

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Análise espectral da turbulência periférica no TBR-1

Dissertação de Mestrado apresen-
tada ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo

Comissão Examinadora

Dra. Maria Vittoria A.P. Heller (IFUSP)

Dr. Vito R. Vanin (IFUSP)

Dr. Mario Ueda (INPE)



Autor - Zoezer Antonio Brasilio

Orientadora - Prof. Dra. Maria Vitória A. P. Heller

Zoezer Antonio Brasilio

Maria Vittoria Heller

São Paulo

1994

SBI-IFUSP



305M810T2093

530.44

B823a

M

e. 2

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Zoezer, Antonio Brasílio

BRASILIO, Zoezer Antonio

Análise espectral da turbulência periférica no TBR-1.
São Paulo, 1994.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Aplicada
Área de Concentração: Física Nuclear
Orientador: Profa. Dra. Maria Vitória A.P. Heller

Unitermos: 1. Turbulência eletrostática e magnética;
2. Análise espectral; 3. Análise espectral não linear.

USP/IF/SBI - 06/94

Dedico este trabalho aos meus pais, pelo amor a mim dedicado, e à todos os meus familiares, em especial, à minha tia Rosária, que soube me receber como filho em sua casa, aos primos Eloína e Thiers, por todo o apoio e carinho com que sempre me trataram, e à minha prima Ana Beatriz, pelo afeto e por ter servido como exemplo na minha vida universitária.

*Para todos aqueles que devotaram sua vida
à Ciência, e, principalmente, aqueles que a
perderam, em defesa da verdade.*

“Se até uma máquina pode aprender o valor de uma vida humana, talvez nós também possamos...”

(Sarah Connor - O Exterminador 2)

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente, às pessoas que estiveram ligadas diretamente com a elaboração deste trabalho:

Gostaria de agradecer à Profa. Dra. Maria Vittoria A.P. Heller, pela sua orientação, pela sua participação marcante na elaboração e desenvolvimento deste trabalho teórico e pelo carinho e companheirismo que sempre me tem dedicado.

Ao Prof. Dr. Iberê L. Caldas, pela atenção constante dispensada a esse trabalho, contribuindo com sugestões valiosas, e pela convivência sempre agradável.

Ao Raul Murete de Castro, pela construção do sistema de sondas e obtenção dos dados experimentais por nós analisados.

Ao prof. Dr. Ivan Cunha Nascimento, coordenador do Laboratório de Física de Plasmas, pelo seu apoio quanto à utilização das dependências do mesmo.

Ao prof. Dr. Aluísio Neves Fagundes e à Wanderley Pires de Sá, pelo auxílio na utilização de programas computacionais.

Aos demais professores do Laboratório de Física de Plasmas, como os profs. Drs. Ruy Pepe da Silva, e Ricardo M.O. Galvão pelo interesse demonstrado pelo nosso trabalho.

Aos colegas de sala, Raul, Mauro e Kenya pela troca de informações e amizade, desde que passamos a conviver juntos.

Aos antigos colegas de sala, em especial José (Carioca), Alex, Murilo, Kay e Gisele, pela convivência agradável tanto na sala como durante os cursos e reuniões que participamos juntos.

Aos técnicos Juan, Edison, Ablício, Renato, Tadeu, Rogério e Ivan, por todo o auxílio prestado a este trabalho, direta ou indiretamente.

À todos os meus amigos do período de graduação e de pós-graduação, por sua amizade e afeto, que deixarão marcas indeléveis em minha memória.

Este trabalho teve o apoio financeiro do CNPq.

ABSTRACT

In this work we show the viability of the application of spectral analysis technique as a diagnostic in the study of peripheral plasma turbulence. We apply this technique in computer simulations and in real data of plasma fluctuations measured by magnetic and electrostatic probes at TBR-1 plasma edge. Numerical digital filters are also employed to study these fluctuations. Fluctuation-induced particle flux at the plasma edge is determined and analysed through these techniques. Two-point estimation of wavenumber and frequency spectrum is discussed and applied to the measured data to characterize the degree of turbulence. Bispectral analysis is introduced to quantify nonlinear interactions that may occur in this region. Results show that TBR-1 plasma edge presents high degree of turbulence, and that just a linear model can not describe completely the plasma interactions in these fluctuations.

RESUMO

Neste trabalho mostramos a viabilidade da aplicação das técnicas de análise espectral como diagnóstico no estudo da turbulência na periferia do plasma. Aplicamos esta técnica em simulações em computador e em dados reais de flutuações de parâmetros do plasma medidos por sondas eletrostáticas e magnéticas na borda do plasma do tokamak TBR-1. Filtros numéricos digitais são também empregados no estudo destas flutuações. O fluxo de partículas induzido pelas flutuações na borda do plasma é determinado e analisado por estas técnicas. Discutimos a determinação do espectro em número de onda e frequência e aplicamos o mesmo aos sinais medidos, para caracterizar o grau de turbulência. Introduzimos a análise biespectral para quantificar as interações não lineares que podem ocorrer nesta região. Os resultados mostram que o plasma na borda do TBR-1 apresenta um alto grau de turbulência e que um modelo linear sozinho não é capaz de descrever completamente as interações do plasma nestas flutuações.

Índice

1	Introdução	7
2	Arranjo Experimental	10
2.1	Introdução	10
2.2	O Tokamak TBR-1	10
2.3	O sistema de diagnóstico	12
2.4	Determinação de parâmetros do plasma através dos sinais medidos	14
3	Análise espectral de flutuações	17
3.1	Introdução	17
3.2	Espectros de potência	18
3.2.1	Auto-espectro de potência	20
3.2.2	Espectro de potência cruzado	23
3.2.3	Espectro de coerência	25
3.3	Espectro de transporte	26
3.4	Variância dos espectros	30
3.5	Filtros numéricos	32
4	O espectro em número de onda e frequência $S(\vec{k}, f)$	36
4.1	Introdução	36
4.2	Determinação do espectro $S_L(k, f)$	38

4.3	Determinação da relação de dispersão e da velocidade de fase .	40
4.4	Variância do espectro $S(k, f)$ e discussão da viabilidade de aplicação desta técnica	48
5	Análise biespectral	50
5.1	Introdução	50
5.2	Autobiespectro	52
5.2.1	Autobiespectro de potência	52
5.2.2	Autobicoerência	54
5.2.3	Autobifase	55
5.3	Relações de simetria do biespectro	56
5.4	Biespectro e bicoerência cruzados	57
5.5	Considerações estatísticas e variâncias dos espectros	59
5.6	Aplicações do biespectro em flutuações do plasma	61
6	Discussões e Conclusões	66
A	Influência da diferença de fase e da adição de ruído sobre os espectros de sinais	72
A.1	Efeito da diferença de fase entre dois sinais	72
A.2	Influência do ruído nas funções espectrais.	76
B	Aplicações de filtros sobre sinais de flutuações medidos na borda do plasma	78
B.1	Separação dos modos coerentes e da parte turbulenta de um espectro de flutuações	78
B.2	Obtenção do sinal médio a partir do sinal de flutuações	80
C	Testes da técnica biespectral	83
	Bibliografia	89

Lista de Figuras

2.1	a) Esquema da posição do sistema de diagnóstico no tokamak TBR-1. b) Esquema das sondas.	12
2.2	Esquema da sonda tripla.	13
3.1	a) Sinais de flutuações (\dot{B}_θ) do campo magnético poloidal para $r/a = 1,16$. b) Espectro de potência para o mesmo sinal. . . .	22
3.2	a) Espectro cruzado para dois sinais de corrente de saturação (\tilde{n}) em $r/a = 0,87$. b) Espectro de fase e de número de onda para os mesmos sinais anteriores.	24
3.3	Espectro de coerência para sinais de flutuações de corrente de saturação, sondas em $r/a = 0,87$	26
3.4	a) Espectros do fluxo de partículas a $r/a = 0,95$ (—) e $r/a = 1,1$ (- - -) ($\Delta f = 7,8 kHz$). b) Espectro de coerência entre \tilde{n} e $\tilde{\varphi}$ para $r/a = 0,95$	29
3.5	a) Variância do espectro de potência cruzado $P_{\tilde{n}n}$ para a Fig. 3.2. b) Variância do espectro de coerência $\gamma_{\tilde{n}n}$ apresentado na Fig. 3.3	31
3.6	Ganho de um filtro ideal (- - -) e real (—).	34
4.1	a) Espectro $S(k, f)$ para flutuações de potencial medidas em $r/a = 0,87$. b) Variância do espectro anterior	43

4.2	Curvas de nível para o espectro $S(k, f)$ de flutuações de potencial, em $r/a = 0,87$	44
4.3	a) Espectro $S(f)$ para medidas de potencial ($r/a = 0,87$). b) Espectro $S(k)$ para as mesmas medidas anteriores.	44
4.4	a) Espectro de $\bar{k}(f)$ para as medidas da Fig. 4.1a. b) Largura espectral $\sigma_{\bar{k}}$ do espectro anterior. c) Razão de dispersão $\sigma_{\bar{k}}(f)/\bar{k}(f)$ para as mesmas medidas anteriores.	45
4.5	Esquema das derivas diamagnéticas no TBR-1	47
5.1	Regiões simétricas para o cálculo das quantidades biespectrais.	58
5.2	a) Curvas de nível da autobicoerência para flutuações de densidade medidas em $r/a = 0,87$, sem a aplicação de campos magnéticos ressonantes. b) O mesmo para as mesmas flutuações, com aplicação de campos magnéticos ressonantes (Sinais filtrados a 250 kHz).	63
5.3	Curvas de nível do autobiespectro para flutuações de campo magnético poloidal sem (a) e com aplicação de campos magnéticos ressonantes (b) ($r/a=1,16$) (Sinais Filtrados a 250 kHz).	63
5.4	Autobifase do biespectro anterior.	64
5.5	Curvas de nível da autobicoerência de flutuações magnéticas sem a aplicação de campos ressonantes (a), e com aplicação dos mesmos (b) (Sinais filtrados a 250 kHz).	65
5.6	Bicoerência cruzada entre flutuações de densidade e de campo magnético sem a aplicação de campos helicoidais ressonantes (a), e com a aplicação dos mesmos (b) (Sinais filtrados a 250 kHz).	65
A.1	Espectros de potência dos sinais $x(t)$ (a) e $y(t)$ (b).	75

A.2	Espectro de potência cruzado dos sinais das equações A.1 e A.2	75
A.3	a)Espectro de fase entre os sinais x e y, simulados sem diferença de fase. b)Espectro de coerência para os mesmos sinais anteriores.	76
A.4	Espectro de fase entre os sinais x e y com defasagem prefixada ($\pi/3$).	76
A.5	Espectro de potência do sinal x com adição de ruído gaussiano.	77
A.6	Espectro de coerência entre os sinais x e y com ruído gaussiano adicionado	78
B.1	a) Espectro dos modos MHD para a bobina magnética em $r/a = 1,16$. b) Espectro da região turbulenta para a mesma bobina. (Filtro Butterworth, Ordem do filtro $N = 26$)	80
B.2	Sinal resultante da soma dos sinais de corrente de saturação médio com o sinal flutuante, medidos em $r/a = 0,87$	82
B.3	a) Sinal médio das flutuações medido (- - -) e sinal filtrado a partir do sinal total (—). b) Espectros superpostos dos mesmos sinais.	83
B.4	a) Sinal flutuante medido (- - -) e sinal filtrado com filtro passa-alta a partir do sinal total (—). b) Espectros superpostos dos mesmos sinais.	83
C.1	a) Auto-espectro do sinal C.1. b) Autobicoerência do mesmo sinal (frequência normalizada pela frequência de Nyquist). . .	87
C.2	a) Corte da autobifase do sinal anterior tomado em $f = f_1$. b) Corte da autobicoerência para a mesma frequência (frequência normalizada pela frequência de Nyquist).	87

C.3	a) Auto-espectro do mesmo sinal mas com fase ϕ_3 tomada do conjunto de números randômicos. b) Bicoerência para o mesmo sinal (frequência normalizada pela frequência de Nyquist).	88
C.4	a) Auto-espectro do sinal C.2. b) Autobicoerência do sinal C.2 (frequência normalizada pela frequência de Nyquist). . .	88

Capítulo 1

Introdução

Os efeitos de turbulência estão presentes em inúmeros processos naturais em física e engenharia. Plasmas e fluidos em determinadas circunstâncias se comportam de maneira regular; na natureza porém, a turbulência, um movimento irregular, é uma regra antes que uma exceção.

Os estudos experimentais de turbulência geralmente envolvem a determinação de propriedades estatísticas de grandezas mensuráveis tais como: a pressão, velocidade do fluido, densidade, potencial elétrico, temperatura, entre outros, como funções do tempo e do espaço. É importante então utilizar métodos que possam quantificar as propriedades estatísticas das flutuações e que determinem o fluxo de partículas e energia provocados por estas mesmas flutuações.

As técnicas de análise espectral vem sendo amplamente utilizadas como uma poderosa e eficiente ferramenta para o estudo de fenômenos relacionados com ondas e turbulência. Servem para investigar desde ondas em fluidos [Th 91] e ondas sonoras, até flutuações de parâmetros geofísicos [Hi 68]. Com estas técnicas, pode-se, por exemplo, identificar os modos ressonantes presentes, simultaneamente, num plasma, e através da determinação da correlação entre estes calcular a amplitude, o número de onda e as diferenças de fase en-

tre os mesmos, assim como, verificar a sua atuação no transporte de energia e de partículas.

O processo de transporte que ocorre em um tokamak não pode ser descrito, geralmente, pela teoria neoclássica, que é uma teoria de transporte colisional clássica, aplicada a uma geometria toroidal, sendo, por isso, denominado transporte anômalo. A questão do transporte anômalo representa um dos mais importantes problemas na pesquisa da fusão controlada, e um trabalho considerável tem sido desenvolvido para entender as causas do mesmo. Geralmente o transporte anômalo é atribuído à turbulência microscópica do plasma, ou seja, turbulência que ocorre em uma escala muito menor do que o raio do plasma. As flutuações dos campos elétricos e magnéticos num tokamak causam flutuações na velocidade das partículas e na posição radial das mesmas, o que pode levar ao transporte de partículas e energia através do campo magnético de confinamento [Li 85].

O plasma do tokamak TBR-1 apresenta instabilidades e turbulência de intensidade alta, o que o torna uma fonte conveniente para investigação do efeito destas no transporte anômalo. Considerando que existem leis de escala, que permitem comparar os dados obtidos com o TBR-1 com os dados analisados em outros tokamaks, pode-se contribuir para um estudo mais amplo das instabilidades e da turbulência nessas máquinas.

Neste sentido, foram desenvolvidos trabalhos iniciais no TBR-1 para estudar a turbulência neste tokamak [Sá 87, Fe 87, Fa 87, Ca 93a], assim como a influência de campos magnéticos ressonantes no controle dessa turbulência [Rib 90].

Este trabalho se refere à aplicação da análise espectral ao estudo das características espaciais e temporais das flutuações. Além disso, são apresentadas técnicas [Ri 88, Po 90, Ki 80] para estudar o processo de acoplamento não linear da turbulência e a redistribuição da energia entre os diversos modos.

A importância dessas técnicas de análise espectral na pesquisa sobre a tur-

bulência na borda do plasma (no TBR-1) é mostrada numa aplicação em resultados experimentais obtidos com sondas eletrostáticas e sondas magnéticas [Ca 93a].

No capítulo 2, apresentamos uma breve descrição do sistema experimental, que foi utilizado para determinar as flutuações, e as principais características do tokamak TBR-1. Descrevemos como se obtém os parâmetros do plasma que foram analisados a partir das medidas destas sondas. No capítulo 3 tratamos das técnicas básicas de análise espectral linear, que permitem obter inúmeras informações sobre a natureza das flutuações. A extensão do conceito de correlação cruzada, para a correlação em três pontos, permite a determinação do fluxo de partículas induzido pelas flutuações. Deste, pode-se determinar o coeficiente de difusão. Baseados nestes conceitos espectrais fundamentais, mostramos, no capítulo 4, como o espectro em número de onda e frequência $S(k, f)$ [Bea 82, Bea 83] pode ser determinado a partir de medidas em apenas dois pontos espaciais.

As técnicas de análise espectral linear são, porém, de valor limitado quando várias componentes espectrais interagem entre si devido a algum processo não linear. Assim, no capítulo 5, introduzimos as técnicas espectrais de maior ordem [Ki 79] para caracterizar completamente o sinal flutuante; dado que as nonlinearidades podem resultar na formação de novas componentes espectrais com coerência de fase. A determinação desta coerência de fase é obtida com o biespectro. Apresentamos também aplicações dos conceitos discutidos. No capítulo 6, indicamos as conclusões do nosso trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Arranjo Experimental

2.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos uma breve descrição do equipamento [Ca 93a] utilizado para a obtenção dos dados experimentais, analisados com as técnicas descritas nos próximos capítulos. Citamos as principais características do Tokamak TBR-1 e as espiras helicoidais que servem para criar campos magnéticos ressonantes [Be 86]. Indicamos, ainda, como se obtém as flutuações de potencial e de densidade do plasma, a partir das medidas feitas pelo sistema de diagnóstico, assim como se determina a temperatura a partir de medidas de potencial.

2.2 O Tokamak TBR-1

O TBR-1 [Na 81] é um tokamak de pequenas dimensões em operação no Laboratório de Física dos Plasmas do IFUSP, funciona por aquecimento

Ôhmico e com gás de hidrogênio, sendo seu vaso de vácuo construído em aço inoxidável. Esse tokamak possui 120 espiras toroidais e 18 janelas para diagnósticos. O limitador do TBR-1 é do tipo poloidal, consistindo em um anel de aço inoxidável com um raio de 0.08 m , e uma espessura de $0.75 \times 10^{-2}\text{ m}$. As demais características do tokamak TBR-1 estão na Tabela-1.

Tabela-1 - Tokamak TBR-1	
raio menor do vaso (b)	0.11 m
raio maior do vaso (R)	0.30 m
raio do plasma (a)	0.08 m
corrente de plasma (I_p)	6-12 kA
duração do pulso	3-10 ms
temperatura dos elétrons no centro	$\sim 200\text{ eV}$
pressão de preenchimento	$\sim 8,7 \times 10^5\text{ mbar}$

Como tentativa de controlar o surgimento de instabilidades de disruptura presentes no plasma, Karger e colaboradores, aplicaram campos helicoidais ressonantes ao plasma confinado no tokamak Pulsator [Ka 75]. Isto é feito no tokamak TBR-1 [Be 86], passando uma corrente através de fios enrolados helicoidalmente em torno do vaso, gerando campos magnéticos com dependência helicoidal, cuja componente harmônica é (aproximadamente) da forma $\cos(m\theta - n\phi)$, onde θ e ϕ são os ângulos poloidal e toroidal, respectivamente, e m e n representam o número de voltas da espira na direção dos ângulos. Para a medida de alguns sinais usados neste trabalho foi utilizada uma técnica semelhante, com um valor de $m = 4$ e de $n = 1$. A corrente helicoidal utilizada no presente trabalho foi de aproximadamente 200 A .

2.3 O sistema de diagnóstico

O sistema de diagnóstico utilizado em nossos trabalhos [Ca 93a] contém quatro sondas simples de Langmuir dispostas num quadrado de 2 mm de lado. Duas medem corrente de saturação de íons e as outras duas medem o potencial flutuante. Com este arranjo, números de onda poloidais de -15 cm^{-1} a 15 cm^{-1} podem ser observados sem ambiguidade. O sistema tem também uma sonda tripla e quatro sondas magnéticas (Fig 2.1a - 2.1b).

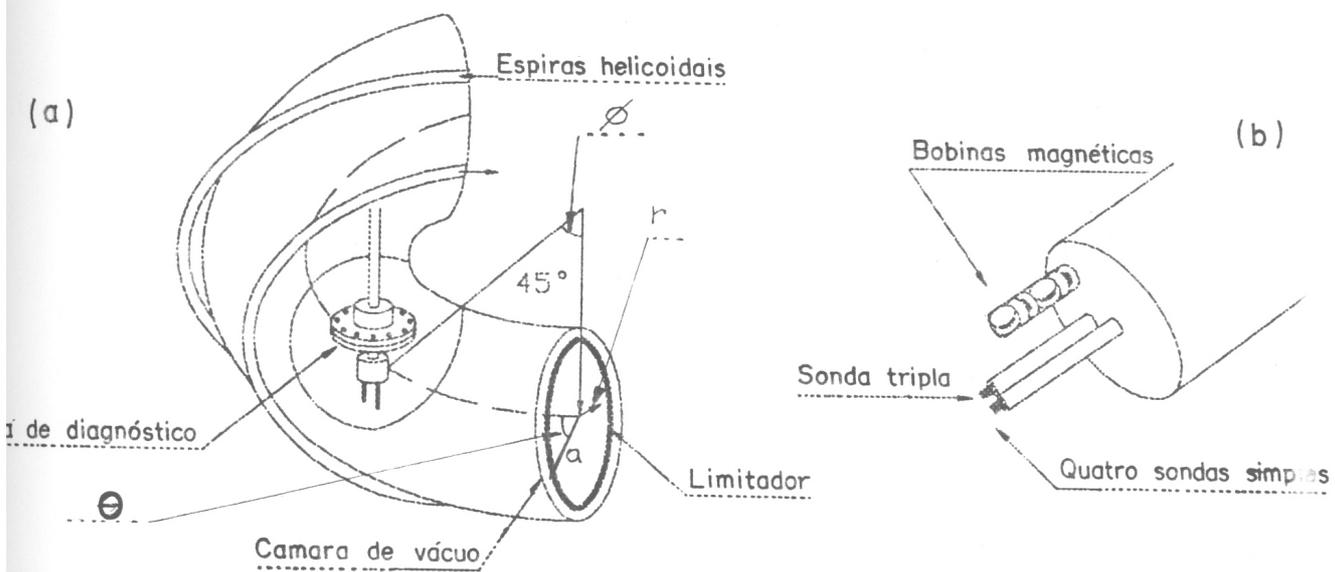


Figura 2.1: a) Esquema da posição do sistema de diagnóstico no tokamak TBR-1. b) Esquema das sondas.

As sondas eletrostáticas são feitas de fio de tungstênio com $0,5\text{ mm}$ de diâmetro, colocadas dentro de um tubo de alumina. Estes quatro fios de tungstênio se estendem 2 mm para fora do tubo. A sonda tripla [Ch 65] foi

construída com três pontas do mesmo fio de tungstênio, colocadas num outro tubo de alumina tendo as mesmas dimensões que no caso anterior. Nesta sonda, Fig. 2.2 , um dos terminais mede o potencial flutuante (φ_f) e entre os outros dois é aplicada uma diferença de potencial (ddp), de modo que entre eles e o plasma circule uma corrente. Ao aplicarmos uma ddp suficientemente alta, a corrente no terminal negativo será devida, predominantemente, ao fluxo de íons. Como a corrente que passa entre esses dois terminais é a mesma, será portanto, a corrente de saturação de íons (I_{si}). A densidade (n_o) é então determinada pela corrente que flui através das duas pontas citadas, e a diferença de potencial entre a ponta φ_+ e a terceira flutuante (φ_f) permite a determinação da temperatura.

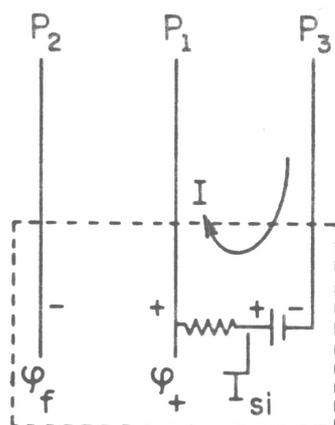


Figura 2.2: Esquema da sonda tripla.

As sondas magnéticas, em número de quatro, são construídas com 60 espiras de fio de cobre com 0,14 mm de diâmetro, enroladas numa base de PVC

rígido com 7 mm de diâmetro. Destas quatro sondas, duas estão montadas de maneira a medir as oscilações do campo magnético poloidal e duas medem as oscilações do campo magnético radial. Estas sondas permitem a medida de números de onda de $\simeq 3 \times 10^2 \text{ m}^{-1}$. As quatro sondas magnéticas foram acondicionadas num tubo de pirex, para evitar que sejam destruídas pelas altas temperaturas dentro da câmara de vácuo. Os dois tubos de alumina (o que contém a sonda tripla e o que contém as sondas eletrostáticas) mais o tubo de pirex foram fixados numa base de aço inoxidável, que, por sua vez, é fixada a um tubo, também de aço inox, colocado em um mecanismo que permite a movimentação radial de todo o conjunto.

Os sinais provenientes desses diagnósticos são digitalizados por um sistema CAMAC de conversão analógico-digital, transportados até um computador e armazenados em disquetes para posterior análise. Para os sinais medidos pelas sondas eletrostáticas e bobinas magnéticas foram usados módulos digitalizadores modelo Le Croy WP2264, cuja resolução é de oito bits, operando com, no máximo, quatro canais ativos, cada qual com 1 MHz de frequência de amostragem e 0,512 V de máxima amplitude dos sinais de entrada. A frequência de 1 MHz escolhida é a frequência mínima para evitar efeitos de "aliasing" (seção 3.1) já que os sinais possuem no máximo 500 kHz de frequência.

2.4 Determinação de parâmetros do plasma através dos sinais medidos

As sondas eletrostáticas não medem diretamente as flutuações de densidade e de potencial, e sim as flutuações de corrente de saturação de íons (I_{si}) e do potencial flutuante (φ_f), assim como as bobinas magnéticas também

não medem diretamente as flutuações do campo magnético, e sim medem a tensão induzida nas mesmas. Para obtermos o potencial (φ_p) a partir das medidas do potencial flutuante aplicamos a seguinte equação: [St 84, Ca 91]

$$\varphi_p = \varphi_f - \frac{KT_e}{2e} \left\{ \ln \left[\frac{2\pi m_e}{m_i} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \right] - 1 \right\} \quad (2.1)$$

onde: φ_p é o potencial, φ_f é o potencial flutuante, K é a constante de Boltzmann, m_e é a massa do elétron, m_i é a massa do íon, T_e é a temperatura dos elétrons e T_i é a temperatura dos íons.

Para um plasma de gás de hidrogênio, e supondo que $T_i = 2T_e$ como já foi verificado em medidas anteriores no TBR-1 [Si 89a], temos que:

$$\varphi_p = \varphi_f + 2,8 T_e \quad (2.2)$$

(sendo T_e em eV).

A densidade do plasma (n_o) é obtida da relação:

$$I_{si} = n_o e A f(T_i/T_e) \left[K \left(\frac{T_e + T_i}{m_i} \right) \right]^{1/2} \quad (2.3)$$

Onde: A é a área da sonda e $f(T_i/T_e)$ é uma função da razão entre T_i e T_e que é obtida a partir do modelo utilizado.

Convém salientar também que a área efetiva das sondas utilizadas nestas equações depende do modelo utilizado.

Para se obter a temperatura dos elétrons usou-se a sonda tripla, ou seja, as medidas do sinal médio do potencial flutuante e a medida do potencial no terminal positivo φ_+ : Temos então:

$$T_e = \frac{1}{\ln 2} (\varphi_+ - \varphi_f) \quad (2.4)$$

Para potenciais medidos em volts, a temperatura obtida pela equação 2.4 é dada diretamente em elétron-volts.

Para determinarmos as medidas das flutuações de campo magnético, sabemos que a tensão induzida (V_o) numa bobina magnética é dada por:

$$V_o = \frac{Nd\Phi}{dt} \quad (2.5)$$

onde Φ é o fluxo magnético através da área da bobina. Colocando a bobina paralela às linhas de campo magnético esse fluxo é dado por:

$$\Phi = \int_{\text{área}} \vec{B}d\vec{A} = BA \quad (2.6)$$

então a tensão induzida se torna:

$$V_o = NA \frac{dB}{dt} \quad (2.7)$$

ou seja:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{V_o}{NA} \quad (2.8)$$

Portanto, a partir das medidas de flutuação de corrente de saturação, potencial flutuante (4 sondas), medidas de valor médio da corrente de saturação e potencial flutuante (sonda tripla), além das diferenças de potencial (sonda tripla), temos os dados necessários para caracterizar, temperatura, potencial e densidade médias, assim como flutuações de densidade e potencial. As sondas magnéticas permitem a determinação das flutuações de campo magnético nas direções poloidal e radial.

Capítulo 3

Análise espectral de flutuações

3.1 Introdução

As flutuações de potencial, densidade e campos magnéticos, medidas por sondas eletrostáticas e bobinas magnéticas, na borda do plasma, podem ser interpretadas como um processo aleatório, visto que ocorrem num meio predominantemente turbulento. Tais processos são caracterizados por seus valores médios e funções de correlação, lineares ou de maior ordem. Utilizando-se técnicas de correlação para estudar as flutuações, pode-se identificar a amplitude, frequência, fase e número de onda para cada onda presente no processo [Sm 74]. Tais técnicas pressupõem porém que uma única onda domine o processo, o que em geral não acontece.

Conforme apresentado neste capítulo, essas mesmas informações sobre o sinal podem, porém, ser obtidas de modo mais simples usando-se técnicas de análise espectral, pois os espectros de potência são as transformadas de Fourier das funções de correlação, e podem ser calculados de maneira mais direta. Neste capítulo também introduzimos alguns conceitos básicos sobre filtros numéricos que são utilizados para analisar as mesmas flutuações.

3.2 Espectros de potência

Nesta seção serão revistas definições e propriedades da análise espectral. As definições serão apresentadas como funções contínuas, embora na experiência analisada tenhamos sinais medidos por sondas e, portanto, discretos e de duração finita.

Inicialmente relacionaremos as transformadas de Fourier dos casos discreto e contínuo [Po 90]. A transformada de Fourier para uma função contínua é dada por:

$$X(f) = \int_0^T x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (3.1)$$

onde $x(t)$ é um sinal contínuo de flutuação com duração T .

Para uma função discreta:

$$X'(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i2\pi nl/N} \quad (3.2)$$

onde N é o número total de amostras e $x'(n)$ é a n -ésima amostra do sinal $x(t)$ medida com um intervalo Δt , como segue:

$$\begin{aligned} x'(n) &= x(n\Delta t) & n &= 0, 1, \dots, N-1 \\ \Delta t &= 1/f_s & l &= 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde f_s é a frequência de amostragem do sinal num intervalo $T = N\Delta t$

Podemos aproximar a integral 3.1 por:

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)e^{-i2\pi fn\Delta t} \Delta t \quad (3.4)$$

onde dt foi aproximado pelo tempo de amostragem Δt , e t foi substituído por $n\Delta t$.

Por sua vez cada frequência f no espectro $X(f)$ é dada por $f = l\Delta f$ onde $\Delta f = 1/T$ é a banda de frequência .

Podemos então reescrever a equação 3.4 como:

$$X(l\Delta f) = \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-i2\pi nl/N} \quad (3.5)$$

ou seja:

$$X(l\Delta f) = \frac{1}{\Delta f} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-i2\pi nl/N} \right] \quad (3.6)$$

Considerando que o termo entre colchetes é a transformada de Fourier discreta de $x(n)$, a transformada de Fourier para um sinal discreto corresponde então a:

$$X'(l) = X(l\Delta f)\Delta f \quad (3.7)$$

ou seja $X'(l)$ é igual ao l -ésimo valor de $X(l\Delta f)$ multiplicado pela banda espectral Δf .

Um fator que se deve levar em conta em análise espectral de sinais discretos é o fenômeno conhecido por “aliasing” [Op 75, Pr 88]. Quando existe, no sinal, que está sendo amostrado, alguma componente com frequência maior do que a metade da frequência de amostragem do sistema (frequência de Nyquist, $f_N = f_s/2$), pode acontecer uma superposição desta componente com uma componente de baixa frequência; assim sendo o espectro de potência não é capaz de distinguir essas duas componentes, impossibilitando a recuperação do sinal a partir de seu espectro de frequência. Para evitar este problema os sinais medidos são filtrados, de modo a cortar qualquer componente com frequência maior que f_N .

A duração finita do sinal, pode fazer com que o valor do espectro numa dada frequência seja diminuído, proporcionalmente a um aumento dos valores nos pontos vizinhos, produzindo um efeito conhecido por “leakage”, que literalmente quer dizer vazamento. A potência espectral parece “vazar” para

os pontos vizinhos do ponto em questão. Esse “vazamento” é tanto maior quanto menor for o número de amostras feitas de um sinal. Uma forma de se compensar esse efeito é aumentar o tempo da medida, o que pode ser limitado pelo experimento em si ou pelo sistema de aquisição dos dados. O efeito de “leakage” nunca pode ser eliminado, porém pode ser reduzido multiplicando os dados por uma função de “janela” apropriada. Neste trabalho optamos por utilizar a janela de Hanning, pois além de ser facilmente implementada, ela possui pequenos máximos secundários nas regiões de menor amplitude. Como a “janela” atenua as partes iniciais e finais dos dados medidos, a aplicação de tais funções resulta numa redução da potência total presente no espectro. Caso se deseje o valor real, deve-se compensar esta perda de potência para recuperar a potência real contida no sinal.

Para se calcular a transformada de Fourier de um sinal discreto usa-se um algoritmo chamado FFT (“Fast Fourier Transform”) baseado no algoritmo de Cooley e Tukey, publicado em 1965. O algoritmo FFT permitiu que o processamento digital de sinais fosse aplicado, em muitos problemas científicos e de engenharia, que de outra maneira não teriam tido solução rápida possível.

3.2.1 Auto-espectro de potência

Para um processo aleatório $x(t)$ de média zero a função de autocorrelação é dada por:

$$R_{xx}(t, \tau) = \langle x(t)x^*(t - \tau) \rangle \quad (3.8)$$

onde τ é o tempo de autocorrelação. Se analisarmos a equação 3.8 veremos que a função de autocorrelação para $\tau = 0$ é igual ao valor quadrático médio de $x(t)$.

A equação 3.8 pode ser escrita em termos da transformada inversa de Fourier do sinal $x(t)$ ($X(f)$) da forma:

$$R_{xx}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle X(f_1)X^*(f_2) \rangle e^{i2\pi(f_1-f_2)t} e^{i2\pi f_2\tau} df_1 df_2 \quad (3.9)$$

como estamos considerando um processo estacionário, $R_{xx}(t, \tau)$ deve ser independente do tempo, por isso devemos ter:

$$\langle X(f_1)X^*(f_2) \rangle = S_{xx}(f_1)\delta(f_1 - f_2) \quad (3.10)$$

onde

$$S_{xx} = \langle X(f)X^*(f) \rangle \quad (3.11)$$

é o auto-espectro de potência do sinal x . Substituindo a equação acima em 3.9 e integrando com respeito a f_2 obtemos, após substituírmos f_1 por f :

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)e^{i2\pi f\tau} df \quad (3.12)$$

vemos que a função de autocorrelação e o auto-espectro de potência formam num caso estacionário, um par de transformadas de Fourier.

Devido à simetria $X(f) = X^*(-f)$, o auto-espectro de potência é dado por [Po 90]:

$$P_{xx}(f) = \begin{cases} 2 \langle X(f)X^*(f) \rangle_M & \text{p/ } f \geq 0 \\ 0 & \text{p/ } f < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

onde $\langle \rangle_M$ denota o valor médio de S_{xx} para M realizações. Portanto $P_{xx}(f)$ indica a potência ou valor quadrático médio associada às componentes de frequência com largura de banda Δf . No apêndice A estudamos a confiabilidade das funções espectrais, aplicando-as em sinais simulados com componentes conhecidas.

Para desenvolver os programas, utilizados no presente trabalho, usamos algumas subrotinas do programa Matlab, e desenvolvemos outras, compatíveis com esse aplicativo.

Serão usadas coordenadas r , θ , e ϕ conforme indicadas na Fig. 2.1a.

Como um exemplo, apresentamos na Fig. 3.1a um sinal de flutuações de campo magnético poloidal medido (no TBR-1) por sonda magnética em $r/a = 1,16$ (a = raio do plasma) e na Fig. 3.1b, vemos o espectro de potência do mesmo sinal. Esta figura corresponde a dados obtidos com frequência de amostragem de 1 MHz , $f_N = 500\text{ kHz}$, $M = 62$ e $N = 128$. Vemos que a potência do sinal se concentra para frequências menores de 150 kHz , e que o espectro é uma superposição de picos coerentes com uma região turbulenta (apêndice B).

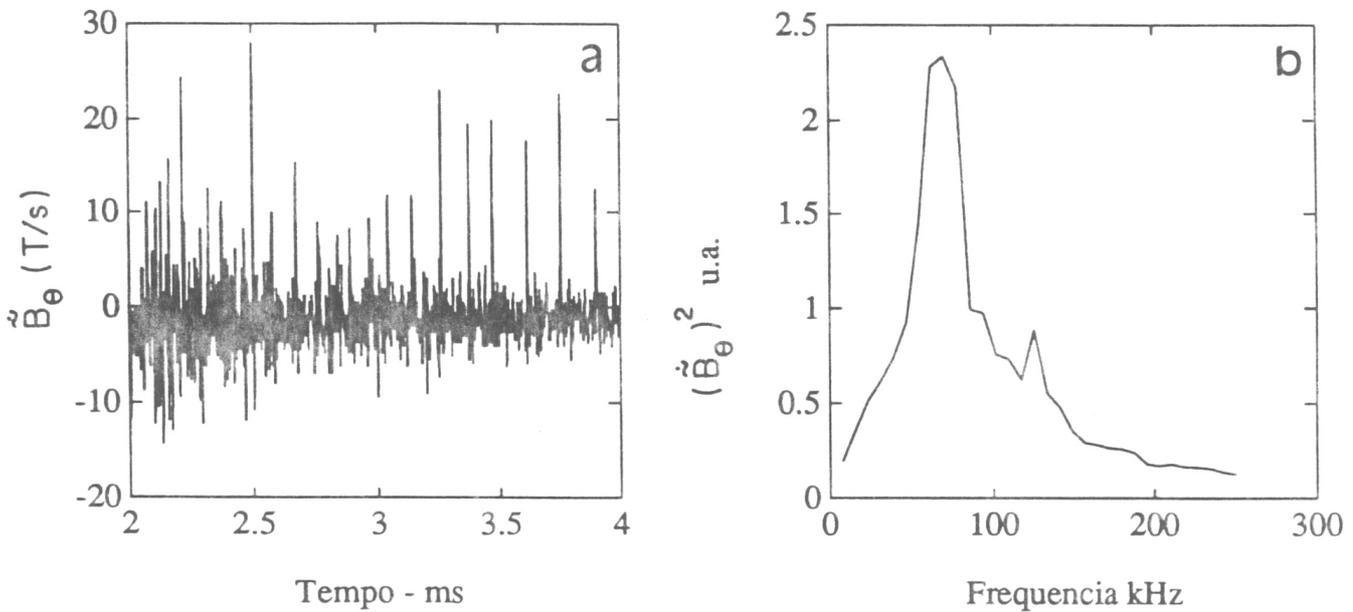


Figura 3.1: a) Sinais de flutuações (\dot{B}_θ) do campo magnético poloidal para $r/a = 1,16$. b) Espectro de potência para o mesmo sinal.

3.2.2 Espectro de potência cruzado

O espectro de potência cruzado é uma função espectral que permite investigar a relação linear entre duas quantidades flutuantes. Dados dois sinais de flutuações $x(t)$ e $y(t)$ podemos definir o espectro cruzado de potência como sendo:

$$S_{xy}(f) = X(f) \cdot Y^*(f) \quad (3.14)$$

Esta grandeza é a transformada de Fourier de função de correlação cruzada R_{xy} do sinal x com o sinal y e mede o grau de covariância entre os mesmos. P_{xy} é então:

$$P_{xy}(f) = \begin{cases} 2 \langle S_{xy} \rangle_M & p/f \geq 0 \\ 0 & p/f < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

esta quantidade é um numero complexo e pode ser escrito como:

$$P_{xy}(f) = |P_{xy}(f)| e^{i\theta_{xy}(f)} \quad (3.16)$$

onde

$$\theta_{xy}(f) = \theta_x(f) - \theta_y(f) \quad (3.17)$$

é o espectro de fase cruzado, e representa uma medida direta das características dispersivas do sistema. Pela relação acima nota-se que o espectro cruzado de potência preserva a informação sobre as fases de cada sinal sob a forma de uma diferença de fase.

Se os sinais x e y são medidos por duas sondas separadas entre si por uma distância Δr , esta diferença de fase é dada por:

$$\theta_{xy}(f) = k(f) \cdot \Delta r \quad (3.18)$$

então uma forma de se estimar o número de onda local consiste em dividir o espectro de fase por Δr e determinar o espectro de número de onda $k(f)$.

A separação entre as sondas deve ser escolhida de modo que Δr seja menor do que um comprimento de onda, pois de outro modo haveria o surgimento de ambiguidades de fase com diferença de 2π . Por outro lado, a separação entre as sondas deve ser suficientemente grande para permitir a existência de diferenças de fase mensuráveis.

A Fig. 3.2a mostra um espectro de potência cruzado para duas sondas eletrostáticas, que medem (no TBR-1) flutuações de corrente de saturação para a posição $r/a = 0,87$, separadas por uma distância $\Delta r = 2 \text{ mm}$. Na Fig. 3.2b, vemos o espectro de fase e o espectro de número de onda para as mesmas sondas.

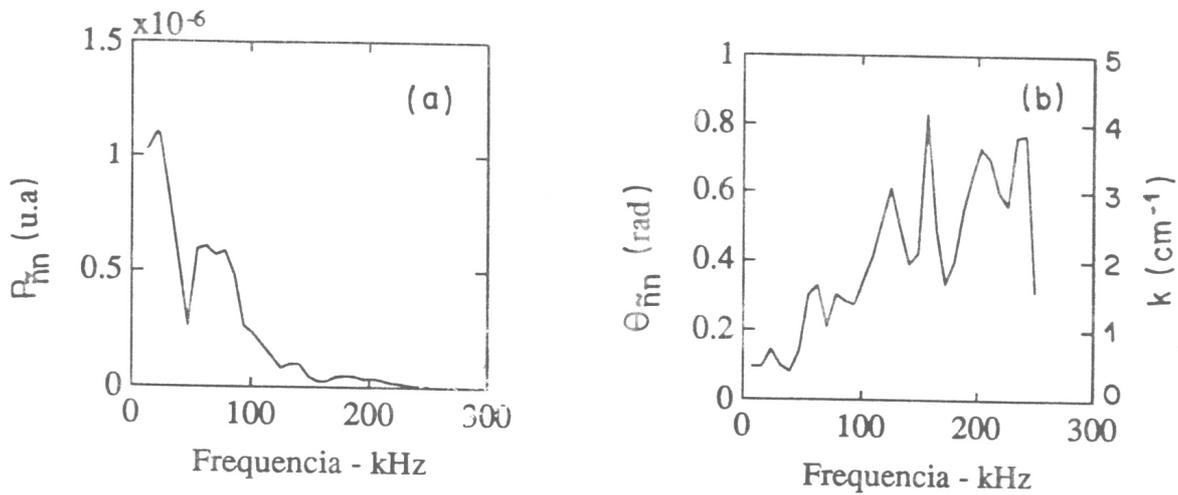


Figura 3.2: a) Espectro cruzado para dois sinais de corrente de saturação (\tilde{n}) em $r/a = 0,87$. b) Espectro de fase e de número de onda para os mesmos sinais anteriores.

3.2.3 Espectro de coerência

Com o espectro de potência cruzado pode-se calcular o grau de correlação linear entre os sinais. Se $x(t)$ e $y(t)$ são estatisticamente independentes, cada uma das M realizações produzirá espectros de fase $\theta_{xy}^{(j)}$, distribuídos aleatoriamente. Em consequência disto a somatória:

$$\begin{aligned} \langle S_{xy} \rangle_M &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |S_{xy}| e^{i\theta_{xy}^{(j)}(f)} \\ &= \langle |S_{xy}| \rangle_M \sum_{j=1}^M e^{i\theta_{xy}^{(j)}(f)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

tenderá para zero à medida que aumentar o número de realizações. Por outro lado, se x e y forem correlacionados a somatória acima dará um valor não nulo.

Definimos então:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|P_{xy}(f)|^2}{(P_{xx}(f) \cdot P_{yy}(f))} \quad (3.20)$$

como sendo o espectro de coerência entre os dois sinais. γ^2 é um número real que varia de 0 (sinais não correlacionados) a 1 (sinais correlacionados). Um valor baixo da coerência numa dada banda de frequência pode ser também devido à presença de ruído alto (isto é mostrado no apêndice A), ou não linearidades no sistema físico em estudo.

O espectro de coerência é uma medida quantitativa da relação linear entre duas séries temporais, porém não dá nenhuma informação sobre possíveis relações não lineares entre as duas séries. Na Fig. 3.3 temos o espectro de coerência correspondente aos mesmos sinais da Fig. 3.2, como podemos observar a coerência é alta para as frequências onde temos maior potência, indicando portanto alta similaridade entre os sinais obtidos pelas duas sondas.

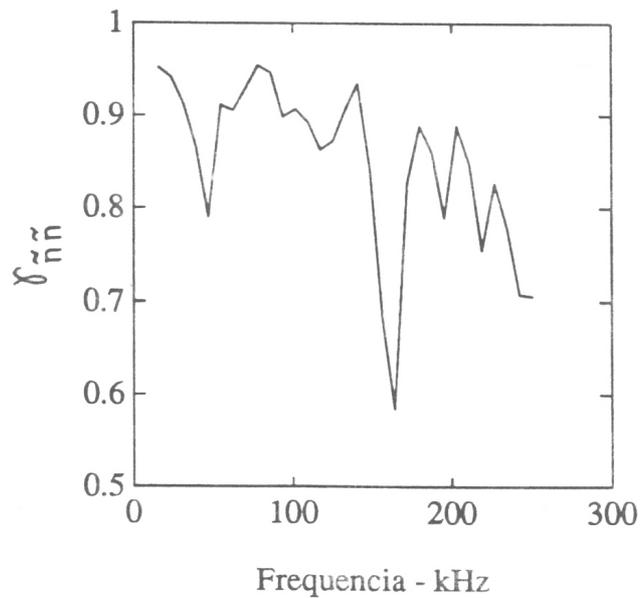


Figura 3.3: Espectro de coerência para sinais de flutuações de corrente de saturação, sondas em $r/a = 0,87$.

3.3 Espectro de transporte

É importante relacionar certas propriedades estatísticas, das flutuações medidas experimentalmente, ao transporte de plasma através das linhas do campo magnético que servem para confiná-lo [Ri 89]. Assim sendo, aplicamos as técnicas espectrais descritas, na determinação do espectro do fluxo de partículas, utilizando medidas realizadas com o arranjo experimental do capítulo 2.

O fluxo médio de partículas perpendicular ao campo magnético de confi-

namento do plasma num Tokamak é [Li 85, Le 84]:

$$\Gamma = \langle \tilde{n}(t), \tilde{v}(t) \rangle_t = \frac{1}{B_\phi} \langle \tilde{n}(t), \tilde{E}_\theta(t) \rangle_t = \frac{1}{B_\phi} R_{nE}(\tau = 0) \quad (3.21)$$

onde $\tilde{v}(t) = \frac{\tilde{E}_\theta(t)}{B_\phi}$ é a flutuação da velocidade de deriva na direção poloidal, $\tilde{n}(t)$ representa as flutuações de densidade do plasma, $\tilde{E}_\theta(t)$ é a flutuação do campo elétrico na direção poloidal, B_ϕ é o campo magnético toroidal, $\langle \dots \rangle_t$ indica um valor médio no tempo e R_{nE} é a função de correlação entre esses sinais dada por:

$$R_{nE}(\tau) = \langle \tilde{n}(t), \tilde{E}_\theta(t + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{nE}(f) e^{-i2\pi f\tau} df \quad (3.22)$$

$P_{nE}(f)$ é o espectro cruzado de potência entre as flutuações de densidade e as do campo elétrico toroidal.

Assim o fluxo médio de partículas é dado por:

$$\Gamma = \frac{2}{B_\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{nE}(f) df \quad (3.23)$$

pois $\tau = 0$. Devido a simetria do espectro de potência cruzado ($P_{nE}(f) = P_{nE}^*(-f)$), temos:

$$\Gamma = \frac{2}{B_\phi} \text{Re} \left[\int_0^{\infty} P_{nE}(f) df \right], \quad f \geq 0 \quad (3.24)$$

Definimos a expressão:

$$T = \frac{2}{B_\phi} \text{Re} [P_{nE}(f)] \quad (3.25)$$

como sendo a função de densidade espectral do transporte (espectro de transporte), pois ela tem a dimensão de partículas por unidade de tempo e unidade de frequência.

Do ponto de vista experimental, é mais fácil medir as flutuações de potencial $\tilde{\varphi}$ do que as flutuações do campo elétrico. Supondo $\tilde{E} = -\nabla\tilde{\varphi}$, e utilizando a transformada de Fourier inversa, temos:

$$\tilde{n}(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(f) e^{-ik(f)r + i2\pi ft} df \quad (3.26)$$

$$\tilde{\varphi}(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(f) e^{-ik(f)r + i2\pi ft} df \quad (3.27)$$

onde $N(f)$ e $\Phi(f)$ são as transformadas de Fourier de n e φ , respectivamente. Obtemos então:

$$\tilde{E}(r, t) = -\nabla \tilde{\varphi}(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ik(f) \Phi(f) e^{-ik(f)r + i2\pi ft} df \quad (3.28)$$

Identificando $ik(f)\Phi(f)$ como sendo a transformada de Fourier do campo elétrico \tilde{E} e substituindo em $P_{nE}(f)$ obtemos:

$$P_{nE}(f) = ik(f)P_{n\varphi}(f) \quad (3.29)$$

Substituindo em 3.25:

$$T = \frac{2}{B_\phi} \text{Re}[ik(f)P_{n\varphi}(f)] \quad (3.30)$$

Escrevendo $P_{n\varphi}$ em termos de $|P_{n\varphi}|$ e do espectro de fase $\theta_{n\varphi}$ vem:

$$T(f) = \frac{2}{B_\phi} k(f) |P_{n\varphi}| \text{sen}(\theta_{n\varphi}) \quad (3.31)$$

multiplicando e dividindo a equação 3.31 por $[P_{nn}(f)P_{\varphi\varphi}(f)]^{1/2}$, chega-se a:

$$T(f) = \frac{k(f)}{B_\phi} \gamma_{n\varphi}(f) \text{sen}(\theta_{n\varphi}(f)) n_{rms}(f) \varphi_{rms}(f) \quad (3.32)$$

onde

$$\begin{aligned} n_{rms} &= [2P_{nn}]^{1/2} \\ \varphi_{rms} &= [2P_{\varphi\varphi}]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$\gamma_{n\varphi}(f)$ e $\theta_{n\varphi}(f)$ são os espectros de coerência e fase entre as flutuações de densidade e potencial.

O número de onda $k(f)$ das flutuações de potencial deve ser medido na direção poloidal, uma vez que ele foi deduzido das flutuações de campo elétrico nesta direção. Para deduzí-lo utilizamos a equação 3.18, considerando o espectro de fase $\theta_{12}(f)$, das flutuações de potencial medidas por duas sondas colocadas em posições diferentes na direção poloidal.

$T(f)$ é uma quantidade real que pode ser positiva (transporte na direção radial do centro da coluna para as bordas do Tokamak), ou negativa (transporte na direção radial das bordas para o centro da coluna) dependendo do sinal do número de onda $k(f)$ das flutuações de potencial, e do sinal do $\text{sen}(\theta_{n\varphi}(f))$.

O sinal de $k(f)$ é governado pelo sentido de propagação das ondas na direção poloidal. O fator $\gamma_{n\varphi}$ foi introduzido para compensar eventuais imprecisões caso haja ausência de coerência entre os sinais de potencial e densidade.

Apresentamos, na Fig. 3.4a, os espectros de transporte para duas posições das sondas; vemos que no caso do espectro na sombra do limitador as componentes de alta frequência não contribuem mais.

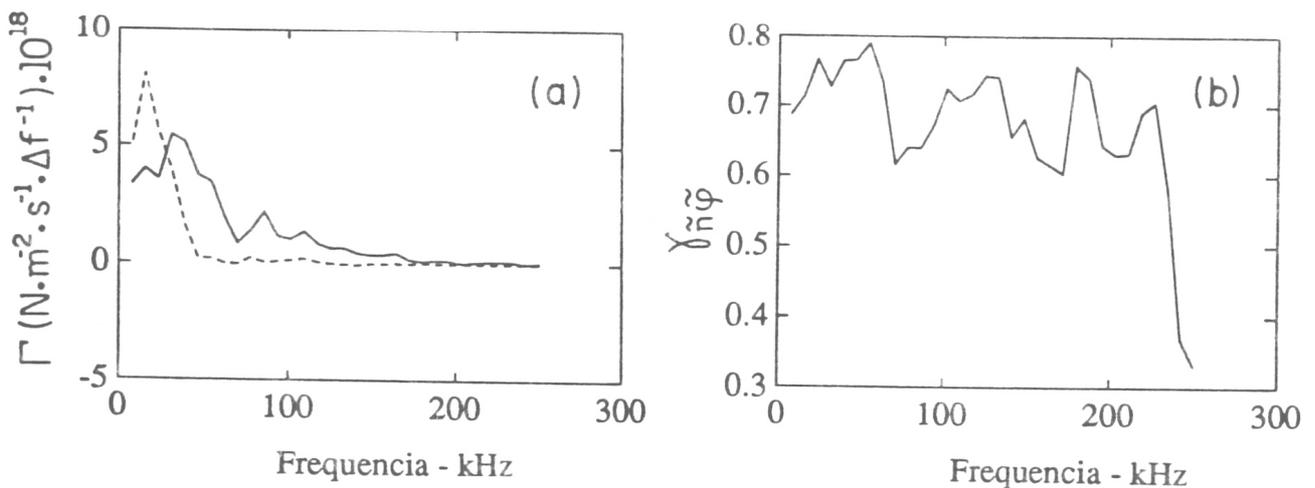


Figura 3.4: a) Espectros do fluxo de partículas a $r/a = 0,95$ (—) e $r/a = 1,1$ (---) ($\Delta f = 7,8 \text{ kHz}$). b) Espectro de coerência entre \tilde{n} e $\tilde{\varphi}$ para $r/a = 0,95$.

Na Fig. 3.4b, vemos um espectro de coerência ($\gamma_{n\varphi}$) para a sonda em

$r/a = 0,95$. Este espectro mostra alta coerência para frequências mais baixas e pouca variação nesta região. O espectro de fase se apresenta da mesma forma, isto indica que o espectro de transporte é produzido essencialmente pelas flutuações de amplitude da densidade e do potencial.

3.4 Variância dos espectros

Nas seções precedentes introduzimos uma série de estimadores para o cálculo das funções espectrais, uma forma conveniente de caracterizar a qualidade desses estimadores é através da sua variância. Todos os estimadores introduzidos neste capítulo são não tendenciosos desde que desprezemos os efeitos de aplicação de “janelas”. A variância do auto-espectro de potência é dada por [Sm 74]:

$$\sigma^2 P_{xx}(f) = \frac{1}{M} P_{xx}^2(f) \quad (3.34)$$

Esta variância decresce com o aumento do número M de realizações e concorda com a noção intuitiva de quanto maior o número de realizações, melhor o estimador.

As variâncias do espectro de potência cruzado e do espectro de coerência são dadas, respectivamente, por [Sm 74]:

$$\sigma^2 \{P_{xy}(f)\} = \frac{1}{M} P_{xx}(f) P_{yy}(f) [1 - \gamma_{xy}^2(f)] \quad (3.35)$$

e

$$\sigma^2 \{\gamma_{xy}(f)\} = \frac{1}{M} [1 - \gamma_{xy}^2(f)] \quad (3.36)$$

Para estes estimadores a variância também é inversamente proporcional ao número de realizações. Além disso a variância possui uma dependência visível com o grau de coerência, ou seja, um valor baixo de coerência resulta numa variância grande e vice-versa. Em suma, esses estimadores são mais precisos quando os valores da coerência forem altos.

Considerando o exemplo apresentado nas Figs. 3.2 e 3.3 calculamos o valor da variância do espectro de potência cruzado e da coerência para as flutuações de densidade (Fig 3.5a - 3.5b). Vemos que os valores das variâncias dos espectros são pouco significativos para o número de realizações que adotamos ($M = 62$).

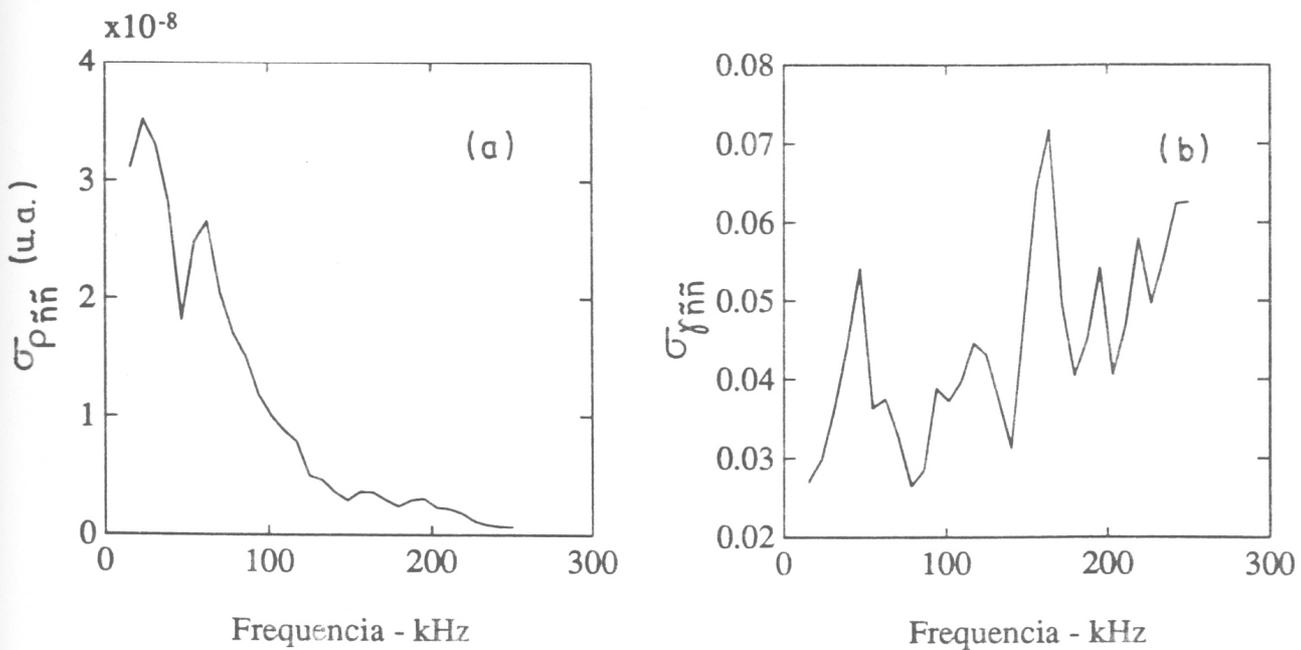


Figura 3.5: a) Variância do espectro de potência cruzado $P_{\tilde{n}\tilde{n}}$ para a Fig. 3.2
 b) Variância do espectro de coerência $\gamma_{\tilde{n}\tilde{n}}$ apresentado na Fig. 3.3

3.5 Filtros numéricos

Nesta seção faremos um resumo sobre filtros numéricos, em especial o do tipo Butterworth [Ha 89], e sua utilização na análise de sinais de flutuações .

Na seção 3.1 dissemos que para se evitar o efeito de “aliasing” era necessário limitar a frequência do sinal a ser analisado, de modo que nenhuma de suas componentes espectrais pudesse ter frequência maior do que a frequência de Nyquist do sistema de aquisição de dados utilizado. Para isto, devemos selecionar do sinal apenas as componentes que nos interessam (com $f \leq f_N$).

Um filtro permite fazer esta seleção, bastando para isso que se dê uma ou mais frequências de corte f_c , permitindo que apenas as componentes do sinal que possuem frequências na região escolhida (banda passante do filtro) estejam presentes na sua saída.

De acordo com a banda de frequência um filtro pode ser classificado em quatro tipos fundamentais:

- filtro passa-alta, quando permite apenas a passagem de sinais com frequências maiores do que sua frequência de corte.
- filtro passa-baixa, quando permite apenas a passagem de sinais com frequências menores do que sua frequência de corte.
- filtro passa-banda, este tipo de filtro pode ser implementado colocando-se em série um filtro do tipo passa-alta, com frequência de corte f_{c1} , e um filtro passa-baixa com frequência de corte f_{c2} , de modo a permitir apenas a passagem de sinais com $f_{c1} \leq f \leq f_{c2}$.
- filtro corta-banda, também pode ser implementado colocando-se em série um filtro passa-alta com um filtro passa-baixa, permitindo apenas

a passagem de sinais com $f \leq f_{c1}$ ou $f \geq f_{c2}$.

Esses filtros podem ainda ser associados entre si, para assumir as mais variadas configurações de frequência do sinal de saída. No entanto é necessário conhecer detalhadamente a resposta em frequência de cada filtro dessa associação.

A resposta em frequência de um filtro é dada pela defasagem que aparece no sinal de saída, com relação ao sinal de entrada, e pelo ganho do filtro, que é a razão entre a amplitude do sinal de saída e a amplitude do sinal de entrada, (ambos tomados como função da frequência). Um filtro ideal deveria ter defasagem igual a zero, para qualquer valor da frequência, e um ganho parecido com a Fig. 3.6 (- - -), como uma função “degrau”, com valor 1 em toda a banda passante do filtro, e zero para todas as demais frequências. Entretanto o ganho de um filtro real se assemelha mais à Fig. 3.6 (—), podendo apresentar ondulações na região da banda passante e na região imediatamente após a frequência de corte, além disso o amortecimento é feito de maneira bem mais lenta do que no caso ideal.

Escolhemos usar, para este trabalho, filtros numéricos do tipo recursivo de Butterworth [Ha 89], pois possuem um ganho igual a um em toda a banda passante (sem ondulações) e não apresentam oscilações na região após a frequência de corte, sendo por isso mais próximo de filtros ideais.

O filtro de Butterworth pode ser representado por uma equação de diferenças do tipo:

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k) \quad (3.37)$$

Onde y representa o sinal de saída, x o sinal de entrada, a_k e b_k são os coeficientes do filtro (zeros e polos da equação, respectivamente) e N é a ordem do filtro (número de coeficientes).

A ordem do filtro possui um papel muito importante, pois está diretamente relacionada à defasagem e à velocidade com a qual se dá o amortecimento.

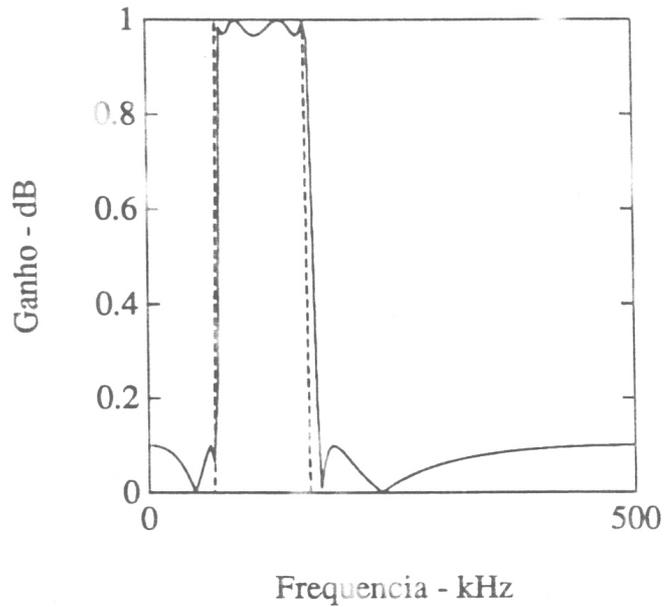


Figura 3.6: Ganho de um filtro ideal (---) e real (—).

Quanto maior for a ordem de um filtro, menores se tornam as diferenças de fase entre os sinais de entrada e de saída, e maior é a velocidade de amortecimento. Devido às condições de contorno da equação 3.37, não é possível aumentar essa ordem indefinidamente. Existe um valor limite para cada frequência de corte considerada, acima do qual o sinal filtrado não mais reproduz o sinal de entrada. Estas condições de contorno também podem provocar distorções nos primeiros pontos do sinal calculado, sendo, às vezes, necessário desprezá-los.

A defasagem que surge entre os sinais de saída e de entrada se devem à assimetria do filtro utilizado; os filtros do tipo Butterworth não são simétricos e portanto essa defasagem pode causar problemas na análise dos dados. Porém, como estes podem ser filtrados, tanto num sentido como no sentido oposto, existe uma solução simples para o problema de diferença de fase. Filtra-se os dados duas vezes, tomando-se o cuidado de inverter o sentido de filtra-

gem na segunda vez. Deste modo, se a primeira passagem através do filtro faz surgir um diferença de fase em uma determinada frequência, a segunda filtragem fará aparecer a mesma defasagem no sentido oposto, o que resulta no cancelamento da primeira. Desta maneira, teremos reproduzido o sinal de entrada da forma mais fiel possível. Aplicações dos filtros para os casos de sinais de flutuações são mostradas no Apêndice B.

Capítulo 4

O espectro em número de onda e frequência $S(\vec{k}, f)$

4.1 Introdução

No capítulo anterior apresentamos funções espectrais convencionais dependentes apenas da frequência (variação temporal). A determinação de densidades espectrais como função da frequência e número de onda é um problema em muitos tipos de experiências envolvendo flutuações, por exemplo, os parâmetros do plasma flutuam tanto no tempo como no espaço. Assim, para caracterizarmos a dispersão do meio estudado, precisamos conhecer o aspecto espacial destas flutuações, que é dado pelos espectros dependentes do número de onda (\vec{k}).

Um pesquisador pode querer medir a densidade espectral como função da frequência, $S(f)$, como função do número de onda, $S(\vec{k})$, ou como função tanto da frequência como do número de onda, $S(\vec{k}, f)$.

Os espectros em frequência são facilmente obtidos medindo-se os sinais de uma única sonda durante um certo intervalo de tempo e calculando-se a transformada de Fourier do sinal obtido. Porém, para se obter espectros

em número de onda é necessário conhecer o perfil espacial dessas flutuações, fazendo-se medidas em várias posições espaciais do plasma. Esta técnica, na prática, é duplamente inviável: primeiramente, devido ao alto custo desse sistema de diagnóstico e, em seguida, pelo fato de ser substancialmente perturbativa para o fenômeno experimental estudado.

Caso as flutuações obedeam uma relação de dispersão conhecida, a densidade espectral no espaço de número de onda pode ser facilmente obtida, do próprio espectro em frequência. Em geral, o que acontece é que esta relação ou é desconhecida, ou não existe uma relação determinística entre a frequência e o número de onda.

A hipótese de Taylor [Po 90], de que uma relação de dispersão simples pode ser suposta, quando o fluido é pouco dispersivo no sistema de referência do laboratório, em geral, não pode ser usada para a grande maioria dos experimentos com plasmas em tokamaks.

Vários tipos de experiências baseiam-se na obtenção de dados com sondas pontuais, geralmente sondas fixas, em algum tipo de suporte. Se se dispõe de uma sonda fixa e outra móvel, pode-se medir a função de autocorrelação como função da separação entre as sondas, e depois fazer a transformada de Fourier da dependência espacial para obter $S(\vec{k})$. Em muitos casos, no entanto, é impraticável variar a distância entre as sondas numa região suficientemente ampla.

Neste capítulo introduziremos uma técnica para a determinação do espectro local, em número de onda e frequência, $S_L(\vec{k}, f)$, que pode ser obtido por medidas tomadas em apenas dois pontos de coordenadas espaciais diferentes. [Bea 83] O conceito de espectro de número de onda condicional $s(\vec{k} | f) = S(\vec{k}, f)/S(f)$ será também discutido. Este espectro indica como a potência numa dada banda de frequência está distribuída no espaço de número de onda.

Os momentos de primeira e segunda ordem de $s(\vec{k} | f)$ fornecem a relação

estatística $\bar{k}(f)$ e a largura espectral de número de onda $\sigma_{\bar{k}}(f)$. Neste trabalho será considerada uma única dimensão. Entretanto a técnica proposta pode ser estendida a duas ou três dimensões.

4.2 Determinação do espectro $S_L(k, f)$

A determinação do espectro $S(k, f)$ requer medidas no tempo e no espaço, e transformadas de Fourier espaciais e temporais. Se, porém, as flutuações do plasma podem ser representadas por uma superposição de ondas, pode-se simplificar substancialmente o trabalho experimental e computacional [Le 84]. Bastam medidas somente em dois pontos.

Para determinar o espectro local em número de onda e frequência, $S(k, f)$, monitoram-se as flutuações em dois pontos, separados de uma distância Δx . Cada conjunto de dados registrados (realização) consiste de N amostras, durante um tempo T . O intervalo de amostragem $\Delta t = T/N$ deve ser suficientemente pequeno de modo que a frequência de Nyquist $f_N = 1/2\Delta t$ seja maior que a maior frequência de qualquer componente espectral para evitar "aliasing". A separação entre as sondas deve ser suficientemente pequena para que $\pi/\Delta x$ seja maior que o mais alto número de onda de qualquer componente espectral significativa, com o objetivo de evitar indeterminações de $\pm 2\pi/\Delta x$ nos números de onda medidos.

São feitas M realizações e, para cada l -ésima realização, são calculados os auto-espectros de potência P_{xx} e P_{yy} para os sinais (x e y) medidos com as duas sondas (equação 3.13). A potência $\bar{S}(f)$, associada a estas flutuações será dada pela média entre as duas potências calculadas. O número de onda

local k é calculado para cada realização conforme a equação 3.18:

$$k^l(f) = \frac{\theta_{xy}^l(f)}{\Delta x} \quad (4.1)$$

onde θ_{xy}^l é o espectro de fase entre os dois sinais para uma dada realização l .

O número de onda local representa a taxa da variação da fase em relação ao espaço, portanto, uma grandeza análoga à frequência instantânea, que representa a taxa de variação da fase em relação ao tempo. Vemos que é possível associar, para cada realização e para cada frequência um número de onda local $k^l(f)$ e uma potência espectral $S(f)^j$.

Devido à natureza estocástica das flutuações, o exame da próxima realização pode dar valores diferentes do número de onda e do espectro de potência, para um mesmo valor da frequência f .

Associamos à potência espectral média uma matriz $\bar{S}_{ij}(f)$, onde cada coluna i corresponde aos valores de $\bar{S}(f)$ para cada uma das M realizações e cada linha j corresponde a um valor da frequência. De maneira análoga, construímos a matriz do número de onda local $k_{ij}(f)$.

O espectro de fase pode possuir qualquer valor no intervalo de $-\pi < \theta_{xy}(f) < \pi$; assim sendo, os valores da matriz $k_{ij}(f)$ estarão distribuídos no intervalo $\frac{-\pi}{\Delta x} < k_{ij}(f) < \frac{\pi}{\Delta x}$.

O procedimento que vamos utilizar para contruir a matriz $S_{ij}(k, f)$ consiste no seguinte: para cada frequência f escolhemos um intervalo Δk do número de onda e somamos todas as potências associadas aos valores do número de onda entre $\frac{-\pi}{\Delta x}$ e $\frac{-\pi}{\Delta x} + \Delta k$, obtendo assim a primeira coluna de $S_{ij}(k, f)$. Em seguida repetimos o processo somando as potências associadas aos números de onda entre $\frac{-\pi}{\Delta x} + \Delta k$ e $\frac{-\pi}{\Delta x} + 2\Delta k$, obtendo a segunda coluna da matriz, e assim por diante até a faixa entre $\frac{-\pi}{\Delta x} - \Delta k$ e $\frac{\pi}{\Delta x}$, completando o cálculo da matriz $S_{ij}(k, f)$.

O procedimento que acabamos de descrever é idêntico ao procedimento de construção de um histograma, com a largura de sua célula igual à Δk , para

cada valor fixo da frequência f .

Costuma-se calcular e graficar o espectro $S(k, f)$ apenas para frequências positivas. Neste caso, k pode ser positivo ou negativo. Valores de k positivos indicam ondas se propagando na direção de x positivo com velocidade de fase w/k , e valores de k negativos indicam propagação no sentido negativo. As contribuições das componentes negativas de frequência são tomadas em consideração multiplicando por um fator dois, como foi feito ao formularmos a estimativa espectral dos espectros de potência lineares.

Para se determinar $S(k, f)$, a partir dos dados das duas sondas, foi necessário supor uma certa distribuição do mesmo. Isto se justifica porque o nosso $S(k, f)$ local é igual ao espectro do número de onda usual, desde que a amplitude e o número de onda variem pouco em um comprimento de onda e ainda devemos ter $k_{máx} < 2\pi/\Delta x$.

Dado o $S(k, f)$ podemos determinar os espectros em frequência $S(f)$ e em número de onda $S(k)$, dados respectivamente por:

$$S(f) = \sum_k S(k, f) \quad (4.2)$$

$$S(k) = \sum_f S(k, f) \quad (4.3)$$

4.3 Determinação da relação de dispersão e da velocidade de fase

Podemos considerar uma analogia entre o espectro em frequência e número de onda, $S(k, f)$, e a função de densidade de probabilidade $P(k, f)$. $P(k, f)dkdf$ representa a probabilidade de que num pacote de ondas, exista

uma onda com número de onda e frequência numa banda $dkdf$ centrada em k e f ; da mesma forma que $S(k, f)$ pode representar a densidade de potência de uma flutuação numa banda $dkdf$, centrada em k e f .

Motivados por esta analogia, podemos definir a função $s(k, f)$, normalizando $S(k, f)$:

$$s(k, f) = \frac{S(k, f)}{\sum_{k,f} S(k, f)} \quad (4.4)$$

$s(k, f)$ possui todas as propriedades matemáticas de uma função de probabilidade; $s(k, f) \geq 0$ para quaisquer valores de k e f e $\sum_{k,f} s(k, f) = 1$. Podemos ainda definir o espectro condicional:

$$s(k | f) = \frac{S(k, f)}{\sum_f S(k, f)} \quad (4.5)$$

como sendo o espectro de potência normalizado de k , para f fixo. Podemos calcular a relação de dispersão média e sua largura espectral por:

$$\bar{k}(f) = \sum_k k s(k | f) \quad (4.6)$$

e

$$\sigma_{\bar{k}}(f) = [\sum_k k^2 s(k | f) - \bar{k}^2(f)]^{1/2} \quad (4.7)$$

$\bar{k}(f)$ pode ser interpretada como sendo uma descrição do comportamento médio da dispersão das flutuações e $\sigma_{\bar{k}}(f)$, o alargamento destas devido à natureza turbulenta do meio. Comparando-se os valores de $\bar{k}(f)$ e $\sigma_{\bar{k}}(f)$, pode-se medir o grau de turbulência das flutuações. Quantidades análogas podem ser calculadas em função do número de onda:

$$\bar{f}(k) = \sum_f f s(f | k) \quad (4.8)$$

e

$$\sigma_{\bar{f}}(k) = [\sum_f f^2 s(f | k) - \bar{f}^2(k)]^{1/2} \quad (4.9)$$

onde:

$$s(f | k) = \frac{S(k, f)}{\sum_k S(k, f)} \quad (4.10)$$

Como aplicação do espectro $S(k, f)$ temos na Fig. 4.1a o espectro $S(k, f)$, para medidas de flutuação de potencial (no TBR-1) obtidas em $r/a = 0,87$. Vemos que esse é um espectro largo, indicando uma turbulência elevada. Na Fig. 4.1b temos um cálculo da variância do mesmo espectro, vemos que esta é significativa ($\simeq 10\%$) apenas para os valores mais altos da potência, e é praticamente desprezível para os valores mais baixos.

Adotamos a convenção de que o sinal do número de onda determina a direção de propagação (positivo, no sentido horário). Nas curvas de nível desse espectro, (Fig. 4.2), vemos que há uma tendência para ondas com k positivo, indicando a direção da deriva diamagnética dos íons.

As Figs. 4.3a e 4.3b, apresentam os espectros integrados $S(f)$ e $S(k)$, para o mesmo caso anterior, confirmando o carácter turbulento da medida.

Nas Figs. 4.4a, 4.4b e 4.4c apresentamos a relação de dispersão estatística $\bar{k}(f)$, a sua largura espectral $\sigma_{\bar{k}}(f)$, e a razão entre estas duas grandezas, para os números de onda poloidais das mesmas flutuações do caso anterior. Vemos que a sua largura espectral é substancial, mesmo para componentes de baixa frequência. Abaixo de 250 kHz , tanto as flutuações de potencial quanto as de densidade apresentam relações de dispersão quase idênticas.

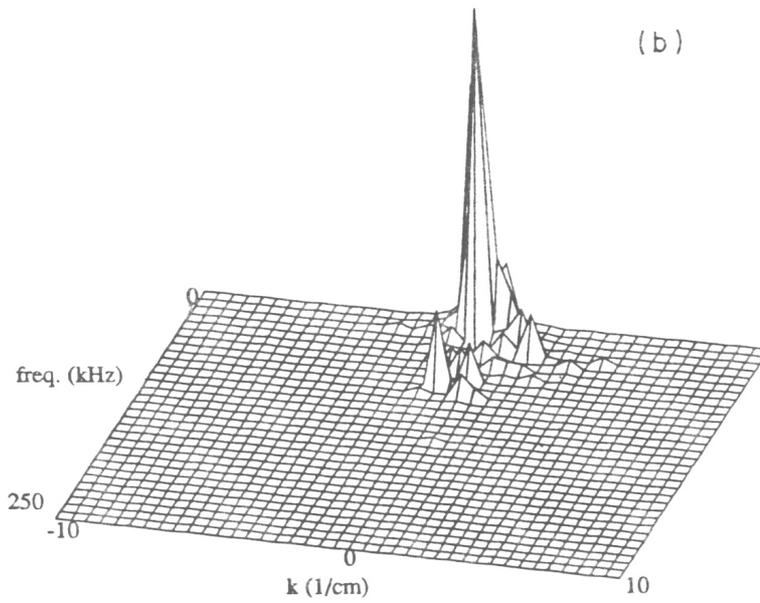
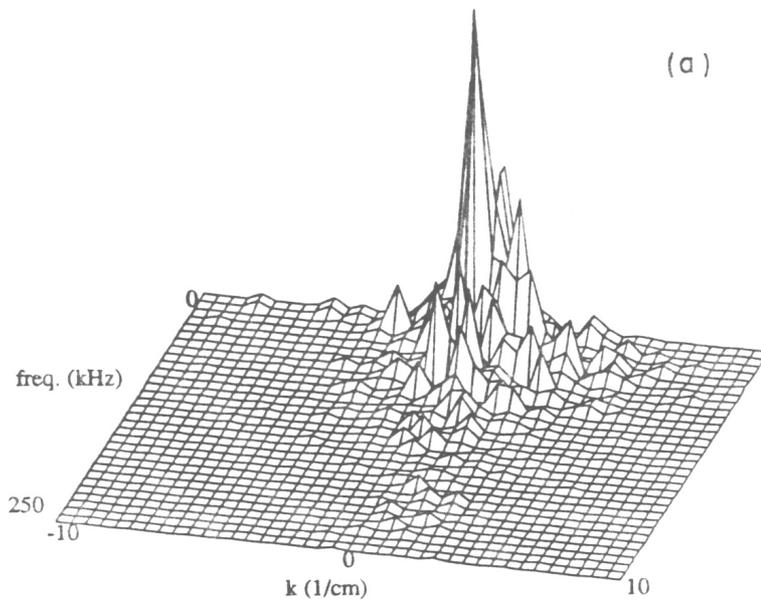


Figura 4.1: a) Espectro $S(k, f)$ para flutuações de potencial medidas em $r/a = 0,87$. b) Variância do espectro anterior

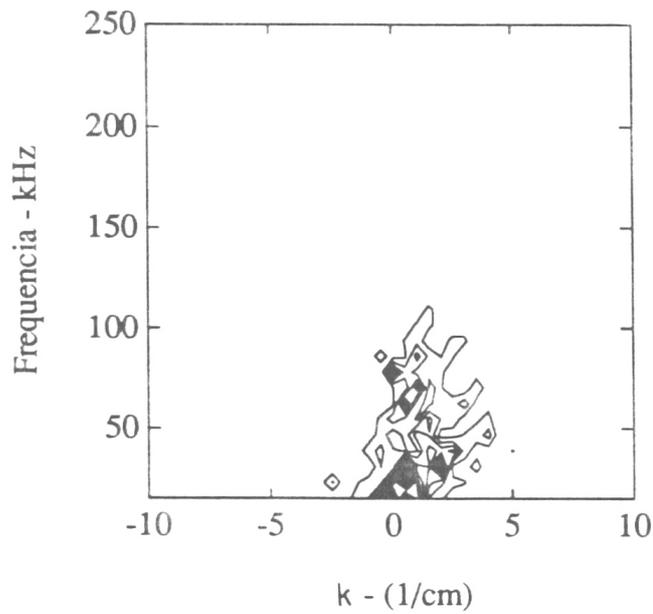


Figura 4.2: Curvas de nível para o espectro $S(k, f)$ de flutuações de potencial, em $r/a = 0,87$.

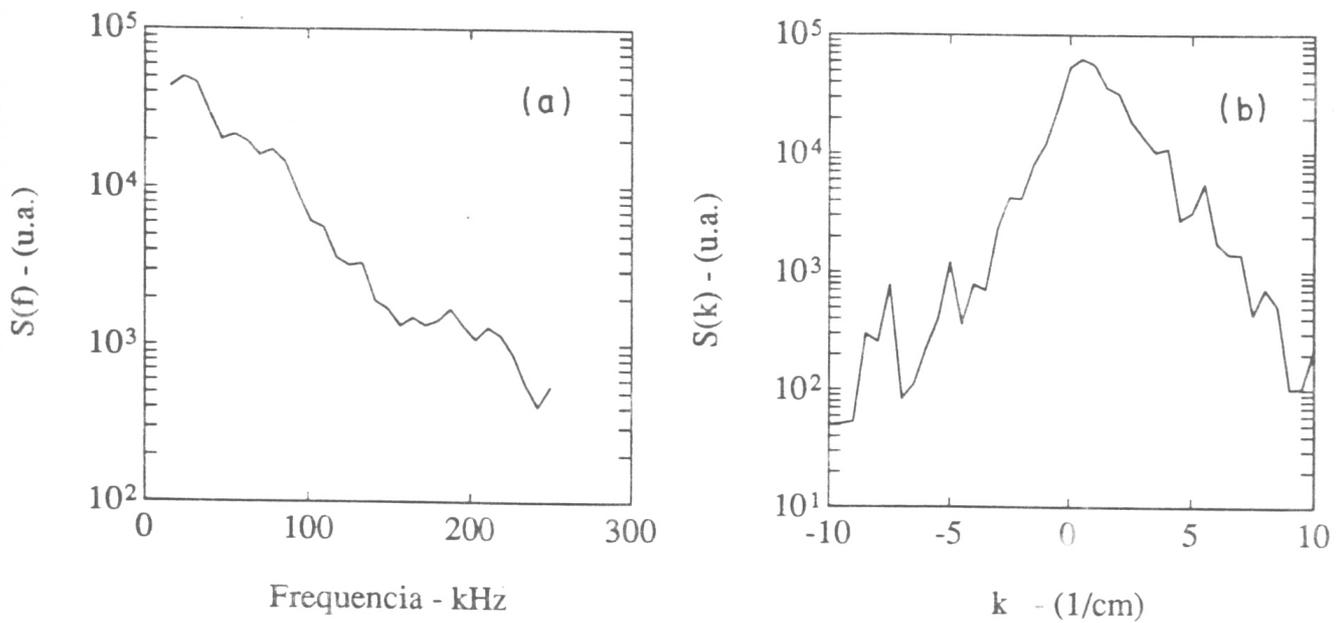


Figura 4.3: a) Espectro $S(f)$ para medidas de potencial ($r/a = 0,87$). b) Espectro $S(k)$ para as mesmas medidas anteriores.

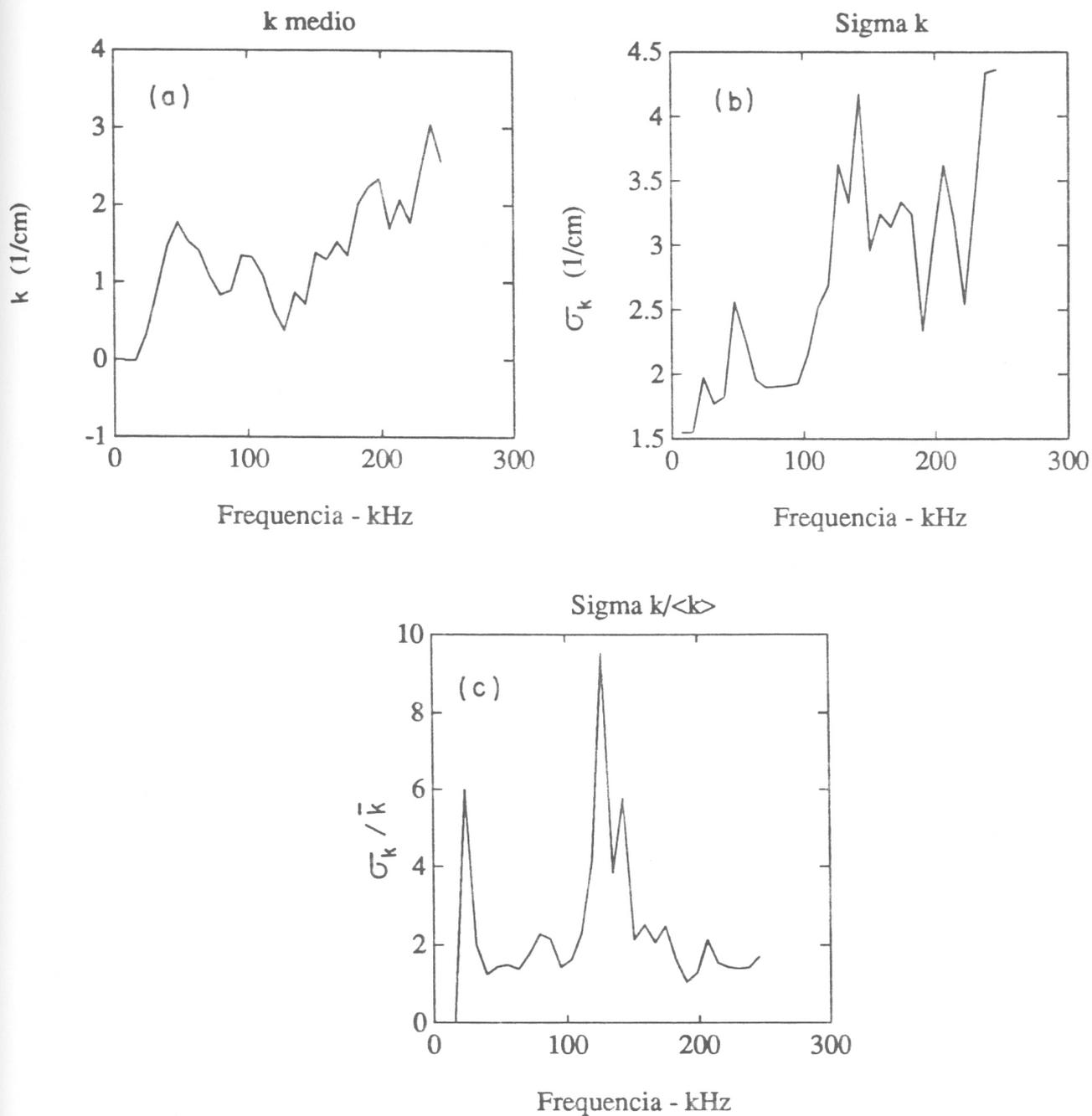


Figura 4.4: a) Espectro de $\bar{k}(f)$ para as medidas da Fig. 4.1a. b) Largura espectral $\sigma_{\bar{k}}$ do espectro anterior. c) Razão de dispersão $\sigma_{\bar{k}}(f)/\bar{k}(f)$ para as mesmas medidas anteriores.

A velocidade de fase é dada por:

$$\bar{V}_p = \sum_{k,f} \frac{2\pi f}{k} s(k, f) \quad (4.11)$$

Esta velocidade de fase, ponderada pelo espectro $s(k, f)$, é uma velocidade média que enfatiza as componentes de maior potência da flutuação. Com esta fórmula foram determinadas velocidades de fase, que são da mesma ordem que a velocidade de deriva diamagnética dos íons, tipicamente $V_p \simeq 1 \times 10^3 m/s$.

Utilizando a Fig. 4.5, a equação (4.1), para a determinação de k e a equação (3.17), vemos que k assume valores essencialmente positivos, a onda se propaga na direção horária, (θ decrescente). Como [Che 84]

$$\vec{v}_D = -\frac{\nabla P \times \vec{B}}{qnB^2} \quad (4.12)$$

onde v_D é a velocidade de deriva diamagnética, $q = \pm e$, \vec{B} é o campo magnético toroidal, P a pressão. No nosso caso o sentido de \vec{v}_D no plasma do TBR-1 também é horário, coincidindo com o sentido de V_p (velocidade de fase)

Para estimar v_{Di} (velocidade de deriva diamagnética dos íons) utilizamos a fórmula [Che 84]:

$$\vec{v}_{Di} = \frac{KT_i n'}{eB_\phi n} \hat{\theta} \quad (n' = \frac{dn}{dr}) < 0 \quad (4.13)$$

onde K é a constante de Boltzmann, n é a densidade e B_ϕ o campo magnético toroidal. Consideramos os valores do TBR-1, na região das medidas; $KT_i \simeq 20 eV$, $B_\phi = 0,4 T$ e $n/(dn/dr) \simeq 1 \times 10^{-2} m$ [Ca 91] e, como aproximação, a temperatura uniforme.

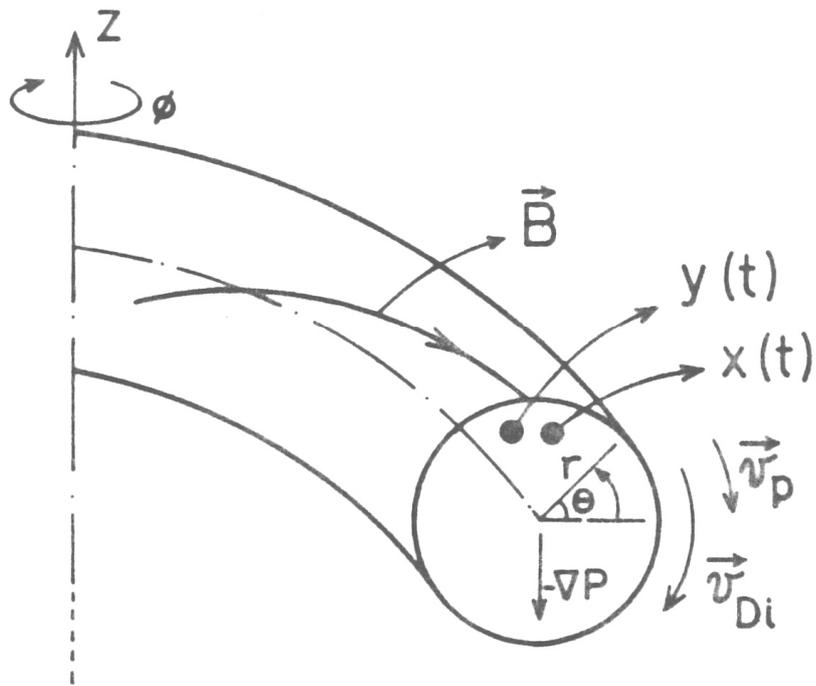


Figura 4.5: Esquema das derivas diamagnéticas no TBR-1



4.4 Variância do espectro $S(k, f)$ e discussão da viabilidade de aplicação desta técnica

A variância do espectro $S(k, f)$ é dada por [Bea 82]:

$$\sigma^2\{S(k, f)\} = \frac{1}{M}\{W_s(k, f) - [S(k, f)\Delta f \Delta k]^2\} \quad (4.14)$$

onde $W_s(k, f)$ é o valor quadrático médio da amplitude da transformada de Fourier do sinal, com número de onda entre k e $k + \Delta k$. Esta variância para espectros com uma célula Δk razoavelmente pequena, pode ser aproximada por:

$$\sigma_S^2(k, f) \simeq \frac{W_s(k, f)}{M} \quad (4.15)$$

A variância de $S(k, f)$ é tanto menor quanto maior for o número de realizações M , utilizadas para calcular este espectro.

Ao se determinar $S(k, f)$ devem ser levados em conta, problemas como “aliasing”, por isso os sinais analisados, devem ser filtrados para frequências maiores que a frequência de Nyquist. Para o cálculo dos espectros de potência são aplicadas “janelas” de Hanning para minimizar os efeitos de “leakage” que surgem devido à duração finita dos sinais medidos.

Como foi dito anteriormente, a distância entre as sondas deve ser pequena, comparada com o comprimento de onda das flutuações a serem medidas.

Inúmeras discussões surgiram, sobre a viabilidade do uso da técnica que apresentamos e sobre as restrições da mesma [Car 91]. Em geral, porém, os pesquisadores afirmam, em vários trabalhos, que a estimativa do valor médio e da largura da função de densidade espectral $S(k)$, a partir de medidas do número de onda local, é um processo correto. Em condições onde a sua aplicabilidade pode ser intuitivamente questionada, como por exemplo, se a separação entre os detetores é muito grande de tal maneira que os dois sinais

não estão bem correlacionados, aparecem erros, embora não substanciais [Car 91]. Em particular para grandes distâncias entre os medidores, o erro na estimativa do valor médio do espectro pode ser da ordem da largura do mesmo.

Medidas locais permanecem úteis mesmo em geometria não otimizada, desde que as limitações da técnica sejam tomadas em consideração.

Capítulo 5

Análise biespectral

5.1 Introdução

Nos capítulos anteriores tratamos da análise espectral de sinais de flutuações num modelo linear, sem considerar qualquer interação entre os mesmos. Entretanto, o modelo linear é incapaz de explicar como ondas, inicialmente instáveis, numa região limitada de frequência e número de onda, podem gerar um espectro turbulento, que se estende numa vasta gama de frequência e número de onda.

O surgimento ou desaparecimento dos modos das flutuações está relacionado com o acoplamento ou desacoplamento de modos lineares, e para analisá-los é necessário o conhecimento das funções de correlação de ordem superior. [Ri 89]

Neste capítulo trataremos especificamente de funções de correlação “tripas”, que envolvem o valor esperado do produto de três séries temporais. Essas funções recebem o nome de funções de bicorrelação. O prefixo bi indica funções de apenas duas variáveis no caso estacionário.

Na seção 5.2 vamos introduzir o autobiespectro de um sinal x e a sua auto-

bicoerência. [Ki 79] O autobiespectro é a transformada de Fourier da função de autocorrelação, e possui as mesmas informações acerca das flutuações que esta. A autobicoerência, também introduzida neste capítulo, mede o grau de correlação quadrática de um sinal e serve para distinguir os modos lineares e espontâneos, dos modos quadraticamente acoplados. Introduziremos também a bifase, uma grandeza que depende diretamente das características não lineares do sistema analisado. Os algoritmos introduzidos são analisados e testados utilizando sinais gerados por computador (apêndice C).

Na seção 5.3 mostraremos as relações de simetria do autobiespectro [Po 90] e como elas facilitam o cálculo das funções descritas.

Em seguida, na seção 5.4, definiremos o biespectro cruzado e a bicoerência cruzada, funções que medem o acoplamento quadrático existente entre dois sinais de flutuações.

Na seção 5.5 trataremos da eficácia dos estimadores e da determinação da variância dos mesmos [Ki 79]. Na seção 5.6 descreveremos aplicações das técnicas de análise biespectral, no estudo e interpretação de dados de flutuações medidos no plasma.

A análise biespectral possui a vantagem, sobre a análise espectral linear, de que as informações sobre o módulo e fase da transformada de Fourier do sinal podem ser recuperadas. Assim é possível reconstruir o sinal no tempo, i. e., a forma do sinal. A análise biespectral consegue ir além do espectro de potência usual, que fornece apenas o módulo do sinal.

5.2 Autobiespectro

5.2.1 Autobiespectro de potência

A função de bicorrelação para um sinal x é dada por [Po 90]:

$$R_{xxx}(t, \tau_1, \tau_2) = \langle x(t)x^*(t - \tau_1)x^*(t - \tau_2) \rangle \quad (5.1)$$

onde τ_1 e τ_2 são dois intervalos de tempo de correlação diferentes. Para o caso estacionário em que estas funções se tornam independentes do tempo temos:

$$R_{xxx}(\tau_1, \tau_2) = \langle x(t)x^*(t - \tau_1)x^*(t - \tau_2) \rangle \quad (5.2)$$

em particular, quando $\tau_1 = \tau_2 = 0$ e para x real:

$$R_{xxx}(0, 0) = \langle x^3(t) \rangle \quad (5.3)$$

ou seja a função de autobicorrelação para $\tau_1 = \tau_2 = 0$ é igual ao valor médio do cubo de $x(t)$.

A equação 5.1 pode ser escrita em termos da transformada inversa de Fourier como:

$$R_{xxx}(t, \tau_1, \tau_2) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \int df_0 df_1 df_2 \langle X(f_0)X^*(f_1)X^*(f_2) \rangle \times e^{i2\pi(f_0 - f_1 - f_2)t} e^{i2\pi(f_1\tau_1 + f_2\tau_2)} \quad (5.4)$$

Para que o sinal $x(t)$ seja estacionário a equação acima deve ser independente do tempo, o que implica que:

$$\langle X(f_0)X^*(f_1)X^*(f_2) \rangle = S_{xxx}(f_1, f_2)\delta(f_0 - f_1 - f_2) \quad (5.5)$$

onde

$$S_{xxx}(f_1, f_2) = \langle X(f_1 + f_2)X^*(f_1)X^*(f_2) \rangle \quad (5.6)$$

é o autobiespectro do sinal x . Substituindo a expressão 5.6 em 5.4 e integrando em f_0 obtemos:

$$R_{xxx}(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int S_{xxx}(f_1, f_2) e^{i2\pi(f_1\tau_1 + f_2\tau_2)} df_1 df_2 \quad (5.7)$$

ou seja, a função de autobicorrelação é a transformada de Fourier bidimensional do autobiespectro $S_{xxx}(f_1, f_2)$. Assim sendo constituem um par de transformadas de Fourier. Para o caso em que $\tau_1 = \tau_2 = 0$ em 5.4 e considerando 5.3, obtemos:

$$\langle x^3(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int S_{xxx}(f_1, f_2) df_1 df_2 \quad (5.8)$$

S_{xxx} é uma função de densidade espectral, ela representa como o valor médio do cubo de $x(t)$ se distribui num plano bidimensional de freqüências. Para sinais de duração finita ao invés de calcularmos S_{xxx} , calculamos seu valor aproximado, denominado estimador, dado por:

$$B_{xxx}(f_1, f_2) = \langle X^*(f_1)X^*(f_2)X(f_1 + f_2) \rangle_M \quad (5.9)$$

onde M é o número total de realizações.

Esta quantidade só será diferente de zero se as ondas presentes em f_1 , f_2 e $f_1 + f_2$ estiverem quadraticamente acopladas. Neste caso, as ondas com f_1 e f_2 , e fases ϕ_1 e ϕ_2 , respectivamente, se acoplam quadraticamente, com o surgimento de modos com freqüência $f_1 + f_2$ e $f_1 - f_2$, e fases $\phi_1 + \phi_2$ e $\phi_1 - \phi_2$, respectivamente. Assim sendo, a média calculada em 5.9 dará como resultado um valor diferente de zero. Por outro lado, quando as ondas presentes em f_1 , f_2 e $f_1 + f_2$ não estão acopladas (modos espontâneos), cada realização será caracterizada por uma fase randomicamente distribuída, o que faz com que a média calculada em 5.9 tenda para zero, para valores grandes de M .

O autobiespectro pode ser entendido como uma medida qualitativa da potência espectral transferida dos sinais $X(f_1)$ e $X(f_2)$, quando estes se acoplam, para formar o sinal $X(f_1 + f_2)$, ou como uma potência recebida por

$X(f_1)$ e $X(f_2)$ quando cessa o acoplamento, gerando os dois sinais citados. Veja exemplo no apêndice C.

5.2.2 Autobicoerência

O espectro de autobicoerência é um biespectro normalizado, extremamente útil na análise e interpretação de sinais de flutuações associadas com interações não lineares de ordem quadrática. O espectro de autobicoerência é dado por:

$$b_{xxx}^2(f_1, f_2) = \frac{|\hat{B}_{xxx}(f_1, f_2)|^2}{\langle |X(f_1) \cdot X(f_2)|^2 \rangle_M \langle |X(f_1 + f_2)|^2 \rangle_M} \quad (5.10)$$

$b_{xxx}^2(f_1, f_2)$ é uma quantidade real compreendida entre 0 e 1, dependendo do valor do autobiespectro no numerador. Quando $B_{xxx}(f_1, f_2)$ vale zero, $b^2(f_1, f_2)$ também se anula, indicando que não há acoplamento quadrático em nenhum ponto de coordenadas (f_1, f_2) , ou seja, os modos presentes em f_1 e f_2 são modos espontâneos. Quando $0 < b^2 < 1$, a equação indica a existência simultânea de modos acoplados e espontâneos num ponto (f_1, f_2) , e o acoplamento é chamado de acoplamento parcial. No caso de $b^2 = 1$, B_{xxx} atingiu o seu valor máximo, ou seja, as ondas presentes em $f_1 + f_2$ e em $f_1 - f_2$ são devidas ao acoplamento entre as ondas com frequências f_1 e f_2 , dizemos então que o acoplamento se dá de modo total.

O espectro de autobicoerência mede o grau de correlação não linear, de ordem quadrática, entre os modos presentes no sinal $x(t)$. O apêndice C contém uma simulação de biespectro e mostra como se dá a bicoerência entre os diversos modos presentes num sinal.

Cabe salientar que, para um acoplamento significativo, deveríamos ter satisfeitas as condições de frequência e número de onda ou seja $f = f_1 + f_2$ e $k = k_1 + k_2$. Esta teoria espectral pode ser utilizada tanto para frequência

como para número de onda. Para este último caso deveríamos dispor de dados obtidos com várias distâncias entre as sondas.

5.2.3 Autobifase

Vimos pela equação 5.8 que o autobiespectro estava relacionado com o valor médio do cubo de uma grandeza $x(t)$. Entretanto, como o autobiespectro é uma grandeza complexa, sabemos que $X(f) = X^*(-f)$; então podemos escrever 5.8 como :

$$\langle x^3(t) \rangle = \langle \text{Re}[B_{xxx}](f_1, f_2) \rangle \quad (5.11)$$

onde substituímos S_{xxx} pelo seu estimador B_{xxx} .

Apenas a parte real do autobiespectro contribui para o valor da média do cubo de x .

A autobifase, ou seja, a fase do autobiespectro, está relacionada com o sinal desse valor médio, mais precisamente com o parâmetro de assimetria “skewness” (que é definido como sendo o valor cúbico médio dividido pelo cubo do desvio padrão).

A autobifase é dada por:

$$\beta(f_1, f_2) = \theta(f_1) + \theta(f_2) - \theta(f_1 + f_2) \quad (5.12)$$

onde $\theta(f)$ é a fase de uma componente espectral com frequência f .

A natureza física de uma dada interação não linear pode determinar, por exemplo, o sinal do parâmetro de assimetria. Ou inversamente, pode-se obter informações do acoplamento não linear a partir das características medidas das quantidades biespectrais.

O sinal do parâmetro de assimetria é determinado pelo crescimento ou diminuição da amplitude da onda, sendo positivo se esta cresce, e negativo se ela decresce.

5.3 Relações de simetria do biespectro

Em princípio o autobiespectro é definido sobre todo o plano f_1, f_2 . Porém, não é necessário calcular o autobiespectro sobre todo o plano, pois ele possui vários tipos de simetria, especialmente quando $x(t)$ é real [Po 90]. Assim a partir da equação (5.9) e do fato que $X^*(-f) = X(f)$, podemos obter as relações de simetria mencionadas a seguir:

Relação de simetria I:

$$B_{xxx}(-f_1, -f_2) = B_{xxx}(f_1, f_2) \quad (5.13)$$

Como resultado desta relação de simetria se conhecemos os valores do autobiespectro em todos os pontos do semi-plano referente à f_1 positivo (direito), Fig. 5.1, podemos determinar todos os valores no semi-plano de f_1 negativo (esquerdo), portanto passamos a considerar só o semi-plano direito.

Relação de simetria II:

$$B_{xxx}(f_2, f_1) = B_{xxx}(f_1, f_2) \quad (5.14)$$

Esta relação indica que a linha à 45° no primeiro octante é também uma linha de simetria, pois, se calcularmos o autobiespectro no octante marcado com Σ na Fig. 5.1, podemos determinar os valores do autobiespectro no octante imediatamente acima desta linha.

Relação de simetria III:

$$B_{xxx}(-f_2, -f_1) = B_{xxx}^*(f_1, f_2) \quad (5.15)$$

Por esta relação a linha de -45° também é uma linha de simetria. Assim, é necessário calcular o autobispectro apenas nos octantes marcados com Σ e Δ , na Fig. 5.1.

O octante Σ é conhecido como região de soma de frequências e o octante Δ é conhecido como região de diferença de frequências .

Para o autobiespectro além dessas três propriedades existe uma propriedade adicional.

Relação de simetria IV:

$$B_{xxx}(f_1, -f_2) = B_{xxx}^*(f_1 - f_2, f_2) \quad (5.16)$$

Esta propriedade adicional basicamente estabelece que para o autobiespectro existe simetria entre os pontos no octante Σ e no octante Δ . Assim somente é necessário calcular B_{xxx} na região Σ , correspondente à:

$$0 \leq f_2 \leq \frac{f_N}{2} \quad e \quad f_2 \leq f_1 \leq f_N - f_2 \quad (5.17)$$

onde f_N é a frequência de Nyquist.

5.4 Biespectro e bicoerência cruzados

O biespectro cruzado é similar ao autobiespectro. Pode ser usado para detetar e quantificar interações quadráticas entre duas componentes espectrais com frequências f_1 e f_2 , em uma flutuação $x(t)$, que resultam numa componente $f_1 + f_2$ ou $f_1 - f_2$, em um outro sinal de flutuação $y(t)$. Assim sendo, o biespectro cruzado é um conceito importante no modelo de sistemas não lineares, caracterizando os processos de transferência de energia em

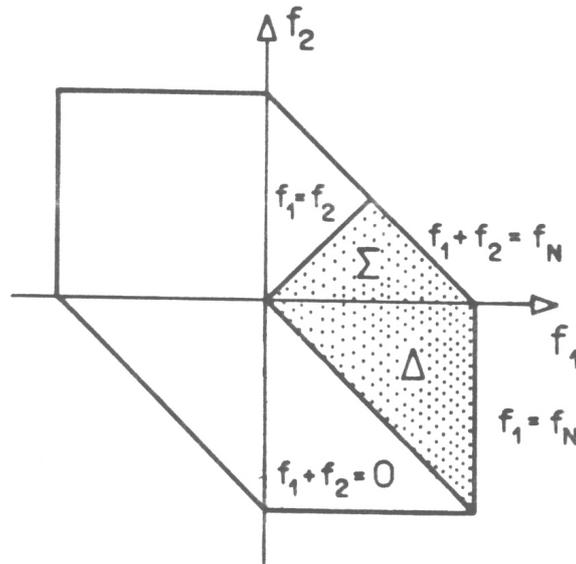


Figura 5.1: Regiões simétricas para o cálculo das quantidades biespectrais. Somente as regiões sombreadas são graficadas.

turbulência. Ele permite obter os coeficientes de acoplamento complexos que governam a taxa desses processos.

Se $x(t)$ e $y(t)$ são processos temporais de média zero, a função de bicorrelação cruzada, $R_{yxx}(\tau_1, \tau_2)$, é dada por:

$$R_{yxx}(\tau_1, \tau_2) = \langle y(t)x^*(t - \tau_1)x^*(t - \tau_2) \rangle \quad (5.18)$$

Seguindo passos semelhantes aos da seção anterior, pode-se mostrar que:

$$B_{yxx} = \langle X^*(f_1)X^*(f_2)Y(f_1 + f_2) \rangle_M \quad (5.19)$$

é um estimador de $S_{yxx} = \langle X^*(f_1)X^*(f_2)Y(f_1 + f_2) \rangle$, que é a transformada de Fourier de $R_{yxx}(\tau_1, \tau_2)$.

O biespectro cruzado possui as mesmas relações de simetria que o autobiespectro, exceto a relação de simetria IV, sendo necessário que seja calculado

tanto no octante Σ já definido, quanto em Δ , sendo este último definido como:

$$-f_N \leq f_2 \leq 0 \quad e \quad f_2 \leq f_1 \leq f_N \quad (5.20)$$

Como citamos anteriormente, o bicoerência cruzada é uma função que mede o grau de correlação quadrática (bicoerência) entre $Y(f_1 + f_2)$, $X(f_1)$ e $X(f_2)$ e, assim como o autobiespectro, vale zero para modos lineares espontâneos. Uma versão normalizada deste grau de correlação cruzada é dada pelo espectro de bicoerência cruzada:

$$b_c^2(f_1, f_2) = \frac{|\hat{B}_{yxx}(f_1, f_2)|}{\langle |X(f_1) \cdot X(f_2)|^2 \rangle_M \langle |Y(f_1 + f_2)|^2 \rangle_M} \quad (5.21)$$

Como a autobicoerência, este espectro também tem um valor real entre 0 e 1, sendo uma função que permite distinguir entre os modos espontâneos (estatisticamente independentes) e quadraticamente acoplados (ver ilustração no apêndice C).

5.5 Considerações estatísticas e variâncias dos espectros

Os estimadores estão sempre sujeitos a erros estatísticos tais como tendenciosidade (desvio do valor verdadeiro) e variância. Um estimador deve ser consistente, no sentido que o erro estatístico deve se aproximar de zero quando o número de observações cresce o suficiente.

Supomos o sinal medido longo o suficiente para evitar o efeito de "leakage". A variância de $B_{xxx}(f_1, f_2)$ é dada por [Ki 79]

$$\sigma^2\{B(f_1, f_2)\} = \frac{1}{M} P_{xx}(f_1) P_{xx}(f_2) P_{xx}(f_1 + f_2) [1 - b^2(f_1, f_2)] \quad (5.22)$$

Vemos que a variância de B_{xxx} vai a zero à medida que M se torna infinito como intuitivamente se concluiria, de que quanto maior o número de realizações, mais nos aproximamos do valor verdadeiro.

Existe também uma dependência com o valor da autobicoerência, de modo que, quando há acoplamento não linear ($b^2 = 1$), a variância tende a zero, e quando $b^2 = 0$ a variância é proporcional ao produto da potência de cada componente estatística. A variância de $b(f_1, f_2)$ não pode ser determinada por um cálculo imediato, porém se desprezamos a variância do denominador pode-se aproximar a variância de b por:

$$\sigma_b^2 = var\left(\frac{B(f_1, f_2)}{P_{xx}(f_1)P_{xx}(f_2)P_{xx}(f_1 + f_2)}\right) \quad (5.23)$$

que é dada aproximadamente por:

$$\sigma_b^2 \simeq \frac{1}{M}[1 - b^2(f_1, f_2)] \quad (5.24)$$

Vemos que $\sigma_b^2 \leq \frac{1}{M}$ para qualquer combinação de frequências. Quantidades análogas podem ser calculadas para o bispectro cruzado, assim:

$$\sigma^2\{B_{yxx}(f_1, f_2)\} = \frac{1}{M}P_{xx}(f_1)P_{xx}(f_2)P_{yy}(f_1 + f_2)[1 - b_c^2(f_1, f_2)] \quad (5.25)$$

e

$$\sigma^2 b_c \simeq \frac{1}{M}[1 - b_c^2(f_1, f_2)] \quad (5.26)$$

tendo se levado em conta as mesmas considerações que fizemos para o caso do autobispectro.

Em resumo, concluímos que os estimadores são estatisticamente estáveis quando as três ondas são quadraticamente coerentes e relativamente instáveis quando as ondas são quadraticamente incoerentes. Em tais casos pode-se melhorar a variância aumentando-se o número de interações.

Convém lembrar que a análise biespectral apenas indica se o acoplamento quadrático está ocorrendo, não a direção do fluxo de energia, isto é quais modos estão recebendo e quais estão perdendo energia.

Para uma boa determinação das funções biespectrais é necessário que M seja suficientemente grande, o que além de tornar o estimador mais preciso, reduz o efeito de distorções causadas por existência de ruído nos sinais analisados.

5.6 Aplicações do biespectro em flutuações do plasma

Para mostrar que o biespectro é um instrumento importante de diagnóstico, em estudos experimentais de interações não lineares de ondas em meios turbulentos, aplicamos os conceitos anteriores em flutuações de potencial, densidade e campo magnético medidas na borda do plasma do tokamak TBR-1.

Supomos, que o sinal $x(t)$ é registrado com intervalos Δt suficientemente pequenos, de maneira que a frequência de Nyquist, $f_N = 1/2\Delta t$, seja maior que qualquer componente espectral de interesse presente em $x(t)$. Se isto não for verdade, aplicamos um filtro para evitar o efeito de “aliasing” como descrito na seção 3.1. Supomos também que o sinal é medido em um intervalo de tempo, $T = N\Delta t$, suficientemente longo para se ter uma boa resolução de frequência .

Para a obtenção do biespectro escrevemos um programa de computação que segue basicamente os seguintes passos:

1. Dividimos cada sinal temporal medido pelas sondas em M intervalos de N pontos cada.
2. Subtraímos de cada sinal em cada intervalo o seu valor médio.

3. Aplicamos uma “janela” de Hanning aos dados de cada intervalo para reduzir o efeito de “leakage”.
4. Calculamos a transformada de Fourier de cada intervalo, usando a técnica FFT (Fast Fourier Transform).
5. Calculamos as funções biespectrais através dos estimadores introduzidos no presente capítulo, sendo M o número de realizações.

Utilizando o programa citado calculamos o autobiespectro, a autobicoerência, a bifase e a bicoerência cruzada para vários sinais, tentando identificar possíveis acoplamentos entre os modos presentes.

Em lugar de apresentar os gráficos tridimensionais, mostramos, em geral, os gráficos das curvas de nível, onde a intensidade maior das linhas indica um valor mais alto do algoritmo calculado.

Os cortes das curvas de nível são tomados em valores que vão entre 0 e 1, equidistantes e iguais para as duas figuras, para que se possa interpretar a altura dos picos apenas olhando a densidade de linhas de contorno em torno dos mesmos.

Na Fig. 5.2, temos um exemplo das curvas de nível da autobicoerência, para as flutuações de densidade, medidas em $r/a = 0,87$, sem a aplicação de campos magnéticos ressonantes (a) e com a aplicação dos mesmos (b).

Com a aplicação dos campos magnéticos ressonantes há uma clara diminuição da bicoerência.

Na Fig. 5.3 observamos as curvas de nível do autobiespectro de sinais de flutuações do campo magnético poloidal medidas em $r/a = 1,16$ sem a utilização de campos helicoidais ressonantes (a) e com a aplicação dos mesmos (b). Vemos que a região de maior potência espectral diminui quando se aplica a perturbação helicoidal.

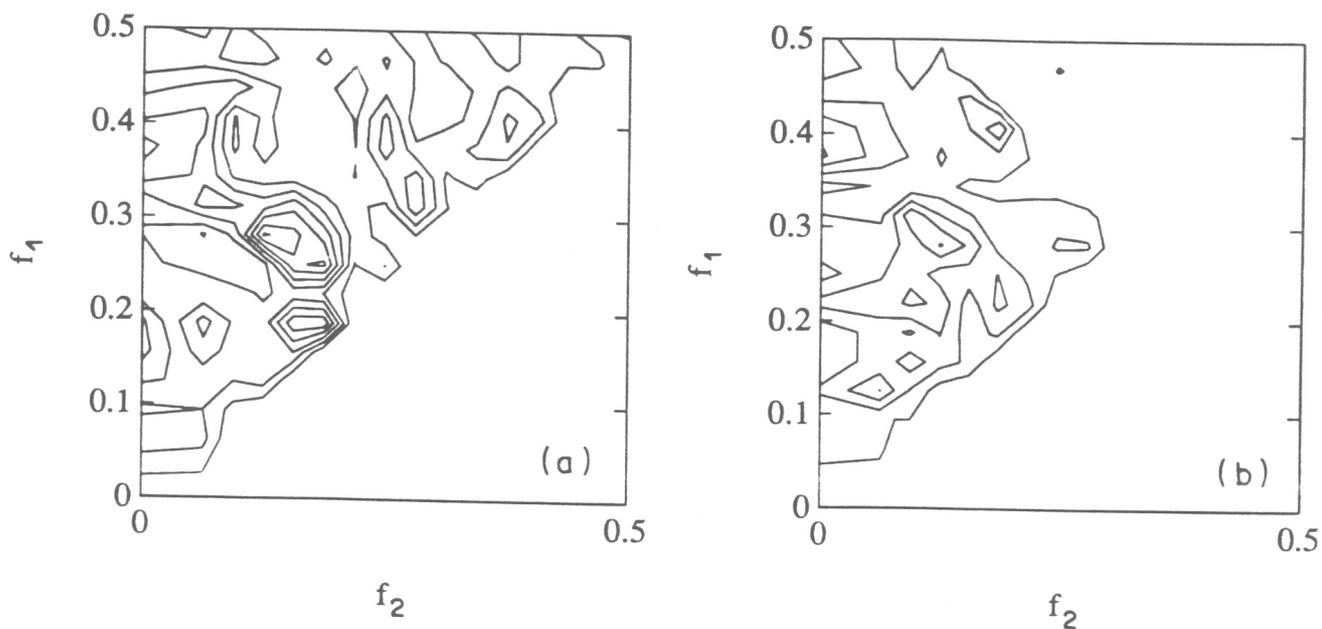


Figura 5.2: a) Curvas de nível da autobicoerência para flutuações de densidade medidas em $r/a = 0,87$, sem a aplicação de campos magnéticos ressonantes. b) O mesmo para as mesmas flutuações, com aplicação de campos magnéticos ressonantes (sinais filtrados a 250 kHz).

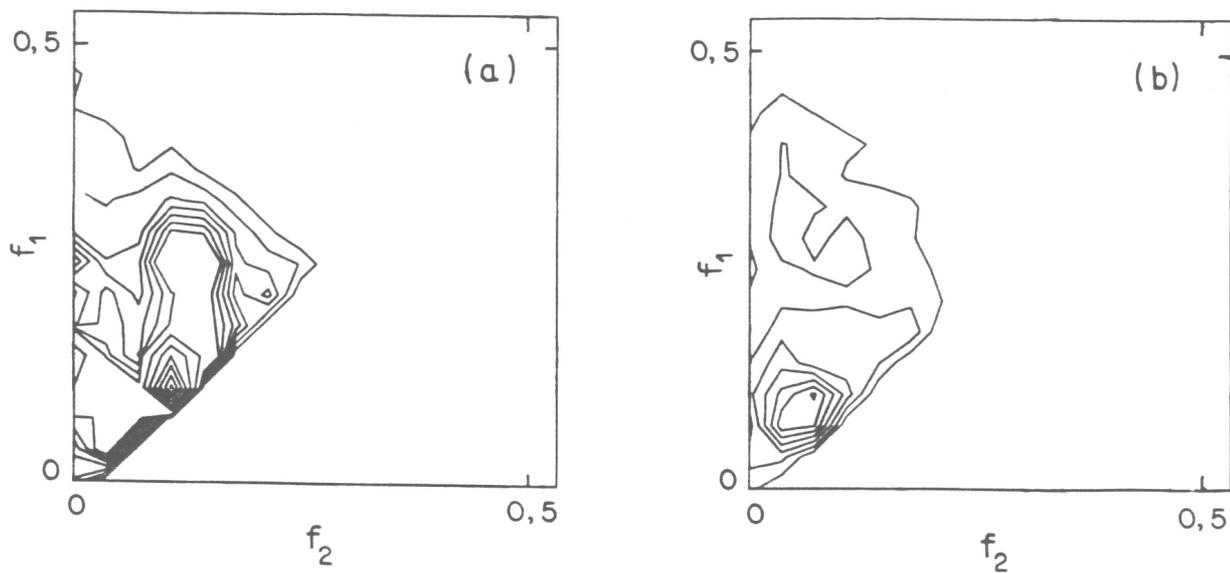


Figura 5.3: Curvas de nível do autobiespectro para flutuações de campo magnético poloidal sem (a) e com aplicação de campos magnéticos ressonantes (b) ($r/a=1,16$) (Sinais Filtrados a 250 kHz).

Na Fig. 5.4 temos a bifase para as mesmas flutuações da figura 5.3a, observamos uma distribuição praticamente igual para os valores positivos e negativos. Nessas regiões os valores médios da bifase coincidem e os picos estão uniformemente distribuídos.

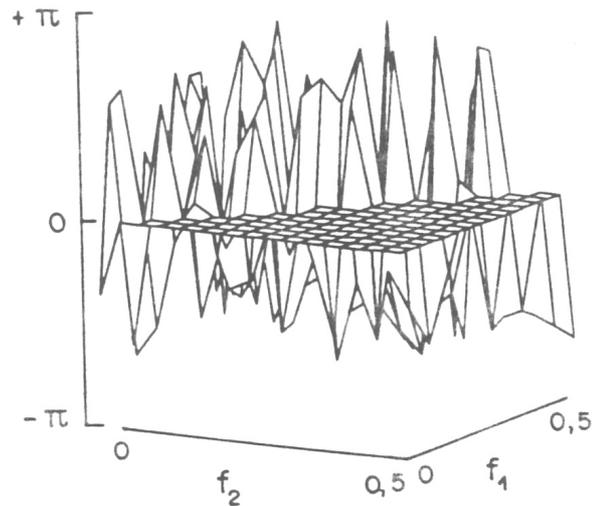


Figura 5.4: Autobifase do biespectro anterior.

Nas Figs. 5.5a e 5.5b, temos as curvas de nível para autobicoerência referente aos espectros das Figs. 5.3a e 5.3b. Nestas figuras vemos claramente o efeito dos campos ressonantes, como elementos desacopladores de modos. Como o valor da bicoerência é normalizado este não depende da amplitude das flutuações. O baixo valor da bicoerência, para o caso com campos magnéticos ressonantes coincide com a falta de coerência de fase entre os modos observados.

Na Fig. 5.6 temos a bicoerência cruzada entre os sinais de flutuações de densidade e de flutuações magnéticas sem (a) e com a aplicação de campos helicoidais ressonantes (b). No caso da Fig. 5.6b vemos o desaparecimento

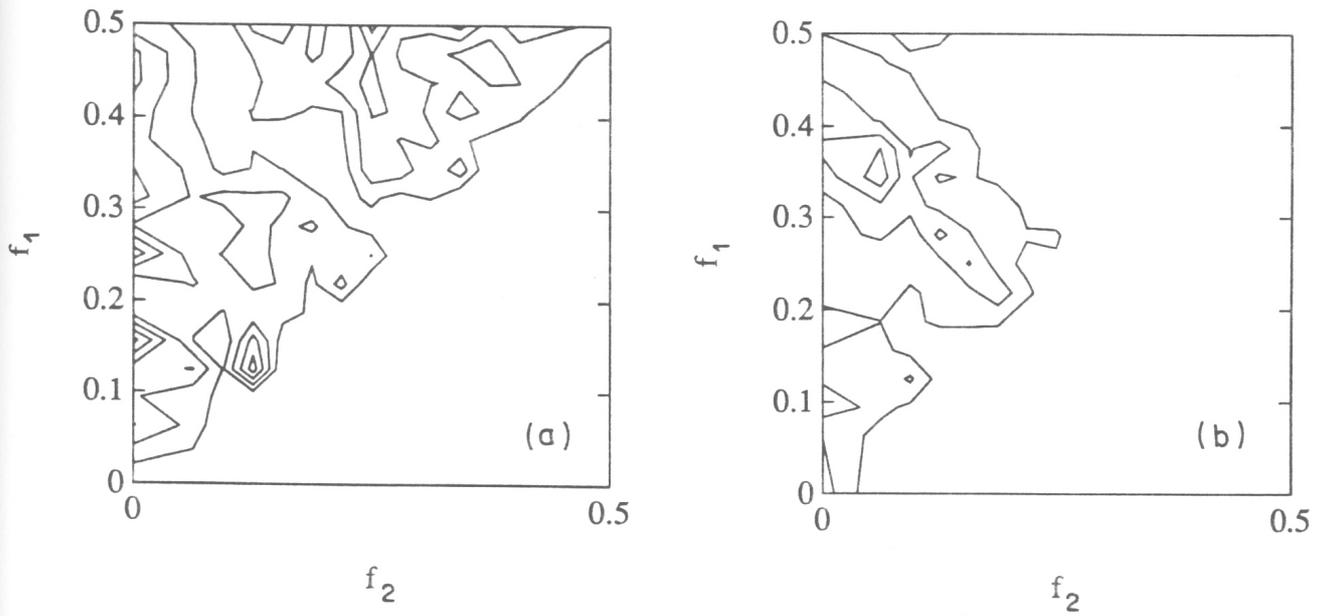


Figura 5.5: Curvas de nível da autobicoerência de flutuações magnéticas sem a aplicação de campos ressonantes (a), e com aplicação dos mesmos (b). (sinais filtrados a 250 kHz).

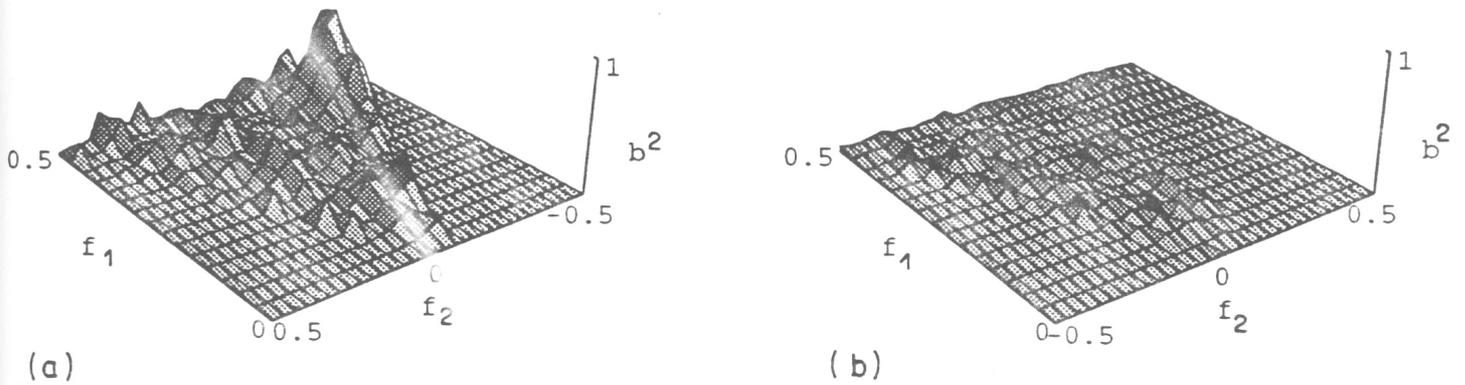


Figura 5.6: Bicoerência cruzada entre flutuações de densidade e de campo magnético sem a aplicação de campos helicoidais ressonantes (a), e com a aplicação dos mesmos (b). (Sinais filtrados a 250 kHz)

quase total do acoplamento entre os modos produzido, pela aplicação dos campos magnéticos e um conseqüente aumento do grau de turbulência. Os mesmos efeitos são observados para flutuações de potencial.

Capítulo 6

Discussões e Conclusões

A finalidade do estudo das flutuações dos diversos parâmetros na borda do plasma é a de investigar o mecanismo que produz as flutuações e estabelecer o seu papel nos fenômenos de transporte na borda do plasma.

O nosso objetivo é então descrever a aplicação de algumas técnicas de análise espectral, para quantificar as propriedades estatísticas das flutuações no Tokamak TBR-1 e medir o fluxo de partículas produzido por estas flutuações.

Todos os programas desenvolvidos foram testados em simulações em computador e, somente após a verificação do resultado destes testes, passaram a ser utilizados na análise dos dados experimentais obtidos com o sistema de diagnóstico descrito no capítulo 2.

Verificamos que o espectro $S(k, f)$, para medidas dentro do plasma, é largo e sua potência está confinada para frequências abaixo de 150 kHz , e números de onda $k_\theta < 3,5 \times 10^2 \text{ m}^{-1}$; o pico principal se encontra em torno de 15 kHz e possui variância da ordem de 10 % do valor observado.

Tanto para medidas de potencial, quanto para medidas de densidade, obtivemos valores das dispersões $\sigma_{\bar{k}}$ e $\sigma_{\bar{f}}$, aproximadamente iguais, sendo $\sigma_{\bar{k}} = 1 \times 10^2 \text{ m}^{-1}$ e $\sigma_{\bar{f}} = 0,8 \times 10^5 \text{ Hz}$. A intensidade da turbulência pode

ser vista pela razão $\frac{\sigma_k}{k} = 1,6$ que é maior do que a obtida em outros tokamaks [Bea 82].

Os valores do produto $k_\theta \rho_i$ (ρ_i = raio de Larmor) estão entre 0,1 e 0,4. O raio de Larmor é calculado pela fórmula [Ch 65]:

$$\rho_i = \frac{(\frac{KT_i}{m_i})^{1/2}}{w_{ci}} \simeq 9 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (6.1)$$

onde $w_{ci} = \frac{eB}{m_i c}$, $B \simeq 0,4 \text{ T}$ é o campo magnético toroidal, m_i a massa do íon, T_i a temperatura dos íons, considerada como $T_i = 2T_e$ [Si 89a] (para um valor médio da temperatura dos elétrons $T_e \simeq 15 \text{ eV}$, próximo do limitador).

Os valores do produto $k_\theta \rho_i$ são maiores que os encontrados no TEXT [Wo 90] e ligeiramente menores que os valores encontrados no tokamak Tosca [Ro 86]. Esses valores são muito altos para serem explicados por uma teoria de modos “rippling”, uma das teorias utilizadas na interpretação da turbulência na borda dos tokamaks [Wo 90].

Os fluxos de partículas induzidos pelas flutuações são para fora em quase todo o espectro. Dentro do plasma observou-se um espectro de frequência largo para altas frequências, coisa que não acontece à sombra do limitador. Integrando $\Gamma(f)$ obtemos, para estes fluxos de partículas induzidos, valores ($\Gamma \sim 1 \times 10^{19}$ partículas/ m^2s) comparáveis com resultados obtidos anteriormente no TBR-1 [Si 89b] através da análise da difusão de partículas. A forma do espectro de transporte observado se deve principalmente à sua dependência com as amplitudes de \tilde{n} e $\tilde{\varphi}$, pois vimos que $\gamma_{\tilde{n}\tilde{\varphi}}$ e $\theta_{\tilde{n}\tilde{\varphi}}$ não variam consideravelmente na região de $f < 150 \text{ kHz}$. Observamos para alguns intervalos de frequência ($f < 50 \text{ kHz}$) $\Gamma(f) < 0$ para $r/a < 1$ conforme recentemente relatado [Jh 93].

A partir do valor do transporte de partículas na borda do plasma, Γ , e do gradiente médio da densidade, também calculado na borda, $|\frac{\Delta n}{\Delta r}|_{r=a}$,

podemos obter o coeficiente de difusão na direção radial, dado por:

$$D_{\perp} = \frac{\Gamma}{\left| \frac{\Delta n}{\Delta r} \right|_{r=a}} \quad (6.2)$$

Obtivemos (para $0,95 < r/a < 1,02$) o valor médio de $D_{\perp} \simeq 1,7 \text{ m}^2/\text{s}$, próximo do calculado pela fórmula de Bohn ($D_{\perp}^B = 0,06T_e/B = 1,4 \text{ m}^2/\text{s}$) [Si 89a].

A velocidade de fase, obtida utilizando o espectro $S(k, f)$ normalizado, é da mesma ordem de magnitude da velocidade de deriva diamagnética dos íons, tipicamente $V_p \simeq 1 \times 10^3 \text{ m/s}$. Observou-se que dentro do plasma estas duas velocidades possuem o mesmo sentido (Fig. 4.5).

Os sinais do campo magnético poloidal medidos com as sondas mostram um espectro de frequência típico, constituído de uma superposição de modos (com um pico em 65 kHz) e uma região turbulenta com alta intensidade ($\tilde{B}_{\theta}/B_{\theta}(a) < 1 \%$) com variações intermitentes. Essas intensidades produzem uma ergodização significativa das linhas de campo na borda do plasma [Fer 88, He 88]. No apêndice B mostramos a separação entre a parte coerente e a parte turbulenta do espectro, Fig. B.1.

Investigamos a relação entre as medidas feitas com as sondas de Langmuir e com as bobinas magnéticas, através do cálculo da correlação cruzada e da coerência entre sinais medidos em pontos separados radialmente por uma distância de $2,3 \times 10^{-2} \text{ m}$. Isto foi possível dado que a distância de correlação já citada, para flutuações de densidade ($k_{\theta} < 3,5 \text{ cm}^{-2}$), indica comprimentos de onda maiores que 2 cm (para as frequências das oscilações magnéticas ressonantes, também chamadas de MHD). Também foi verificado que $\gamma_{\tilde{n}\tilde{B}_{\theta}}$ apresenta um pico para valores de f próximos de 60 kHz , frequência esta que corresponde ao máximo do auto-espectro de B_{θ} para a atividade MHD.

Estes resultados mostram uma superposição parcial dos modos MHD e de componentes eletrostáticas que não são comuns em outros tokamaks [Ts 93a, Wo 90]. Esta peculiaridade cria condições favoráveis à investigação

da possível influência da atividade MHD no espectro do fluxo de partículas induzido. De fato, resultados anteriores [Ts 93a] indicaram que esta atividade pode influenciar indiretamente o espectro de transporte de partículas, entretanto o espectro de transporte integrado não é muito afetado.

Para quantificar o efeito de acoplamentos quadráticos de ondas na turbulência periférica do plasma, usamos as técnicas de análise biespectral descritas no capítulo 5, para os dados medidos com as sondas e bobinas.

Para as flutuações de densidade, a bicoerência se encontra distribuída em quase toda a região de frequência considerada (Fig. 5.2a). Foram observados picos coerentes cujos valores mais significativos são aproximadamente 0,35 (variância de 0,02 aproximadamente) na região de frequência correspondente à maior potência espectral (f_1 e f_2 abaixo de 100 kHz). Existem outros picos na região de altas frequências, indicando que acoplamentos não lineares também ocorrem na região turbulenta. A aplicação dos campos ressonantes faz com que estes picos significativos praticamente desapareçam, ou sejam reduzidos consideravelmente (Fig 5.2b), o que indica um desacoplamento dos modos.

No caso do biespectro das flutuações magnéticas vemos a existência de um pico em $f_1 \simeq 65 \text{ kHz}$ e $f_2 \simeq 75 \text{ kHz}$, (Fig. 5.3a) que corresponde ao pico do valor máximo da bicoerência (0,38). A potência espectral se encontra bem espalhada na região $f_1 < 100 \text{ kHz}$ e $f_2 < 75 \text{ kHz}$. Ao aplicar os campos helicoidais ressonantes esta região diminui, ficando confinada em $f_1 < 75 \text{ kHz}$ e $f_2 < 75 \text{ kHz}$, o pico de maior potência fica muito mais reduzido do que no caso anterior.

A análise da bifase para flutuações magnéticas mostra valores bem distribuídos, de $-\pi$ a π , em todo o espectro. Para flutuações de densidade obtivemos resultados semelhantes.

Para analisarmos uma possível interação de ordem quadrática entre as flutuações de densidade e de campos magnéticos calculamos o biespectro

cruzado entre os dois sinais. Conforme visto na Fig. 5.6a, a potência espectral se mostra concentrada para frequências baixas e mais espalhada na região de $f = f_1 - f_2$ (Δ na Fig. 5.1). Ao aplicarmos os campos ressonantes vemos um abaixamento visível do valor dos picos coerentes (além de uma redução da potência espectral).

Essas reduções da amplitude causadas pela perturbação helicoidal, sugerem que uma atividade magnética elevada poderia criar estruturas na turbulência, não observadas ainda em turbulência eletrostática em tokamaks [Ts 93a, Ts 93b], alterando as funções gaussianas de distribuição de probabilidade, criando estruturas coerentes, ou intermitências que foram apresentadas recentemente [Jh 93].

O presente trabalho permitiu concluir que as técnicas de análise espectral, aplicadas a dados de flutuações obtidos, com sondas elétricas e magnéticas instaladas no TBR-1, são capazes de prover informações, do ponto de vista experimental, sobre a natureza, origem e efeitos das flutuações em plasmas, que são difíceis de se obter usando apenas técnicas de diagnósticos. Mostramos que esta análise permite a descrição das ondas e das instabilidades, a determinação do transporte de partículas induzido pelas flutuações, a obtenção do espectro $S(k, f)$ e uma caracterização do grau de turbulência.

No tokamak TBR-1, perto do limitador, as oscilações de Mirnov e a parte dominante dos espectros das flutuações de densidade (e potencial) tem frequências próximas e a maior parte do transporte associado com a turbulência eletrostática ocorre nesta região de frequência. Este fato pode dar nova informação sobre a possível influência das oscilações magnéticas no transporte eletrostático na borda do plasma do tokamak.

Também verificamos a existência de efeitos não lineares, que podem levar a um modelo do mecanismo destas flutuações.

Cabe assinalar aqui, que a precisão do cálculo dos parâmetros biespectrais sofrem limitações devido à baixa estatística disponível, relacionada com

o tempo de descarga útil do tokamak. Entretanto, as evidências encontradas devem ser confirmadas em novas experiências, que já estão sendo realizadas no TBR-1 [Ca 93b]. Nestas experiências espera-se ter uma observação mais longa das oscilações, o que aumentaria bastante a precisão da análise biespectral relatada nesta dissertação.

O próximo passo de nossas atividades consistiria em aplicar as técnicas descritas neste trabalho com a finalidade de determinarmos a função de transferência e o coeficiente de acoplamento.

A função de transferência [Ri 86] quantifica a energia que é trocada entre as várias ondas que compõem o espectro. O coeficiente de acoplamento é uma quantidade complexa, que descreve a mudança na amplitude e na fase do espectro devida à interação de três ondas. Sua importância reside no fato de poder compará-lo com modelos teóricos.

Além de calcularmos estas quantidades poderíamos aplicar a técnica do bispectro em outras áreas da física, tais como ondas em fluidos, para podermos estabelecer paralelos entre esses fenômenos.

Apêndice A

Influência da diferença de fase e da adição de ruído sobre os espectros de sinais

Para testar o grau de confiabilidade dos cálculos das funções espectrais, no estudo de sinais de flutuações mostradas no capítulo 3, verificamos o efeito da diferença de fase e da existência de ruído sobre o espectro de sinais simulados, com componentes conhecidas.

A.1 Efeito da diferença de fase entre dois sinais

Para estudar o efeito da diferença de fase entre sinais, geramos dois sinais $x(t)$ e $y(t)$, de $M \times N$ ($N = 128$ e $M = 100$) pontos cada, a partir das funções:

$$x(t) = \cos[2\pi(20 \text{ Hz})t] + 0,5\cos[2\pi(60 \text{ Hz})t] + 0,2\cos[2\pi(100 \text{ Hz})t] \quad (\text{A.1})$$

e

$$y(t) = \cos[2\pi(30 \text{ Hz})t] + 0,5\cos[2\pi(60 \text{ Hz})t] + 0,2\cos[2\pi(130 \text{ Hz})t] \quad (\text{A.2})$$

Na análise a seguir consideramos intervalos de 128 s e uma banda de frequência de 7,8 Hz

Dividimos cada sinal em M intervalos, de N pontos cada, e calculamos o auto-espectro para cada sinal, o espectro de potência cruzado entre x e y , de onde tiramos o espectro de fase, e calculamos o espectro de coerência entre os dois sinais.

Vemos na Fig. A.1 os espectros de potência de $x(t)$ e de $y(t)$, com três componentes de frequência, como esperado, e valores das amplitudes proporcionais às indicadas nas equações A.1 e A.2.

Na Fig. A.2 observamos o espectro de potência cruzado entre os dois sinais, que dá um pico somente na frequência comum aos dois sinais. O espectro de fase entre x e y (Fig. A.3a) mostra um valor próximo de zero para a região de frequência correspondente à frequência comum aos dois sinais. O espectro de coerência, (Fig. A.3b) mostra um valor alto comparado com a sua variância para esta mesma frequência ($\simeq 0.01\%$), o que significa uma alto grau de correlação entre os sinais x e y nesta frequência.

Em seguida somamos uma fase de $\pi/3$ à componente de frequência 60 Hz no sinal y e recalculamos os espectros acima. Os auto-espectros de potência e o espectro cruzado são exatamente os mesmos das figuras anteriores. O espectro de fase (Fig. A.4) apresenta nesta situação o valor da defasagem introduzida para a componente de frequência citada. O espectro de coerência é o mesmo do caso anterior, indicando que a adição de uma fase relativa aos dois espectros não altera o grau de correlação entre os sinais estudados.

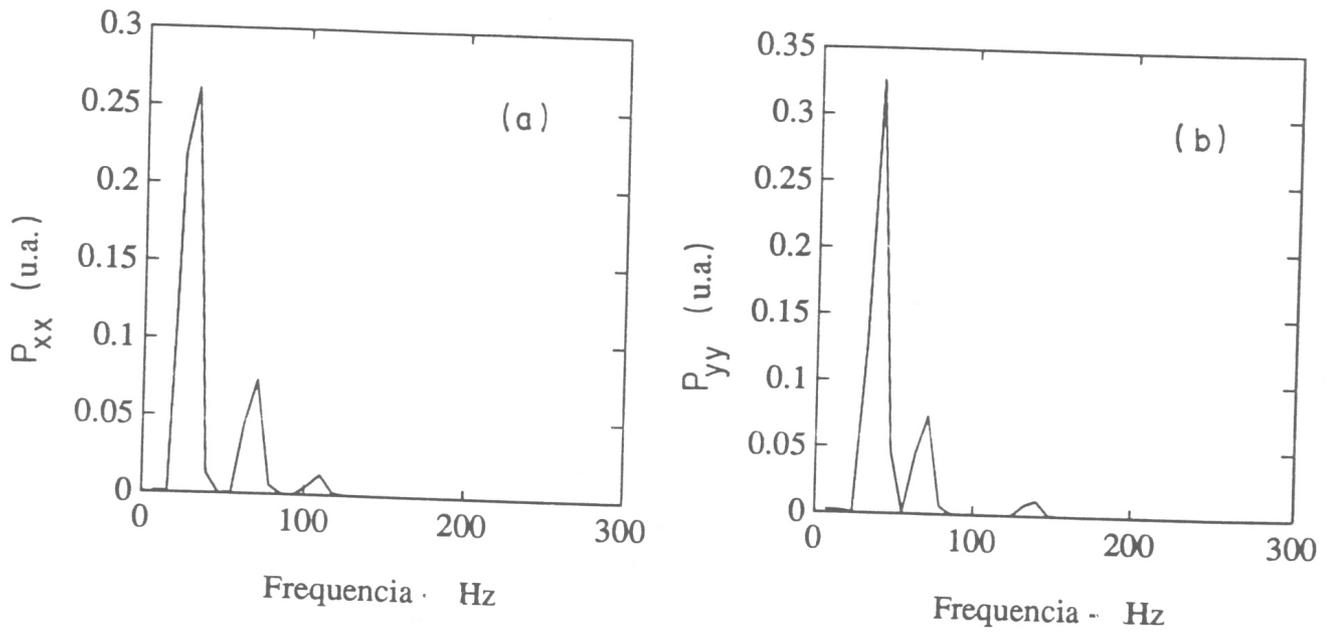


Figura A.1: Espectros de potência dos sinais $x(t)$ (a) e $y(t)$ (b).

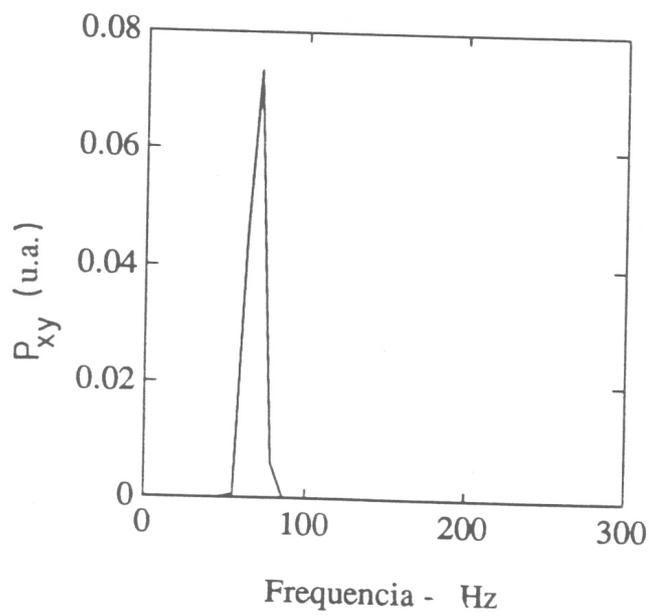


Figura A.2: Espectro de potência cruzado dos sinais das equações A.1 e A.2

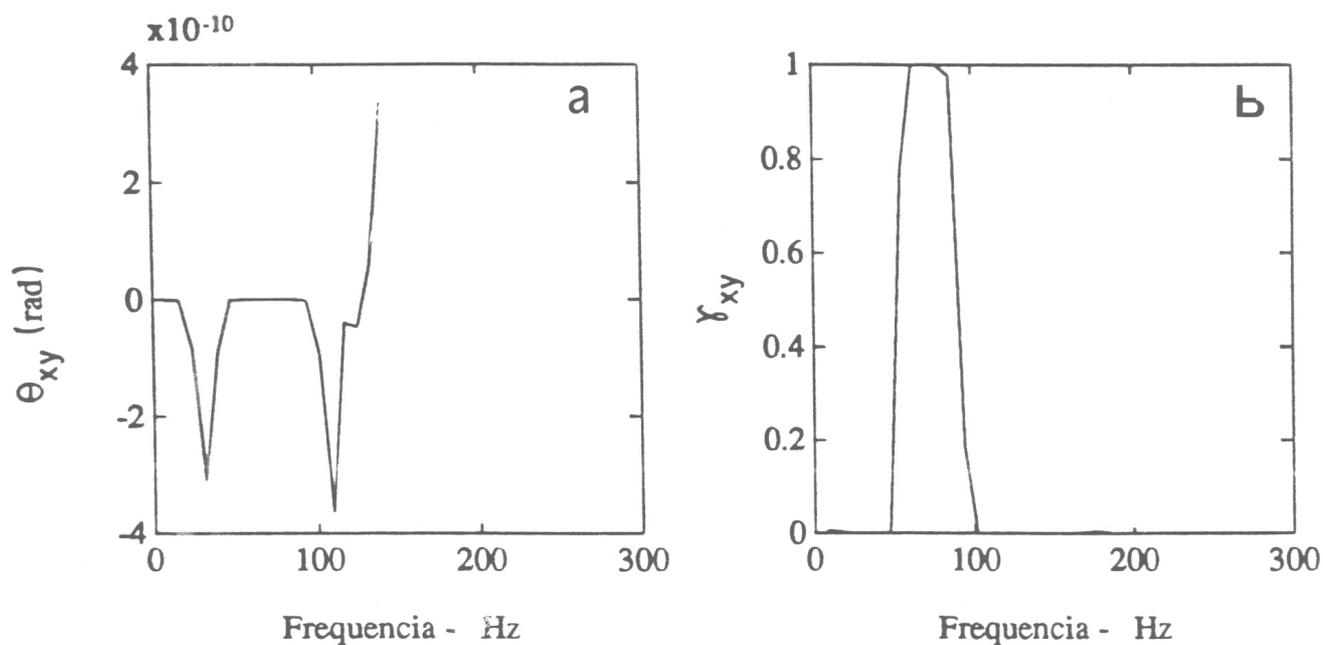


Figura A.3: a)Espectro de fase entre os sinais x e y, simulados sem diferença de fase. b)Espectro de coerência para os mesmos sinais anteriores.

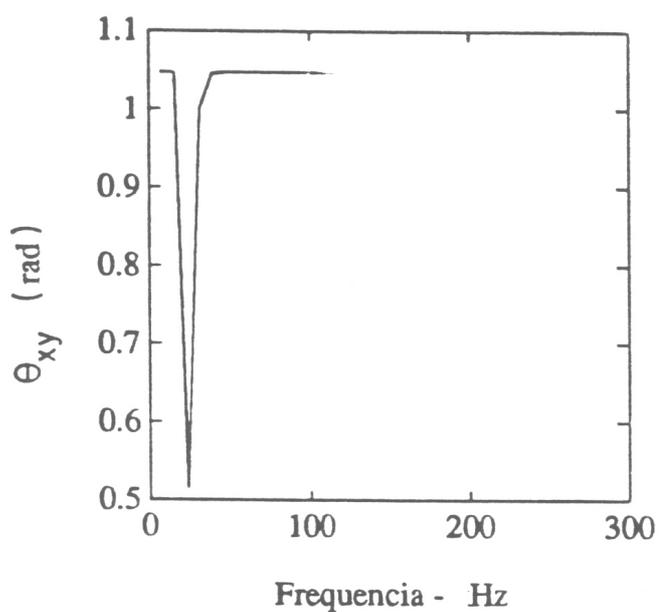


Figura A.4: Espectro de fase entre os sinais x e y com defasagem prefixada ($\pi/3$).

A.2 Influência do ruído nas funções espectrais.

Para estudar possíveis deformações introduzidas nos espectros pela existência de ruído, somamos aos sinais x e y do ítem anterior um ruído gaussiano de baixa amplitude (comparado com as amplitudes do sinal analisado). Assim sendo, ao compararmos o auto-espectro anterior com o modificado vemos que a adição do ruído pouco afeta o valor da amplitude dos picos. A Fig. A.5 mostra este efeito sobre o espectro do sinal $x(t)$. Entretanto, a adição do ruído num sinal diminui a coerência, drasticamente, como se pode ver na Fig. A.6.

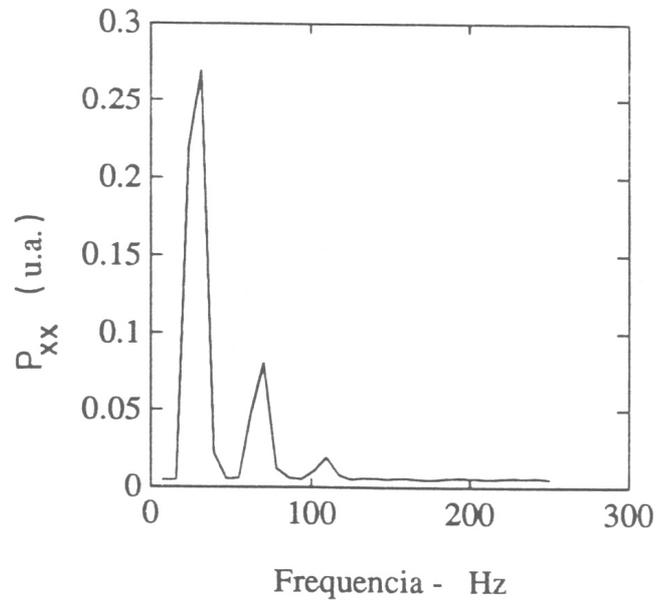


Figura A.5: Espectro de potência do sinal x com adição de ruído gaussiano.

Um ruído muito alto pode vir a diminuir a coerência dos sinais, tornando-os estatisticamente independentes. Portanto, do ponto de vista experimental, deve-se dar um tratamento cuidadoso ao ruído do sistema de medida.

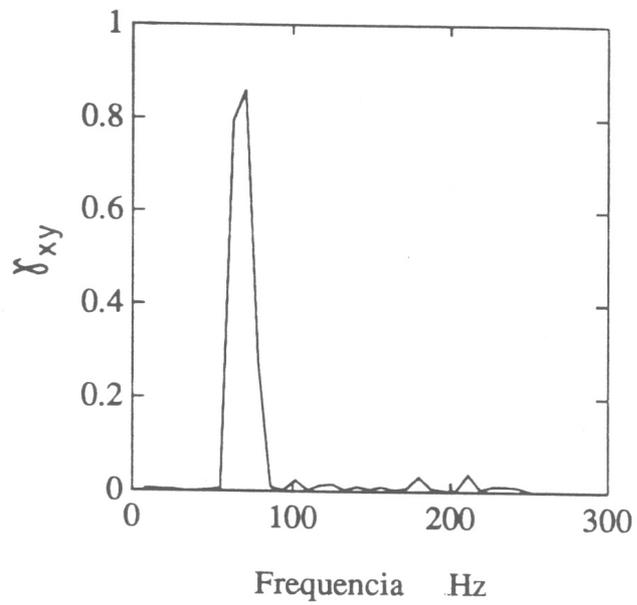


Figura A.6: Espectro de coerência entre os sinais x e y com ruído gaussiano adicionado .

Apêndice B

Aplicações de filtros sobre sinais de flutuações medidos na borda do plasma

Mostraremos o uso de filtros numéricos em aplicações utilizadas comumente quando se analisam flutuações em plasma. Utilizaremos depois o mesmo tipo de filtro para retirar, de um sinal que mede as flutuações de corrente de saturação em todas as frequências, o valor do sinal médio da mesma.

B.1 Separação dos modos coerentes e da parte turbulenta de um espectro de flutuações

Neste ítem utilizaremos filtros do tipo Butterworth, com a finalidade de separar, num espectro de um sinal de flutuações, a parte que contém os modos

coerentes da parte turbulenta.

Na Fig. 3.1a já vimos o espectro de potência de flutuações de campo magnético poloidal para a posição da sonda magnética em $r/a = 1,16$. Como se pôde observar, a região do espectro mais significativa, aquela que contém os modos MHD, compreende uma faixa que vai até a frequência de 80 kHz .

Aplicamos um filtro passa-alta com frequência de corte aproximadamente igual a 100 kHz e obtemos para o sinal filtrado a espectro da Fig. (B.1a). Se aplicarmos um filtro passa-baixa obteremos o espectro da Fig. (B.1b). Separamos, então, os modos coerentes de maior amplitude, do espectro turbulento que possui amplitude mais baixa.

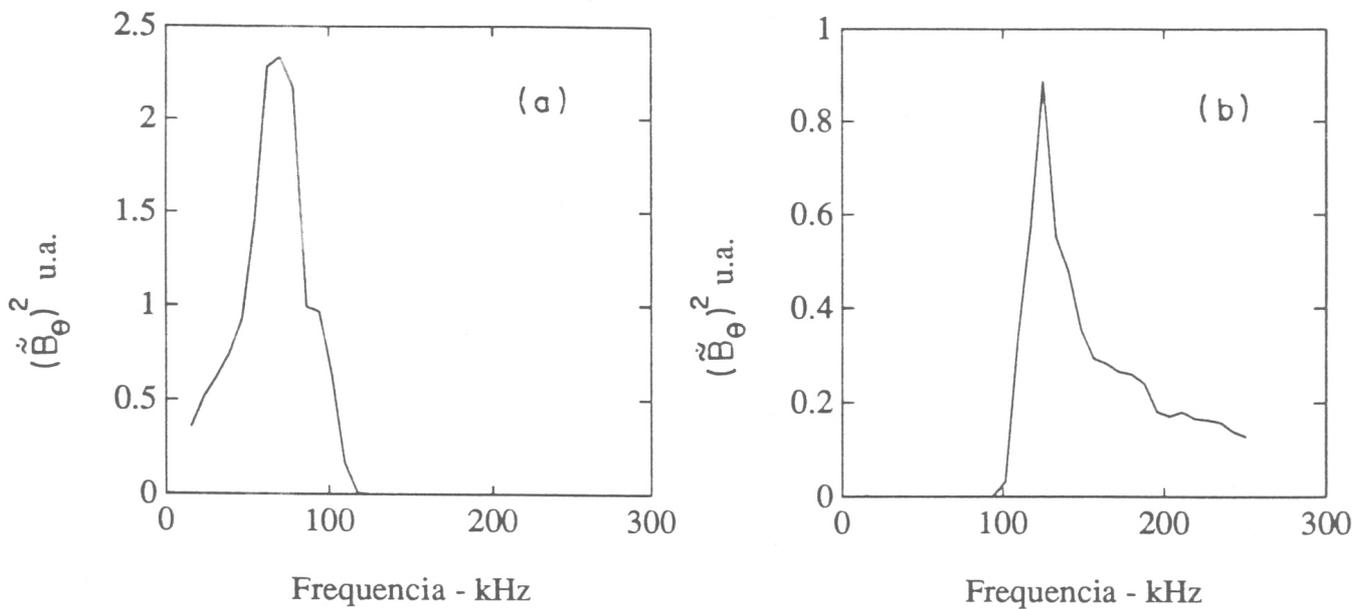


Figura B.1: a) Espectro dos modos MHD para a bobina magnética em $r/a = 1,16$. b) Espectro da região turbulenta para a mesma bobina. (Filtro Butterworth, Ordem do filtro $N = 26$)

Para obtermos estes resultados filtramos duplamente o sinal, para evitar problemas de defasagem e testamos várias ordens de filtro até otimizar a ordem (ver capítulo 3) em $N = 26$, para esta frequência.

B.2 Obtenção do sinal médio a partir do sinal de flutuações

Ao fazermos medidas experimentais, em geral, dispomos de circuitos eletrônicos, que medem todas as frequências superpostas ao sinal médio. Tanto o sinal médio, como os sinais de frequências mais altas, são de interesse no estudo das flutuações de parâmetros do plasma. Por isso torna-se imperativo, medir estes sinais separadamente (o que implica em diagnósticos mais onerosos), ou recorrer a filtros numéricos para separar as duas regiões citadas. A aplicação de filtros numéricos tem se mostrado eficiente em inúmeros trabalhos, evitando a necessidade de armazenamento de dois conjuntos de sinais (o médio e o flutuante). Podemos aplicar filtros numéricos para separar, por exemplo, o sinal médio da densidade (corrente de saturação) das flutuações da mesma. Este método será aplicado nos sinais a serem medidos proximamente no TBR-1 com uma sonda complexa.

No caso para o teste, dispomos da medida do valor do sinal médio da corrente de saturação e da medida das flutuações do mesmo sinal. Somamos estes dois obtendo o sinal total, apresentado na Fig. B.2. Aplicando filtros de Butterworth, passa-baixa e passa alta de ordem 8 (escolhido depois de uma conveniente otimização), respectivamente, neste sinal total deveríamos recuperar os sinais iniciais. Na Fig. B.3a, temos superpostos, o sinal médio medido e o sinal filtrado a partir do sinal total para a região de baixa frequência. Na Fig. B.3b, temos os respectivos espectros desses sinais. Na figura B.4a,

temos superpostos o sinal das flutuações de corrente de saturação medido e o sinal filtrado, a partir do sinal total, para a região de alta frequência. Na Fig. B.4b, vemos os espectros desses dois sinais. Comparando os espectros correspondentes ao sinal medido e sinal filtrado, notamos uma boa reprodutibilidade dos mesmos, indicando a viabilidade do uso de filtros numéricos para a separação de sinais experimentais.

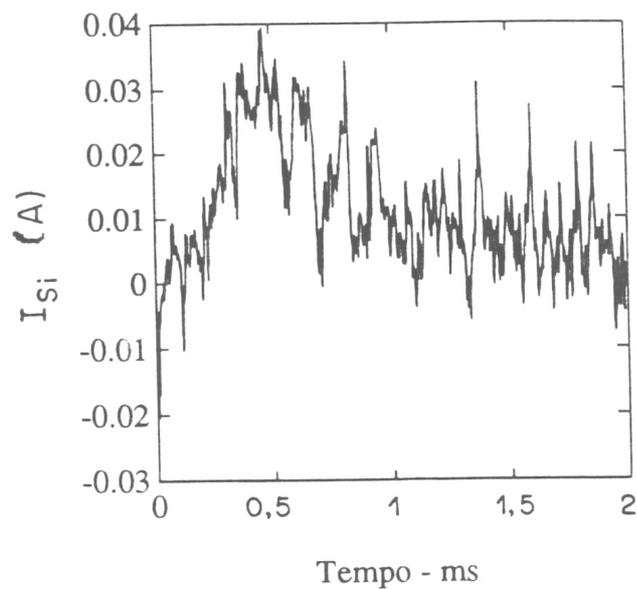


Figura B.2: Sinal resultante da soma dos sinais de corrente de saturação médio com o sinal flutuante, medidos em $r/a = 0,87$.

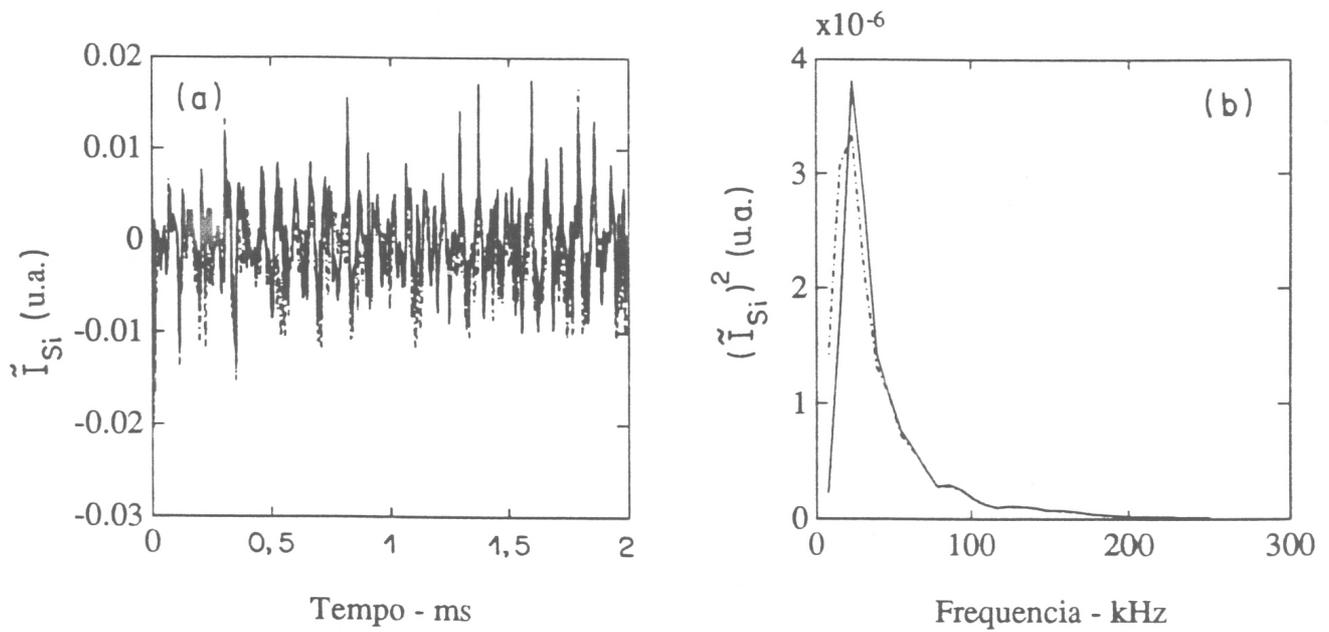


Figura B.3: a) Sinal médio das flutuações medido (- - -) e sinal filtrado a partir do sinal total (—). b) Espectros superpostos dos mesmos sinais.

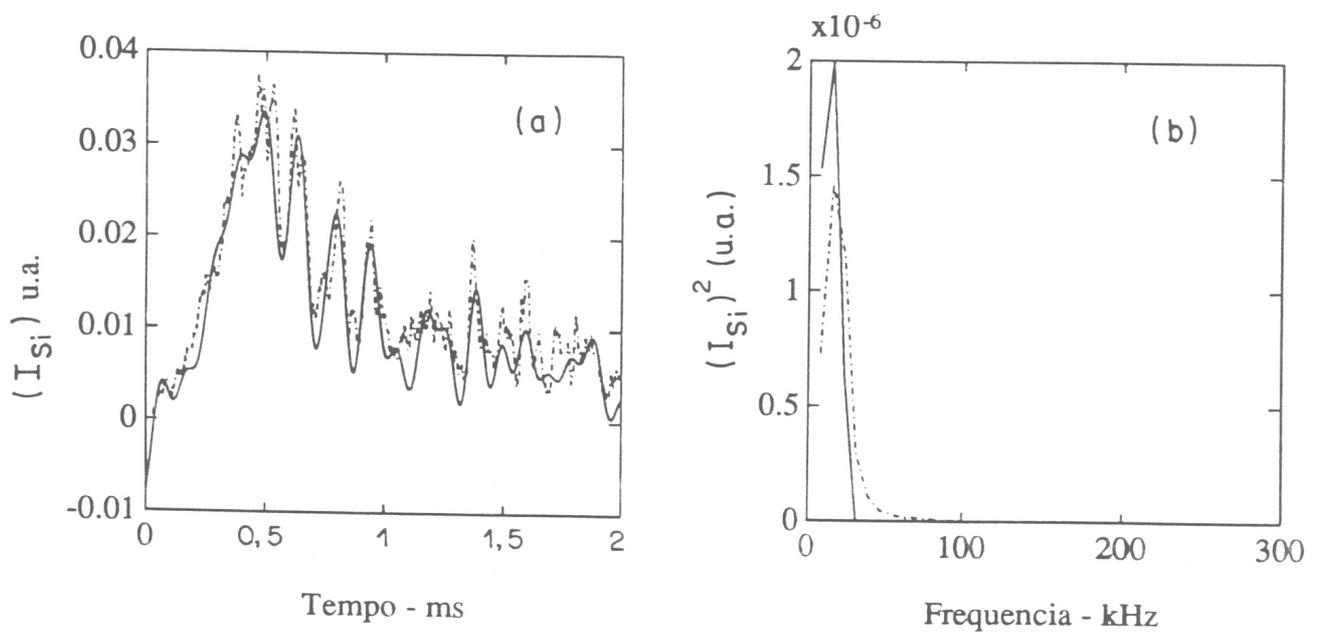


Figura B.4: a) Sinal flutuante medido (- - -) e sinal filtrado com filtro passa-alta a partir do sinal total (—). b) Espectros superpostos dos mesmos sinais.

Apêndice C

Testes da técnica biespectral

Para poder determinar o grau de confiabilidade dos nossos programas passamos a testá-los utilizando funções convenientes [Ki 79].

Com o fim de testar o cálculo de um biespectro, foram geradas $M = 64$ realizações arquivos, com 128 pontos cada, para funções conhecidas do tipo:

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + \cos(2\pi f_3 t + \phi_3) + \text{ruído} \quad (\text{C.1})$$

Neste exemplo $f_1/f_N = 0,22$, $f_2/f_N = 0,375$, $f_3 = f_1 + f_2$, f_N é a frequência de Nyquist e o ruído adicionado é do tipo gaussiano.

Primeiramente, calculamos as fases ϕ_1 e ϕ_2 , de um conjunto de números randômicos uniformemente distribuídos entre $-\pi$ e π , foi imposto $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$. Desta forma estamos simulando uma onda com sua componente f_3 , gerada totalmente pelo acoplamento quadrático das outras duas. Como podemos ver na Fig. C.1a, o auto-espectro nos permite identificar o modo presente em $f_3 = f_1 + f_2$, mas não nos diz se ele é espontâneo ou se ele é devido ao acoplamento dos modos em f_1 e f_2 . Com a autobicoerência do sinal, Fig. C.1b, vemos que existe um acoplamento total entre estes modos para gerar a componente em f_3 , pois o valor da bicoerência é muito próximo de 1 o que é um valor alto se compararmos com sua variância ($\simeq 1/64$). Nas Figs.

C.2a e C.2b, vemos respectivamente um corte dos espectros de autobifase e de autobicoerência para esta mesma simulação. Vemos que o valor da bifase é zero nos pontos correspondentes à maior bicoerência, o que era esperado dada a definição da bifase equação 5.12.

Geramos em seguida outras $M = 64$ realizações com 128 pontos cada, usando a mesma relação da equação C.1, porém tomando ϕ_3 também do conjunto de números randômicos. Vemos na Fig. C.3a, que o auto-espectro nos fornece as mesmas conclusões que no caso anterior, mas a autobicoerência (Fig. C.3b), mostra claramente que o modo em f_3 não é devido ao acoplamento dos demais modos dando um valor para a bicoerência próximo de zero, o que indica de forma expressiva apenas modos espontâneos.

Em seguida utilizamos a função:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + .5.\cos(2\pi f_3 t + \phi_3) \\
 & + \cos(2\pi f_1 t + \phi_1).\cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + \text{ruído}
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

onde $f_3 = f_1 + f_2$ e ϕ_3 é escolhido do conjunto de números randômicos.

O produto na equação anterior vai criar modos, com frequência $f_1 + f_2$ e $f_1 - f_2$, resultando numa divisão da potência espectral em f_3 em duas partes, sendo a metade dela gerada por um modo espontâneo e a outra metade pelo acoplamento. Observando a figura C.4a, vemos que o auto-espectro mostra a existência dos quatro modos. Por outro lado, a autobicoerência (Fig. C.4b), para o modo em $f_1 + f_2$, devido à perda de informação sobre a fase, não consegue responder se existe ou não o acoplamento, ficando por isso num valor intermediário (acoplamento parcial). Isso não ocorre, para o modo em $f_1 - f_2$, onde o espectro de autobicoerência nos fornece o valor 1, indicando que este modo é totalmente gerado pelo acoplamento dos modos presentes em f_1 e f_2 .

Vemos que o espectro de autobicoerência possibilita uma quantificação dos processos não lineares, e uma distinção clara entre os modos acoplados

e os modos espontâneos que aparecem num sinal de flutuações .

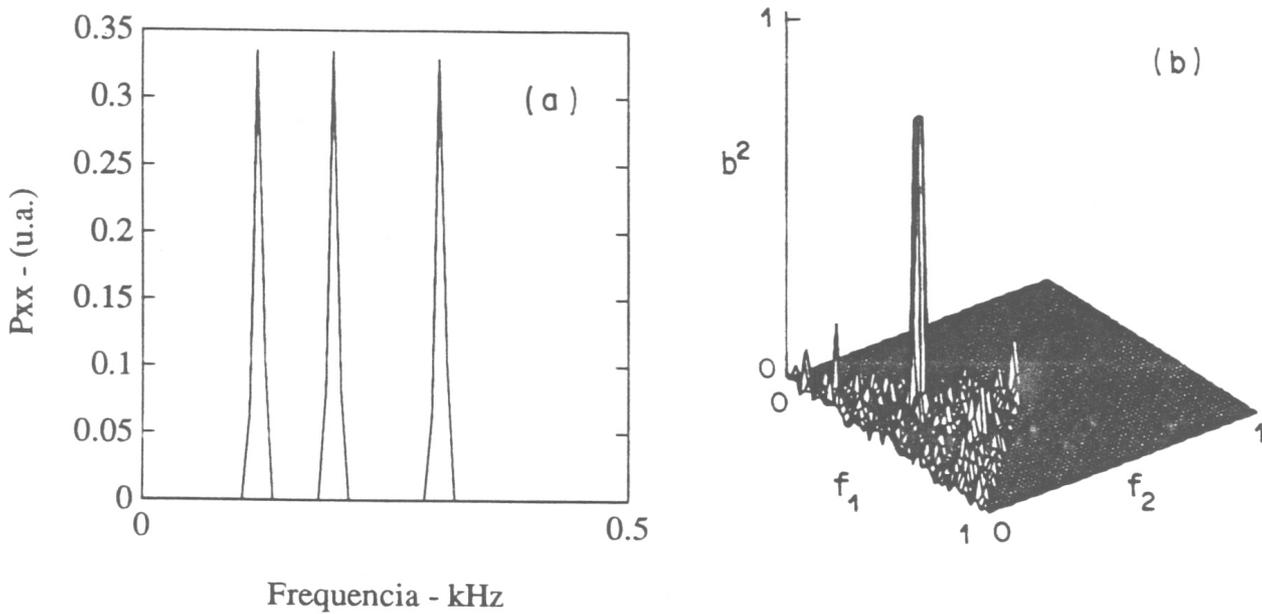


Figura C.1: a) Auto-espectro do sinal C.1 b) Autobicorência do mesmo sinal (frequência normalizada pela frequência de Nyquist).

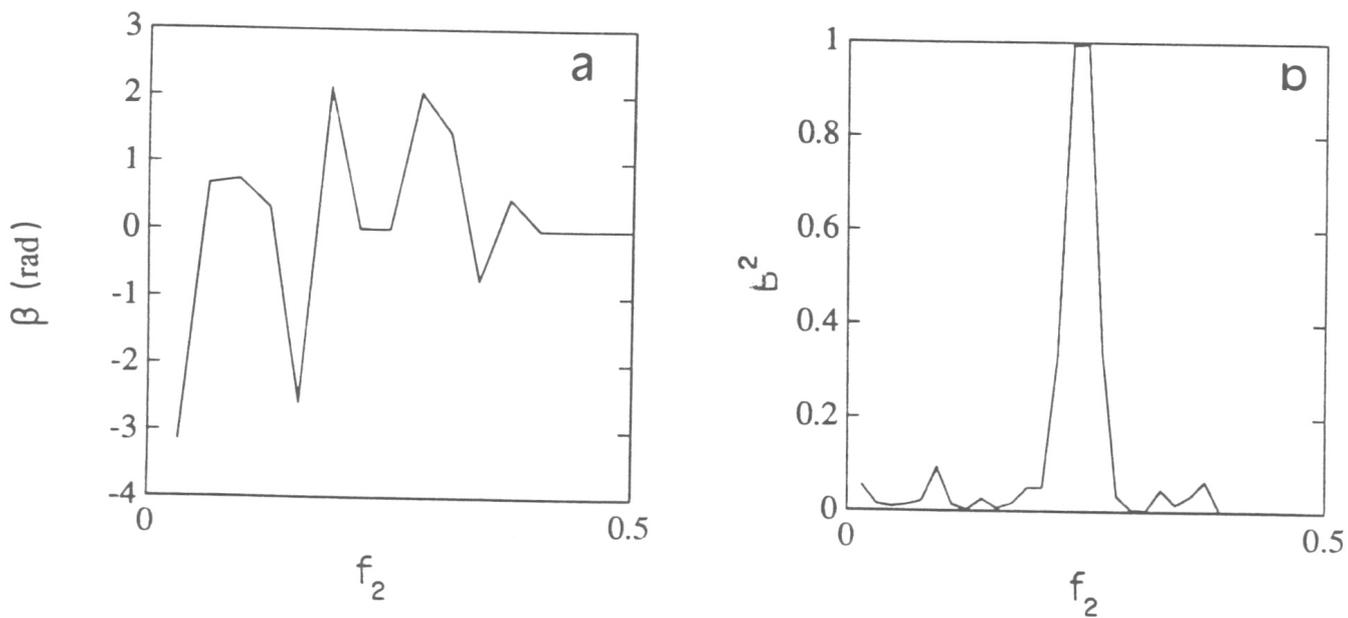


Figura C.2: a) Corte da autobifase do sinal anterior tomado em $f = f_1$. b) Corte da autobicorência para a mesma frequência (frequência normalizada pela frequência de Nyquist).

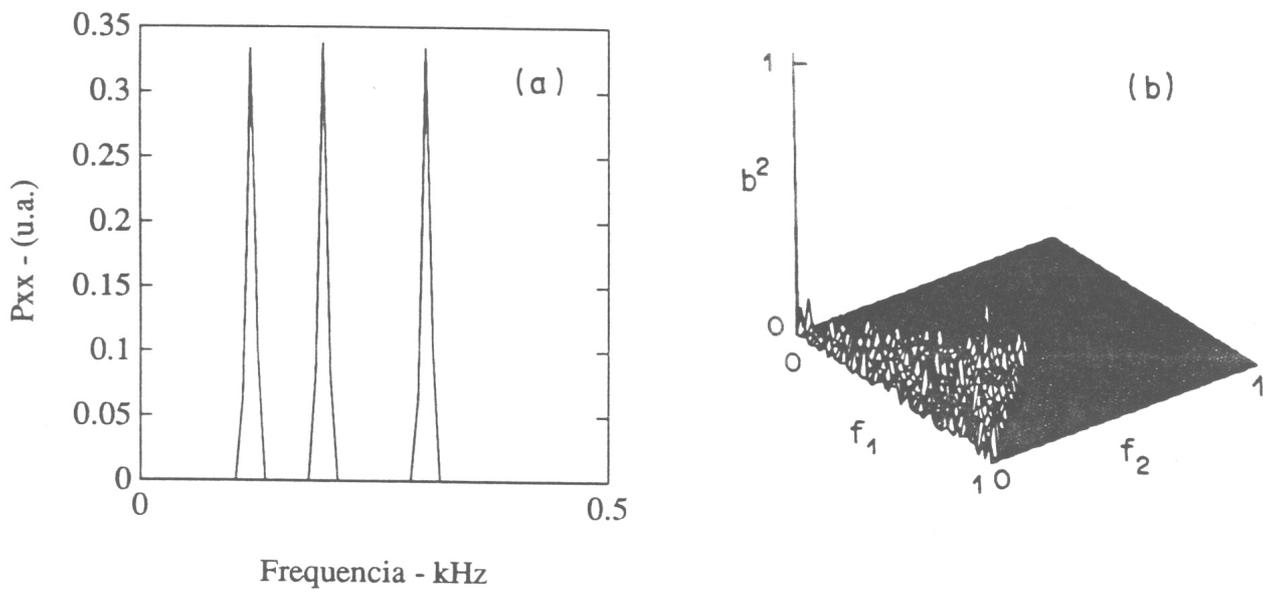


Figura C.3: a) Auto-espectro do mesmo sinal mas com fase ϕ_3 tomada do conjunto de números randômicos. b) Bicoerência para o mesmo sinal (freqüência normalizada pela freqüência de Nyquist).

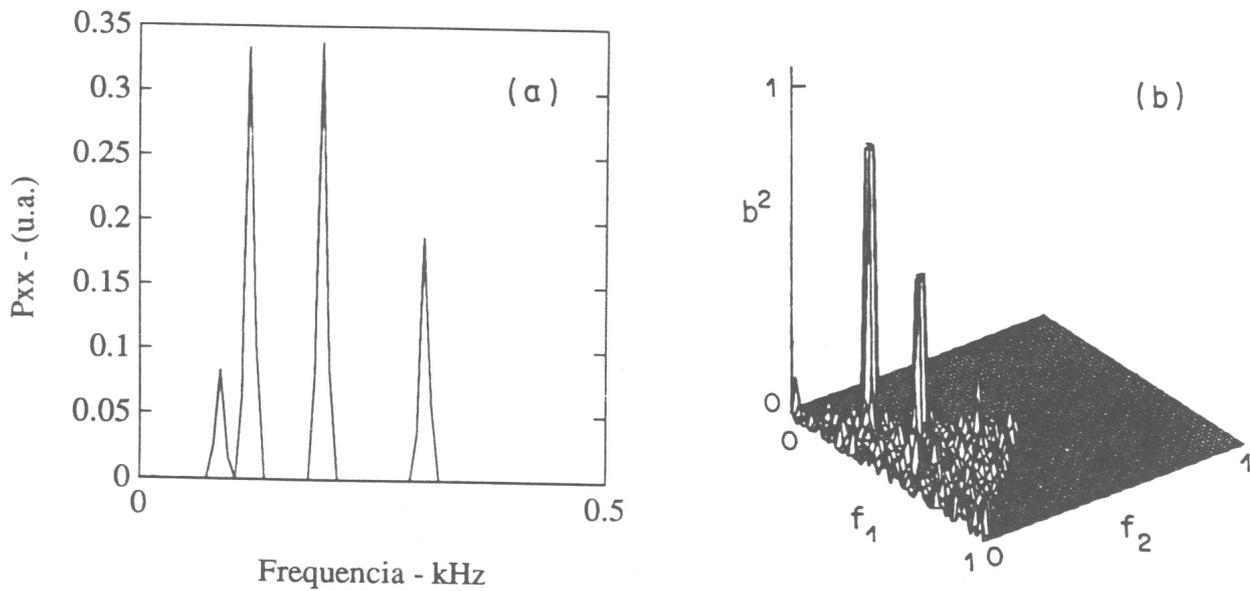


Figura C.4: a) Auto-espectro do sinal C.2. b) Autobicoerência do sinal C.2 (freqüência normalizada pela freqüência de Nyquist).

Bibliografia

- [Bea 82] Beall J.M., Kim Y.C., Powers E.J., “*Estimation of Wavenumber and Frequency Spectra using fixed probe pairs*”, Journal of Applied Physics **53**, 3933 (1982).
- [Bea 83] Beall J.M., “*The local Wavenumber Spectrum and its applications in turbulence and noise*”, Ph. D. Dissertation, The University of Texas at Austin (1983).
- [Be 86] Bender O.W., “*Campos Ressonantes no Tokamak TBR*”, Dissertação de Mestrado, São Paulo, IFUSP (1986).
- [Ca 91] Castro R.M., “*Turbulência Eletrostática no Tokamak TBR-1*”, Dissertação de Mestrado, São Paulo, IFUSP (1991).
- [Ca 93a] Castro R.M., Heller, M.V.A.P. Caldas, I.L. ,da Silva, R.P., Brasílio, Z.A., “*Transport in the Plasma Edge of a Tokamak with high MHD Activity*”, Il Nuovo Cimento **15D**, 983 (1993).
- [Ca 93b] Castro R.M., “*Turbulência Eletrostática e Magnética em Tokamaks*”, Tese de Doutorado em desenvolvimento (IFUSP).
- [Car 91] Carlson A.W., “*Two-point estimates of the Spectral Density Function with finite separation and volume*”, Journal of Applied Physics **70**, 4033 (1991).

- [Ch 65] Chen S.L., Seckiguchi T, “*Instantaneous Direct-Display System of Plasma Parameters by means of a Triple-Probe*”, *Journal of Applied Physics* **36**, 2363 (1965).
- [Che 84] Chen F.F., “*Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*”, 2ª edição, Plenum Press (1984).
- [Fa 87] Fagundes A.N., Cruz D.F., Galvão R.M.O., Elizondo J.I., Nascimento I.C., Sá W.P., Sanada E.K., Silva R.P., Tuszal A.G., Vannucci A., Vuolo J.H., *Proceedings of Energy Independence Conference on Fusion Energy and Plasma Physics*, (Rio de Janeiro, 1987), 13 (1988).
- [Fe 87] Ferreira D.C.J., “*Análise do Espectro de Turbulência no TBR-1*”, *Dissertação de Mestrado*, São Paulo, IFUSP (1987).
- [Fer 88] Fernandes A.S., Heller M.V.A.P., Caldas I.L., “*The Destruction of Magnetic Surfaces by Resonant Helical Windings*”, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **30**, 1203 (1988).
- [Ha 89] Hanning R.W., “*Digital Filters*” Prentice Hall International Editions (1989).
- [He 88] Heller M.V.A.P., Caldas I.L., “*Onset of Chaotic Field Line trajectories in Tokamaks*”, *Il Nuovo Cimento*, **14**, 695 (1988).
- [Hi 68] Hinich M.J., Clay C.S., “*The application of the Discrete Fourier Transform in the estimation of Power Spectra, Coherence and Bispectra of Geophysical Data*”, *Review of Geophysics* **6**, 347 (1968).

- [Jh 93] Jha R, Kaw P.K., Mattoo C.V., Rao S., Saxena Y.C., and ADITYA Team, "*Intermittency in Tokamak Edge Turbulence*", Physical Review Letters **69**, 1375 (1993).
- [Ka 75] Karger F., Wobig H., Corti S., Gernhardt J., Klüber O., Lisitano G., McCormick K., Meisel D., Sesnic S., "*Influence of Resonant Helical Fields on Tokamak Discharges*", Proceedings of 5th International Conference on Plasma Physics and Controlled Fusion Research (Tokio, 1974) 1,207 IAEA (1975).
- [Ki 79] Kim Y.C., Powers E.J., "*Digital Bispectral analysis and its applications to Nonlinear Wave Interactions*", IEEE Trans. on Plasma Science, **7**, 120 (1979).
- [Ki 80] Kim Y.C., Beall J.M., Powers E.J., Miksad R.W., "*Bispectrum and Nonlinear Wave Coupling*", Physics of Fluids **23**, 258 (1980).
- [Le 84] Levinson S.T., Beall J.M., Powers E.J., Bengtson R.D., "*Space-Time statistics of the Turbulence in a Tokamak Edge Plasma*", Nuclear Fusion **24**, 527 (1984).
- [Li 85] Liewer P.C., "*Measurements of Microturbulence in Tokamaks and comparisons with Theories and Anomalous Transport*", Nuclear Fusion **25**,543 (1985).
- [Na 81] Nascimento I.C., Fagundes A.N., da Silva R.P., Galvão R.M.O., del Bosco E., Vuolo J.H., Sanada E.K., Dallacqua R., "*Preliminary Results of the TBR Small Tokamak*", Proceedings of Spring College on Fusion Energy (Trieste,1980) ICTP-IAEA, 45 (1981).

- [Op 75] Oppenheim A.V., Schafer R., *“Digital Signal Processing”*, Prentice Hall, New Jersey (1975).
- [Po 90] Powers E.J., *“Polyspectral Analysis and its Applications”*, Report, The University of Texas at Austin (1990).
- [Pr 88] Proakis J.G., Manolakis P.G., *“Introduction to Digital Signal Processing”*, New York, Macmillan Publishing Co. (1988).
- [Rib 90] Ribeiro C., Silva R.P., Caldas I.L., TBR-1 team, *“Influence of the Helical Resonant Fields on the Plasma Edge of TBR-1”*, Proceedings of the 17th EPS Conference on Controlled Fusion and Plasma Heating (Amsterdam, 1990), 675 (1990).
- [Ri 86] Ritz Ch.P, Powers E.J., *“Estimation of Nonlinear Transfer Functions for fully developed Turbulence”*, Physica **20D**, 320 (1986).
- [Ri 88] Ritz Ch.P., Powers E.J., Rhodes T.L., Bengtson R.D., Gentle K.W., Lin H., Philips P.E., Wootton A.J., Brower D.L., Luhmann N.C., Peebles W.A., Schoch P.M., Hickok R.L., *“Advanced Plasma fluctuation analysis technique and their impact on Fusion Research”* Review of Scientific Instruments **50**, 1739 (1988).
- [Ri 89] Ritz Ch. P., et al, *“Fluctuation Induced Energy Flux in the Tokamak Edge”*, Physical Review Letters, **62**, 1844 (1989).
- [Ro 86] Robinson D.C., Proceedings of the International Workshop on Small Scale Turbulence and Tokamaks Transport in Magnetized Plasmas, (Cargese, France 1986), Editions de Physique, 21 (Cargese,1986).

- [Sá 87] Sá W.P. de, “*Medida de Turbulência na periferia do TBR-1*”, Dissertação de Mestrado, São Paulo, IFUSP (1987).
- [Si 89a] da Silva R.P., “*Transporte de Partículas e Energia no Plasma do Tokamak TBR-1: Diagnóstico e Estudo Experimental*”, Tese de Doutorado, IFUSP (1989).
- [Si 89b] da Silva R.P., Nascimento I.C., “*Transport Parameters in the Plasma edge region of a small Tokamak*”, Proceedings of International Conference on Plasma Physics, (New Delhi,1989) I-53 (1989)
- [Sm 74] Smith D.E., Powers E.J., Caldwell G., “*Fast Fourier-Transform Spectral Analysis Techniques as a Plasma Fluctuation Diagnostic Tool*”, IEEE - Transactions on Plasma Science **2**, 261 (1974).
- [St 84] Stangeby P.C., “*Plasma Sheath Transmission Factors for Tokamak Edge Plasmas*”, Physics of Fluids, **27**, 682 (1984).
- [Th 91] Thomas F.O., Chu H.C., “*Experimental investigation of the nonlinear spectral dynamics of planar jet transition*”, Physics of Fluids A **3**, 1544 (1991).
- [Ts 93a] Tsui H.Y.W., Schoch P.M., Wootton A.J., “*Observation of a quasicohherent mode in the Texas Experimental Tokamak*”, Physics of Fluids B **5**, 1275 (1993).
- [Ts 93b] Tsui H.Y.W., Rypdal K., Ritz Ch. P., Wootton A.J., “*Coherent Nonlinear coupling between a Long-wavelength Mode and Small-Scale Turbulence in the TEXT Tokamak*”, Physical Review Letters **70**, 2565 (1993).

[Wo 90] Wootton A.J., "*Edge Turbulence*", The University of Texas at Austin, Report FRCR # 371 (1990).