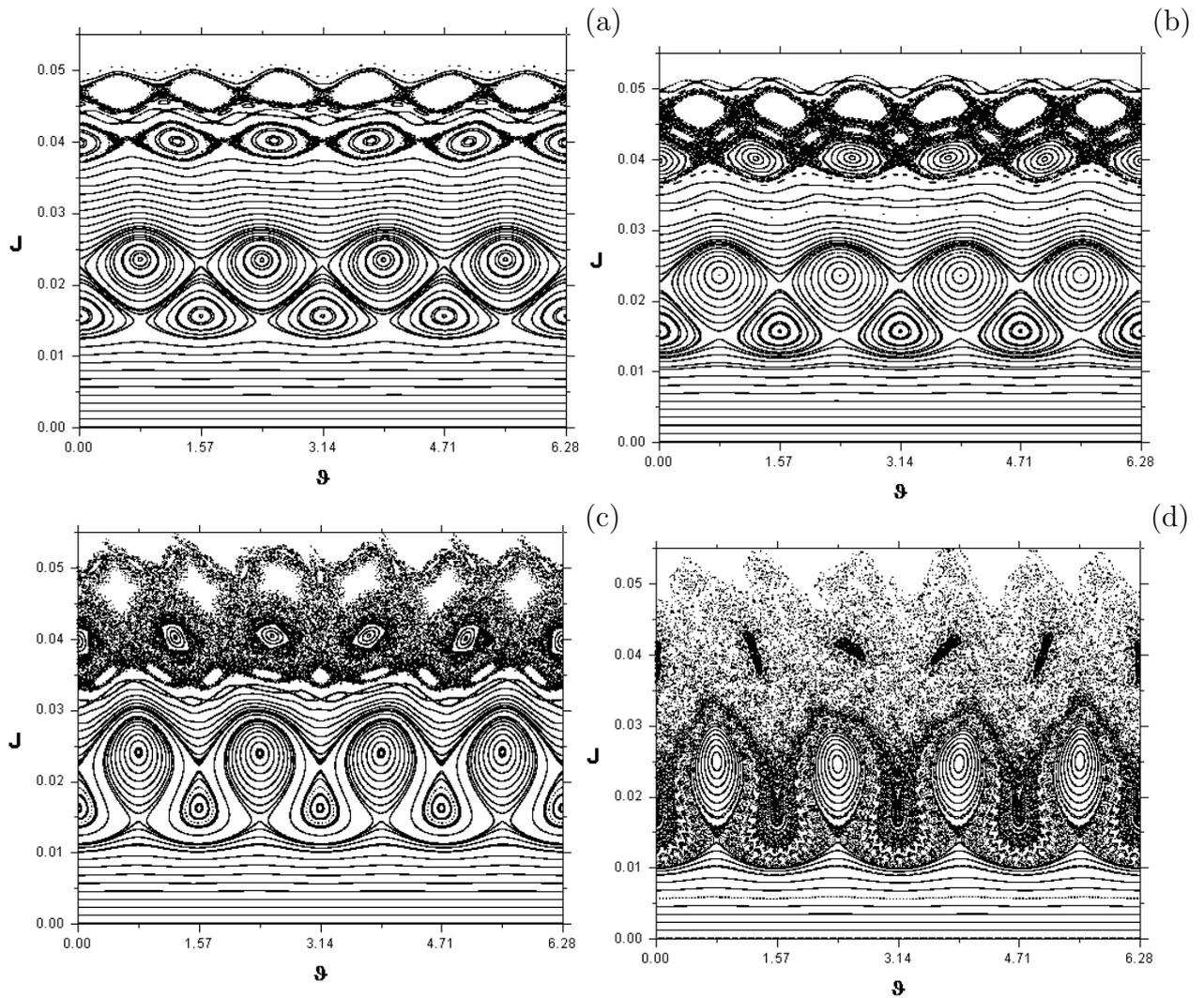


FIGURA 4.12 – Mapas de Poincaré com corrente de perturbação (a)  $I_h = 1,14\%I_p$ , (b)  $I_h = 1,43\%I_p$ , (c)  $I_h = 2,71\%I_p$  e (d)  $I_h = 5,43\%I_p$  respectivamente antes, durante e depois da reconexão e durante a bifurcação.

## 4.4 Linhas de Campo Caóticas

Vimos nas seções anteriores que a perda de estabilidade do ponto elíptico leva à dissolução das superfícies mais externas das cadeias no mapa de Poincaré. Falamos também que este processo semeia o aparecimento de linhas de campo caóticas. Vamos agora caracterizar estas linhas como sendo, de fato, caóticas. Para isto fizemos análise espectral para alguns tipos de superfícies.

Qualquer função pode ser representada por um número (eventualmente infinito) de

componentes periódicos. A determinação do peso relativo de cada um destes componentes é chamada análise espectral ou espectro de potência. Quando a função é não-periódica usa-se a transformada de Fourier  $f(\omega)$  para se obter este espectro. O espectro de potência  $S(\omega)$  é definido como o módulo quadrado da transformada de Fourier, ou seja,  $S(\omega) = |f(\omega)|^2$ . Este espectro pode nos fornecer algumas informações sobre uma seqüência de pontos que variam no espaço ou tempo.

Obtivemos então espectros para diferentes sinais  $(n, \vartheta)$ , ou seja, seqüências de valores de  $\vartheta$  variando com o número de sua iteração (ou voltas toroidais) no mapa de Poincaré. Como os pontos variam discretamente usamos a idéia da Transformada Discreta de Fourier (DFT) bem detalhada na referência [26]. Com esta idéia construiu-se um algoritmo e o aplicamos aos sinais  $(n, \vartheta)$  de algumas superfícies. As superfícies estudadas estão representadas nas figuras 4.13. Os parâmetros usados foram  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,45319$  e  $I_h = 2,71\%I_p$  e perturbou-se o modo  $(m_0, n_0) = (4, 1)$ .

As cadeias secundárias (uma cadeia em torno de outra) surgem nos mapas porque ao redor de cada ponto elíptico encontraremos curvas invariantes formando as ilhas. Estas curvas estarão, por tratar-se de sistemas periódicos, também sujeitas à teoria KAM e Poincaré-Birkhoff. Isso permite a formação de cadeias de ilhas secundárias em torno das primárias, terciárias em torno das secundárias, assim sucessivamente. Representamos na figura 4.14 (a) e 4.14 (b) os espectros de potência para a cadeia primária e secundária, respectivamente, da figura 4.13 (a). Os espectros para a cadeia primária e secundária são praticamente iguais, apresentando um pico máximo em  $\omega_{max} = 1/5$ . Temos então que a frequência máxima para uma cadeia de ilhas é o inverso do fator de segurança da superfície em que se encontra o ponto elíptico orbitado.

Os espectros de potência das superfícies superior e inferior da figura 4.13 (b) estão

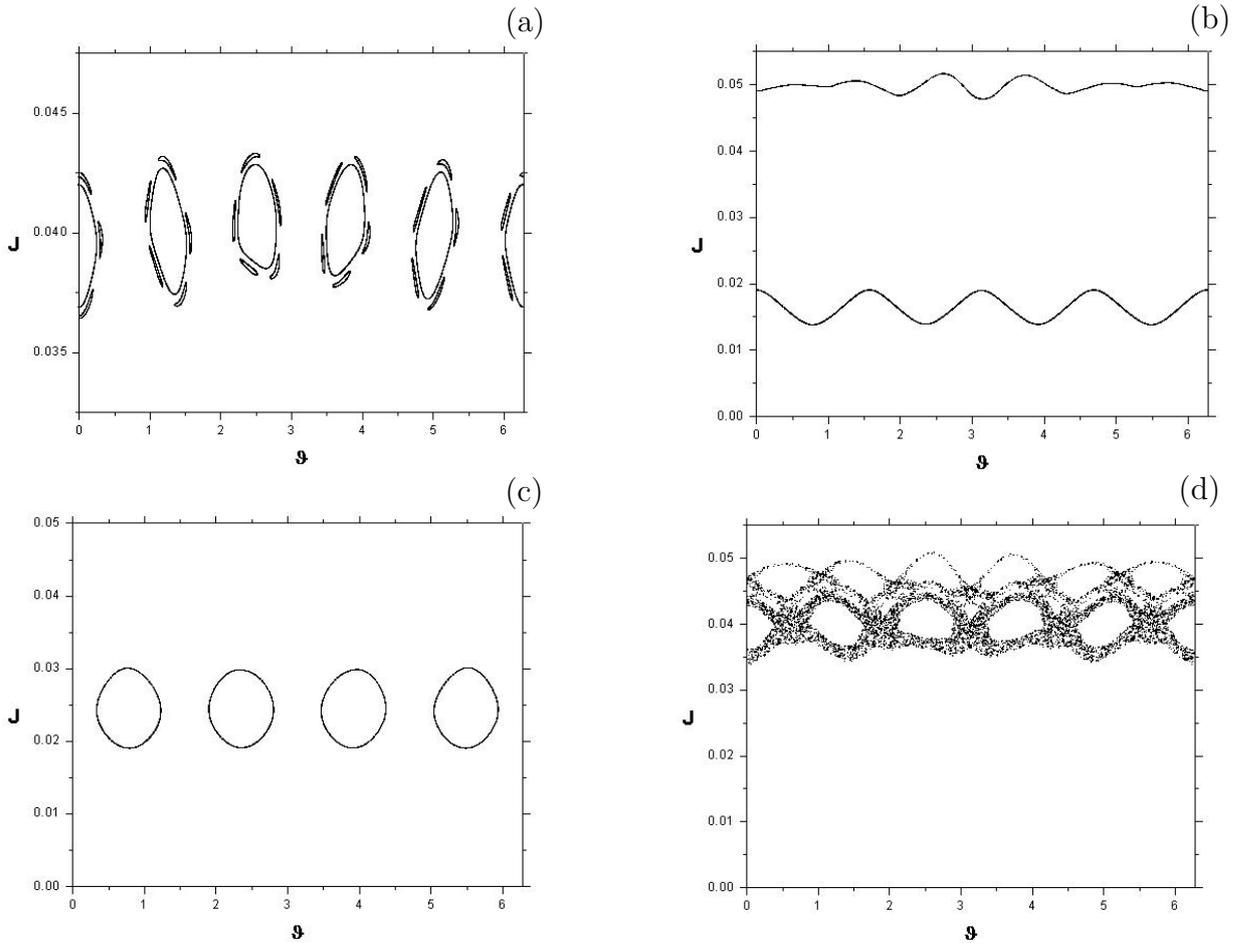


FIGURA 4.13 – Mapas de Poincaré com as trajetórias usadas nos espectros de potência para  $I_h = 2,71\%I_p$ . Os parâmetros usados foram  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$  e  $\lambda = 0,45319$  e modo de perturbação  $(m_0, n_0) = (4, 1)$ .

mostrados nas figuras 4.15 (a) e 4.15 (b), respectivamente. A superfície superior encontra-se próxima a uma cadeia de seis ilhas. Por isso terá um pico máximo em uma frequência  $\omega_{max} \approx 1/6$ . Picos menores são encontrados em múltiplos inteiros desta frequência. Isto deve-se à um fator intrínseco ao algoritmo DFT, que apresenta, geralmente, picos menores em harmônicos de  $\omega_{max}$ . Existem interferências de outras cadeias de ilhas próximas, causando o aparecimento de outros picos menores de frequência além dos picos nos valores múltiplos de  $\omega_{max}$ . O mesmo ocorre para a superfície inferior. A figura 4.15 (b) mostra que a superfície inferior possui  $\omega_{max} \approx 1/4$  e picos menores em múltiplos inteiros desta frequência.

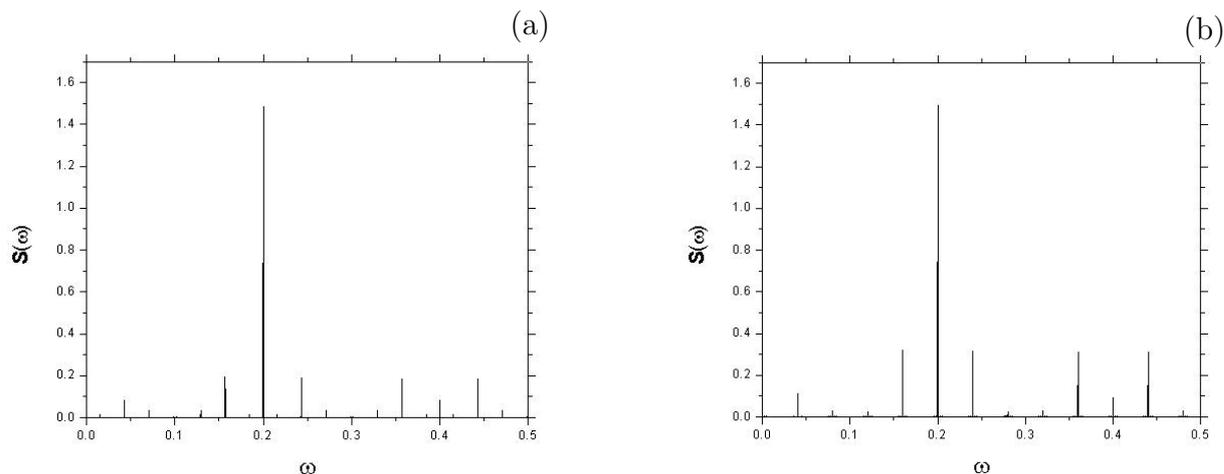


FIGURA 4.14 – Espectros de potência para a cadeia (a) primária e (b) secundária da figura 4.13 (a).

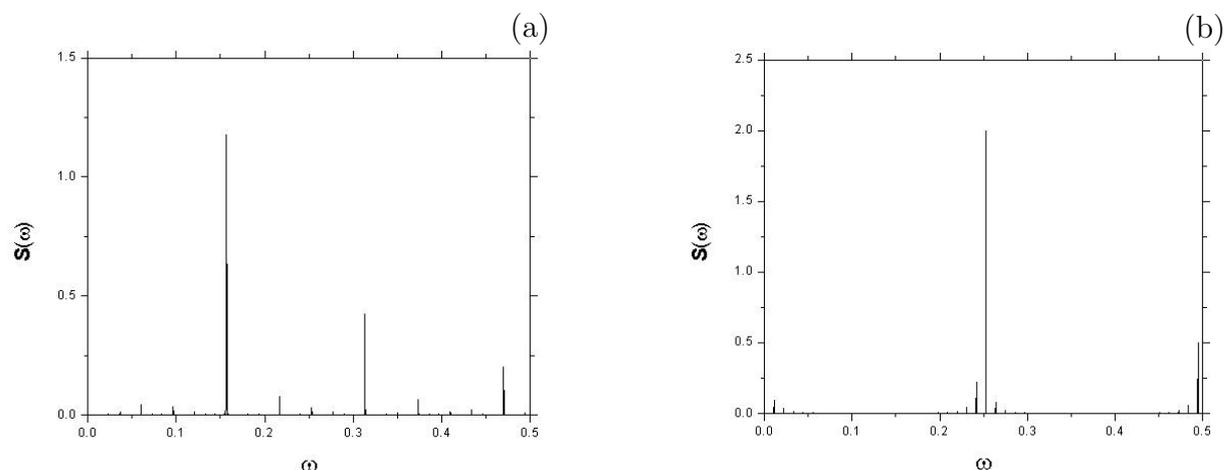


FIGURA 4.15 – Espectros de potência para a superfície (a) superior e (b) inferior da figura 4.13 (b).

Quando obtemos o espectro de potência para a ilha mostrada na figura 4.13 (c) encontramos um valor de  $\omega_{max} = 1/4$  como era de se esperar e um pico menor na frequência múltipla  $\omega = 2/4$ . Já para a superfície instável e dissolvida no mapa, mostrada na figura 4.13 (d), obtemos um espectro de potência contínuo. Os espectros referentes às figuras 4.13 (c) e 4.13 (d) estão representados nas figuras 4.16 (a) e 4.16 (b), respectivamente.

Espectro de potência contínuo, com amplitudes pequenas, apresentado regiões mais pronunciadas mas sem nenhuma frequência distinta predominante é uma das evidências de que um determinado sinal apresenta comportamento caótico. Chamaremos então, a partir

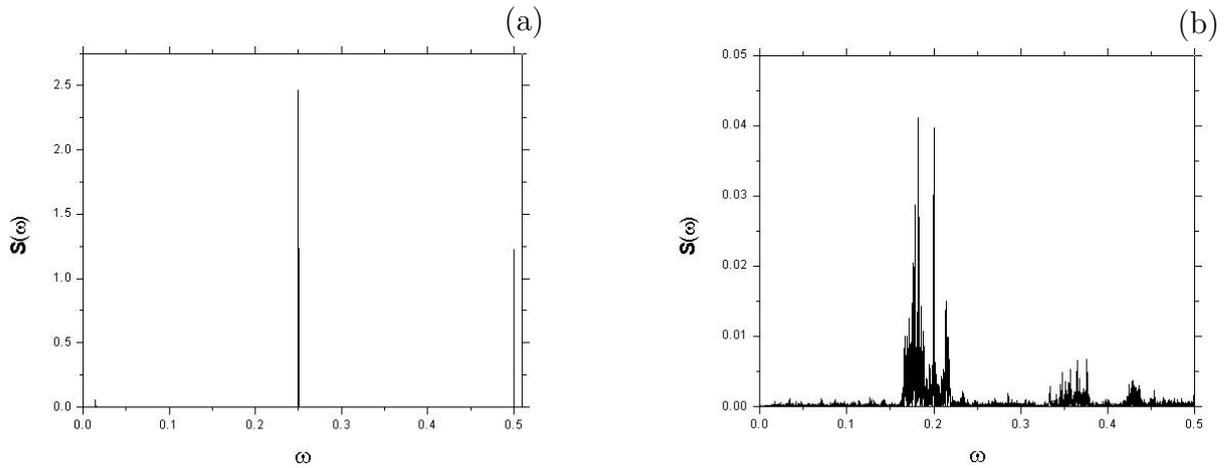


FIGURA 4.16 – Espectros de potência para a cadeia em 4.13 (c) e para a superfície instável em 4.13 (d).

daqui, este tipo de região dissolvida no mapa de Poincaré de região de linhas magnéticas caóticas. Uma outra evidência de sistemas caóticos é a sensibilidade à condição inicial. Para as linhas de campo isto significa que mesmo que duas linhas tenham condições iniciais muito próximas, irão afastar-se uma da outra exponencialmente com o número de iterações (ou voltas toroidais) no mapa de Poincaré. No próximo capítulo veremos que a sensibilidade à condição inicial foi verificada para as linhas de campo caóticas.

# 5 Escape das Linhas de Campo

Vimos no capítulo anterior que linhas de campo caóticas podem surgir devido à perturbação ressonante. Fora das ilhas, estas linhas não estarão mais aprisionadas em cadeias ou confinadas em superfícies magnéticas, podendo assim, após um certo número de iterações, escapar para a parede do tokamak. Estudaremos neste capítulo os padrões de escape das linhas caóticas. Para estudar estes padrões utilizamos valores suficientemente altos de  $I_h$ , para gerar uma configuração de grande região caótica no mapa de Poincaré que poderá ser analisada.

## 5.1 Estudo dos Comprimentos de Conexão

O comprimento de conexão é o número  $N$  de voltas toroidais (ou iterações no mapa de Poincaré) necessárias para que uma linha de campo magnético atinja a parede do tokamak. Este número pode ser verificado para diferentes condições iniciais no plano ( $J$  vs.  $\vartheta$ ) em  $\varphi_t = 0$ . Sendo assim, traçamos um “mapa de conexão” escolhendo uma grade de pontos iniciais  $J$  e  $\vartheta$ , obtendo o número de conexão  $N$  para cada ponto. As grades de condições iniciais estão em um retângulo no mapa de Poincaré. Assim pode-se identificar melhor a região de condições iniciais consideradas e também comparar os mapas de conexão com as respectivas regiões no mapa de Poincaré. O valor de  $J$  correspondente à parede da

câmara é  $J \approx 0,055$ .

Para traçarmos os mapas de conexão é necessário também atribuir uma escala de cores correspondente ao intervalo de  $N$  representado. Assim cada valor de  $N$  corresponderá a uma cor específica. Os pontos iniciais da grade são então graficados obedecendo à cor definida e relacionada com seu respectivo número de conexão. Como os comprimentos de conexão podem variar em uma escala extensa de valores (de  $N = 1$  até  $N \sim 10^4$ ), as diferenças entre pontos apresentando valores de  $N$  próximos podem ficar imperceptíveis. Desta maneira, se escolhermos uma escala de cores onde  $N$  varia em um grande intervalo de valores estamos abrangendo uma grande parte dos casos existentes. No entanto, regiões com números de conexão relativamente pequenos seriam indistingüíveis no mapa.

Diante disto fez-se dois mapas de conexão para cada grade de condições iniciais. Um mapa estabelece uma escala de 10 cores correspondendo a  $N = 1$  até  $N = 10$ . Os pontos iniciais que apresentam  $N > 10$  foram representados na mesma cor dos que apresentam  $N = 10$ , saturando assim  $N$  na cor marrom. Outro mapa contém uma escala de 200 cores correspondendo a  $N = 1$  até  $N = 200$ . Os pontos iniciais que apresentam  $N > 200$  foram representados na mesma cor dos que apresentam  $N = 200$ , saturando assim o valor de  $N$  na cor vermelha. Representamos então na figura 5.1 a primeira grade de condições iniciais considerada para o traçado do mapa de conexão. Relacionado à grade da figura 5.1 obtemos os mapas de conexão representados na figura 5.2.

Com as figuras 5.2 pode-se notar que as condições iniciais apresentando  $N$  relativamente pequeno formam áreas definidas nos mapas de conexão. Já os pontos onde  $N$  é relativamente grande se distribuem de modo a não formar nenhuma região bem definida e limitada no mapa. Também pode-se observar uma certa correspondência entre o mapa de Poincaré e o mapa de conexão. A região do mapa de Poincaré com uma densidade

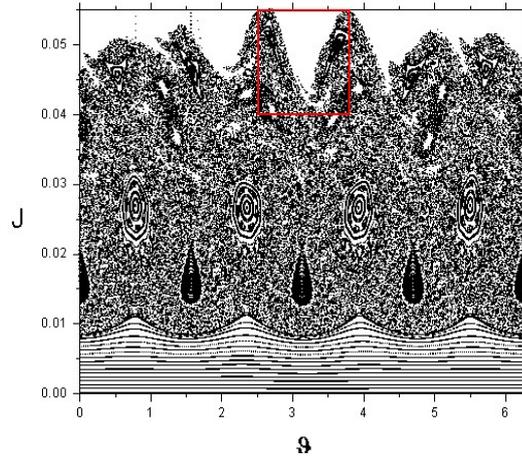


FIGURA 5.1 – Grade de condições iniciais representadas no mapa de Poincaré. Utilizamos os valores  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,45319$ ;  $I_h = 8,57\%I_p$  e modo de perturbação  $(m_0, n_0) = (4, 1)$ .

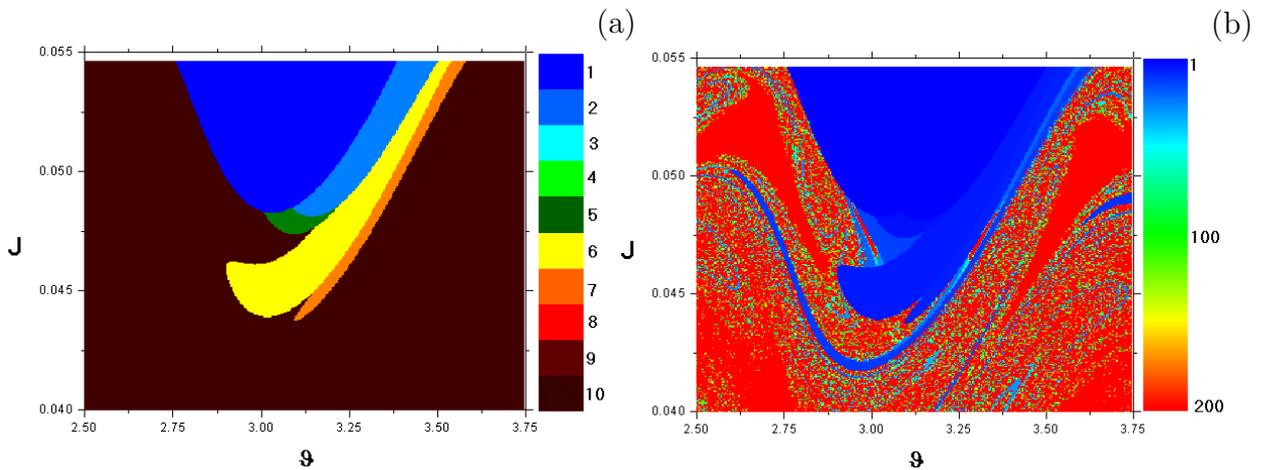


FIGURA 5.2 – Mapas de conexão para as condições iniciais representadas em 5.1 em uma escala (a)  $N$  de 1 a 10 (ou maior que 10) e (b)  $N$  de 1 a 200 (ou maior que 200).

menor de pontos corresponde a números de conexão pequenos.

Representamos agora na figura 5.3 uma grade de condições iniciais com um valor de  $I_h$  um pouco maior. O mapa de Poincaré foi obtido de forma a apresentar uma grande densidade de pontos. Desta maneira podemos notar algumas regiões onde praticamente nenhuma linha de campo cruza o plano  $\varphi_t = 0$ . Tomamos uma grade no mapa de Poincaré que, sozinha, abrange regiões de alta e baixa densidade de pontos. Relacionado à grade da figura 5.3 obtemos os mapas de conexão representados na figura 5.4.

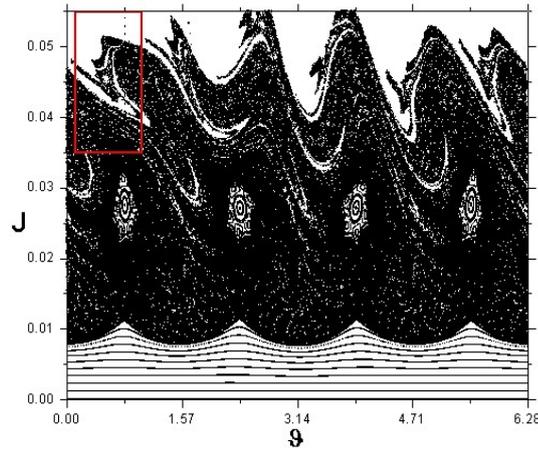


FIGURA 5.3 – Grade de condições iniciais representadas no mapa de Poincaré. Utilizamos os valores  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,45319$ ;  $I_h = 11\%I_p$  e modo de perturbação  $(m_0, n_0) = (4, 1)$ .

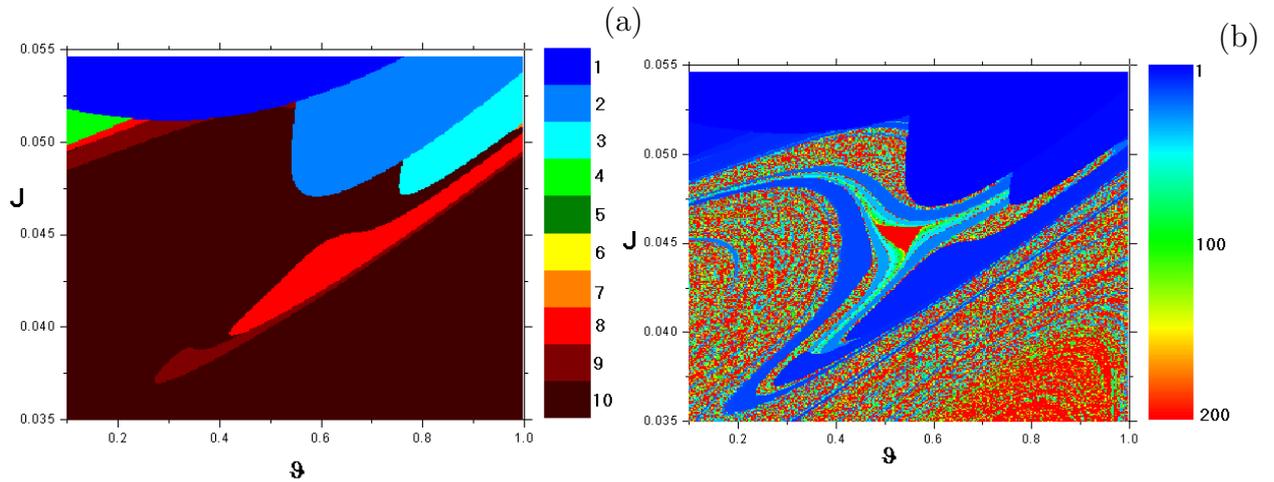


FIGURA 5.4 – Mapas de conexão para as condições iniciais representadas em 5.3 em uma escala (a)  $N$  de 1 a 10 (ou maior que 10) e (b)  $N$  de 1 a 200 (ou maior que 200).

Novamente observamos o fato de regiões bem delimitadas e definidas no mapa de conexão serem formadas por comprimentos de conexão pequenos.

Apresentamos na figura 5.5 uma grade de condições iniciais onde perturbamos o modo mais externo  $(m_0, n_0) = (5, 1)$ . Perturbando este modo observamos que as regiões com baixa densidade de pontos no mapa de Poincaré são mais extensas do que quando perturbamos o modo  $(4, 1)$ . Isto implica em um maior número de condições iniciais com baixo comprimento de conexão, como pode ser visto na figura 5.6. Os mapas de conexão representados nesta figura revelam uma alta ocorrência de comprimentos de conexão pequenos.

Sendo assim, linhas de campo com condições iniciais nesta região escapam rapidamente para à parede da câmara.

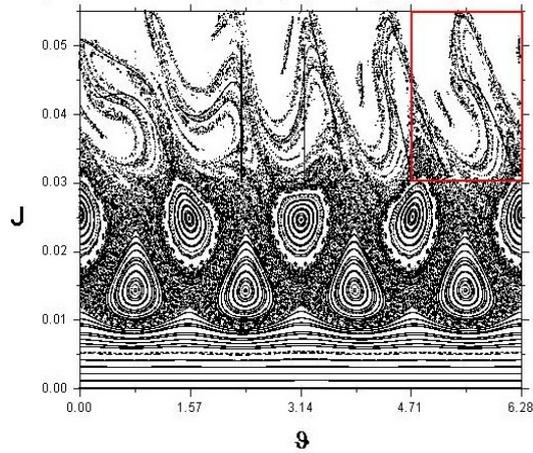


FIGURA 5.5 – Grade de condições iniciais representadas no mapa de Poincaré. Utilizamos os valores  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,5895$ ;  $I_h = 8,57\%I_p$  e modo de perturbação  $(m_0, n_0) = (5, 1)$ .

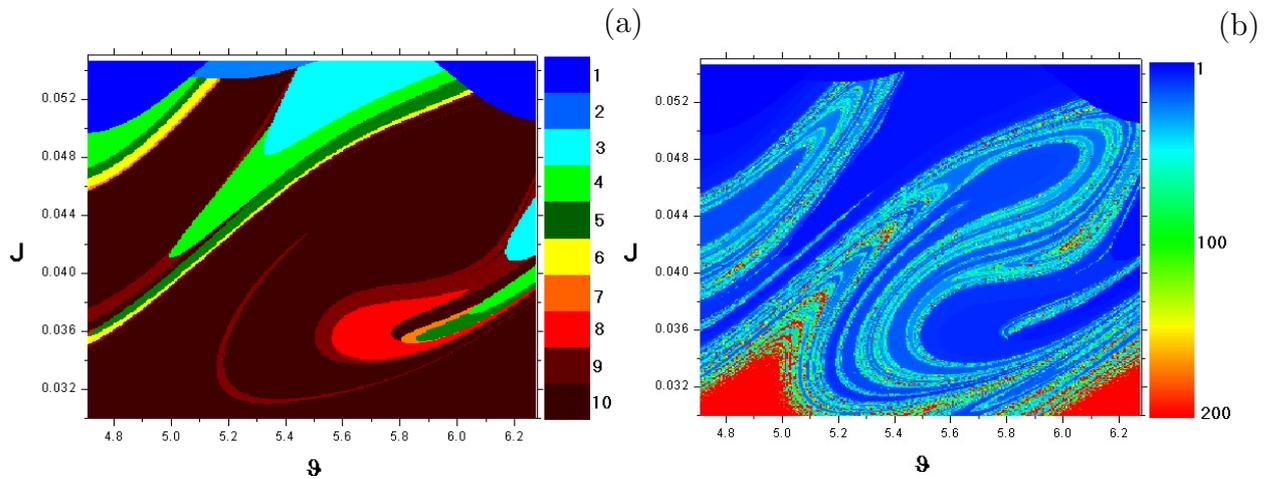


FIGURA 5.6 – Mapas de conexão para as condições iniciais representadas em 5.5 em uma escala (a)  $N$  de 1 a 10 (ou maior que 10) e (b)  $N$  de 1 a 200 (ou maior que 200).

Esta característica também pode ser percebida nas figuras 5.7 (a) e 5.8 onde perturbamos o modo  $(5, 1)$  com um maior valor de  $I_h$ . Mostramos também uma grade abrangendo uma grande área de condições iniciais em 5.7 (b). Percebemos pelos seus respectivos mapas de conexão, nas figuras 5.9, que as linhas ficam aprisionadas nas cadeias de ilhas e levam um grande número de voltas para escapar das redondezas das cadeias.

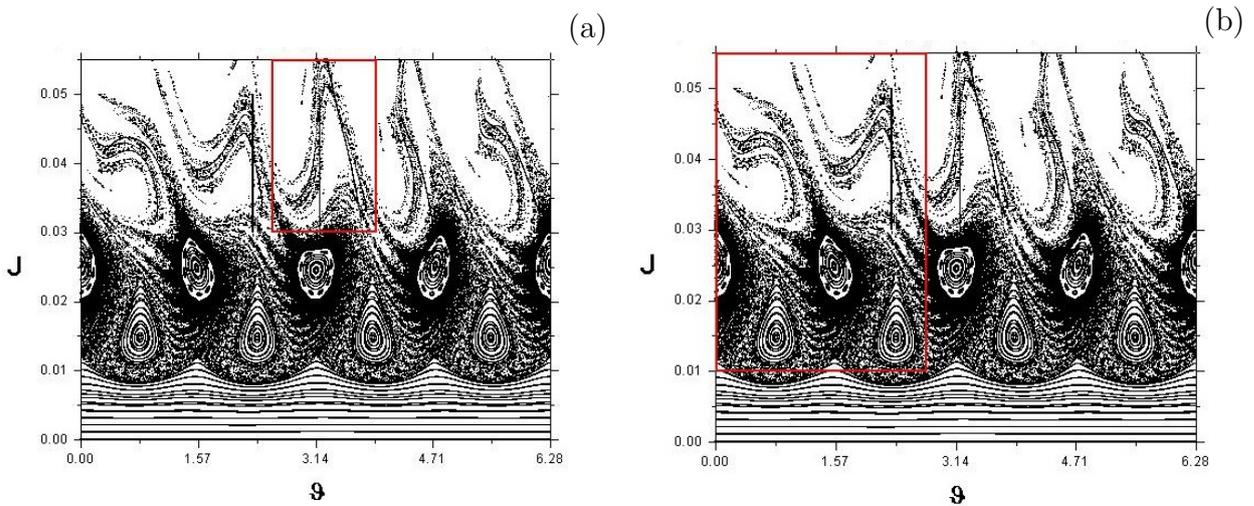


FIGURA 5.7 – Grade de condições iniciais representadas no mapa de Poincaré. Utilizamos os valores  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,5895$ ;  $I_h = 11\%I_p$  e modo de perturbação  $(m_0, n_0) = (5, 1)$ .

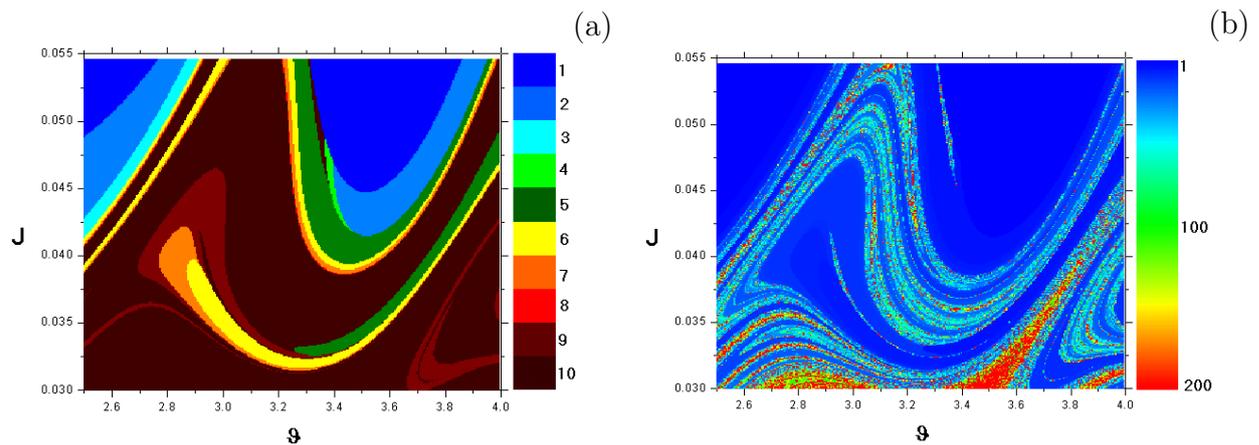


FIGURA 5.8 – Mapas de conexão para as condições iniciais representadas em 5.7 (a) em uma escala (a)  $N$  de 1 a 10 (ou maior que 10) e (b)  $N$  de 1 a 200 (ou maior que 200).

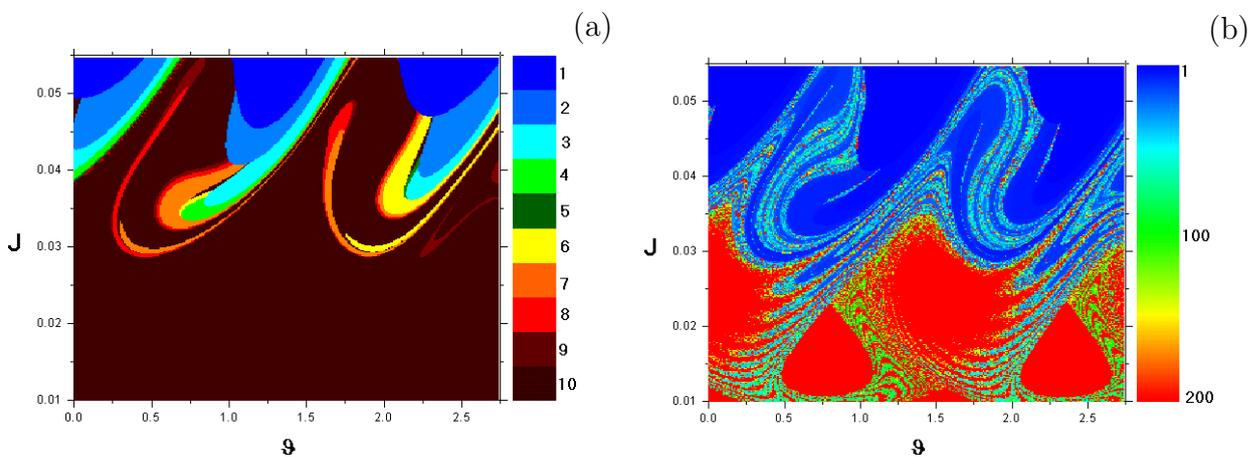


FIGURA 5.9 – Mapas de conexão para as condições iniciais representadas em 5.7 (b) em uma escala (a)  $N$  de 1 a 10 (ou maior que 10) e (b)  $N$  de 1 a 200 (ou maior que 200).

Podemos quantizar a ocorrência de determinados comprimentos de conexão. Para isso fizemos histogramas mostrando a porcentagem das linhas escapando com um número específico  $N$  do número total de linhas que escapam. Apresentamos na figura 5.10 estes

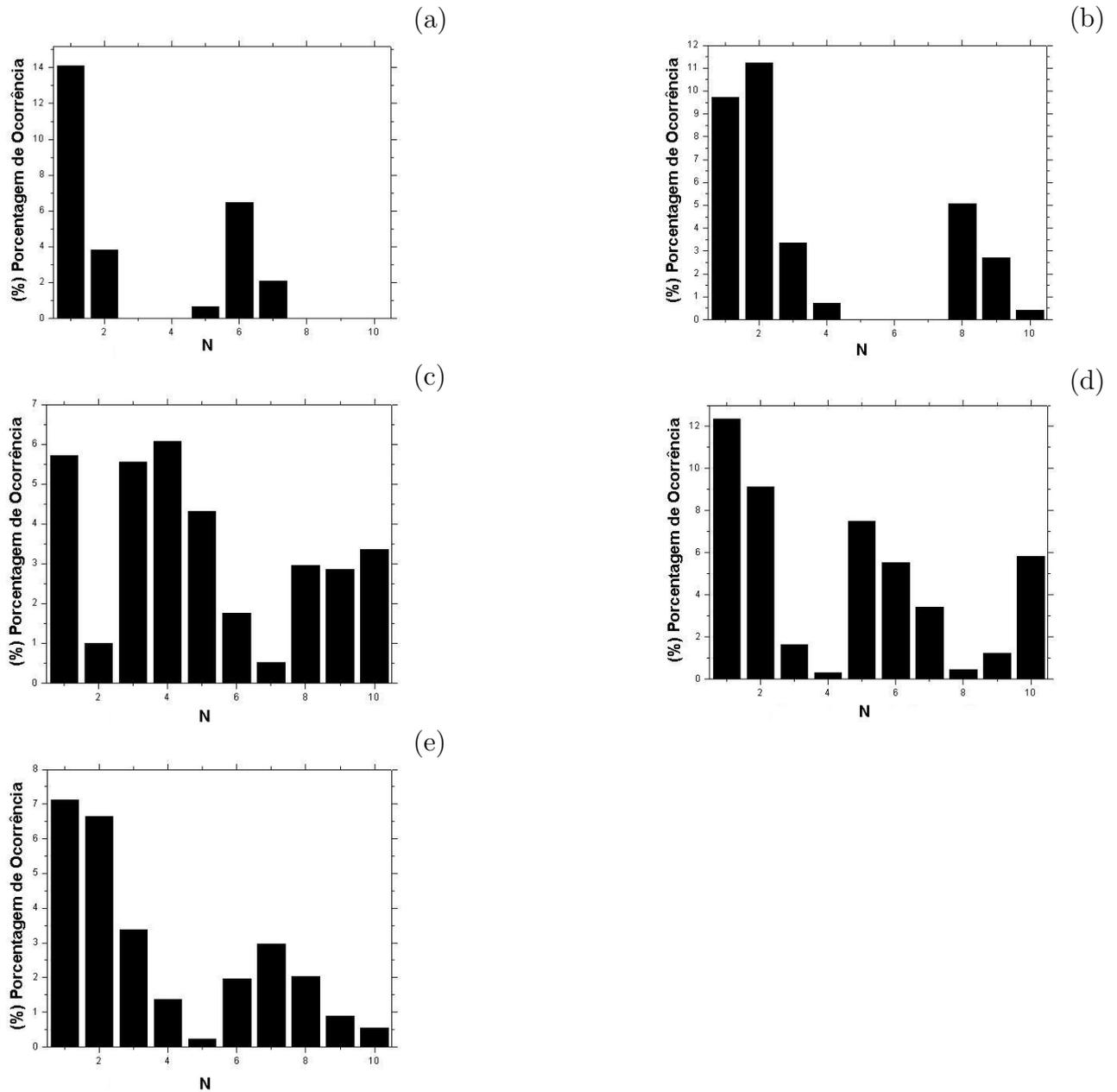


FIGURA 5.10 – Percentuais de ocorrência com  $N$  variando de 1 a 10 para as grades das figuras (a) 5.1, (b) 5.3, (c) 5.5, (d) (5.7 (a)) e (e) (5.7 (b)).

histogramas com  $N$  variando de 1 a 10 para as grades consideradas até o momento. Devemos salientar que apesar dos mapas de conexão apresentarem uma grande área marrom, os percentuais de ocorrência apresentam, em geral, um valor pequeno para  $N = 10$ . Isto

porque a cor marrom refere-se aos comprimentos  $N \geq 10$ .

Apresentamos no Anexo A outras grades de condições iniciais para os mesmo valores de  $I_h$  ( $8,57\%I_p$  e  $11\%I_p$ ) e mesmos modos perturbados  $[(4, 1)$  e  $(5, 1)]$  mostrando os respectivos mapas de conexão. As mesmas considerações são feitas para as grades mostradas no texto. É interessante notar a correspondência entre a grade escolhida e o respectivo mapa de conexão.

## 5.2 Bacias de Escape

Estamos interessados agora em obter informações sobre o local para onde as linhas de campo escapam. Para isto traçamos as chamadas bacias de escape [27]. Para obtermos estas figuras tomamos as mesmas grades de condições iniciais consideradas para os mapas de conexão. Cada ponto da grade foi iterado até que a linha de campo atingisse um valor de  $J$  correspondente à parede da câmara. Obtivemos então para cada condição inicial a posição angular  $\vartheta_e$  em que a linha de campo chocou-se com a câmara.

Dividimos a circunferência poloidal do tokamak em 10 seções. Assim, a cada intervalo de  $36^\circ$  (ou  $0,628$  rad) na variável  $\vartheta$  teremos uma seção distinta. Para cada uma das dez seções foi associada uma cor diferente (a escala de cores é a mesma dos mapas de conexão com  $N$  variando de 1 a 10.). Se o ângulo de escape  $\vartheta_e$  de uma determinada linha estiver contido na primeira seção angular ( $0 \leq \vartheta_e < 0,628$ ), por exemplo, a condição inicial desta linha será plotada na cor azul marinho. Para cada ângulo de escape teremos então uma seção associada e conseqüentemente uma cor. A cor preta foi associada às linhas que em 4000 voltas (ou iterações) ainda não atingem a parede. Por termos considerado as mesmas grades de condições iniciais, podemos comparar os mapas de conexão com as respectivas

bacias de escape.

Apresentamos na figura 5.11 as bacias de escape para as condições iniciais representadas nas grades das figuras 5.1 e 5.3. Percebemos nas figuras 5.11 (a) e (b) que ao

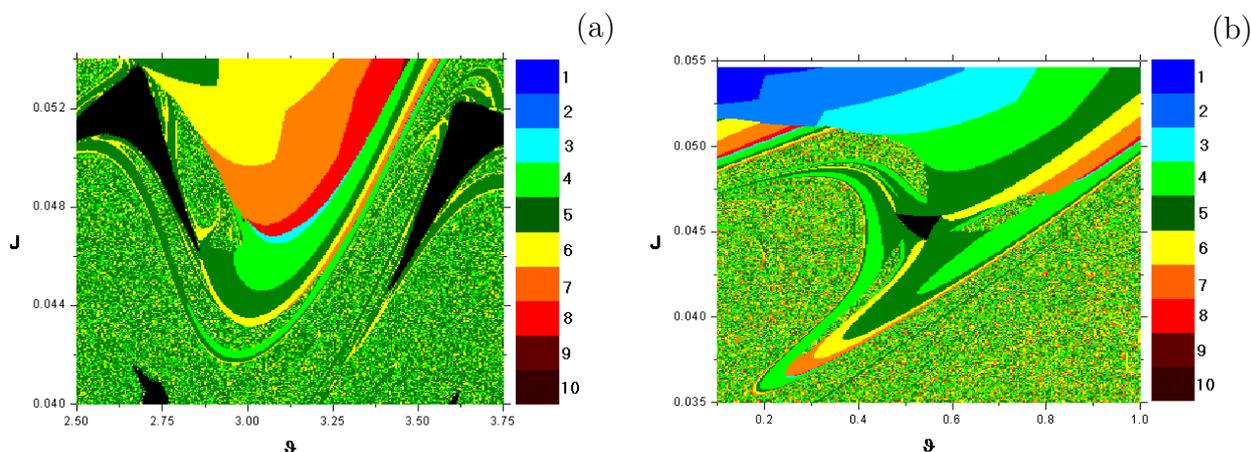


FIGURA 5.11 – Bacias de escape para as condições iniciais representadas nas figuras (a) 5.1 e (b) 5.3.

perturbarmos o modo  $(4, 1)$  as linhas de campo terão uma trajetória de escape preferencial para as regiões 4, 5 e 6. Além disso percebemos que a incidência de linhas nas regiões 1 e 2 é muito baixa e praticamente inexistente nas regiões 9 e 10. Outro aspecto a se observar é que as regiões bem definidas nos mapas de conexão das figuras 5.2 e 5.4 se repetem nas bacias de escape. O padrão de regiões parece ser o mesmo nas duas figuras apesar de tratarem de informações diferentes sobre as condições iniciais. A região de cor preta marca uma cadeia de ilhas bastante deformada pela perturbação. Assim, todas as linhas com condições iniciais nesta região ficam aprisionadas na cadeia.

Apresentamos agora na figura 5.12 as bacias de escape obtidas para as condições iniciais representadas em 5.5 e 5.7 (a). Observamos novamente uma semelhança entre as bacias de escape e os mapas de conexão referentes à mesma grade. Vemos também que ao perturbarmos o modo  $(5, 1)$  as linhas escapam mais uniformemente para as seções angulares da parede da câmara. Esta maior uniformidade de regiões de escape também

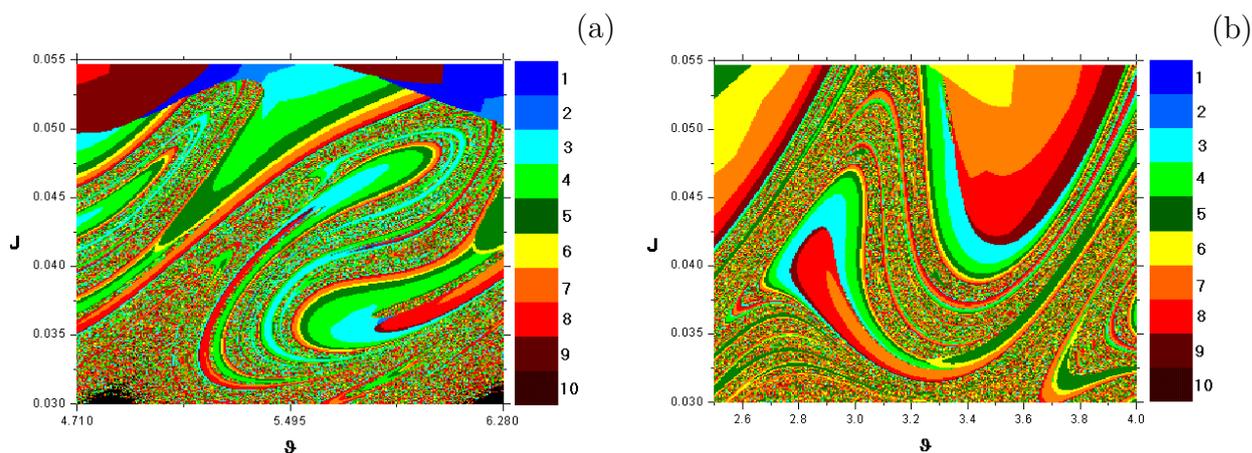


FIGURA 5.12 – Bacias de escape para as condições iniciais representadas nas figuras (a) 5.5 e (b) (5.7 (a)).

pode ser vista pela figura 5.13 onde representamos a bacia de escape de uma grade maior, mostrada na figura 5.7 (b).

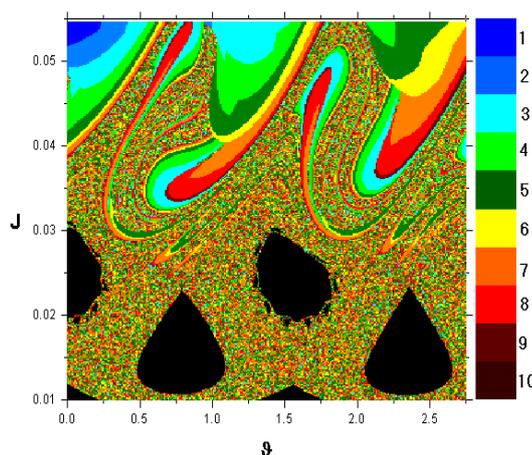


FIGURA 5.13 – Bacia de escape para as condições iniciais representadas na figura 5.7 (b).

Devido a esta correspondência de regiões entre os mapas de conexão e as bacias de escape, parece razoável, a princípio, concluir que as linhas iniciando em regiões relacionadas com um  $N$  específico escapam para uma mesma seção poloidal específica. No entanto, observando mais atentamente, nota-se que a correspondência não é obedecida fielmente. Comparando a figura 5.8 (a) com a figura 5.12 (b), por exemplo, percebemos uma evidente semelhança entre as regiões de ambas. No entanto a correspondência de cores não é sempre a mesma. Além disso, os limites de cada região de cores também não são exatamente

idênticos. A conclusão deixa então de ser tão óbvia.

A explicação para a semelhança entre estas figuras exige um olhar mais atento: Regiões bem definidas surgem nas bacias de escape quando há regiões bem definidas também nos mapas de conexão, ou seja, quando  $N$  é pequeno. Em outras palavras, linhas de comprimentos de conexão pequenos e com valores iniciais próximos escapam para uma mesma seção de  $\vartheta$  (não se afastam com a evolução  $\varphi_t$ ). Já com comprimentos maiores temos linhas, mesmo com condições iniciais muito próximas, escapando para seções bastante distantes. Este último aspecto faz com que pontos de diversas cores estejam misturados nas bacias de escape.

A sensibilidade ou não às condições iniciais define uma linha de campo caótica ou estável. O comprimento de conexão pequeno está, portanto, relacionado com a estabilidade da linha de campo magnético e conseqüentemente com a não divergência de suas trajetórias com a evolução de  $\varphi_t$ . Semelhantemente, comprimentos de conexão elevados, se relacionam com o quão caótica é a linha de campo magnético e por isso com a divergência de suas trajetórias com a evolução de  $\varphi_t$ . Outro aspecto que reforça este argumento é que as regiões bem definidas nas bacias de escape fazem fronteira com regiões de cor vizinha na escala de cores. Isto significa que se duas linhas de campo com  $N$  pequeno e com condições iniciais muito próximas escaparem para seções diferentes, estas seções devem ser vizinhas. Por exemplo, uma região amarela só poderá fazer fronteira com uma verde oliva ou com uma laranjada nas bacias de escape. Verifica-se isso observando a figura 5.13, por exemplo.

Temos então que em meio a regiões caóticas de linhas de campo no mapa de Poincaré, encontramos pequenas regiões com baixa densidade de pontos. Linhas com condições iniciais nestes locais pouco densos terão um comprimento de conexão pequeno e serão

estáveis. Regiões de baixa densidade de pontos no mapa de Poincaré representam então ilhas de estabilidade em meio a um mar caótico de linhas de campo. Apresentamos no Anexo B as bacias de escape obtidas utilizando as grades mencionadas no Anexo A.

### 5.3 “Footprints”

Estudos experimentais mostraram [28] que o comprimento de conexão das linhas de campo que escapam para a parede do tokamak está relacionado com o aquecimento da câmara. Mais especificamente, temos que, os locais onde as linhas de  $N$  elevado atingem a câmara, devem ser mais aquecidos que os locais onde se chocam as linhas de  $N$  pequeno. Diante disso torna-se interessante sabermos o comprimento  $N$  da linha escapando em um ângulo  $\vartheta_e$  específico. Para isso construímos as figuras chamadas de “footprints”.

Para gerar estas figuras consideramos como grade de condições iniciais o espaço de fase inteiro. Tomou-se nesta grade 360.000 pontos igualmente espaçados (600x600) e iterou-os até que atingissem  $J \approx 0,055$ . As condições iniciais que não escaparam até completarem 4000 voltas toroidais foram ignoradas. Para as linhas que escaparam foram contabilizados o ângulo de escape  $\vartheta_e$  e o respectivo comprimento de conexão  $N$ . Nas figuras 5.14 (a) e 5.14 (b) encontramos os “footprints” para modo de perturbação (4, 1), parâmetros  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,45319$  e corrente de perturbação  $I_h =$  (a)  $8,57\%I_p$  e (b)  $11\%I_p$ . Optamos por representar os “footprints” com um eixo vertical em escala logarítmica, para a melhor visualização das linhas incidindo com  $N$  relativamente pequeno.

Chamamos a atenção, primeiramente, para o fato de existirem seções angulares onde não há incidência de nenhuma linha. Outro fato marcante é uma variação irregular e abrupta de  $N$  com o ângulo de escape  $\vartheta_e$ , formando verdadeiras estruturas no gráfico.

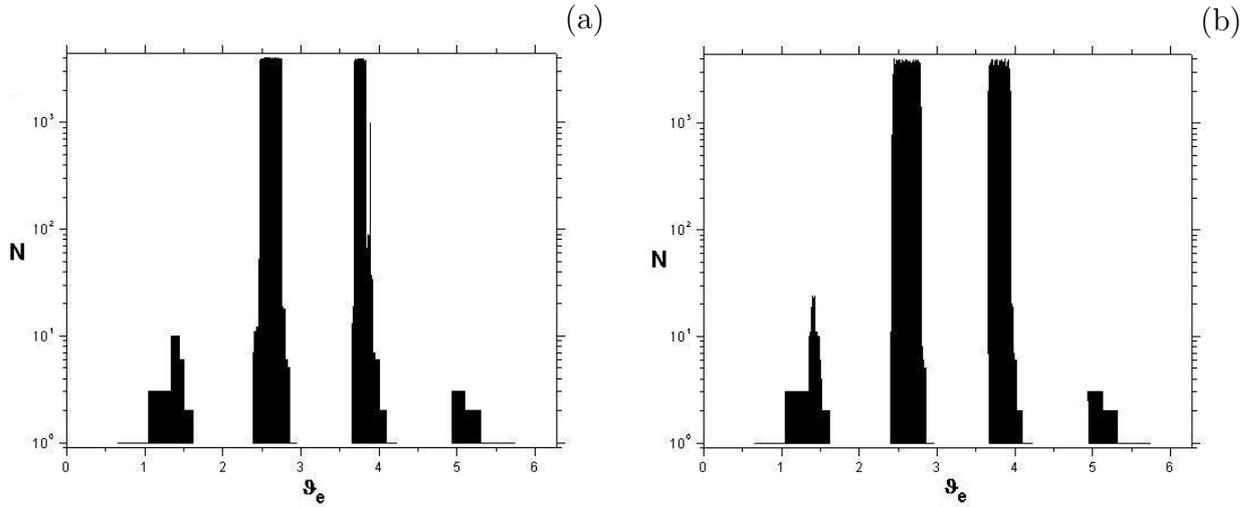


FIGURA 5.14 – “Footprints” do modo de perturbação (4, 1), parâmetros  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,45319$  e corrente de perturbação  $I_h =$  (a)  $8,57\%I_p$  e (b)  $11\%I_p$ .

Estas estruturas parecem ser preenchidas em seu interior. Isto porque a curva oscila muito rapidamente entre praticamente todos os valores de  $N$ , respeitando um limite máximo em cada intervalo de  $\vartheta_e$ . Ou seja, se em uma determinada seção houver linhas incidentes com um comprimento  $N_{max}$  linhas de todos os outros comprimentos inferiores também incidirão variando de maneira “não-suave”.

Notamos também que existem seções formando “canais” onde incidem linhas de comprimentos grandes ( $N > 10^3$ ). Estes canais coincidem com a posição angular onde os pontos nos mapas de Poincaré das figuras 5.1 e 5.3 alcançam a borda da câmara. Estes canais aparecem como “torres” nos “footprints”. Nestas seções de  $\vartheta_e$  não temos um comprimento  $N_{max}$  bem definido. Temos então que as linhas possuindo valores de  $N$  elevado (e conseqüentemente transportando mais calor) incidem em posições angulares bem localizadas na câmara.

Obtivemos também, nas figuras 5.15 (a) e (b) os “footprints” para o modo de perturbação (5, 1), parâmetros  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,5895$  e corrente de perturbação  $I_h =$  (a)  $8,57\%I_p$  e (b)  $11\%I_p$ . Para este modo de perturbação notamos que se formam um número

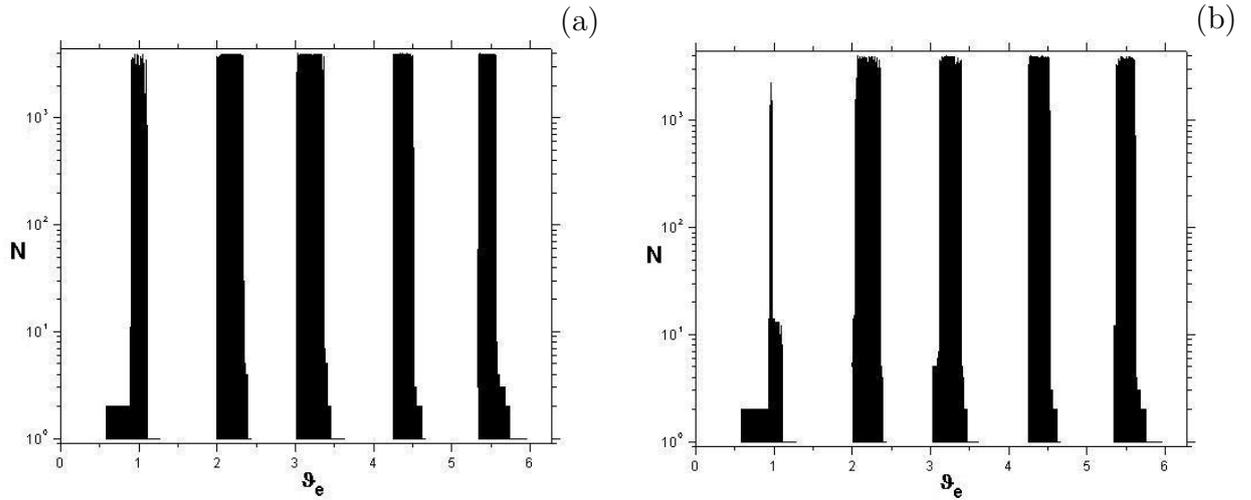


FIGURA 5.15 – “Footprints” do modo de perturbação  $(5, 1)$ , parâmetros  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,5895$  e corrente de perturbação  $I_h =$  (a)  $8,57\%I_p$  e (b)  $11\%I_p$ .

maior de canais de escape. Isto implica em uma maior uniformidade no escape das linhas de campo ao perturbar o modo  $(5, 1)$  como havíamos percebido nas bacias de escape. Uniformizando o escape das linhas teremos também um aquecimento mais uniforme da parede da câmara.

Podemos usar um artifício matemático para obtermos, de outra maneira, a dependência entre  $N$  e  $\vartheta_e$  [29]. Isto reduz o tempo computacional gasto na obtenção dos footprints (cerca de 48 horas) para alguns segundos. Para isso tomamos como condições iniciais diferentes pontos em  $J$  correspondendo à parede da câmara e igualmente espaçados em  $\vartheta_e$ . Iteramos então o mapa de Poincaré ao contrário para estes valores iniciais (fazendo  $\varphi_t$  evoluir para trás) até que a linha atinja novamente  $J$  correspondendo à parede. Quando isto acontece contabiliza-se o ângulo inicial  $\vartheta_e$  e o número de iterações necessárias para que a linha retorne à borda. A diferença das figuras obtidas por este método é que os comprimentos  $N$  computados são uma unidade maior do que os obtidos convencionalmente. Outra deficiência deste método é a incapacidade de identificar valores de  $N$  menores que o limite máximo de cada seção. “Footprints” obtidos por este método estão apresentados na seção Anexo C

## 5.4 Percentual de incidência

Para compreender o fluxo de calor para as paredes do tokamak deve-se ter informação da quantidade de linhas incidentes em cada região da câmara, além de seus comprimentos de conexão. Para isto calculou-se o percentual de linhas incidindo em cada intervalo de  $1^\circ$  (ou  $0,0175$  rad) na variável  $\vartheta$  em  $\varphi_t = 0$ , totalizando 360 seções angulares. Contabilizamos então quantas linhas incidem em cada uma destas seções angulares e calculamos o percentual em relação ao total de linhas que escapam.

Apresentamos nas figuras 5.16 (a) e 5.16 (b) os percentuais de incidência para modo de perturbação (4, 1), parâmetros  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,45319$  e corrente de perturbação  $I_h =$  (a)  $8,57\%I_p$  e (b)  $11\%I_p$ . Nas figuras 5.17 (a) e 5.17 (b) apresentamos os percentuais

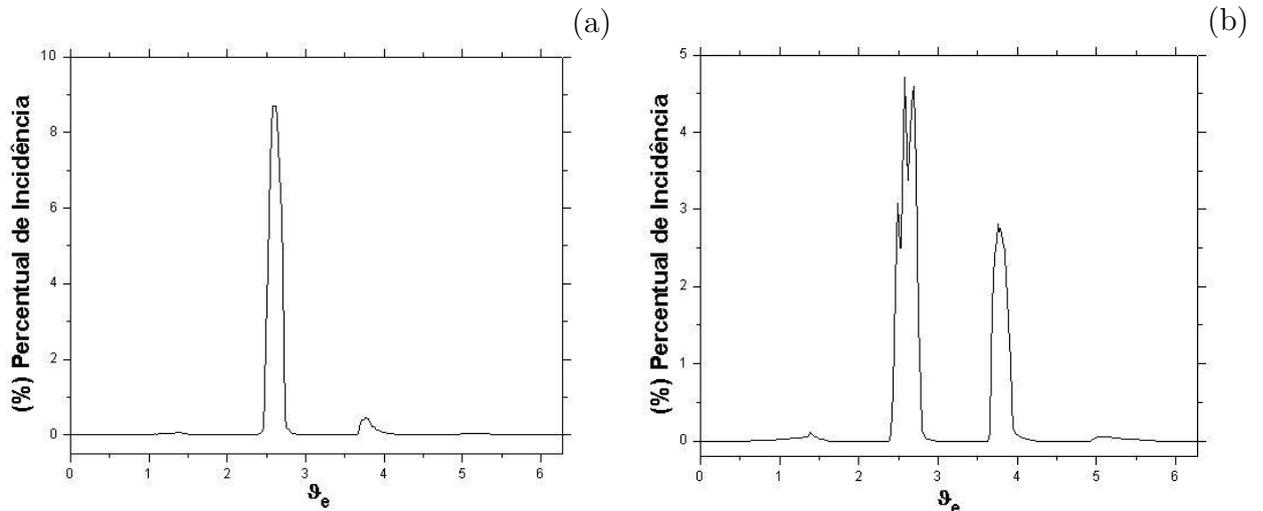


FIGURA 5.16 – Percentuais de incidência para o modo de perturbação (4, 1) com parâmetros  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,45319$  e corrente de perturbação  $I_h =$  (a)  $8,57\%I_p$  e (b)  $11\%I_p$ .

de incidência para modo de perturbação (5, 1), parâmetros  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,5895$  e corrente de perturbação  $I_h =$  (a)  $8,57\%I_p$  e (b)  $11\%I_p$ . Vemos que os percentuais de incidência complementam os “footprints” na compreensão do fluxo de calor para as paredes. Seções atacadas por linhas possuindo um valor alto de  $N$  nem sempre serão atacadas por muitas linhas. Isto pode ser visto na figura 5.16 (a) em comparação com

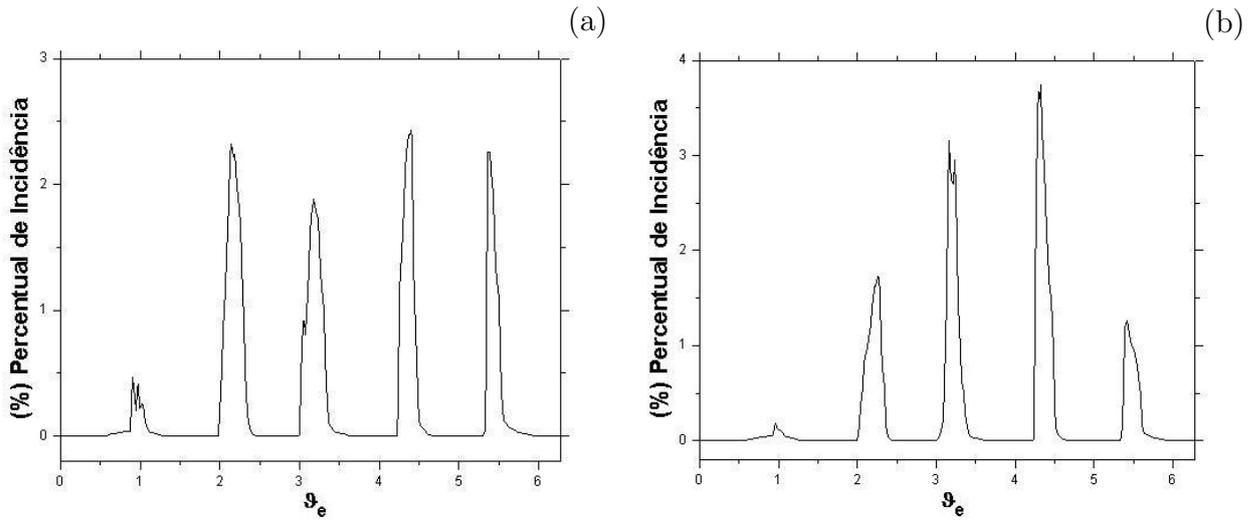


FIGURA 5.17 – Percentuais de incidência para o modo de perturbação (5, 1) com parâmetros  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,5895$  e corrente de perturbação  $I_h =$  (a)  $8,57\%I_p$  e (b)  $11\%I_p$ .

a figura 5.14 (a), por exemplo. Apesar de regiões com uma maior incidência de linhas acontecer nos picos dos “footprints”, a proporção não é obedecida, assim como a estrutura.

## 6 Conclusão

Estudamos neste trabalho os campos magnéticos de confinamento do plasma em tokamaks. Mais especificamente nos concentramos em campos magnéticos caóticos gerados por perturbações espaciais periódicas e ressonantes. Em todo o estudo foi utilizado um sistema de coordenadas que leva em consideração os efeitos de assimetria devido à toroidicidade do sistema. Devido a esta assimetria as superfícies magnéticas não são concêntricas, apresentando o desvio de Shafranov. Vimos também que a helicidade das linhas de campo não é constante, fazendo com que o fator de segurança também não seja. Além disso obtivemos o fator de modulação  $\lambda$  que corrige o traçado do Enrolamento Helicoidal Ressonante devido à toroidicidade, tornando-o não uniforme, permitindo a ressonância com uma superfície magnética específica.

Apresentamos o dispositivo Limitador Magnético Ergódico, capaz de produzir uma ressonância com uma determinada superfície magnética e de diferentes intensidades. Vimos que esta perturbação pode ser considerada como uma função delta nas posições dos anéis limitadores e que é possível encontrar as coordenadas canônicas com esta perturbação, através de um mapa estroboscópico. A dinâmica das linhas de campo é analisada com o uso dos mapas de Poincaré.

Vimos através dos mapas de Poincaré, os fenômenos de reconexão e bifurcação acon-

tecendo nas cadeias de ilhas irmãs. Isso ocorre por escolhermos um modelo de densidade de corrente de plasma apresentando um perfil radial não-monotônico. Este modelo faz com que o fator de segurança tenha este mesmo tipo de perfil, quebrando a condição de não degenerescência do sistema, necessária para valer os resultados da teoria KAM. Observamos também o nascimento de linhas de campo que se dissolvem em todo o espaço de fase. Caracterizamos estas linhas como caóticas através de seu espectro de potência e, posteriormente, pela sensibilidade às condições iniciais.

Introduzimos algumas ferramentas para o estudo numérico do escape das linhas de campo. Vimos que existem regiões na parte caótica do mapa de Poincaré onde há uma baixa densidade de pontos. Os mapas de conexão nos revelaram que linhas de campo com condições iniciais nestas regiões realizam poucas voltas toroidais antes de chocarem-se com a parede. As bacias de escape revelaram que estas mesmas regiões de valores pequenos de  $N$  representam ilhas de estabilidade em meio a um mar caótico. Conseguimos assim gerar a zona de alto coeficiente de difusão próxima à borda, que motivou o estudo das linhas caóticas.

Com relação à concentração de linhas de campo na parede interna da câmara, que devem influenciar à deposição de partículas, vimos através dos “footprints” que o modo de perturbação  $(4, 1)$  apresenta uma uniformidade menor de escape de linhas do que o modo  $(5, 1)$ . Mesmo o modo  $(5, 1)$  apresentou canais preferenciais de escape de linhas de campo, causando assim ataques localizados à parte interna da câmara. Vimos também, com os percentuais de incidência, que a quantidade de linhas que incide por um determinado canal não obedece a proporção do valor do comprimento de conexão  $N$  máximo das linhas incidentes. Pode-se então dizer que tais perturbações geram canais de escape altamente localizados, que agem como dispositivos chamados divertores [30], [31].

Este trabalho terá continuidade no programa de doutorado. Faremos a introdução de uma perturbação localizada nas linhas de campo magnético através de uma corrente de perturbação, de tal forma a gerar um ponto de X na superfícies magnética mais externa, simulando um divertor. O propósito da utilização do divertor é redirecionar o escape do plasma em direção à separatriz. A colocação de uma superfície coletora após a separatriz redireciona o escape de uma região entre a separatriz e as placas coletoras. Nesta região as linhas de campo podem se espalhar e assim reduzir a energia das partículas bombardeando as placas. Tal dispositivo é importante para o controle das impurezas bombardeando as paredes do tokamak.

# Referências Bibliográficas

- [1] Wobig, H.; Abdullaev, S. S.; Finken, K. H.; et al. **Z. Naturforsch.**, v.44a:1054, 1987. [19](#)
  
- [2] Bazzani, A.; Malavasi, M.; Pellacani, C.; et al. **Nuovo Cimento B**, v.103:659, 1989. [19](#)
  
- [3] Ortolani, S.; Schnack, D. D. **Magnetohydrodynamics of plasma relaxation**. World Scientific, Singapore, 1993. [19](#)
  
- [4] Bittencourt, J. A. **Fundamentals of Plasma Physics**. FAPESP, São Paulo, 2 edition, 1995. [20](#)
  
- [5] Robinson, D. C. **Nucl. Fusion**, v.25:1101, 1985. [20](#)
  
- [6] Karger, F. and Kluber, O. **Nucl. Fusion**, v.25:1059, 1985. [20](#)
  
- [7] Engelhardt, W. and Feneberg, W. **J. Nucl. Mater.**, v.76/77:518, 1978. [20](#), [43](#)
  
- [8] Karger, F. and Lackner, K. **Phys. Lett. A**, v.61(6):385, 1977. [20](#), [43](#)
  
- [9] Engelhardt, W. **Bulletin of the A.P.S.**, 1977. [20](#)
  
- [10] Kucinski, M. Y.; Caldas, I. L.; Monteiro, L. H. A. and Okano, V. **J. Plasma Phys.**, v.44:303–311, 1990. [23](#), [25](#), [28](#)

- [11] Morse, P. M. and Feshbach, H. **Methods of Theoretical Physics**, volume v.2. McGraw Hill, New York, 1953. [24](#)
- [12] Freidberg, J.P. **Ideal Magnetohydrodynamics**. Plenum Press, New York, 1987. [27](#)
- [13] da Silva, E. C. **Efeitos da Geometria Toroidal na Atuação dos Campos Helicoidais Ressonantes em Tokamaks**. Tese de doutorado, USP, São Paulo, 2000. [28](#), [29](#), [30](#), [41](#)
- [14] Mazzucato, E.; Batha, S. H.; Beer, M.; et al. **Phys. Rev. Lett.**, v.77:3145, 1996. [29](#)
- [15] Stacey, W. M. **Fusion Plasma Analysis**. John Wiley, New York, 1981. [33](#)
- [16] Goldstein, H. **Classical Mechanics**. Reading, MA: Addison-Wesley, 2 edition, 1980. [36](#)
- [17] Boozer, A. H. and Rechester, A. B. **Phys. Fluids**, v.21:682–680, 1978. [38](#)
- [18] da Silva, E. C.; Caldas, I. L.; Viana R. L. **IEEE Transactions on Plasma Science**, v.29(4):617–631, 2001. [42](#)
- [19] da Silva, E. C.; Caldas, I. L.; Viana, R. L. **Physics of Plasmas**, 8(6):2855–2865, 2001. [45](#)
- [20] Tabor, M. **Chaos and Integrability in Nolinear Dynamics: an introduction**. Wiley Interscience, New York, 1989. [48](#)
- [21] Lichtenberg, A. and Lieberman, M. A. **Regular and Chaotic Motion**. Springer-Verlag, New York, 2 edition, 1992. [48](#)

- [22] Roberto, M.; da Silva, E. C.; Caldas, I. L.; Viana, R. L. **Brazilian J. of Physics**, 34(4):1759–1765, 2004. [49](#)
- [23] Roberto, M.; da Silva, E. C.; Caldas, I. L.; Viana, R. L. **Physica A**, 342:363–369, 2004. [49](#), [59](#)
- [24] Roberto, M.; da Silva, E. C.; Caldas, I. L.; Viana, R. L. **Physics of Plasmas**, 11(1):214–225, 2004. [59](#)
- [25] da Silva, E. C.; Roberto, M.; Portela, J. S. E.; Caldas, I. L.; Viana, R. L. **Nuclear Fusion**, 46:S192–S198, 2006. [59](#)
- [26] Ferrara, F. N.; do Prado, C. P. C. **Caos: Uma Introdução**. Edgar Blucher, São Paulo, 1995. [61](#)
- [27] Roberto, M.; Kroetz, T.; da Silva, E. C.; Caldas, I. L.; Viana, R. L. Field line escape basins and magnetic footprints in shearless tokamaks. **Proceedings of 5th Brazilian Conference of Dynamics, Control and Applications**, 2006. [72](#)
- [28] Jakubowski, M. W.; Abdullaev, S. S.; Finken, K. H.; et al. **Nucl. Fusion**, v.44:1–11, 2004. [76](#)
- [29] da Silva, E. C.; Roberto, M.; Caldas, I. L.; Viana, R. L. **Physics of Plasmas**, 13:052511:1–9, 2006. [78](#)
- [30] Abdullaev, S. S.; Finken, K. H.; Jakubowski, M. W.; Lehnen, M. **Nucl. Fusion**, 46:S113–S126, 2006. [82](#)
- [31] Abdullaev, S. S. **Nucl. Fusion**, 44:S12–S27, 2004. [82](#)

# Anexo A - Mapas de Conexão

Apresentaremos aqui alguns mapas de conexão obtidos durante o desenvolvimento do projeto de mestrado, mas que não foram incluídos no capítulo 5.

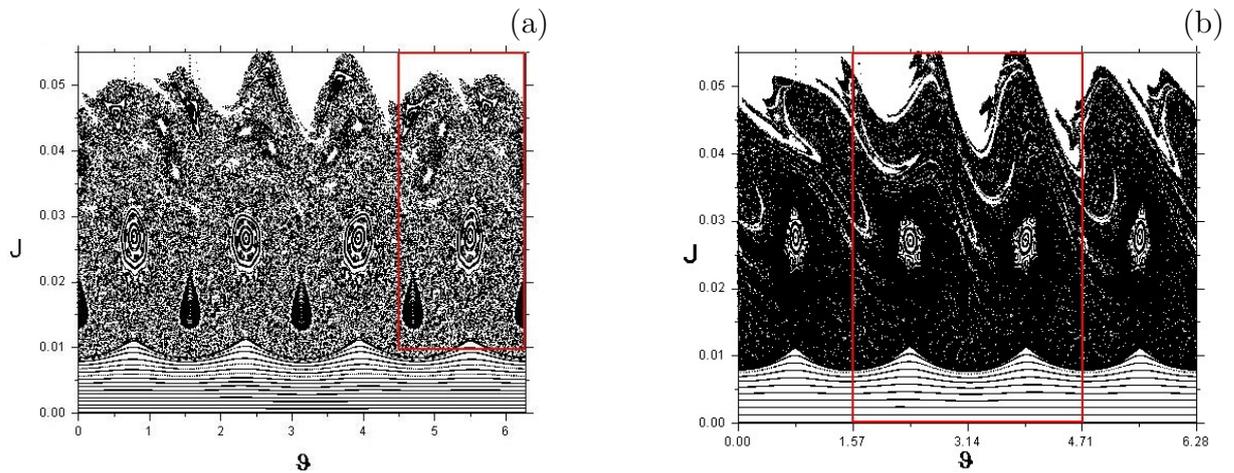


FIGURA A.1 – Grades de condições iniciais representadas no mapa de Poincaré. Utilizamos  $(m_0, n_0) = (4, 1)$ ;  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,45319$ ;  $I_h =$  (a)  $8,57\%I_p$  e (b)  $11\%I_p$ .

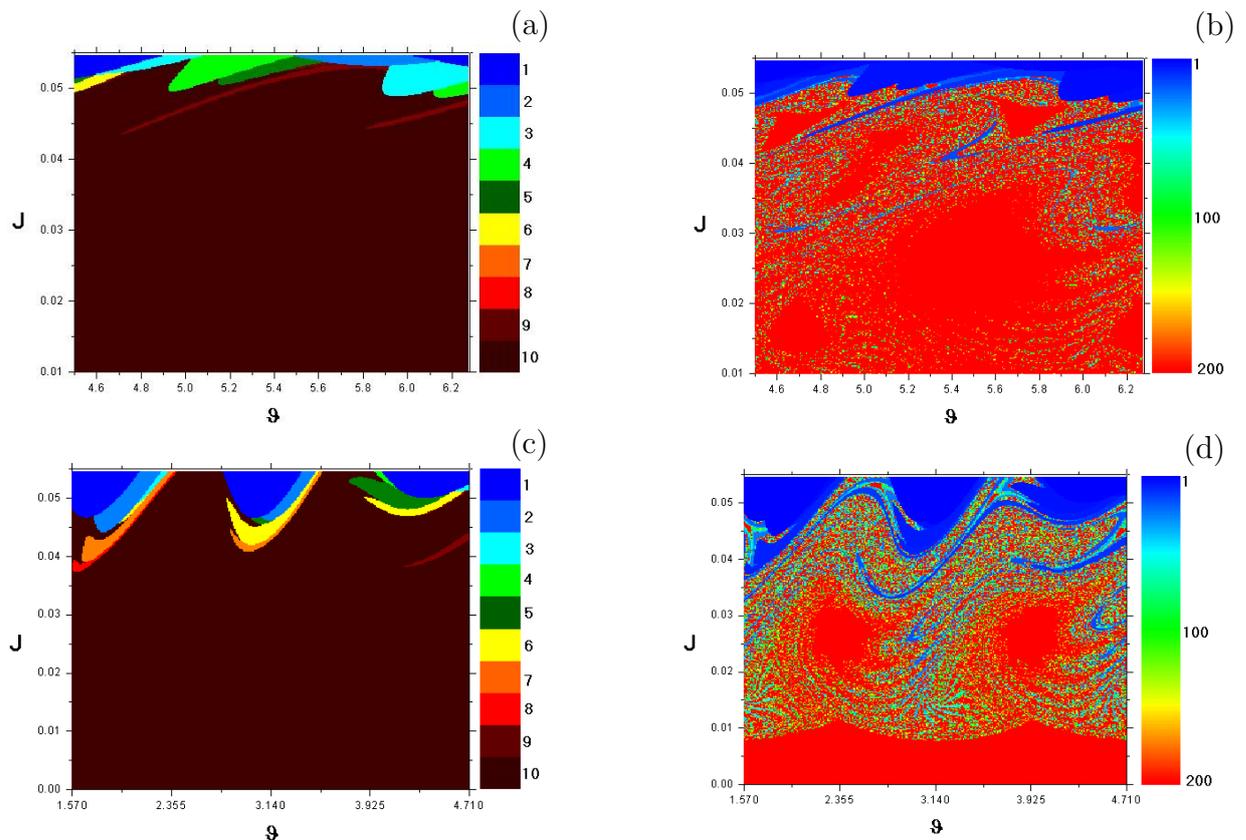


FIGURA A.2 – Mapas de conexão para as condições iniciais representadas em: (a) A.1 (a) em uma escala  $N$  de 1 a 10 (ou maior que 10), (b) A.1 (a) em uma escala  $N$  de 1 a 200 (ou maior que 200), (c) A.1 (b) em uma escala  $N$  de 1 a 10 (ou maior que 10) e (d) A.1 (b) em uma escala  $N$  de 1 a 200 (ou maior que 200).

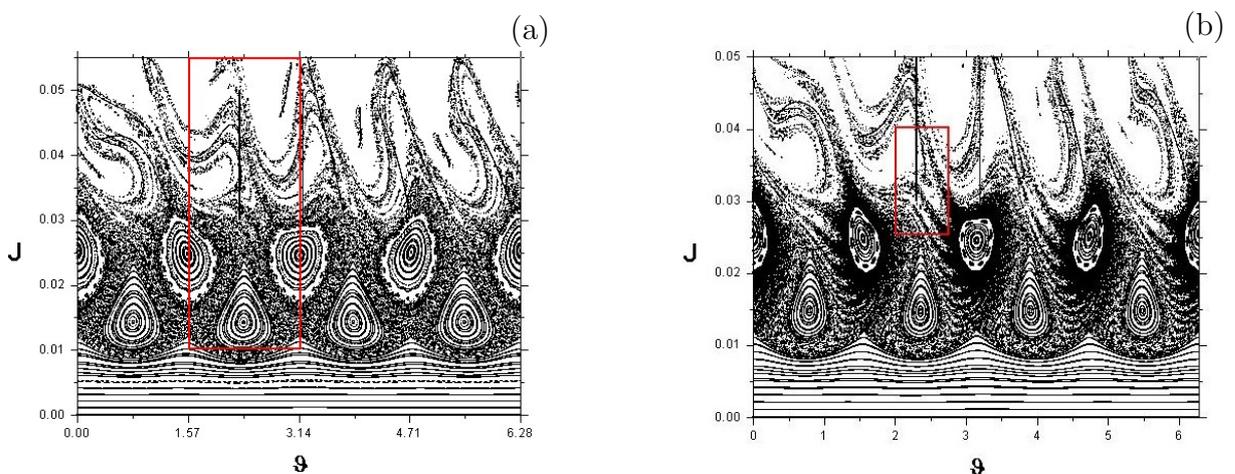


FIGURA A.3 – Grades de condições iniciais representadas no mapa de Poincaré. Utilizamos  $(m_0, n_0) = (5, 1)$ ;  $\gamma = 0, 8$ ;  $\beta = 3, 0$ ;  $\lambda = 0, 5895$ ;  $I_h =$  (a)  $8, 57\%I_p$  e (b)  $11\%I_p$ .

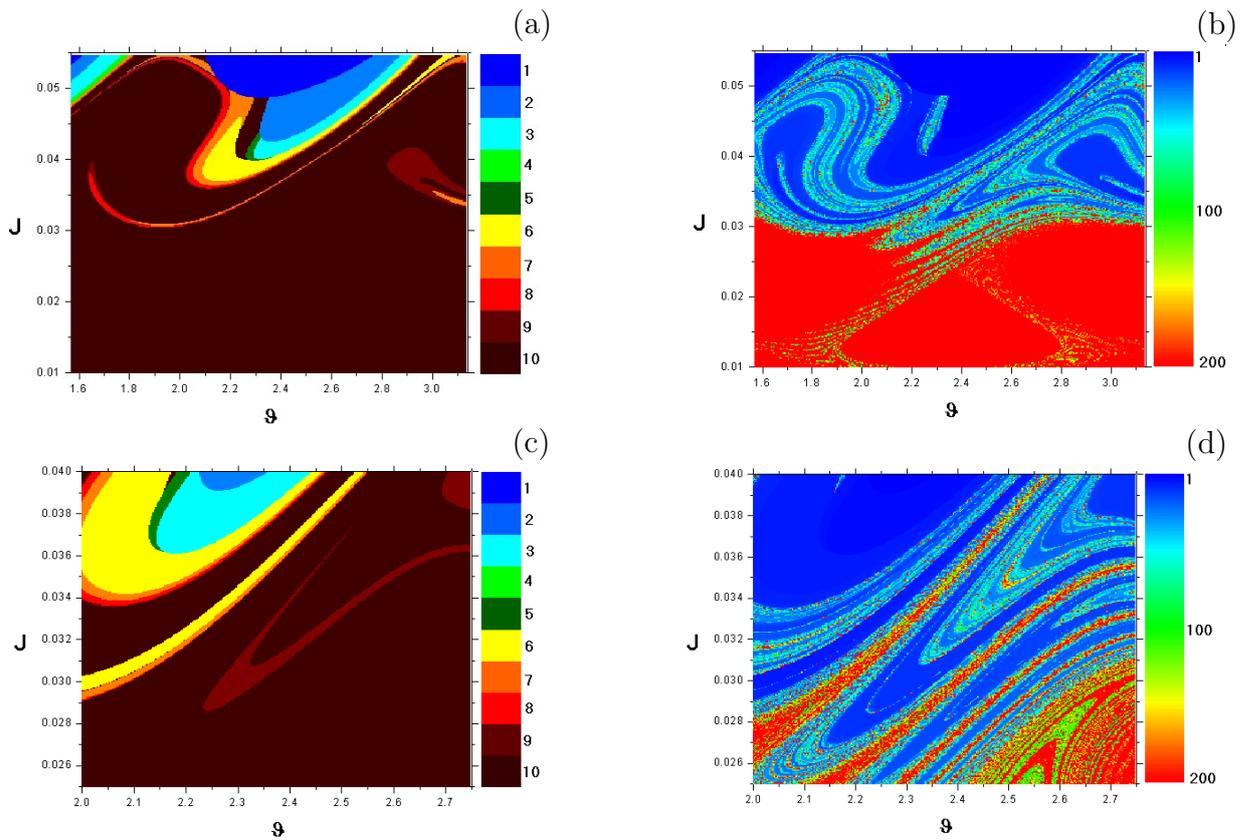


FIGURA A.4 – Mapas de conexão para as condições iniciais representadas em: (a) A.3 (a) em uma escala  $N$  de 1 a 10 (ou maior que 10), (b) A.3 (a) em uma escala  $N$  de 1 a 200 (ou maior que 200), (c) A.3 (b) em uma escala  $N$  de 1 a 10 (ou maior que 10) e (d) A.3 (b) em uma escala  $N$  de 1 a 200 (ou maior que 200).

# Anexo B - Bacias de Escape

Apresentaremos aqui bacias de escape obtidas durante o desenvolvimento do projeto de mestrado, mas que não foram incluídos no capítulo 5.

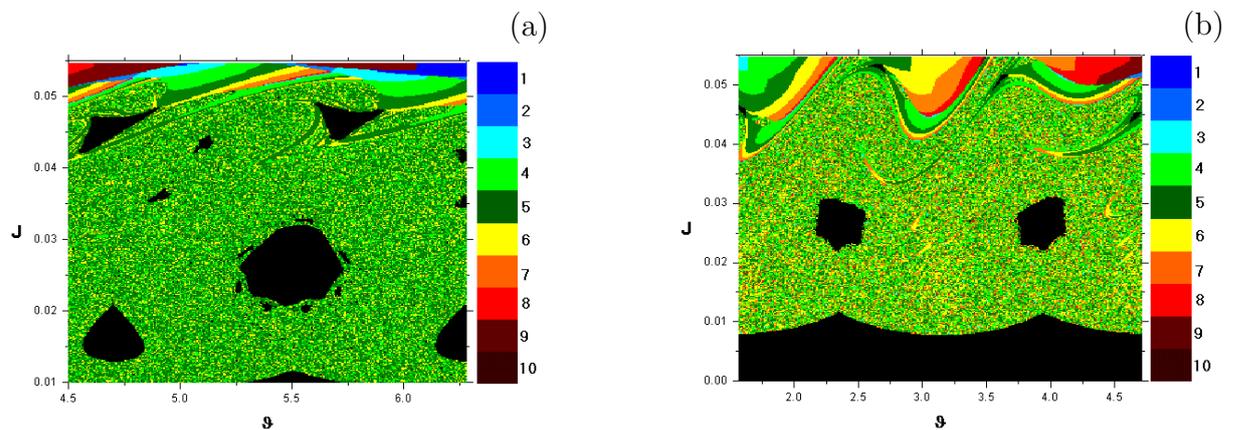


FIGURA B.1 – Bacias de escape para as condições iniciais representadas na figura (a) A.1 (a) e (b) A.1 (b).

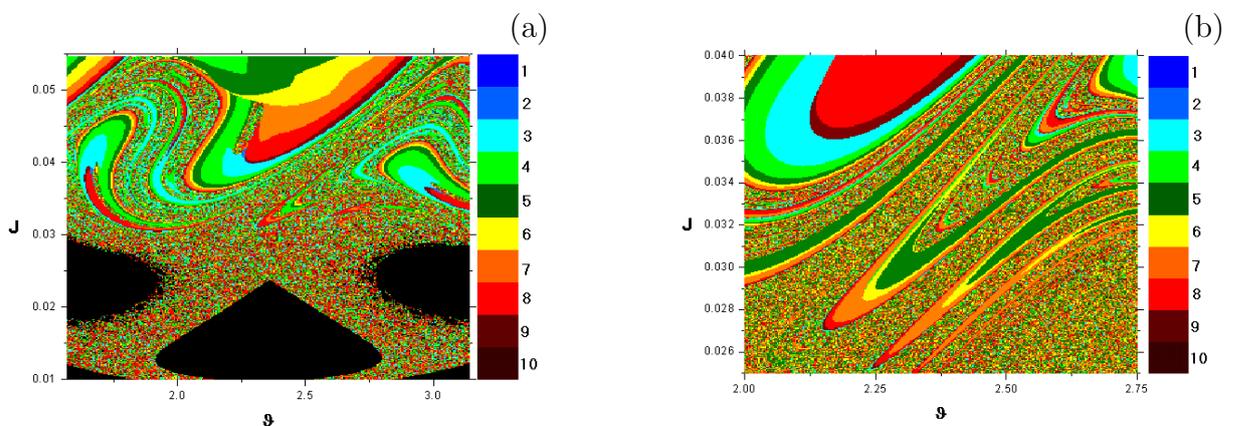


FIGURA B.2 – Bacias de escape para as condições iniciais representadas na figura (a) A.3 (a) e (b) A.3 (b).

# Anexo C - “Footprints”

Apresentaremos aqui os “footprints” correspondentes àqueles obtidos no capítulo 5 usando o artifício matemático lá descrito.

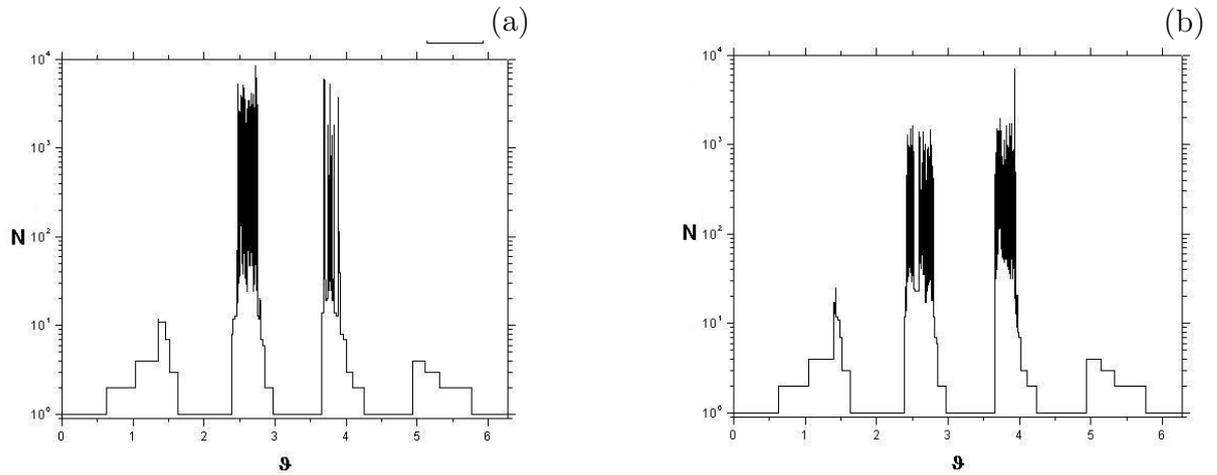


FIGURA C.1 – “Footprints” do modo de perturbação (4, 1), parâmetros  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,45319$  e corrente de perturbação  $I_h =$  (a)  $8,57\%I_p$  e (b)  $11\%I_p$ .

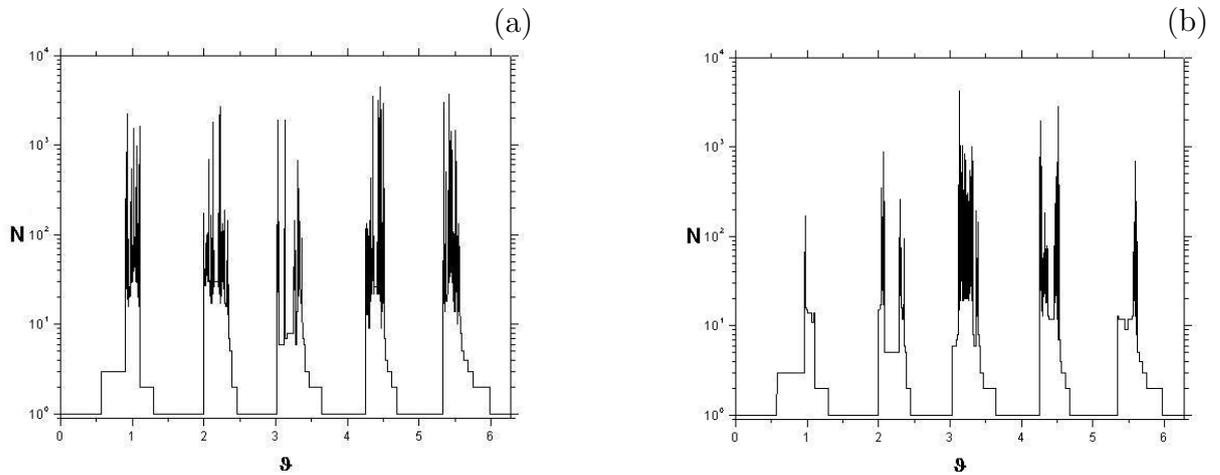


FIGURA C.2 – “Footprints” do modo de perturbação (5, 1), parâmetros  $\gamma = 0,8$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $\lambda = 0,5895$  e corrente de perturbação  $I_h =$  (a)  $8,57\%I_p$  e (b)  $11\%I_p$ .