4300417 Fenômenos Não-Lineares: Introducção ao Caos Determinístico

2° Lista 2012

1) Considere o sistema cuja evolução é descrita por dois ângulos $\theta(t)$ e $\varphi(t)$. O mapa de Poincaré desse sistema é dado pelo mapa bidimensional:

$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega_1$

$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega_2$

Quais os valores da razão Ω_1/Ω_2 para que o sistema seja periódico (a) ou quase-periódico (b)?

2) Considere o mapa do triângulo

$u_{n+1} = 2\beta u_n \quad para \quad 0 \le u \le 0{,}5$

$u_{n+1} = 2\beta(1 - u_n) \quad para \quad 0{,}5 < u < 1$

$sendo \quad 0 < \beta < 1$

a) Determine os pontos fixos desse mapa e a estabilidade deles.

b) Determine o expoente de Lyapunov dese mapa.

3) Considere o mapa circular

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega + (K/2\pi)\,\mathrm{sen}(2\pi\theta_n) \;,\quad (\mathrm{mod}\ 1)\;, \qquad -1 < \theta_n < 1$$

onde Ω e K são os parâmetros de controle. Nesta questão $\Omega = 0{,}4$.

Para K=0 e $\theta_0 = 0$,

a) Represente esses pontos em um circulo, indicando os ângulos $\alpha_n = 2\pi\theta_n$, e calcule o número de rotação W (isto é, o valor médio de $< \theta_{n+1} - \theta_n >$) para essa trajetória.

b) Esse resultado depende de θ_0?, ou do número de iterações N usados para o cálculo de W? Justifique.

Para K=0,8 e $\theta_0 = 0$, considere uma trajetória periódica (percorrendo um atrator periódico, após o transiente) com o número de rotação $W_a = 0{,}5$.

c) Explique como você poderia obter numéricamente esse número de rotação W_a, se fosse dada a série de valores θ_n (n = 0, 1, 2, 3…).

Para K=1,2 e $\theta_0 = 0$, considere uma trajetória caótica (percorrendo o atrator caótico).

d) Você poderia obter numéricamente, para essa trajetória caótica, o número de rotação W, se fosse dada a série de valores θ_n (n = 0, 1, 2, 3…)? Justifique.

4) Considere o mapa

$$F_{n+1} = -b + F_n + F_n^2$$

com o parâmetro b em torno de 0, isto é, $b \approx 0$.

a) Mostre que, para valores positivos de b, $P_1 = -b^{1/2}$ e $P_2 = b^{1/2}$ são pontos fixos desse mapa.

b) Mostre que P_1 é um ponto estável e P_2 um ponto instável.

c) Para b positivo e negativo, faça esboços dos mapas de retorno F_{n+1} x F_n. Represente, nesse mapa, uma sequência intermitente F_n, observada no caso de $b < 0$.

5) Considere o mapa

$$F_{n+1} = - F_n (1 + \varepsilon) + a F_n^2 + b F_n^3$$

com o parâmetro ε em torno de 0, isto é, $\varepsilon \approx 0$, e $a << b$.

a) Mostre que $F = 0$ é o único ponto fixo desse mapa.

b) Obtenha, aproximadamente, o mapa

$$F_{n+1} = (1 + 2 \varepsilon) F_n + b' F_n^3$$

com $b' = -2 (a^2 + b^2)$.

c) Para $b' < 0$ e $\varepsilon > 0$, obtenha os pontos fixos do mapa anterior, $F_{n+2} = (F_n , \varepsilon)$, e mostre que eles são estáveis.

d) Para $b' > 0$ (com $\varepsilon \approx 0$, e $\varepsilon > 0$ ou $\varepsilon < 0$) , obtenha os pontos fixos do mapa anterior, $F_{n+2} = (F_n , \varepsilon)$, e discuta a sua estabilidade.

e) Discuta a intermitência da Fig. 22 do livro texto (Fiedler-Ferrara e Cintra do Prado).