UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física

TRANSPORTE EM SISTEMAS HAMILTONIANOS NÃO-TWIST

CELSO VIEIRA ABUD

Orientador Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Tese de doutorado apresentada
ao Instituto de Física para a
obtenção do título de
Doutor em Ciências

São Paulo (SP)
2013

Aos meus pais

Agradecimentos

Primeiramente, à minha família.

Aos meus professores da Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho (UNESP) de Rio Claro de onde tenho muito orgulho de ter realizado minha graduação e o meu mestrado. Em especial ao Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho, principal responsável pela início da minha vida acadêmica.

Ao meu orientador Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas por ter acreditado no meu potencial e, principalmente, pelo apoio dispensado durante todo o doutorado.

Aos meus colegas de sala.

Por fim, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP (processo número 2010/00740-6), pelo apoio financeiro.

"O que importa não é o homem que critica ou aquele que aponta como o bravo tropeçou...
Importante, em verdade, é o homem que está na arena,
com a face coberta de poeira, suor e sangue;
que luta com bravura, erra e, seguidamente, tenta atingir o alvo.
É aquele que, no sucesso, melhor conhece o triunfo final dos grandes feitos e que, se fracassa, pelo menos falha com ousadia, de modo que o seu lugar jamais será entre as almas tímidas, que não conhecem nem a vitória, nem a derrota."

Theodore Roosevelt (1858 - 1919)

Resumo

O tema desta tese é a propriedade não - *twist* em sistemas hamiltonianos. Sistemas com essa propriedade violam a condição *twist* ao longo de uma curva sem *shear* e, consequentemente, sua topologia não é descrita pelos cenários típicos previstos pelos teoremas KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) e Poincaré-Birkhoff. A curva sem *shear* é identificada pelo valor de máximo ou mínimo no perfil espacial do número de rotação do sistema. Além disso, próximo à curva sem *shear* podemos observar algumas bifurcações atípicas como: colisões de órbitas periódicas e reconexão de separatrizes. As características dos sistemas não - *twist* são bem particulares, mas nós demonstramos que seus cenários podem ser encontrados, localmente, em sistemas hamiltonianos genéricos, devido ao nascimento de uma curva sem *shear* no interior de ilhas regulares. Inicialmente, nossas investigações numéricas constataram que esse fenômeno pode surgir não somente para a concomitante bifurcação de período - 3 do ponto elíptico, mas também para outras bifurcações, tais como período - 4 e período - 5. Posteriormente, consideramos um modelo que descreve o comportamento das linhas de campos magnéticos em tokamaks com limitadores ergódicos. Nesse caso, o modelo utilizado é um mapa simplético parametrizado a partir das características físicas de um tokamak de grande razão de aspecto. Para esse sistema, estudamos os efeitos no transporte causados pelas bifurcações oriundas da presença da curva sem shear secundária e, também, pelas modificações do perfil rotacional das linhas de campo.

Palavras chave: Sistemas hamiltonianos, topologia não-*twist*, mapas simpléticos, transporte.

Abstract

The topic of this Thesis is the nontwist property in hamiltonian systems. Systems with such property violate the twist condition along the shearless curve and, therefore, its topology is not described for typical scenarios provided by KAM (Kolmogorov- Arnold -Moser) and Poincaré – Birkhoff theorems. The shearless curve is identified by the maximum or minimum values of the spatial rotation number profile of the system. Moreover, close to the shearless curve we observe some atypical bifurcations as periodic orbits collisions and separatrix reconnection. The features of nontwist systems are very particular, but we have shown that its scenarios can be found locally in generic hamiltonian systems, due to the onset of a secondary shearless curve within regular islands. Initially, our numerical investigations have found that this phenomenon may arise not only for the concomitant period - 3 bifurcation of the elliptic point, but also for others bifurcations such as period - 4 and period - 5. Subsequently, we considered a model that describes magnetic field lines in tokamaks with ergodic limiters. In this case, the model is a symplectic map parameterized from the physical characteristics of a large aspect ratio tokamaks. For this system, we studied the effects on the transport caused by the presence of secondary shearless torus and also by changing the field lines rotational profile.

Keywords: Hamiltonian systems, nontwist topology, symplectic maps, transport.

Lista de siglas e variáveis

KAM - Kolmogorov - Arnold - Moser. Usada para se referir ao teorema provado pelos mesmos no problema da convergência de uma série perturbativa com pequenos denominadores.

MPT - Mapa padrão *twist*

MPNT - Mapa padrão não-*twist*

MTU - Mapa *twist* de Ullmann

MNTU - Mapa não-*twist* de Ullmann

FE - Fração de escape

ω - número de rotação global.
ω_{in} - número de rotação interno.
Γ - tempo de recorrência para o teorema de Slater.
$\rho_{esc}(\tau)$ - Fração de escape para tempos $T > \tau$.
γ - expoente para a fração de escape.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Muitos problemas relevantes para a Física são tratados pelos chamados sistemas hamiltonianos. Um sistema hamiltoniano é descrito em termos da posição e do momento de forma que o fluxo de trajetórias preserva sempre o volume no espaço de fases (sistema conservativo). A vantagem de uma descrição hamiltoniana está ligada ao fato dela fornecer uma percepção sobre a dinâmica do sistema [Ott02, dA88]. Logo, os sistemas hamiltonianos são usados para estudar diversos sistemas dinâmicos como órbitas de objetos astronômicos (planetas, asteróides, cometas e galáxias) em mecânica celeste, fluidos incompreensíveis e linhas de campo magnético em mecanismos de confinamento de plasmas.

Até meados do século XIX não havia consenso de que o determinismo hamiltoniano não era condição suficiente para garantir a previsibilidade, ou seja, acreditava-se que sistemas hamiltonianos podiam apresentar apenas movimentos regulares (periódicos ou quase-periódicos). Foi apenas no final do século XIX, que o físico e matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) apontou a existência de movimentos irregulares. Em suma, Poincaré dedicou-se ao problema (restrito) de três corpos [Poi92] e concluiu que a evolução do sistema era irregular (caótico na linguagem atual) no sentido que pequenas perturbações no estado inicial do sistema levava a uma mudança diferente do estado final (sensibilidade às condições iniciais). Poincaré chamou o estudo de pequenas perturbações em um sistema integrável de problema fundamental da mecânica (sistemas quase-integráveis).

Um grande progresso para o problema levantado por Poincaré deu-se somente na metade do século XX quando, em 1954, **K**olmogorov foi capaz de mostrar que a maioria das trajetórias quase-periódicas eram preservadas mesmo sob pequenas perturbações, ou seja, eram destruídos apenas as órbitas ressonantes e suas vizinhanças. Uma década depois, **A**rnold e **M**oser desenvolveram, de maneira independente, uma prova formal do resultado de Kolmogorov, resultando no conhecido teorema **KAM**.

Entre os anos de 1960 e 1970, impulsionado pelo início das simulações em computadores, foi que o movimento caótico começou a ser desvendado [HH64, WF69], apesar de um certo ceticismo dos pesquisadores da época. Veja, por exemplo, o comentário de M. Hénon a respeito de um de seus trabalhos pioneiros sobre o movimento caótico de 1964 em parceria com C. Heiles:

> *In some cases the star orbits were quite regular, in the usual way, but in other cases they behaved wildly, jumping here and there in an apparently random fashion. These results were hard to believe; the people who saw them, including us, were skeptical and wondered about a possible bug in the program. So we redid the computations, independently, using another programmer (me), another program, another integration algorithm, and another computer. The same results emerged!.*[1]

O teorema **KAM**, ao menos qualitativamente, dava sentido aos resultados sobre a inesperada mistura entre os movimentos regulares e caóticos no espaço de fases. Assim, o movimento caótico foi se consolidando como uma propriedade geral de sistemas dinâmicos não-lineares e até certo ponto, podemos afirmar que o estudo e a compreensão sobre a dinâmica caótica se expandiu a medida em que novas tecnologias computacionais eram introduzidas. Esta ligação com as simulações realizadas em computadores, ocorre em parte porque o estudo sobre caos em sistemas hamiltonianos lida, por vezes, com equações diferenciais não-lineares cuja solução é não integrável, fazendo com que o uso de métodos numéricos torne-se indispensável. Outras vezes, podemos aproximar os sistemas hamiltonianos por mapas discretos (iterativos), formando um sistema mais fácil e rápido sobre o ponto de vista computacional.

A ideia que sistemas hamiltonianos com dois graus de liberdade podem ser representados por mapas que preservem a área foi introduzida, também, por Poincaré. A descrição por mapeamento discretos mantém, basicamente, todas as propriedades do sistema hamiltoniano correspondente e, portanto, nesse novo sistema valem também os teoremas que descrevem o comportamento das órbitas no espaço de fases, como por exemplo o teorema **KAM** e o teorema de Poincaré-Birkhoff, o qual recorre-se para demonstrar que as órbitas ressonantes que sobrevivem às perturbações tornam-se um número par de órbitas (metade estáveis e metade instáveis), formando uma cadeia de ilhas regulares. Nesse sentido, a principal hipótese levantada por esses teoremas em sistemas hamiltonianos é a não-degenerecência das frequências, isto é, a frequência de rotação dos toros deve variar de forma monotônica a medida que mudamos de toro. A não-degenerecência das frequências é chamada condição *twist* e é determinante na classificação dos mapas, sendo que: se um mapa possui órbitas cujo número de rotação aumenta ou diminui monotonicamente, então, esse mapa é chamado *twist*, ao contrário, quando a condição *twist* não é verificada, ele é denominado mapa não-*twist*.

[1] Em alguns casos, as órbitas estelares eram bastante regular, da maneira usual, mas em outros casos, se comportaram descontroladamente, saltando aqui e ali em um movimento aparentemente aleatório. Estes resultados eram difíceis de acreditar, as pessoas que os viam, inclusive nós, estavam céticos e questionavam sobre um possível bug no programa. Então, nós re-fizemos os cálculos, de forma independente, usando outro programador (eu), outra programa, um outro algorítmo de integração, e um outro computador. Os mesmos resultados surgiram!.

Os cenários formado no espaços de fases de sistemas *twist* e não-*twist* são diferentes. Particularmente, os mapas não-*twist* apresentam fenômenos atípicos isto é, diferente do cenário descrito pelo teorema KAM e de Poincaré-Birkhoff para mapas *twist*. Entre outras peculiaridades observadas no espaço de fases de sistemas ou mapas não-*twist* temos: colisão de órbitas periódicas e reconexão de separatrizes que são fenômenos de bifurcação que acontecem devido à existência de uma curva sem *shear* (cisalhamento). A curva sem *shear* é um toro invariante de gradiente de rotação nulo e muito robusto, no sentido em que é a última curva invariante a se quebrar antes da transição para o caos global [dCNGM96].

Muitos sistemas físicos exibem fenômenos não-*twist*, como por exemplo, a dinâmica de fluidos [dCNM93], órbitas planetárias [Kyn68] e as linhas de campo magnéticos em tokamaks com corrente não monotônica [Bal98, HPK+98]. Além da importância física, os sistemas não-*twist* possuem importância matemática devido, justamente, ao fato de apresentarem degenerecência nas frequências, o que exclui a aplicabilidade de vários teoremas. Na literatura atual, temos poucos resultados matemáticos a respeito de casos cuja condição *twist* não é satisfeita [DdlL00, AdlLP05]. Um estudo recente [DMS99], baseado em resultados anteriores [dWW88, Moe90], indicou a possibilidade de que a condição *twist* possa ser violada localmente, independente do sistema. Isso significa dizer que sistemas *twist* podem apresentar, ao menos em certas regiões do espaço de fases, a topologia dos sistemas não-*twist*, delimitando um regime (condição de parâmetros) e um local do espaço de fases onde os teoremas fundamentais não são válidos. Em resumo, Dulling et. al. [DMS99], através de um estudo sobre as formas normais ao redor de um ponto elíptico (forma normal de Birkhoff), mostrou que um toro sem *twist* emerge no sistema através de uma bifurcação atípica. Esse mesmo toro colide com uma bifurcação centro-sela dando origem a uma órbita de período - 3.

A aplicação das formas normais com o intuito de identificar toros sem *shear* pode ser bem complicado, dependendo do sistema ou mapa estudado. A fim de superar esse obstáculo, é interessante introduzir um procedimento numérico para identificar os toros sem *shear* que, em determinadas situações, podem surgir ao redor do ponto elíptico. Nesta tese, nós estudamos um procedimento numérico baseado na variação do perfil espacial do número de rotação interno de uma ilha regular, ou seja, a medida da rotação dos toros invariantes com relação ao centro elíptico de uma determinada ilha regular. Com o intuito de verificar o nascimento secundário de toros sem *shear* em sistemas hamiltonianos, nossa metodologia de estudo nos permitiu identificar não somente os toros sem *shear* relacionados às órbitas de período - 3, mas também um novo cenário para órbitas de período - 4. Primeiramente (ver capítulo 4), nós aplicamos o procedimento do número de rotação interno para algumas ilhas regulares do mapa padrão não-*twist* e *twist* (seções 4.2 e 4.3, respectivamente). Em seguida, discutimos sobre a presença de bifurcações do tipo não-*twist* para ordem maiores. Aparentemente, as bifurcações de ordem superiores à quatro, que surgem a partir de um toro secundário não *twist*, deve-se à quantidade de parâmetros ajustáveis do sistema (ver referência [DMS99] e a seção 4.4).

Por fim, uma vez determinada a fenomenologia não-*twist* local em sistemas hamiltonianos gerais, o método foi aplicado em um modelo utilizado para descrever linhas de campos magnéticos em tokamaks com limitadores ergódicos (capítulo 5). Essa é a nossa principal aplicação para os estudos teóricos e numéricos desenvolvidos pelos capítulos iniciais. Nossa motivação foi estudar os fenômenos não-*twist* relacionados aos perfis espaciais dos campos elétrico e magnético na borda de um plasma confinado por câmaras toroidais chamadas tokamaks [Boo04, Mor98]. O confinamento magnético de plasmas em tokamaks é estudado para verificar a possibilidade de se construir reatores de fusão termonuclear controlada para gerar energia elétrica [HP02]. Recentemente, este projeto recebeu um grande impulso com o início da construção, por um consórcio de países, do tokamak ITER, em Cadarache (França). No entanto, para o sucesso do experimento, é necessário superar algumas dificuldades que limitam o confinamento do plasma, entre os quais está a instabilidade do plasma e o transporte anômalo de partículas que saem do plasma confinado e se dirigem para a parede do tokamak.

Muitas experiências realizadas recentemente [JAF04, JSA+06, EMW+04] confirmam que este transporte anômalo depende das configurações dos campos elétrico e magnético na borda do plasma que ocorre devido às trajetórias caóticas das partículas. A configuração do campo elétrico na borda influencia o transporte anômalo de partículas também na borda do plasma, por modificar as ondas eletrostáticas turbulentas de frequências baixas, conhecidas como ondas de deriva [Hor99]. Conforme observado em vários tokamaks, as derivas determinam o movimento caótico das partículas do plasma e, consequentemente, o transporte radial delas para fora do plasma.

Por outro lado, a configuração do campo magnético total na borda do plasma, resultante do campo de equilíbrio, mais as oscilações naturais provocadas por correntes elétricas externas, também alteram a trajetória das partículas do plasma e, portanto, a interação entre o plasma e a parede interna do vaso toroidal do tokamak [CVA+02]. Umas das principais consequências de uma configuração inadequada é o acúmulo de colisões de partículas em certos locais na parede, que aquecem o vaso e liberam íons pesados que contaminam o plasma e degradam o seu confinamento.

Particularmente, estamos interessados nos efeitos dos perfis espaciais dos campos elétrico e magnético, sobre o transporte de partículas na borda do plasma confinado em tokamaks. É nesse domínio que valem os modelos de sistemas dinâmicos hamiltonianos, que têm sido propostos para descrever as linhas de campos no plasma e que serão utilizados nesta tese com o ajuste de perfis radiais monotônicos (*twist*) e também não-monotônicos (não-*twist*) com a finalidade de se estudar o escape de trajetórias devido a um espaço de fases onde se contrastam o movimento caótico e regular. O modelo discutido no capítulo 5 e detalhada no apêndice A descreve as interseções das linhas de campo magnético com uma seção poloidal do tokamak, cujas perturbações são criadas por um limitador magnético, usado para controlar as flutuações do campo magnético na borda do plasma. Neste modelo verificamos que a simples presença de curvas sem *shear* secundárias em ilhas ressonantes no espaço de fases não alteram o transporte de trajetórias (linhas de campo) de maneira notória. Contudo, no limite em que a curva sem *shear* toca o mar de caos, dá-se início a quebra dessa curva, conduzindo a componente caótica a experimentar efeitos de aprisionamentos alterando o escape usual das linhas de campos magnéticas em direção à parede do tokamak (5.2.2). Para finalizar, nós adotamos perfis radiais de equilíbrio modificados de tal maneira que, a criação de barreiras de transporte fosse induzida. Tais barreiras constituem-se, de maneira geral, por curvas invariantes resistêntes a perturbações e que agem como um limitante ao transporte global pelo espaço de fases (5.3).

Sobre esta tese

Esta presente tese de doutoramento é resultado de estudos realizados no Instituto de Física da Universidade de São Paulo (USP) durante o período de Março de 2010 a Agosto de 2013 sob orientação do Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas e apoio das agências de fomento CAPES e FAPESP (2010/00740-6). Parte dos resultados obtidos estão publicados em revistas especializadas [AC12, CVA+12] e serão mencionados nas respectivas seções desta tese.

Os resultados apresentados são, essencialmente, numéricos, mas sempre pautados por uma teoria bem definida na literatura e discutida no decorrer do texto.

A divisão dos capítulos segue a seguinte ordem. No capítulo 2, nós apresentamos um resumo sobre sistemas hamiltonianos e os principais teoremas que regem a dinâmica de sistemas *twist*. O capítulo 3 apresenta o mapa padrão não-*twist* como protótipo para estudarmos os fenômenos que ocorrem no espaço de fases devido à degenerecência do perfil do número de rotação. No capítulo 4, um método numérico, para o estudo do número de rotação de regiões regulares locais, é apresentado e aplicado a três sistemas dinâmicos distintos. O capítulo 5 descreve um mapeamento simplético para as linhas de campo magnéticos em um tokamak. As bifurcações ditas não *twist* são encontradas e estudadas no contexto do transporte de trajetórias. Um estudo sobre o transporte, também foi realizado ao considerarmos diferentes perfis de rotação no modelo. As conclusões e uma lista de questões em aberto estão apresentadas no capítulo 6. Os detalhes para a obtenção de um mapa simplético, que descreve as linhas de campo em um tokamak com limitadores ergódicos, estão no apêndice A.

Capítulo 2

Notas sobre sistemas hamiltonianos

Os resultados fundamentais sobre sistemas hamiltonianos, necessários ao nosso projeto, estão revisados neste capítulo. Iniciamos na seção 2.1 apresentando o formalismo para os sistemas hamiltonianos integráveis. O problema de uma hamiltoniana quase - integrável é discutido na seção 2.2 bem como os teoremas fundamentais KAM e de Poincaré-Birkhoff. As estruturas que compõem o espaço de fases são apresentados na seção 2.3 e suas propriedades dinâmicas na seção 2.4.

2.1 Sistemas hamiltonianos integráveis

Sistemas hamiltonianos são aqueles descritos por uma função escalar $H(p, q, t)$, denominada *hamiltoniana*, cujo par de variáveis canônicas (q_i, p_i) de N graus de liberdade, define um espaço de fases. A dinâmica do sistema é determinada pelas soluções das equações de Hamilton,

$$\dot{p}_i = -\partial H/\partial q; \quad \dot{q}_i = \partial H/\partial p. \tag{2.1}$$

O formalismo hamiltoniano é muito útil pois, entre outras coisas, repassa N equações diferenciais de segunda ordem para $2N$ equações de primeira ordem. Além disso, por uma mudança de variáveis, é possível escrever as equações de Hamilton de forma mais adequada para se obter suas soluções. Para tanto, busca-se uma transformação canônica, $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$ de coordenadas que preservem as equações de Hamilton. Uma maneira de se obter as transformações canônicas é através de uma função geratriz que pode ser:

$$S_1(q, Q, t); \quad S_2(q, P, t); \quad S_3(p, Q, t); \quad S_4(p, P, t), \tag{2.2}$$

para gerar uma nova hamiltoniana,

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \partial S/\partial t. \tag{2.3}$$

Uma transformação muito conhecida e que, por vezes, deixa a solução de um problema pela formulação hamiltoniana mais simples, são as transformações para coordenadas de ação-ângulo $(Q,P) = (I,\phi)$. A principal vantagem de se obter variáveis ação-ângulo é que a nova hamiltoniana K passa a depender apenas da ação I, $K = K(I)$, tornando o processo de integração trivial, pois das equações de Hamilton (2.1) segue que

$$\dot{\phi} = \frac{\partial K}{\partial I} = \omega = constante; \quad \dot{I} = -\frac{\partial K}{\partial \phi} = 0, \tag{2.4}$$

com soluções: $I = I_0$ e $\phi = \phi_0 + \omega t$, onde I_0 e ϕ_0 são as condições iniciais do problema.

Para N graus de liberdade a função hamiltoniana torna-se $K = K(I_1, ..., I_N)$, cujas soluções para as equações de Hamilton (2.4), definem N constantes de movimento I_N.

Constante de movimento: Uma função $G(q,p,t)$ é uma constante (invariante) de movimento se:

$$\frac{dG}{dt} = 0 = \frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial p} = \{G,H\} + \frac{\partial G}{\partial t},$$

onde $\{\}$ definem os colchetes de Poisson. Quando H não depende do tempo, G é dita constante de movimento se $\{G,H\}$=0. Uma consequência direta da existência de invariantes de movimento é a redução da dimensão da dinâmica do sistema, ou seja, se existem M invariantes, o movimento da dinâmica ocorre em $(2N - M)$ dimensões.

Uma questão surge neste momento; qualquer problema tratado pelo formalismo hamiltoniano pode ser reduzido a uma transformação canônica nas coordenadas ação-ângulo? Ou seja, é sempre possível reduzir uma hamiltoniana a um sistema integrável? Infelizmente não, e na verdade, sistemas integráveis são raros. Mas, para que o sistema seja integrável o teorema de Arnold-Liouville diz que:

Sistemas integráveis (teorema de Arnold-Liouville): Se há um sistema com N constantes de movimentos independentes uma das outras de forma que sejam involuções, ou seja, $\{G_i, G_j\} = 0$ então isso implica na existência de variáveis de ângulo-ação e portanto, o sistema é integrável.

2.1.1 Mapa de Poincaré

Sistemas com mais de dois graus de liberdade podem ser bastante difíceis de se tratar devido à dimensão do espaço de fases. No entanto, esses sistemas são de grande interesse físico agregado ao fato da possibilidade de apresentarem movimentos caóticos. A chamada seção de Poincaré consiste em uma hipersuperfície Ω transversal ao fluxo de trajetórias definidas em um espaço de fases. Dessa forma um sistema com N dimensões pode ser representado por um espaço de $N-1$ dimensões.

Suponhamos, por exemplo, um sistema hamiltoniano dependente do tempo de dimensão N, ou seja, $H(q,p,t) = H(q_1,...,q_N,p_1,...,p_N,t)$. Como temos N momentos e N posições, a dinâmica desse sistema é representada em um espaço de fases de $2N$ dimensões. No entanto, a aplicação de uma seção de Poincaré reduz o sistema para $2N-1$ dimensões. Dado um cruzamento inicial P_k com a superfície de Poincaré Ω, a evolução dessa trajetória passará consecutivas vezes pela mesma seção definindo pontos discretos. A dinâmica discreta que relaciona o ponto P_k com o próximo cruzamento P_{k+1} é chamado mapa de Poincaré.

$$P_{k+1} = \mathbf{T}P_k. \tag{2.5}$$

Caso a dinâmica desenvolvida pelo conjunto de pontos seja quase-periódica, ela será representada na seção de Poincaré por uma curva ou toro invariante, enquanto a dinâmica caótica é definida por pontos densamente distribuídos.

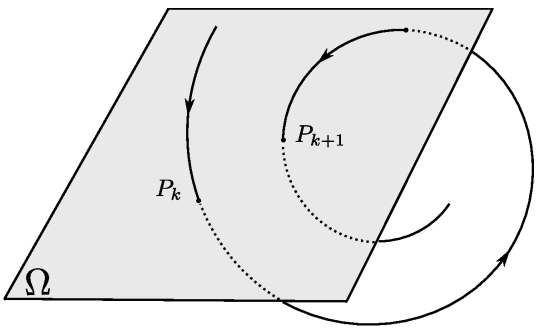


Figura 2.1: Esboço de uma seção de Poincaré Ω que intersepta uma trajetória gerando, assim, o mapa de Poincaré.

2.1.2 Mapas simpléticos

Sistemas hamiltonianos são, essencialmente, simpléticos[1], o que significa que não somente o volume do espaço de fases é preservado (Teorema de Liouville) como também áreas infinitesimais. Um mapa $\mathbf{T}$ será simplético se este satisfazer a *condição simplética* [Ott02]:

[1]A palavra simplético vem da palavra grega *sumplektikos*, que significa entrelaçado.

$$\mathbf{S}_N = \left(\frac{\partial \mathbf{T}_N}{\partial x}\right)^{\dagger} \cdot \mathbf{S}_N \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{T}_N}{\partial x}\right) \tag{2.6}$$

onde$\left(\frac{\partial \mathbf{T}_N}{\partial x}\right)$ é a matriz jacobiana, $\dagger$ significa a transposição e $\mathbf{S}_N$ é a matriz simplética definida por:

$$\mathbf{S}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_N & -\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{0}_N \end{bmatrix}$$

composta por matrizes nulas $\mathbf{0}_N$ e matrizes identidade $\mathbf{I}_N$ de ordem N.

2.2 Sistemas quase-integráveis e o teorema KAM

Considere uma função hamiltoniana,

$$H(I,\phi) = H_0(I) + \epsilon H_1(I,\phi), \tag{2.7}$$

formada pela soma entre a hamiltoniana H_0 de um sistema integrável e o termo perturbativo H_1. As variáveis (I,ϕ) são, respectivamente, a ação e o ângulo do sistema não perturbado H_0. Se, $\epsilon = 0$, o sistema é integrável e as soluções da hamiltoniana (2.7) definem trajetórias dadas por: $I = I_0$ e $\phi = \phi_0 + \omega t$ onde ω é a frequência natural, $\omega = \partial H_0/\partial I$. No entanto, sistemas integráveis com mais de um grau de liberdade são raros e a menor perturbação pode destruir as constantes de movimento tornando-o não integrável. O estudo do efeito de pequenas perturbações sobre um sistema hamiltoniano foi chamado de *problema fundamental da mecânica* por Henri Poincaré [Poi92] que a princípio concluiu que se todas as constantes de movimento fossem destruídas, restaria somente $H = Energia$. Porém, apesar da conclusão correta de Poincaré, essa foi apenas a introdução para o desenvolvimento de uma solução mais ampla que comentaremos a seguir.

Para desenvolver uma solução para a hamiltoniana (2.7), buscamos uma transformação canônica $(I,\phi) \to (J,\theta)$ de forma que a nova hamiltoniana K seja função apenas das novas variáveis de ação. A função geratriz desta transformação é dada por:

$$S(J,\theta) = J.\theta + \epsilon S_1(J,\theta) + O(\epsilon^2). \tag{2.8}$$

Com aproximação de primeira ordem, as coordenadas originais são:

$$I(J,\theta) = \frac{\partial S(J,\theta)}{\partial \theta} = J + \epsilon \frac{\partial S_1(J,\theta)}{\partial \theta} + O(\epsilon^2) \tag{2.9}$$

$$\phi(J,\theta) = \frac{\partial S(J,\theta)}{\partial J} = \theta - \epsilon \frac{\partial S_1(J,\theta)}{\partial J} + O(\epsilon^2). \tag{2.10}$$

Substituindo na hamiltoniana (2.7), obtemos a nova hamiltoniana $K(J,\theta)$

$$\begin{aligned} K(J,\theta) &= H_0(I(J,\theta)) + \epsilon H_1(I(J,\theta), \phi(J,\theta)) \\ &= H_0(J) + \epsilon \left[\frac{\partial H_0}{\partial J} \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + H_1(J,\theta) \right] + O(\epsilon^2) \\ &= H_0(J) + \epsilon \left[\omega . \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + H_1(J,\theta) \right] + O(\epsilon^2) \\ &= K_0(J) + \epsilon K_1(J) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Como esperamos que $K = K(J)$ temos que determinar S_1 de forma que $K_1 = K_1(J)$. Geralmente, assume-se que K_1 e H_1 são expansíveis em uma múltipla série de Fourier:

$$S_1(J,\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_{1m}(J) e^{im\theta} \tag{2.12}$$

$$H_1(J,\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{1m}(J) e^{im\theta}. \tag{2.13}$$

Então, K_1 torna-se,

$$K_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [im\omega S_{1m} + H_{1m}] e^{im\theta}. \tag{2.14}$$

Para um caso não-ressonante a escolha

$$S_1 = \sum_{m \neq 0} i \frac{H_{1m}(J)}{m \cdot \omega}, \tag{2.15}$$

seria excelente, caso cancelasse todos os termos de K_1, exceto o termo para $m = 0$ de H_{1m}, e portanto, teríamos em primeira ordem de ϵ:

$$K_1(J) = H_{10} = \langle H_1 \rangle, \tag{2.16}$$

o que resultaria em uma nova hamiltoniana K dependente somente da ação: $K(J) = H_0(J) + \epsilon\langle H_1\rangle$.

No entanto, a convergência da série (2.15) depende significativamente de seu denominador. Por exemplo, se considerarmos o caso de dois graus de liberdade, o denominador que aparece em (2.15) pode ser escrito como,

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = n_1\omega_2\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{-m_2}{m_1}\right). \tag{2.17}$$

Quando ω_1/ω_2 formam uma razão irracional o denominador $n.\omega$ assume valores pequenos, pois sabe-se que qualquer número irracional pode ser muito bem aproximado por dois inteiros r e s de tal forma que; $(\omega_1/\omega_2 - r/s) < \delta$, para qualquer valor de δ. Logo a convergência da série (2.15) depende dos coeficientes (m_1, m_2) de Fourier de tal forma que H_{1m} vá a zero mais rápido do que a aproximação do irracional ω_1/ω_2 pelo racional m_2/m_1 correspondente.

O problema da convergência da série perturbada e, consequentemente, o que acontece com as trajetórias desse sistema foi tratado por **A**rnold e **M**oser por volta de 1960, seguindo as conjecturas de **K**olmogorov, de 1954, no que hoje conhecemos por teorema **KAM**. Em suma, o teorema KAM[2] prova que a série perturbativa converge para trajetórias cuja razão de frequência seja:

$$\left|\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s}\right| > \frac{K(\epsilon)}{r^{5/2}} \tag{2.18}$$

onde $K(\epsilon)$ vai a zero quando ϵ vai a zero. Portanto, conclui-se que perturbações fracas não alteram, substancialmente, a maioria dos toros com razão de frequência longe de r/s (trajetória quase-periódica); são destruídos apenas os toros ressonantes e uma certa vizinhança.

O principal do teorema KAM é que ele se concentra na estabilidade estrutural dos toros quase-periódicos, no entanto, a prova deste teorema assume por hipótese que o sistema não perturbado seja não degenerescente[3] ou seja,

$$\frac{\partial\omega_0}{\partial J} = \frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} \neq 0 \tag{2.19}$$

também conhecida como condição *twist*.

[2] O procedimento KAM para provar a convergência da série perturbativa, pode ser visto como uma técnica super convergente como o método de Newton [AA89]

[3] Uma demostração sobre o teorema KAM e a utilização da hipótese da não degenerescência pode ser encontrada na referência [FM06] pags. 522-529.

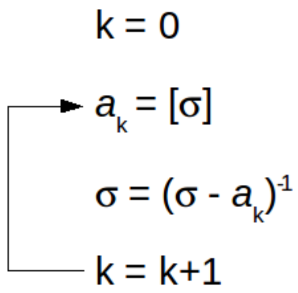


Figura 2.2: Algorítimo para a formação das frações contínuas de um número qualquer σ. Os colchetes indicam a parte inteira do número σ
.

2.2.1 Frações contínuas

O teorema KAM nos diz que a convergência da equação (2.15) depende diretamente da diferença entre o toro irracional e os toros racionais. Em outras palavras, temos que determinar se a razão entre as frequências não perturbadas $\sigma = \omega_1/\omega_2$ está longe dos números racionais pelos limites da equação (2.18).

Sabe-se que um número irracional σ pode ser aproximado tão bem quanto possível por um racional. Uma maneira de gerar uma aproximação racional para um número irracional é chamada de frações contínuas, escritas na forma:

$$\sigma = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ...}}} = [a_0, a_1, a_2, a_3, ...] \tag{2.20}$$

onde os coeficientes a_i são dados por números inteiros positivos caso $i \geq 1$ e a_0 é dado pela parte inteira do número irracional σ. Essa aproximação é única e ideal no sentido em que nenhuma outra aproximação racional gera melhor precisão.

A seguir, mostramos a aproximação do número irracional π por frações contínuas que pode ser obtida através do algorítimo ilustrado na figura 2.2.

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + ...}}}} = [3, 7, 15, 1, 292, ...] = 3,14159265... \tag{2.21}$$

Quando existe um valor a_i que se repete indefinidamente, é comum colocarmos uma barra superior no número que se repete para simplificar a notação. Por exemplo, um número irracional representado em frações contínuas por: $[0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, ...]$ pode ser simplificado por $[0, 1, \bar{2}]$ caso o número 2 se repita indefinidamente.

Dado um número irracional, sua representação por frações contínuas converge mais rápido se a sequência de a_{is} diverge. Dessa forma, diz-se que um número é o mais irracional de todos se sua aproximação por racionais é a mais lenta possível, ou seja, sua representação por frações contínuas possui todos os termos a_i iguais a 1. Esse número é conhecido como razão áurea ou número de ouro,

$$\gamma = [1, 1, 1, 1, 1, 1, ...] = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.6180339... \tag{2.22}$$

Uma curiosidade sobre a razão áurea é que sua sequência de racionais formada ao truncarmos em a_i, gera uma sequência de Fibonacci tanto para o numerador quanto para o denominador (veja tabela 2.1). A sequência de Fibonacci é formada de tal forma que cada termo subsequente é a soma dos dois precedentes.

Tabela 2.1: A sequência de truncamentos da razão áurea forma uma série de Fibonacci para o numerador e o denominador.

a_i	Fração Contínua	Valor truncado
1	[1]	1/1
2	[1,1]	2/1
3	[1,1,1]	3/2
4	[1,1,1,1]	5/3
5	[1,1,1,1,1]	8/5
6	[1,1,1,1,1,1]	13/8
7	[1,1,1,1,1,1,1]	21/13
8	[1,1,1,1,1,1,1,1]	34/21
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

A razão áurea é parte de um conjunto de números conhecido como números nobres. Os números nobres são aqueles que possuem representação por frações contínuas que terminam em uma sequência infinita de 1's. Particularmente, os números nobres formam um conjunto de irracionais quadráticos, ou seja, podem ser escrito na forma: $P \pm \sqrt{M}/S$, onde $P, M, S \in Z$ (veja a representação da razão áurea em (2.22)).

2.2.2 O teorema de Poincaré - Birkhoff

O teorema KAM prevê a sobrevivência dos toros irracionais, porém não fornece informação alguma sobre os toros ressonantes (racionais). Para descobrir o que acontece na região dos toros racionais, recorre-se ao teorema de Poincaré-Birkhoff.

Sabemos que as órbitas sobre os toros aparecem na seção de Poincaré como uma sequência de pontos formando uma curva correspondente sob ação do mapa de Poincaré $\mathbf{T}$. Se tal curva $I_1 = \textit{constante}$ de um sistema não perturbado possui número de rotação racional q/p, os pontos que definem essa curva serão de fato pontos fixos do mapa de Poincaré, com período - p. Pode-se mostrar que pontos em uma curva imediatamente vizinha, $I_1+\delta$ não são pontos fixos do mapa, pois, a cada interceptação na seção de Poincaré rodam um pouco mais do que seria necessário para formar o racional q/p. Portanto, a aplicação do mapa $\mathbf{T}$ sobre os pontos $I_1 + \delta > I_1$ rodam no sentido anti-horário. Da mesma forma, pontos sobre a curva $I_1 - \delta < I_1$ giram no sentido horário (veja figura 2.3).

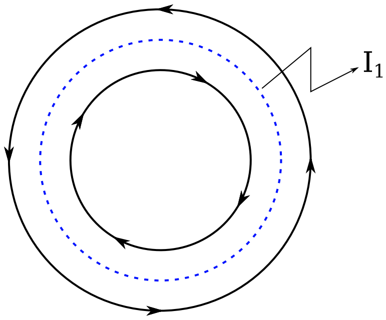


Figura 2.3: No sistema integrável, se pontos sobre I_1 são pontos fixos do sistema então: *(i)* pontos sobre círculos externos a I_1 rodam no sentido anti-horário e *(*ii) pontos sobre círculos internos rodam no sentido horário, gerando uma torção no espaço de fases.

Agora, vamos considerar que o sistema esteja perturbado, $\epsilon \neq 0$. Obviamente, não esperamos que os círculos da figura 2.3 permaneçam invariantes. No entanto, se ϵ for pequeno os pontos acima e abaixo de I_1 ainda permanecerão com a mesma rotação, ou seja, sentido anti-horário e horário, respectivamente. Ao analisarmos a dinâmica dos pontos iniciais com um certo ângulo θ_0, perceberemos que, por continuidade, haverá um ponto que não possui rotação (figura 2.4 (a)). Se fizermos isso para todo θ, encontraremos uma curva $\mathbf{C}_\epsilon$, não invariante, pois move-se radialmente. Assim, aplicando o mapa $\mathbf{T}$ à curva $\mathbf{C}_\epsilon$ obtemos uma nova curva deslocada radialmente, mas preservando a área original devido ao teorema de Liouville.

Pela figura 2.4 (b), podemos concluir que:

- As curvas $\mathbf{C}_\epsilon$ e $\mathbf{T}(\mathbf{C}_\epsilon)$ se interceptam um número par de vezes.
- Os pontos de intersecção são pontos fixos do problema, pois não rotacionam nem se movem na direção radial.
- Metade dos pontos são estáveis e a outra instáveis.

A estabilidade dos pontos fixos pode ser analisada através das setas que indicam o movimento na figura 2.4 (b). Perceba que em dois dos pontos fixos o movimento das setas é de rotação em torno dos pontos enquanto, nos outros dois pontos restantes o movimento das setas aproximam-se e afastam-se dos pontos fixos de maneira alternada, como mostra

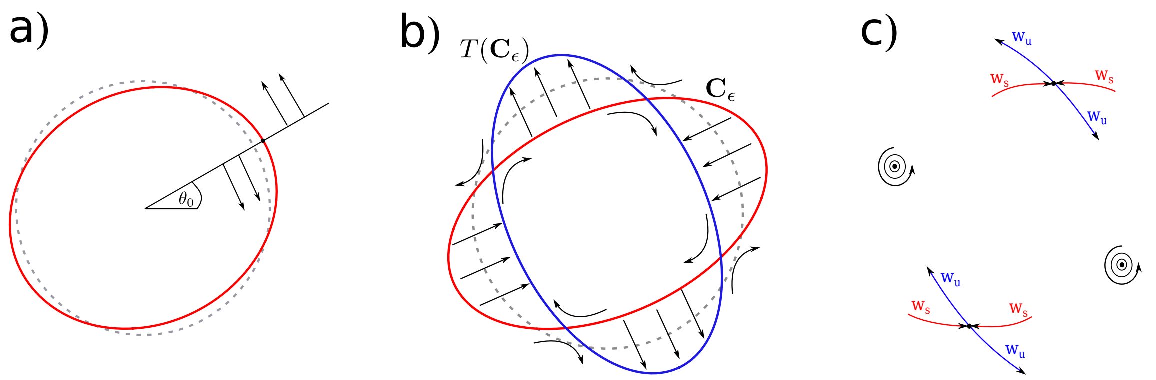


Figura 2.4: Esquema para o teorema de Poincaré Birkhoff. (a) Curva (vermelha) dos pontos que não rodam sobre a ação do mapa $\mathbf{T}$. (b) Intersecção entre as curvas $\mathbf{C}_\epsilon$ e $\mathbf{T}(\mathbf{C}_\epsilon)$, criando pontos fixos. (c) Metade dos pontos fixos são estáveis (pontos elípticos) e a outra metade são instáveis (selas hiperbólicas).

a figura 2.4 (c). Os pontos cíclicos são estruturalmente estáveis e chamados elípticos. Os outros pontos, hiperbólicos, são instáveis cujas selas são formadas por um conjunto de pontos que tendem assintoticamente ao ponto fixo (variedade estável W_s) e por outro conjunto que se afastam do ponto fixo (variedade instável W_u).

A análise que fizemos acima descreve o teorema de Poincaré-Birkhoff, que pode ser resumidamente colocado como:

O Teorema de Poincaré - Birkhoff: *A ação de uma perturbação ϵ em um sistema integrável causa o desaparecimento de quase todas as órbitas periódicas existentes. As órbitas ressonantes q/p que sobrevivem tornam-se um número par de órbitas sendo metade delas instáveis (sela hiperbólica) e metade estáveis (centro elíptico).*

Pela figura 2.4 (c), temos que a topologia da nova ilha ressonante fica definida por uma ilha central de movimento quase - periódico no sentido horário e duas pequenas ilhas ao redor da principal separadas pelo conjunto das variedades estáveis e instáveis, as quais chamamos de separatriz. Cabe salientar que as ilhas menores possuem rotação com relação ao centro da ilha principal dada pelo racional q/p. Porém, os toros dentro dessas ilhas possuem uma dinâmica local, ou seja, uma rotação própria se tomarmos como relação o centro da própria ilha.

2.3 Mapas twist

Consideremos um mapa simplético e bi-dimensional $\mathbf{T} : (x, y) \to (x', y')$. O mapa $\mathbf{T}$ é dito *twist* se,

$$\frac{\partial x'}{\partial y} \neq 0. \tag{2.23}$$

A equação (2.23) é equivalente à equação (2.19) definida para sistemas hamiltonianos contínuos, logo, (2.23) é a condição *twist* para mapas simpléticos bi-dimensionais. Pela equação (2.23) vemos que, se existe uma constante c tal que: $\frac{\partial x'}{\partial y} \geq c > 0$, então x' é uma função monotônica de y.

A condição *twist* implica que se um mapa $\mathbf{T}$ é *twist*, então, $\mathbf{T}^{-1}$ também é *twist*. Contudo, cabe ressaltar que $\mathbf{T}^n$, com $n \geq 2$ não é, necessariamente, um mapa *twist*. Os mapas simpléticos do tipo *twist* possuem uma teoria bem desenvolvida, além disso, a condição *twist* (2.23) é peça fundamental para prova de alguns teoremas (veja seção 2.2) e portanto, podem ser verificados nos espaços de fases correspondente ao seu mapa.

2.3.1 Os componentes do espaço de fases

Como visto na seção 2.2, para sistemas hamiltonianos quase-integráveis o teorema KAM estabelece que quase todos os toros sobrevivem a uma pequena perturbação. Vimos ainda que, segundo o teorema de Poincaré-Birkhoff, a grande maioria das órbitas racionais não resistem a perturbação, restando geralmente um par delas sendo metade delas instáveis e a outra metade estáveis.

O cenário descrito acima pode ser observado pelo espaço de fases de mapas simpléticos *twist*, cuja condição *twist* estabelece que o número de rotação é uma função monotônica crescente (ou decrescente) da ação I. Uma revisão sobre as principais características de um espaço de fases de sistemas simpléticos que satisfazem as condições do teorema KAM e de Poincaré-Birkhoff é apresentado em [Mei92]. Por hora, discutiremos brevemente os principais componentes do espaço de fases de mapas simpléticos bi-dimensionais do tipo *twist*.

Pontos elípticos: são estáveis e possuem autovalores dados por $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2 = e^{i2\pi\omega}$. Trajetórias próximas aos pontos elípticos desenvolvem um movimento quase-periódico (invariante) ao seu redor.

Pontos hiperbólicos: são pontos fixos instáveis cujos autovalores são reais no intervalo $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$. O ponto hiperbólico possui variedade estável e instável. O conjunto de pontos iterados para o futuro que tendem ao ponto hiperbólico é a variedade estável. Caso contrário tem-se a variedade instável.

Curvas invariantes: também conhecidas como curvas ou toros KAM, são observadas como curvas no espaço de fases desempenhando um movimento quase-periódico de rotação irracional. De modo geral, dizemos que $\mathbf{C}$ é uma curva invariante se

$\mathbf{T}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$. Segundo o teorema KAM, essas curvas são destruídas ao violar a condição (2.18), conforme aumenta-se a perturbação ϵ. Para um valor elevado da perturbação ϵ é possível destruir boa parte das curvas invariantes, e, embora o movimento quase-periódico não esteja sob curvas que cruzam o espaço de fases, ele confina-se em pequenas ressonâncias (ilhas regulares) e em conjuntos fractais (conjunto de cantor).

A condição (2.19) implica, de fato, que o número de rotação deve variar monotonicamente no espaço através das superfícies H_0. Em mapas discretos, a condição *twist* é definida pela equação (2.23) e a monotonicidade das órbitas do espaço de fases pode ser analisada pelo número de rotação definido como:

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_0}{n}. \tag{2.24}$$

Da equação (2.24), percebe-se que um número de rotação existe quando um limite bem definido também existe. Assim, se um ponto inicial retorna para o mesmo ponto após a n-ésima iteração, então temos uma órbita periódica, cujo número de rotação é dado por um racional q/p, onde p é o período e q o número inteiro de vezes que a órbita passou pelo domínio x. As órbitas quase-periódicas (toros invariantes) são representados pelos números de rotação irracionais, enquanto o número de rotação não converge para uma órbita caótica.

Para uma grande quantidade de sistemas (e isso não se restringe apenas a mapas *twist*) o aumento da perturbação induz ao aumento da região caótica do sistema formando um espaço de fases misto de regiões caóticas e regulares. Quando o toro mais irracional é quebrado uma trajetória caótica pode assumir valores da ação I dependendo do alcance da região caótica. Neste momento, os toros KAM restringem-se às ressonâncias, geralmente chamadas de *ilhas KAM* ou somente ilhas que constituem-se de regiões regulares imersas no mar de caos.

2.3.2 O Mapa Padrão Twist (MPT)

Para descrever o cenário de mapas *twist*, apresentamos o mapa padrão *twist* (MPT), também conhecido como mapa de Chirikov-Taylor [Chi79]:

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n + \tfrac{K}{2\pi} sin(2\pi\theta_n), && \text{mod} 1 \\ \theta_{n+1} &= \theta_n - J_{n+1}, && \text{mod} 1 \end{aligned} \tag{2.25}$$

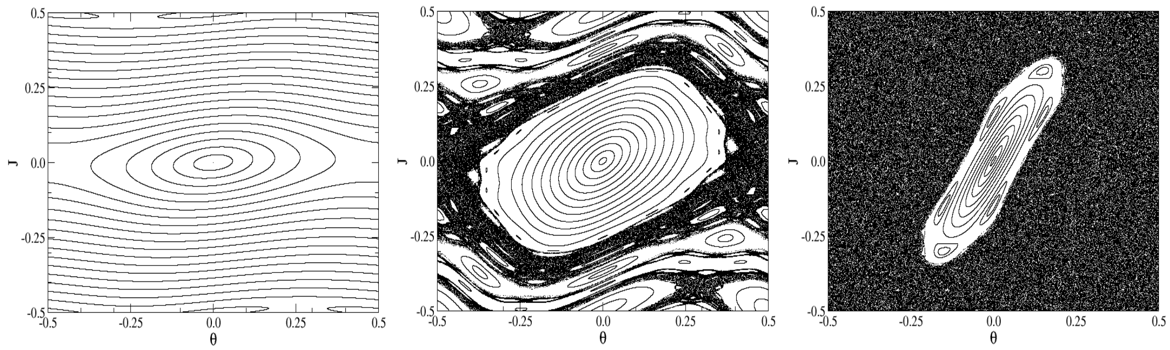


Figura 2.5: Espaço de fases para o MPT com diferentes valores do parâmetro de perturbação. Da esquerda para a direita temos $K = 0.20$; $K = 0.95$ e $K = 3.2$.

onde $K \geq 0$ é o parâmetro de não-linearidade do mapa. É dito *twist* pois $\partial\theta_{n+1}/\partial J_n \neq 0$. A maioria dos estudos envolvendo o MPT lida com o surgimento do caos e os fenômenos de transporte no sistema. Além disso, alguns sistemas com ressonâncias equidistantes não-lineares no espaço de fases podem ser, localmente, reduzidos ao MPT.

Para $K = 0$, o mapa padrão é reduzido a:

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n - J_{n+1}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Assim, como J é uma constante de movimento e θ decresce a uma taxa constante, as soluções contínuas são dadas por $J_t = J_0$; $\theta_t = \theta_0 + Jt$ e, portanto, integrável.

A dinâmica caótica das órbitas é obtida ao aumentarmos o valor de K com condições iniciais apropriadas. Na figura 2.5 apresentamos três espaços de fases típicos do MPT com diferentes valores do parâmetro de perturbação K. Quando o valor da perturbação é pequeno o espaço de fases é completamente preenchido por trajetórias periódicas ou quase-periódicas como observamos na figura 2.5 (a).

Ao aumentarmos a perturbação, há formação de mais ressonâncias causadas pelos valores racionais dos antigos toros como previsto pelo teorema de Poincaré-Birkhoff. Essas ressonâncias estão limitadas por separatrizes que devido à instabilidade do ponto hiperbólico geram pequenas camadas caóticas ao redor das ressonâncias. Para certos valores de perturbação, algumas das curvas invariantes (quase - periódicas) também são destruídas, o que segundo o teorema KAM ocorre por não satisfazerem a condição 2.18. O cenário descrito anteriormente pode ser verificado no espaço de fases da figura 2.5 (b).

Segundo o próprio teorema KAM e pelo o que estudamos sobre a descrição de números irracionais por racionais na forma de frações contínuas, o último toro irracional a ser rompido deve ser o mais irracional de todos, ou seja, a razão áurea $\gamma = [1, \bar{1}] = (\sqrt(5) +$

1)/2. Diversos estudos foram realizados no sentido de encontrar o valor da perturbação responsável pela quebra do último toro KAM e após significativas melhorias, geralmente ligada aos métodos numéricos de análise, sabe-se que a última curva KAM quebra-se com perturbação próxima de $K_c = 0.971635406$. A partir deste valor de perturbação as curvas KAM (invariantes) não existem de forma global no espaço de fases, restringindo-se apenas às ilhas regulares. A figura 2.5 (c) para $K = 3.2$ mostra o extenso mar de caos que cerca uma ilha KAM.

2.4 Sobre a dinâmica no espaço de fases

Nas seções anteriores, vimos que os mapas, ou de maneira geral os sistemas hamiltonianos não integráveis apresentam regiões caóticas e regulares. Tais regiões coexistem e espera-se que formem uma estrutura hierárquica pelo espaço, ou seja, na vizinhança de uma ilha regular primária deve haver outras ilhas regulares secundárias de menor tamanho e assim por diante. Logo, esperamos encontrar uma estrutura auto similar de ilhas em torno de ilhas. Essa estrutura foi observada por Birkhoff em 1935. Em suas palavras:

> *It is clear that not only do general elliptic periodic solutions possess neighboring elliptic and hyperbolic periodic solutions, but also, beginning again with the neighboring elliptic solutions, who are, as it were, satellites of these solutions, one can obtain other elliptic and hyperbolic solutions which are secondary satellites* [4]*.* [Bir35]

Portanto, podemos pensar que ao redor de cada ponto fixo elíptico existe uma aplicação simultânea do teorema de Poincaré-Birkhoff (ver sub-seção 2.2.2) e do teorema KAM (seção 2.2), que conduzem à uma estrutura auto-similar em diversas escalas espaciais.

O cenário observado por Birkhoff e alguns outros que posteriormente foram estudados são relevantes para a dinâmica do sistema, pois podem gerar o aprisionamento de trajetórias alterando, significativamente, a maneira como essas trajetórias se dispersam através do espaço de fases [Zas02a, Zas02b, Mei92].

2.4.1 Aprisionamento

A primeira evidência sobre o aprisionamento de trajetórias em determinadas regiões no espaço de fases foi realizada por Contopoulos [Con71] ao estudar a estabilidade de órbitas periódicas de um sistema dinâmico astronômico bi-dimensional. Em suma, o referido autor ao tentar encontrar os limites de algumas ilhas de estabilidade, se deparou com órbitas que

[4] É claro que não só soluções periódicas elípticas gerais possuem vizinhas soluções periódicas elípticas e hiperbólicas, mas também, começando de novo com as soluções elípticas vizinhas, que são, por assim dizer, os satélites dessas soluções, é possível obter outras soluções elípticas e hiperbólicas que são satélites secundários.

permaneciam longos períodos de tempos ao redor dessas ilhas, para então escapar para o mar caótico presente ao redor. Esse fenômeno foi chamado de aprisionamento, do inglês *stickiness* mas, pode ser encontrado também na literatura com o nome de armadilhas dinâmicas (*dynamical trapping*) [Zas02a].

Hoje, sabemos que os aprisionamentos ao redor de ilhas regulares no espaço de fases é devido à existência dos chamados cantoros ao redor dessas ilhas [ECVD97]. Cantoros são conjuntos invariantes que consistem de infinitos pontos que não formam uma linha contínua (toro) no espaço, deixando pequenos vãos por toda parte [Aub78, Per79]. Esses cantoros formam-se pela destruição dos toros invariantes conforme aumenta-se a perturbação.

A aceitação do fenômeno de aprisionamento como propriedade fundamental em sistemas hamiltonianos foi imprescindível para a compreensão sobre a dinâmica hamiltoniana. De um modo geral, qualquer contorno ou conjunto dentro do espaço de fases pode estar relacionado com o aprisionamento de trajetórias. Ao longo dos anos, algumas descrições qualitativas sobre essas armadilhas, tais como: ilhas tangle, hierarquia de ilhas, camada estocástica e armadilha em rede, foram desvendadas e relacionadas com problemas de aprisionamento [Mei92, Zas02a, Zas02b, CH08].

Uma maneira elegante para caracterizar os aprisionamentos pode ser obtida ao definirmos uma região de interesse e calcularmos a distribuição dos distintos tempos T, gastos entre a entrada e a saída de uma trajetória nessa região. Por ora, vamos considerar uma sequência de eventos de aprisionamento $\{T_1, T_2, ..., T_n\}$, com n muito grande. Assim, $P(T)$ é uma função de densidade de probabilidade e $P(T)dT$ é a probabilidade de encontrar um tempo T entre T e $T + dT$. Em sistemas mistos essa distribuição é dada por uma lei de potência:

$$P(T) \sim T^{-\gamma-1}. \tag{2.27}$$

onde γ é o expoente característico ou expoente de recorrência.

Sem perda de generalidade, é numericamente conveniente usarmos a probabilidade de distribuição dos eventos de aprisionamento com tempo T maiores do que τ, $\rho(\tau)$ ao invés de $P(T)$, assim:

$$\rho(\tau) \equiv \int_{\tau}^{\infty} P(T)dT. \tag{2.28}$$

Logo, $\rho(\tau)$ é uma distribuição cumulativa das recorrências, também chamada de estatística dos tempos de recorrência (ETR). A ETR define uma função de τ decrescente, partindo de $\rho(0) = 1$[5]. Perceba que o cálculo da ETR só é possível em sistemas hamilto-

[5]O valor de $\rho(0)$ é igual a uma unidade, pois a distribuição $P(T)$ satisfaz a condição de normalização: $\int_0^{\infty} P(T)dT = 1$.

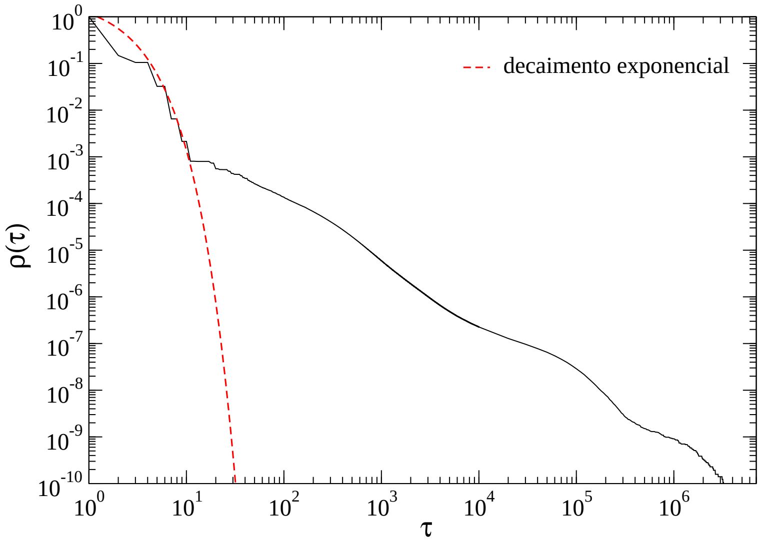


Figura 2.6: Distribuição dos tempos de aprisionamentos para o mapa padrão (2.25) com $K = 3.2$. $\rho(\tau)$ é uma distribuição cumulativa dos tempo T maiores do que τ. Para comparação, a curva pontilhada representa o decaimento exponencial.

nianos (não dissipativos) fechados, pois, segundo o teorema das recorrências de Poincaré:

> *Em um espaço de fases Ω um conjunto $\boldsymbol{A} \in \Omega$ de medida $\mu(\mathbf{A}) > 0$, possui para quase todas as trajetórias (exceto aquelas de medida zero), um tempo T de retorno dessa mesma trajetória à vizinhança de sua condição inicial.*

Numericamente, a ETR é dada por,

$$\rho(\tau) = \frac{M_\tau}{M} \tag{2.29}$$

onde M_τ é o número de recorrências com tempo $T \geq \tau$ e M é o número total de recorrências observadas durante todo processo de iterações.

A figura 2.6 mostra o resultado numérico da ETR [6] para o mapa padrão (2.25) com $K = 3.2$. Note que depois de um decaimento aproximadamente exponencial, o comportamento é do tipo lei de potência, cujo expoente característico obtido foi de $\gamma = 1.62$.

Sistemas cujo espaço de fases são abertos (não modulados) não compartilham da propriedade recorrênte das trajetórias e portanto, a caracterização do aprisionamento nesses sistemas fica restrita ao estudo sobre os tempos escape de um conjunto de condições iniciais fornecidos sobre uma região aprisionante. Porém, cabe ressaltar que, uma vez que a região de aprisionamento é o fator relevante em estudo, o comportamento da cauda da lei de potência deve se traduzir entre as diferentes maneira de se obtê-la [Alt07, APT13]. Como o escape depende de um conjunto de condições iniciais, podemos definir uma fração de escape (FE) como sendo,

[6] Neste caso iniciamos uma única condição no mar de caos e recolhemos os períodos de tempos em que a trajetória permanecia dentro de uma região definida ao redor da ilha principal: $|\theta| = 0.25$.

$$\rho_{esc}(\tau) = \frac{N_\tau^{esc}}{N_T} \tag{2.30}$$

onde N_τ^{esc} é o número de condições iniciais que escaparam com tempo $T \geq \tau$ e N_T é o número total de condições iniciais.

A FE será o método estatístico que utilizaremos em boa parte desta tese para caracterizar o aprisionamento. Isso, porque nossa principal motivação dar-se-á em um modelo simplético de linhas magnéticas em uma câmara toroidal. Estas linhas magnéticas são fechadas no centro, mas colidem com a borda externa da câmara, resultando em linhas de escape que podem ser ainda mais intensificadas ao se introduzir perturbações externas no sistema (maiores detalhes serão apresentados no capítulo 5).

2.4.2 Transporte

Um dos principais efeitos do fenômeno de aprisionamento de trajetórias dá-se sobre o transporte, ou seja, pela dispersão global das trajetórias caóticas no espaço de fases durante longos intervalos de tempo. O transporte é caracterizado pelo desvio quadrático médio (segundo momento) de uma variável do espaço de fases, calculada a partir de um conjunto de condições iniciais:

$$\langle \Delta r^2 \rangle = \sum_{j=1}^{N_c} \frac{(r(t) - r(0))_j^2}{N_c} - \left[\sum_{j=1}^{N_c} \frac{(r(t) - r(0))_j}{N_c} \right]^2 . \tag{2.31}$$

onde r é a coordenada em que se deseja estudar o transporte, $\langle ... \rangle$ significa a média sobre um conjunto de condições iniciais N_c. A equação (2.31) passa a ser caracterizada pelo crescimento algébrico no tempo:

$$\langle \Delta r^2 \rangle \sim t^\mu . \tag{2.32}$$

Se $\mu = 1$ o sistema é dito normal ou difusivo mas, se $0 < \mu < 1$ ou $1 < \mu < 2$ o sistema é classificado como sub-difusivo e super-difusivo respectivamente. O caso $\mu = 1$ é relacionado ao movimento completamente aleatório do mar de caos.

A conexão com o aprisionamento ocorre, justamente, quando $\mu \neq 1$, pois tal aprisionamento das trajetórias pode retardar a dispersão global (sub-difusivo) ou acelerar (super-difusivo), caso a região onde ocorra o aprisionamento esteja relacionada com regiões que se difundem periodicamente no espaço. (veja sobre modos acelerados no mapa padrão em [LL91]).

Em alguns casos particulares, não é possível calcular o desvio quadrático médio de maneira satisfatória. Isso acontece, por exemplo, em sistemas com escape, cujo número de condições iniciais não permanecem durante todas as iterações e logo, passam a não contribuir com as médias dadas pela equação (2.31). Contudo, podemos estudar a dispersão das trajetórias nesses sistemas, analisando a taxa com que as condições iniciais escapam (equação 2.30) e a maneira como as diferentes condições inicias com diferentes tempos de escape estão distribuídos no espaço de fases. Essa técnica foi utilizada no capítulo 5 ao estudarmos o transporte de linhas de campos magnéticos em tokamaks.

Capítulo 3

Topologia não-twist

Neste capítulo, estudaremos a topologia de sistemas não-*twist*. Para tanto, revisitamos o mapa padrão não-*twist* (seção 3.1). Os fenômenos chamados não - *twist* estão caracterizados na seção 3.2, na qual enfatizamos a presença de um toro sem *shear* caracterizado pelo máximo/mínimo do perfil do número de rotação. Para finalizar, nós analisamos a quebra da curva sem *shear* a partir de um método numérico rápido, baseado no teorema de Slater (subseção 3.2.3). O estudo sobre a quebra da curva sem *shear* é importante, pois marca o início do transporte global pelo espaço de fases.

3.1 O Mapa Padrão Não-Twist (MPNT)

O mapa padrão não *twist* (MPNT) é definido como:

$$T : \begin{cases} x_{n+1} = x_n + a(1 - y_{n+1}^2) & \mod 1 \\ y_{n+1} = y_n - b\sin(2\pi x_n) \end{cases} \tag{3.1}$$

com parâmetros $a \in (0, 1)$, $b \in \mathbb{R}$. O MPNT é um mapa simplético uma vez que satisfaz a equação (2.6) e dito não-*twist* por violar a condição *twist* i.e:

$$\frac{\partial x_{n+1}(x, y)}{\partial y_n} = 0 \qquad \text{para} \qquad y_n = b\sin(2\pi x) \tag{3.2}$$

O MPNT reúne os comportamentos universais de sistemas não-*twist* [HH84, HH95, dCNGM96, dCNGM97]. Muitos sistemas físicos são representados por mapas não-*twist*, em especial, sistemas não-*twist* são de grande interesse para sistemas contínuos e discretos que descrevem as linhas de campo magnético com cisalhamento reverso em tokamaks [Boo04, CVJ+12, PCVM07], fluxos em dinâmica de fluidos [dCNM93, dCNM92] e o movimento de partículas descrito por certas hamiltonianas em física molecular [dCdA92].

Pelo ponto de vista matemático, os sistemas não-*twist* têm sua importância devido ao fato de contradizer alguns teoremas que assumem a não-degenerescência das frequências, tais como os teoremas KAM e Poincaré - Birkhoff comentados no capítulo 2.

Curvas de Simetria

A análise das simetrias de uma mapa é uma parte fundamental para se conhecer a topologia do sistema. Além disso, as simetrias de um mapa auxiliam no desenvolvimento de resultados analíticos e numéricos sobre o sistema.

O MPNT pode ser decomposto pelo produto de duas involuções, isto é: $T = M_1 \circ M_0$. Geralmente, as involuções M_0 e M_1 são definidas por [1]:

$$M_0 : \begin{cases} x_{n+1} = -x_n \\ y_{n+1} = y_n - b\sin(2\pi x_n) \end{cases} \tag{3.3}$$

$$M_1 : \begin{cases} x_{n+1} = -x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \\ y_{n+1} = y_n \end{cases} \tag{3.4}$$

Além de ser simétrico às equações (3.3) e (3.4), o MPNT é simétrico à involução S,

$$S : \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 1/2 \\ y_{n+1} = -y_n \end{cases} \tag{3.5}$$

Pode-se demonstrar que o conjunto de pontos fixos de uma involução M_j formam uma curva Γ_j a qual chamamos de curva de simetria, isto é: $\Gamma_j : \{(x, y)|M_j(x, y) = (x, y)\}$.

Para o MPNT a simetria Γ_0 e Γ_1 geram as curvas:

$$s_1 = \{(x, y)|x = 0, y = y\} \qquad s_3 = \{(x, y)|x = a(1 - y^2/2), y = y\}$$
$$s_2 = \{(x, y)|x = 1/2, y = y\} \qquad s_4 = \{(x, y)|x = a(1 - y^2/2) + 1/2, y = y\}$$

As linhas de simetria definidas acima podem ser conferidas na figura 3.1 (a). Perceba que ao caminharmos sobre uma linha de simetria temos sempre a certeza de passarmos sobre diferentes toros.

[1]Cabe ressaltar que as involuções M_0 e M_1 não são únicas. Outro exemplo possível de involuções seriam $T \circ M_0$ e $T \circ M_1$.

3.2 Fenômenos não-twist

Na região onde a condição *twist* é violada, alguns fenômenos não-*twist* são observados [dCNGM96, WAFM05, AWM03, HH84, WAM04, FWAM06]. Fora dessa região o mapa se comporta exatamente como um mapa *twist*. Fenômenos não-*twist* são assim denominados por não serem previstos pelas teorias apresentadas no capítulo 2 e, portanto, apresentam uma topologia no espaço de fases diferenciada dos sistemas *twist*. Nessa seção, discutiremos os fenômenos não-*twist* no MPNT utilizando procedimentos numéricos para caracterizá-los.

3.2.1 Curva sem shear

Uma consequência direta de sistemas que não satisfazem a condição *twist* é a presença de trajetórias irracionais e também de correntes de ilhas (Poincaré-Birkhoff) com o mesmo número de rotação. Essa característica é devido à existência de um máximo ou um mínimo no perfil do número de rotação do sistema correspondente. A curva invariante que pertence a um extremo irracional do perfil do número de rotação, é chamada *curva sem shear* e possui gradiente de rotação nulo. Podemos analisar o cenário descrito acima já no caso integrável do MPNT. Por exemplo, para $b = 0$ em (3.1), uma órbita cujo número de rotação é definido por $\omega = x_{n+1} - x_n$, está localizado em $(x, y) = (x, \pm\sqrt{1 - \omega/a})$, ou seja, temos duas órbitas separadas no espaço de fases com o mesmo número de rotação. Para $b \neq 0$, um perfil numérico do número de rotação sobre qualquer uma das linhas de simetria, pode gerar mais do que duas órbitas com o mesmo número de rotação.

Uma vez que a violação da condição *twist* assegura a existência de um extremo (máximo/mínimo) no perfil do número de rotação, pelo menos uma curva sem *shear* pode ser encontrada em sistemas não-*twist*. Como exemplo, nós apresentamos na figura 3.1 (a), o espaço de fases do MPNT para $b = 0.5232$ e $a = 0.3640$. Ao lado do espaço de fases, figura 3.1 (b), temos o perfil do número de rotação calculado através da equação (2.24) com 400 condições iniciais dispostas sobre a linha de simetria s_1.

O espaço de fases da figura 3.1 (a) é composto por trajetórias caóticas nas partes externas e regulares ao centro. Percebe-se também a formação de duas cadeias adjacentes à curva sem *shear* de mesmo período, $p = 3$. A referida curva sem *shear* (linha vermelha) foi encontrada pelo ponto máximo do número de rotação mostrado na figura 3.1 (b).

Como dito anteriormente, é na vizinhança da curva sem *shear* onde surgem os conjuntos adjacentes de órbitas periódicas (corrente de ilhas). A disposição dessas órbitas periódicas no espaço de fases, está, diretamente, relacionada com o seu período - p de forma que:

(i) Se as órbitas possuem período par então, as órbitas geradas em cada lado da curva sem *shear* terão a mesma estabilidade, isto é, se de um lado temos um centro/sela, do

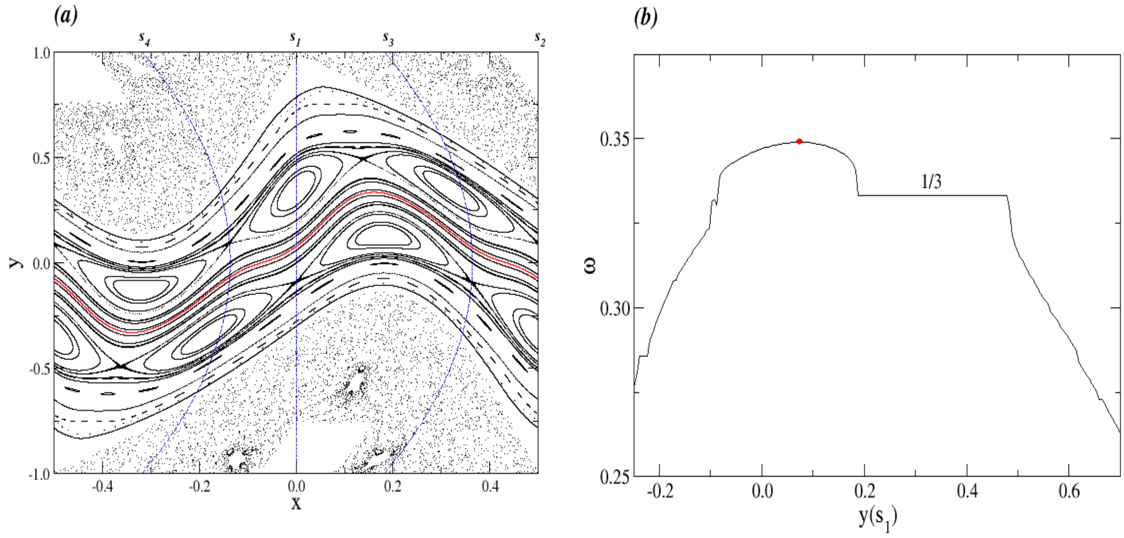


Figura 3.1: (a) Típico espaço de fases destacando as curvas de simetria (azul) e a curva sem *shear* em vermelho identificada pelo perfil do número de rotação em (b) para o MPNT com $a = 0.3640$ e $b = 0.5232$. O perfil ,ω, do número de rotação foi obtido por condições iniciais sob a linha de simetria s_1. O ponto em vermelho indica a curva sem *shear*, onde $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$

outro lado adjacente teremos também um centro/sela.

(ii) Se as órbitas possuem período ímpar a estabilidade difere e, portanto, se tivermos um centro de um lado, teremos uma sela do outro lado.

Pontos indicadores

Uma maneira analítica de encontrar a curva sem *shear* no MPNT é através dos pontos indicadores (PI). As iterações dos pontos indicadores formam um toro invariante que por sua vez é, de fato, um toro sem *shear* [SA97, SA98, Pet01]. Os PIs são:

$$\begin{aligned} P_0^n &= \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}, (-1)^{n+1}\frac{b}{2}\right), \\ P_1^n &= \left(\frac{a}{2} + \frac{n}{2} - \frac{1}{4}, 0\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Na prática, precisamos considerar apenas $n = 0, 1$, uma vez que todas as outras ordens coincidem com estas depois de uma translação em torno do cilindro no espaço.

3.2.2 Processos de reconexão

Devido a existência de órbitas com o mesmo número de rotação, há a possibilidade de que estas colidam e se aniquilem dependendo dos parâmetros. A colisão de órbitas periódicas representa um fenômeno puramente não-*twist* [WAFM05]. A dinâmica do processo é a seguinte: uma certa órbita no espaço de fases possui número de rotação racional $\omega_{q/p}$. Devido ao perfil não monotônico do sistema, ou seja, a presença de um máximo ou um mínimo no perfil de rotação, deve existir outra órbita com o mesmo valor racional de rotação. Se o perfil do número de rotação decresce, então, essas órbitas periódicas se aproximam até o ponto em que colidem (figura 3.2). Na verdade, o processo inverso também pode acontecer dependendo da variação dos parâmetros e sob este ponto de vista, teríamos o nascimento de cadeias gêmeas de período - p a partir do momento em que o ponto de máximo/mínimo do número de rotação passasse pelo número racional q/p.

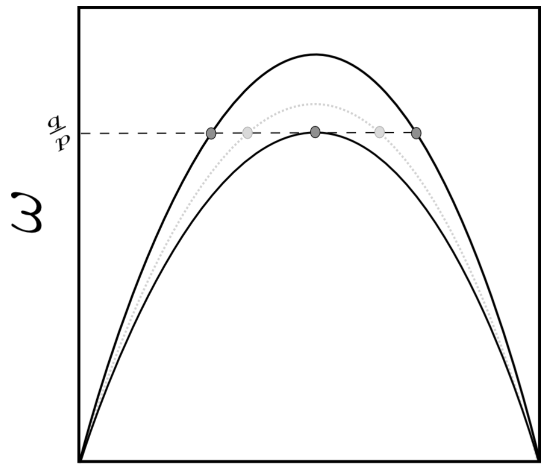


Figura 3.2: Esquema do nascimento ou aniquilação de duas correntes de órbitas periódica q/p para um perfil não monotônico ω.

No limite quando as cadeias gêmeas de período - p se aproximam, há uma mudança na topologia das variedades dos pontos hiperbólicos. Nesse instante as variedades das cadeias unem-se sem mudar as estabilidades dos pontos fixos de período - p. A esse processo chamamos reconexão. Como as disposições topológicas das correntes de ilhas estão relacionadas com o período - p das mesmas, os processos de reconexão são distintos para órbitas pares e ímpares. Nesta parte, trazemos uma breve discussão dos cenários e dos perfis do número de rotação para ambos os casos encontrados para o MPNT.

Cenário de período - par

Para cadeias de ilhas formadas por órbitas periódicas de período - par, caracterizamos o cenário de bifurcações, mostrando na figura 3.3 os espaços de fases com os respectivos perfis do número de rotação sobre a linha de simetria s_1. Para tanto, nós fixamos $b = 0.29$ e variamos a em: (a) $a = 0.530$, (b) $a = 0.5107354$, (c) $a = 0.503$, (d) $a = 0.500$ e, finalmente, (e) $a = 0.495$. O cenário de (a) para (e) marca a aniquilação das órbitas periódicas e no sentido contrário, de (e) para (a), o nascimento de órbitas periódicas de mesmo número de rotação.

Para órbitas com período - par, ou seja, quando o tipo de estabilidade das cadeias gêmeas são as mesmas sob as linhas de simetria (ver figura 3.3 (a)), o perfil do número de rotação mostra dois patamares em $\omega = 0.5$ associados às cadeias de ilhas ressonantes de período - 2 do tipo Poincaré-Birkhoff. Entre as cadeias de ilhas temos a presença de toros invariantes e uma curva sem *shear* central marcada em vermelho.

O processo de reconexão se inicia no limite em que as duas separatrizes se unem formando uma única estrutura, figura 3.3 (b), nesse momento o perfil de rotação sob a linha de simetria s_1 forma um patamar único em $\omega = 0.5$.

Na figura 3.3 (c) as órbitas hiperbólicas movem-se para fora das simetrias formando um *dipolo topológico* e seu respectivo perfil parece com o anterior, no entanto, com o patamar um pouco menor.

A colisão das duas órbitas elípticas, bem como as duas órbitas hiperbólicas é mostrada na figura 3.3 (d). Como a linha de simetria s_1 passa sob os pontos elípticos, eles são verificados como pontos de máximo no perfil de rotação. Na figura 3.3 (e) as órbitas periódicas foram aniquiladas.

Salientamos que processos semelhantes são verificados ao tomarmos o perfil sob a perspectiva das outras simetrias s_2,s_3 e s_4 [WAFM05].

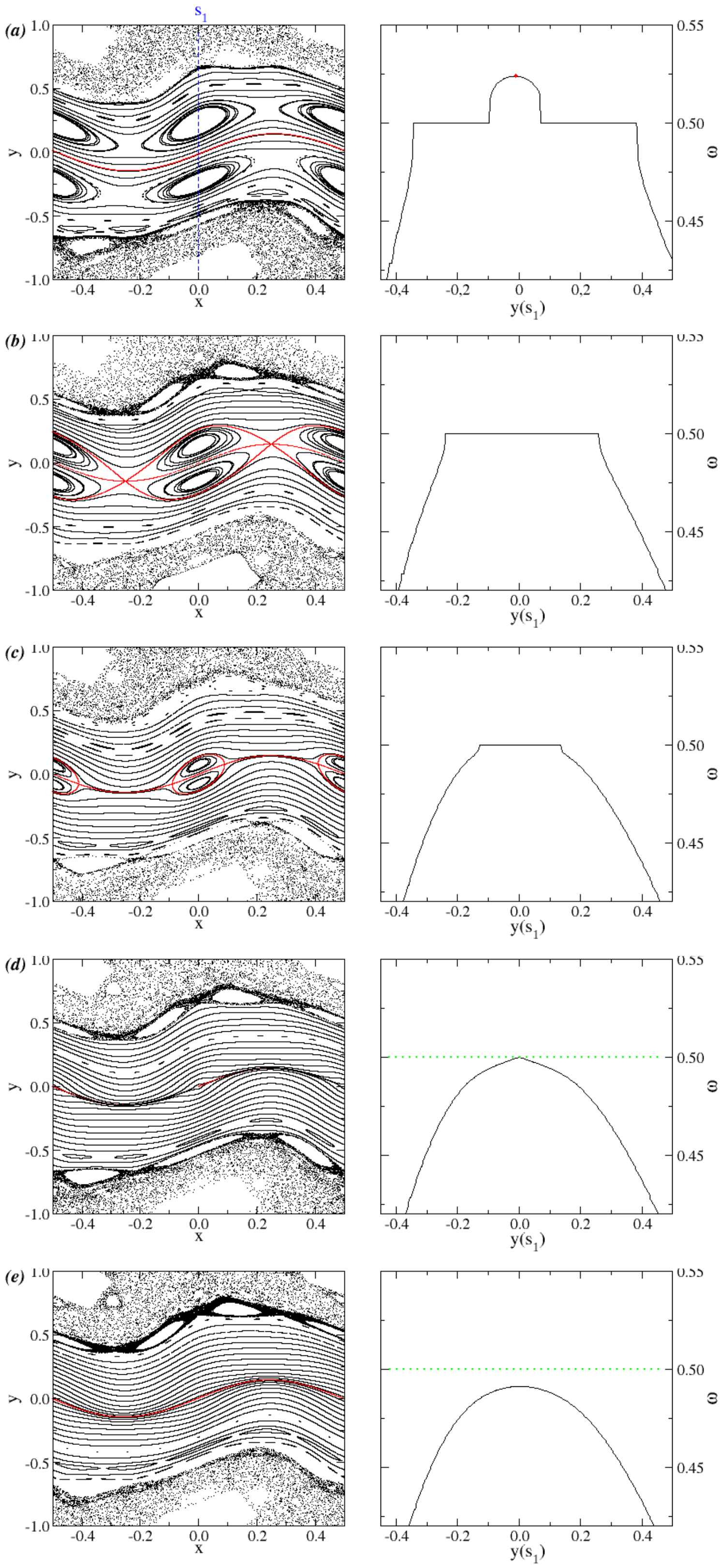


Figura 3.3: Sequência de reconexão do cenário de período - par. Os espaços de fases e seus respectivos perfis do número de rotação, sob a curva de simetria s_1, estão mostrados acima. Os parâmetros das figuras são: $b = 0.29$ com (a) $a = 0.530$; (b) $a = 0.5107354$; (c) $a = 0.503$; (d) $a = 0.500$; (e) $a = 0.495$.

Cenário de período - impar

Para órbitas periódicas ímpares há uma diferença de estabilidade sob qualquer linha de simetria s. O cenário que caracteriza o processo de reconexão neste caso está descrito a seguir e visualizado pela figura 3.4, onde fixamos o valor $b = 0.32$ e variamos a onde: (a) $a = 0.345$; (b) $a = 0.341806$; (c) $a = 0.340$; (d) $a = 0.3382$ e (e) $a = 0.3375$.

A figura 3.4 (a) mostra duas cadeias similares de período - 3 separadas no espaço de fases. O correspondente perfil de rotação satura em $\omega = 1/3$, devido à presença da ilha ressonante e também apresenta um ponto de máximo ocasionado pela presença de um toro sem *shear*.

Na sequência, figura 3.4 (b), temos de fato uma reconexão, onde as separatrizes unem-se em uma grande corrente de órbitas periódicas de um único valor de rotação.

Com a diminuição do parâmetro a, temos uma separação em duas correntes de ilhas formada por separatrizes homoclínicas separadas por toros invariantes meandros, figura 3.4 (c). O perfil de rotação, novamente, apresenta uma saturação em $\omega = 1/3$, no entanto, diferente do perfil apresentado na figura 3.4 (a) para as cadeias de Poincaré-Birkhoff, percebe-se a formação de um ponto de mínimo onde se localiza um toro sem *shear* acompanhado dos toros meandros.

A figura 3.4 (d) indica a ocorrência de uma colisão entre o ponto elíptico e o ponto hiperbólico conhecida como bifurcação centro-sela. Nessa figura dois pontos de máximo são observados e, portanto, duas curvas sem *shear* existem no espaço de fases (na figura 3.4 (d) mostramos apenas a curva sem *shear* externa). Finalmente, na figura 3.4 (e) as órbitas periódicas desapareceram.

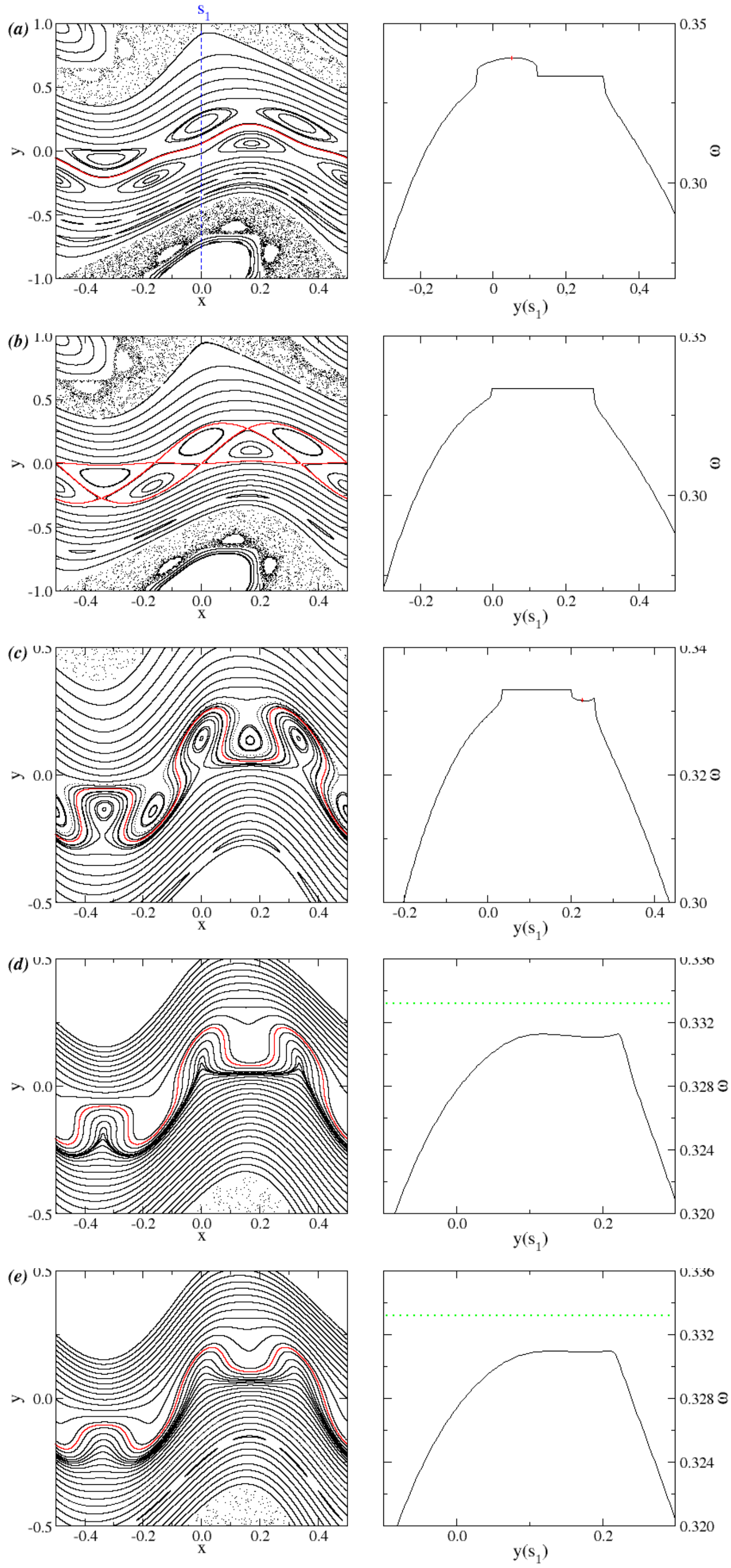


Figura 3.4: Sequência de reconexão do cenário de período - ímpar. Os espaços de fases e seus respectivos perfis do número de rotação, sob a curva de simetria s_1, estão mostrados acima. Os parâmetros das figuras são: $b = 0.32$ com (a) $a = 0.345$; (b) $a = 0.341806$; (c) $a = 0.340$; (d) $a = 0.3382$; (e) $a = 0.3375$.

3.2.3 A quebra da curva sem shear

Para sistemas não-*twist*, verifica-se que o toro sem *shear* é o mais resistente, indiferente do valor de rotação que possua. Tal característica deve-se fundamentalmente ao maior espaçamento entre ressonâncias na região – consequência direta da derivada próxima de zero no perfil do número de rotação. Desta forma, para encontrar a transição para o caos global [dCNGM96] , é preciso determinar a quebra do toro sem *shear* central

Conforme aumentamos a perturbação no MPNT, o caos espalha-se pelo espaço de fases e para alguns conjuntos de parâmetros, pode-se observar a ruptura da curva sem *shear*. No limite de sua ruptura, o toro sem *shear* age como uma barreira de transporte no sentido em que as órbitas existentes acima ou abaixo da barreira, permanecem sempre por lá. Portanto, a quebra da curva sem *shear* está relacionada ao transporte pela disseminação do caos no espaço global.

Para analisar o conjunto de parâmetros para os quais a curva sem *shear* está rompida, estudamos o espaço dos parâmetros (a, b). Existem muitas formas de se calcular o diagrama da quebra da curva sem *shear*. Aqui, nós utilizaremos um método baseado no teorema de Slater que mostrou-se eficaz e computacionalmente mais eficiente que os demais.

O Teorema de Slater [Sla67]: *Para qualquer intervalo de tamanho* ϵ *de uma trajetória quase-periódica, existem no máximo três diferentes tempos de recorrência:* Γ_1, Γ_2 *e* $\Gamma_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Assim, para qualquer intervalo de um toro irracional (curva invariante), tem-se no máximo três diferentes tempos de retorno, sendo um deles a soma dos outros dois. Além disso, ao menos dois diferentes tempos de recorrência são denominadores consecutivos na expansão em frações contínuas do número de rotação irracional ω correspondente ao toro. Perceba que o teorema de Slater não impõe nenhuma restrição quanto ao tamanho do intervalo ϵ a ser considerado, desde que este não seja o intervalo completo do toro quase-periódico no espaço de fases.

O método para adequar o resultado do teorema de Slater ao problema da quebra da curva sem *shear*, consiste em contar os números dos diferentes tempos de retorno pertencentes a uma região arbitrária por onde passa o toro sem *shear*. Para o MPNT nós usamos o ponto indicador $P_0^1 = (1/4; b/2)$, como condição inicial centrada em uma caixa de tamanho $\epsilon = 0.002$. O toro é rompido sempre que os diferentes tempos de retorno violarem as condições do teorema de Slater. A implementação desse método para o estudo da quebra da curva sem *shear* no MPNT torna-se bem simples devido à existência dos

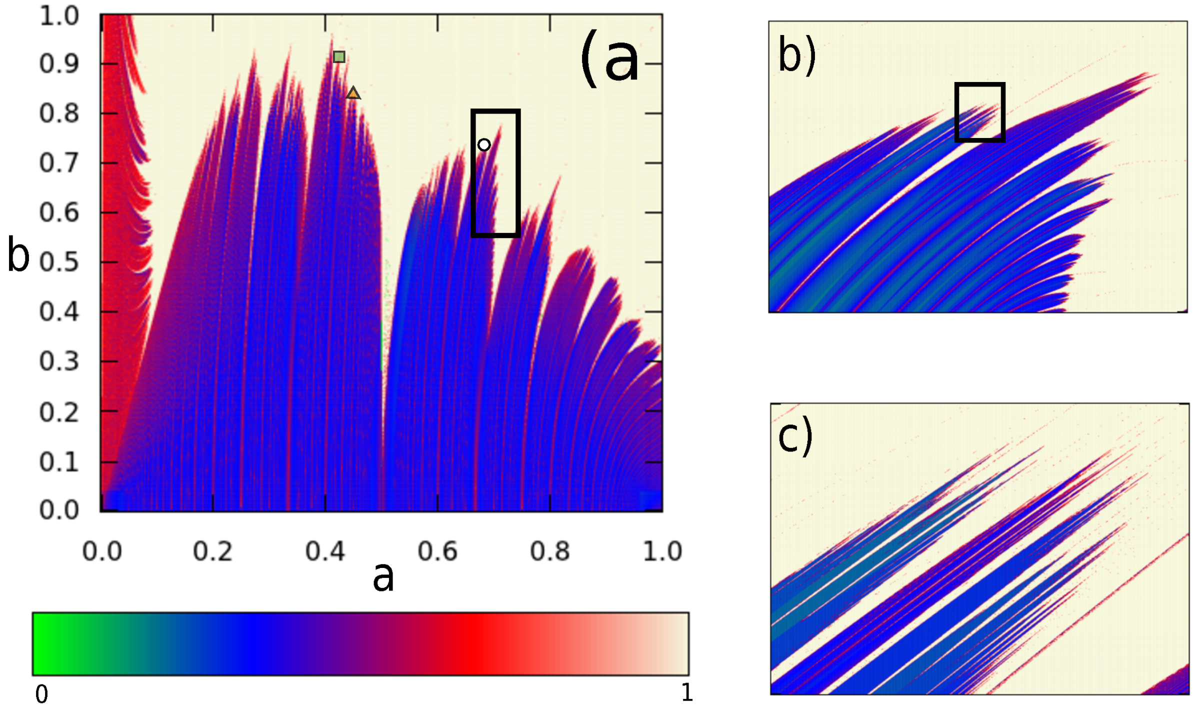


Figura 3.5: (a) Espaço de parâmetros (a, b) do MPNT realizado a partir do teorema de Slater. O maior tempo de recorrência observado para cada valor de (a, b) foram plotados em cores. As figuras (b) e (c) referêm-se às sucessivas ampliações dos quadros especificados em preto.

pontos indicadores (PIs) que asseguram que nossa condição inicial pertence realmente ao toro sem *shear*. A figura 3.5 mostra os resultados da aplicação desse método.

A região colorida na figura 3.5 indica os parâmetros nos quais a curva sem *shear* ainda existe, enquanto a região branca refere-se à não existência da mesma. De fato, as cores na figura 3.5 fazem menção ao maior tempo de retorno (normalizado) dentre os três possíveis quando a curva invariante está intacta. Neste caso, percebe-se que a região da esquerda (vermelha) do espaço dos parâmetros é em sua maioria caracterizada por toros cujos tempos de retornos de Slater são maiores do que a parte central (azul). É possível constatar, também, algumas linhas vermelhas sobre a região tipicamente azul. Tais linhas possuem o mesmo perfil das linhas de bifurcações analíticas apresentadas em [SA97] para processos de reconexão das cadeias gêmeas com número de rotação racional q/p.

A borda limite entre a existência da curva sem *shear* e da não existência da mesma não é homogênea e aparenta ser uma estrutura fractal, como mostram as sucessivas ampliações da figura 3.5 (b) e (c). A fractalidade da borda da figura 3.5 indica que, nessa região, ligeiras alterações nos parâmetros podem alterar a estabilidade da curva sem *shear*. No mesmo gráfico, indicamos três pontos referentes aos valores de parâmetros (a, b) relacionados com a quebra da curva sem *shear* cujos números de rotação são dados por: $\omega = [0, 1, \overline{1}]$ (círculo preto); $\omega = [0, 2, \overline{1}]$ (quadrado verde); $\omega = [0, 2, 2, \overline{1}]$ (triângulo laranja). Os valores estimados na literatura para a quebra da curva sem *shear* nestes pontos são:

$$\frac{1}{\gamma} = [0,1,\overline{1}] = \begin{cases} a = 0.686049108 \\ b = 0.7424935491552; \end{cases} \qquad \frac{1}{\gamma^2} = [0,2,\overline{1}] = \begin{cases} a = 0.425160543 \\ b = 0.0.9244636470355; \end{cases}$$

$$\frac{\gamma^2}{(1+2\gamma^2)} = [0,2,2,\overline{1}] = \begin{cases} a = 0.45297741955 \\ b = 0.8458291399945. \end{cases}$$

Para mostrarmos o quão robusto é o teorema de Slater, apresentamos na tabela 3.1 os tempos de retorno para os três números nobres citados acima. Os dados da tabela 3.1 foram obtidos após 10^5 iterações do MPNT a partir de uma única condição inicial. Perceba que no caso dos números nobres, os três tempos de retorno encontrados são denominadores consecutivos da expansão do número irracional correspondente em frações contínuas (ver tabela 3.2).

Tabela 3.1: Tempos de recorrência de Slater para três diferentes toros cujos números de rotação são dado por números nobres. Os tempos de recorrência obtidos estão, diretamente, relacionados com o tamanho $\epsilon = 0.002$ da caixa ao redor de P_0^1.

número	Γ_1	Γ_2	Γ_3
$\frac{1}{\gamma}$	13	21	34
$\frac{1}{\gamma^2}$	55	89	144
$\frac{\gamma^2}{(1+2\gamma^2)}$	50	81	131

Tabela 3.2: Expansão em frações contínuas para três diferentes números nobres. Perceba que os números recolhidos na aplicação do teorema de Slater (tabela 3.1) aparecem, sequencialmente, em algum momento da expansão de seu respectivo número nobre.

	a_i	Truncamento		a_i	Truncamento		a_i	Truncamento
$\frac{1}{\gamma}$	0	0	$\frac{1}{\gamma^2}$	0	0	$\frac{\gamma^2}{(1+2\gamma^2)}$	0	0
	1	1		2	1/2		2	1/2
	1	1/2		1	1/3		2	2/5
	1	2/3		1	2/5		1	3/7
	1	3/5		1	3/8		1	5/12
	1	5/8		1	5/13		1	8/19
	1	8/13		1	8/21		1	13/31
	1	13/21		1	13/34		1	21/50
	1	21/34		1	21/55		1	34/81
	1	34/55		1	34/89		1	55/131
	1	55/89		1	55/144		1	89/212

A figura 3.5 fornece uma visualização superficial sobre a quebra do toro sem *shear* e, consequentemente, a transição para o caos global. Diferente do que ocorre para o mapa padrão *twist*, o toro cuja rotação é dado pela razão áurea não é sempre o último a ser quebrado. Ao contrário, há uma ampla variedade de valores nos quais os toros sem *shear* são quebrados, de fato, é provável que estes valores devem ser tão densos quanto o próprio intervalo dos números reais, ou seja, tem-se uma curva de bifurcação para qualquer valor real que se deseja.

As características topológicas dos espaços de fases cuja curva sem *shear* não está quebrada, representada pela parte colorida na figura 3.5, podem ser sumarizadas pela figura 3.6 (a) $a = 0.420$ e $b = 0.550$, onde verifica-se uma região preenchida por toros invariantes intactos (incluindo a curva sem *shear*) que divide o espaço em duas regiões distintas e desconexas. Na parte central do espaço de fases situa-se a curva sem *shear* que desencadeia seguidos processos de reconexão (par e ímpar) a medida que passa por um valor racional para o número de rotação. A medida em que os parâmetros são modificados a região regular de toros invariantes é dominada por órbitas caóticas, até que o último toro seja destruído. Nesse momento, as regiões anteriormente desconexas no espaço de fases se misturam, ou seja, condições iniciais dadas na parte de cima tem acesso a parte de baixo do espaço de fases e vice-versa (ver figura 3.6 (b) com $a = 0.595$ e $b = 0.4665$). Na região onde existia a curva sem *shear* estabilizam-se ilhas regulares que agem como uma barreira parcial devido ao aprisionamento em torno delas [JCL+09, JCLV12].

Na figura 3.6 (c) apresentamos um resultado atípico para o MPNT, pois como mostra o espaço de fases e a amplificação à direita, a curva sem *shear* quebrou-se antes de outros toros que ainda permanecem. Ressaltamos que a curva sem *shear* quebrada em destaque pela figura 3.6 (c) foi obtida a partir de uma única condição inicial dada por: $P_0^1 = (1/4; b/2)$. Na região ao redor dos parâmetros $a = 0.523$ e $b = 0.4665$ da figura 3.5, alguns trabalhos [WAFM05, FWAM06] indicam que a curva sem *shear* não está quebrada ao contrário do nosso resultado, no entanto, o espaço de fases da figura 3.6 (c) mostra, claramente, a quebra da curva e corrobora com resultado obtido através do método de Slater. É possível que o método baseado no teorema de Slater seja mais eficaz que os demais métodos por tratar somente a curva sem *shear*, ou seja, não leva em consideração os toros invariantes ao seu redor. Porém, a precisão do método de Slater depende de fatores numéricos e, em especial, do tamanho ϵ da região de recorrência. De fato, determinar um tamanho ideal para tal região constitui na maior dificuldade do método, uma vez que modificações sutís podem levar à diferentes resultados. Isso não significa que o teorema de Slater contém falhas e sim que não estamos escolhendo adequadamente uma região contínua de tal forma que, a curva invariante em questão, esteja passando um única vez pela região determinada.

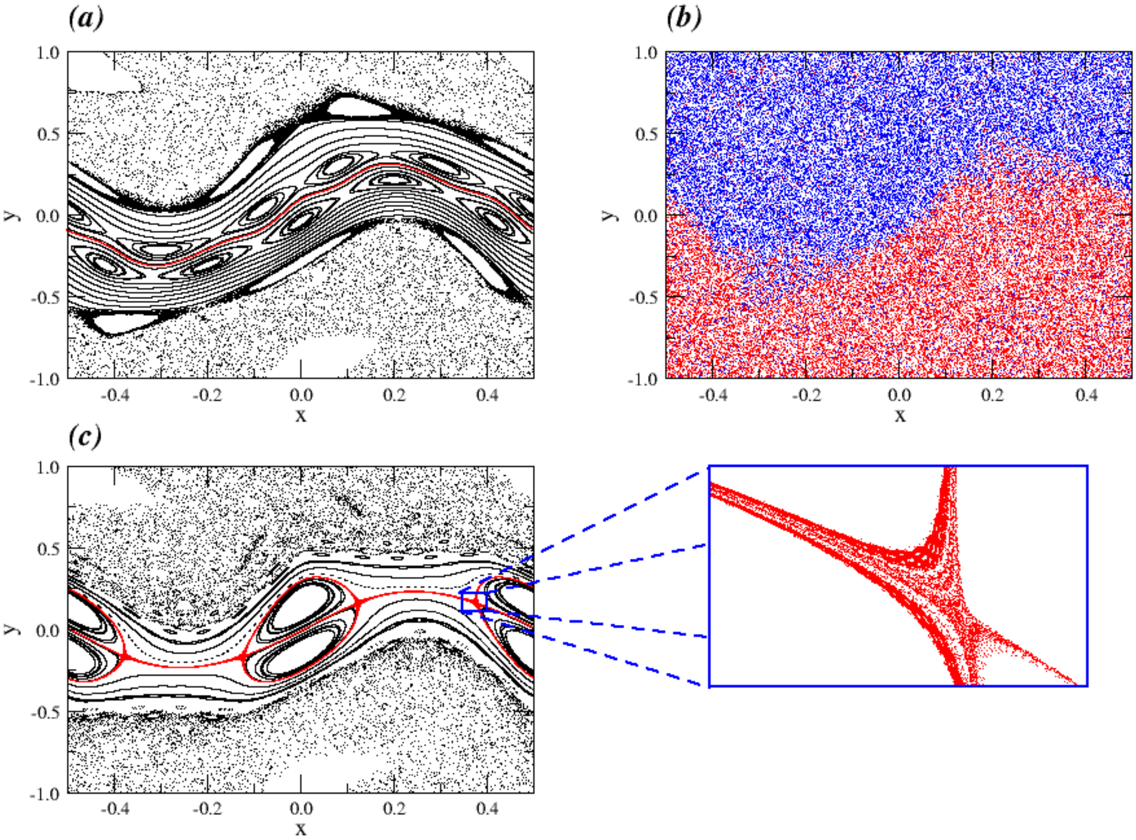


Figura 3.6: Espaço de fases com parâmetros: (a) $a = 0.420$ e $b = 0.550$, enfatizando um cenário onde a curva sem *shear* está intacta; (b) $a = 0.595$ e $b = 0.689$, a curva sem *shear* está quebrada e condições iniciais dadas na parte de cima do espaço de fases (azul) conseguem alcançar a parte de baixo (vermelho) e vice-versa. O cenário em (c) com $a = 0.5230$ e $b = 0.46665$ indica uma possibilidade de que a curva sem *shear* se quebre antes dos demais toros invariantes.

Capítulo 4

Fenômenos não-twist localizados

Este capítulo descreve a presença dos fenômenos não-*twist* em sistemas hamiltonianos gerais. Um formalismo matemático que desvenda essa possibilidade é discutido na seção 4.1, no qual introduzimos um método numérico correspondente. As seções seguintes trazem as aplicações desse método numérico em três diferentes exemplos: (i) padrão não-*twist* (seção 4.2), (ii) padrão *twist* e (iii) bilhar anular (seção 4.3).

4.1 Formas normais e uma aproximação numérica

Sobre o ponto de vista topológico, os espaços de fases de mapas *twist* e não-*twist* possuem algumas diferenças como aquelas identificadas no capítulo anterior. No entanto, existe a possibilidade de encontrarmos, pelo menos localmente, fenômenos não-*twist* em sistemas *twist*. Essa ideia foi desenvolvida em [DMS99] através de um formalismo matemático em torno do ponto elíptico conhecida como forma normal. Quando o número de rotação ω de um ponto elíptico é irracional a forma é dita forma normal de Birkhoff.

Para mapas simpléticos com um ponto elíptico, a forma de Birkhoff é dada por:

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\Omega(J), \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde o número de rotação é

$$\Omega(J) = \omega + \gamma_0 + \gamma_1 J + ..., \tag{4.2}$$

sendo γ os coeficientes *twist* de Birkhoff.

Quando o número de rotação Ω é uma função monotônica de J, é equivalente dizer que os coeficientes γ não desaparecem e o mapa correspondente é chamado *twist*. Ao contrário, quando os coeficientes *twist* γ desaparecem o sistema é não-*twist* e apresenta a topologia discutida no capítulo anterior. Portanto, os fenômenos não-*twist* podem aparecer em sistemas *twist* se houver a possibilidade da anulação dos coeficientes da forma normal de Birkhoff. Segundo Dullin et. al [DMS99], isso pode ser feito em qualquer mapa e, genericamente, espera-se o surgimento de um toro sem *shear*. Esse toro sem *shear*, não previsto pelo teorema KAM, colide com uma bifurcação centro-sela [DI05] criando uma órbita de período - 3.

Os cálculos que envolvem a obtenção do mapa na forma normal de Birkhoff, bem como os cálculos para a anulação de seus coeficientes são bem extensos, complexos e não serão detalhados nesta tese. Ressaltamos porém, que devido ao árduo trabalho analítico, as formas normais podem não apresentar benefícios quando o sistema em estudo é representado por mapas mais elaborados, como por exemplo aqueles introduzidos para descrever sistemas quase-integráveis em fluidos e plasmas. Assim, seria útil introduzir um procedimento numérico para identificar tais curvas não-*twist* locais. Neste capítulo, nós analisaremos um procedimento numérico baseando-se na variação dos perfis do número de rotação classificados próximo ao ponto elíptico, o qual denominamos número de rotação interno, ω_{in}.

O número de rotação interno é similar ao definido em (2.24), no entanto, ele nos proporciona medir a rotação de cada toro mediante a um ponto elíptico de uma ilha regular. Sendo assim, ele pode ser definido como

$$\omega_{in} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x,y)\hat{\theta}P_{n+1}(x,y), \tag{4.3}$$

onde $P_n\hat{\theta}P_{n+1}$ significa o ângulo θ entre dois pontos consecutivos e (x, y) são as coordenadas do mapa bi-dimensional. O ângulo θ está normalizado por 2π para que os valores retornados pertençam ao intervalo [0,1]. Desta forma, um número racional de rotação interna (q/p) representa uma órbita periódica enquanto um número irracional representa uma órbita quase-periódica. As órbitas caóticas não convergem, igualmente ao caso do número de rotação global.

Para o nosso propósito, o principal objetivo do número de rotação interno é medir a rotação de um toro dentro de uma ilha regular que, possa pertencer a uma cadeia de ilhas. Assim, o número de rotação interno, ω_{in}, tem a mesma conotação do número de rotação Ω da forma normal de Birkhoff e espera-se que um possível perfil não monotônico do sistema, ou seja, um perfil caracterizado pela presença de pelo menos um ponto de máximo ou mínimo, seja equivalente à anulação dos coeficientes de Birkhoff.

Neste capítulo, nós estudamos a aplicabilidade do número de rotação interno em ilhas regulares locais nos mapas *(i)* padrão não-*twist*, *(ii)* padrão *twist* e no *(iii)* bilhar anular.

Os sistemas *(i)* e *(ii)* representam comportamentos gerais de sistemas do tipo não-*twist* e *twist* respectivamente, e, portanto, servem como base para diferentes sistemas. No entanto, veremos através do exemplo *(iii)* que algumas alterações podem surgir conforme a complexidade e o número de parâmetros do sistema aumenta.

4.2 Exemplo 1: mapa padrão não-twist

Muitos estudos relatam a presença global do toro sem *shear* em sistemas não-*twist*, como discutimos no capítulo 3. Nesta seção, investigamos ressonâncias secundárias do sistema a fim de analisar topologias não-*twist* que possam existir no espaço de fases.

Começaremos explorando a possibilidade de encontrar um toro sem *twist* ao redor de um ponto elíptico de uma ilha. Referimo-nos a estes toros como toros sem *shear* secundários devido à sua topologia similar à estrutura sem *shear* global.

Na figura 4.1, apresentamos quatro espaços de fases que representam a evolução de apenas uma ilha que pertence a uma corrente de período - 2. Em todas as figuras, nós fixamos $b = 0.8$ e alteramos o parâmetro a no intervalo $a \in [0.5430; 0.5517]$. Esse intervalo foi considerado, pois, verificamos o surgimento de uma bifurcação tripla, sugerindo a presença de um toro sem *shear* secundário [DMS99]. Enfatizamos que este não é o único intervalo de parâmetros onde se encontra bifurcações triplas de um ponto elíptico. De fato, para o mapa padrão não-*twist* existe um número expressivo delas em outros intervalos. Do lado direito de cada espaço de fases da figura 4.1, nós mostramos o perfil do número de rotação interno, calculado com 400 condições iniciais ao longo da linha $X = 0$ dentro da ilha. Na figura 4.1 (a) com $a = 0.543$, observamos que os toros dentro das ilhas apresentam um perfil monotônico de rotação, ou seja, cada toro possui um valor específico de rotação, formando uma curva contínua. O ponto mais alto da curva, neste caso marcado por uma linha tracejada azul, refere-se ao ponto elíptico.

A figura 4.1 (b), com o parâmetro a, ligeiramente modificado ($a = 0.5485$), apresenta um perfil de rotação interno com a presença de dois novos picos acima do ponto elíptico, que agora é um ponto de mínimo de um vale. O novo perfil é dito não-monotônico, pois alguns valores de rotação estão relacionados a mais de um toro. Sendo assim, o topo do novo pico indica a presença de um toro sem *twist*, ou seja, um toro sem *shear* secundário.

A evolução do toro sem *shear* pode ser observada pelas figuras seguintes. Note que na figura 4.1 (c) os círculos invariantes estão mais deformados e o seu perfil de rotação apresentam picos mais evidentes com rotações maiores. Finalmente, na figura 4.1 (d), nós temos uma bifurcação tripla que surgiu de um toro sem *shear* a partir de uma bifurcação centro-sela. Devido à nossa linha de condições iniciais, o pico do lado esquerdo representa a separatriz da bifurcação, enquanto o pico direito indica uma saturação em $\omega_{in} = 1/3$.

O leitor pode pensar que a presença de um toro sem *shear* secundário no MPNT é um fenômeno esperado, uma vez que, estamos estudando um fenômeno não-*twist* em um

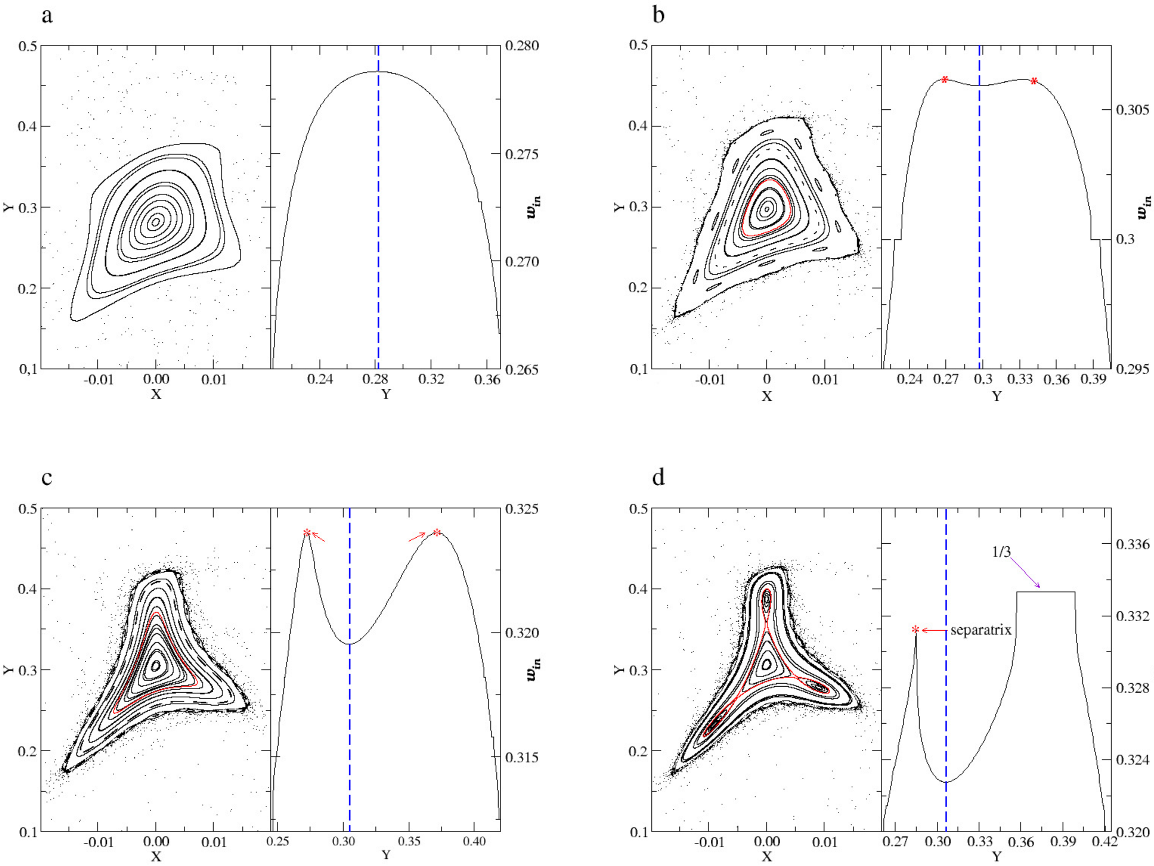


Figura 4.1: Evolução de uma ilha regular do mapa padrão não-*twist* com seus respectivos números de rotação interno. Em todos os casos foram usados $b = 0.8$. Em (a) temos $a = 0.543$; (b) $a = 0.5485$; (c) com $a = 0.551$. A figura (d) com $a = 0.5517$ mostra a bifurcação tripla.

mapa também não-*twist*. Entretanto, ressaltamos que este fenômeno nunca foi mostrado no MPNT, e, sendo a formação de uma órbita de período - 3 a partir de uma bifurcação *genérica* do tipo centro-sela, esperamos encontrar o mesmo fenômeno também em mapas *twist*. Na próxima seção, faremos um estudo mais detalhado sobre o surgimento do toro sem *shear* secundário em um sistema tipicamente *twist*.

4.3 Exemplo 2: mapa padrão-twist

O mapa padrão *twist* (MPT), já apresentado na subseção 2.3.2, é definido como:

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n + \frac{K}{2\pi} sin(2\pi\theta_n), \qquad mod 1 \\ \theta_{n+1} &= \theta_n - J_{n+1}, \qquad mod 1 \end{aligned}$$

onde $K \geq 0$ é o parâmetro de não-linearidade do mapa. Vale lembrar que o MPT é um mapa *twist* pois, $\partial\theta_{n+1}/\partial J_n \neq 0$.

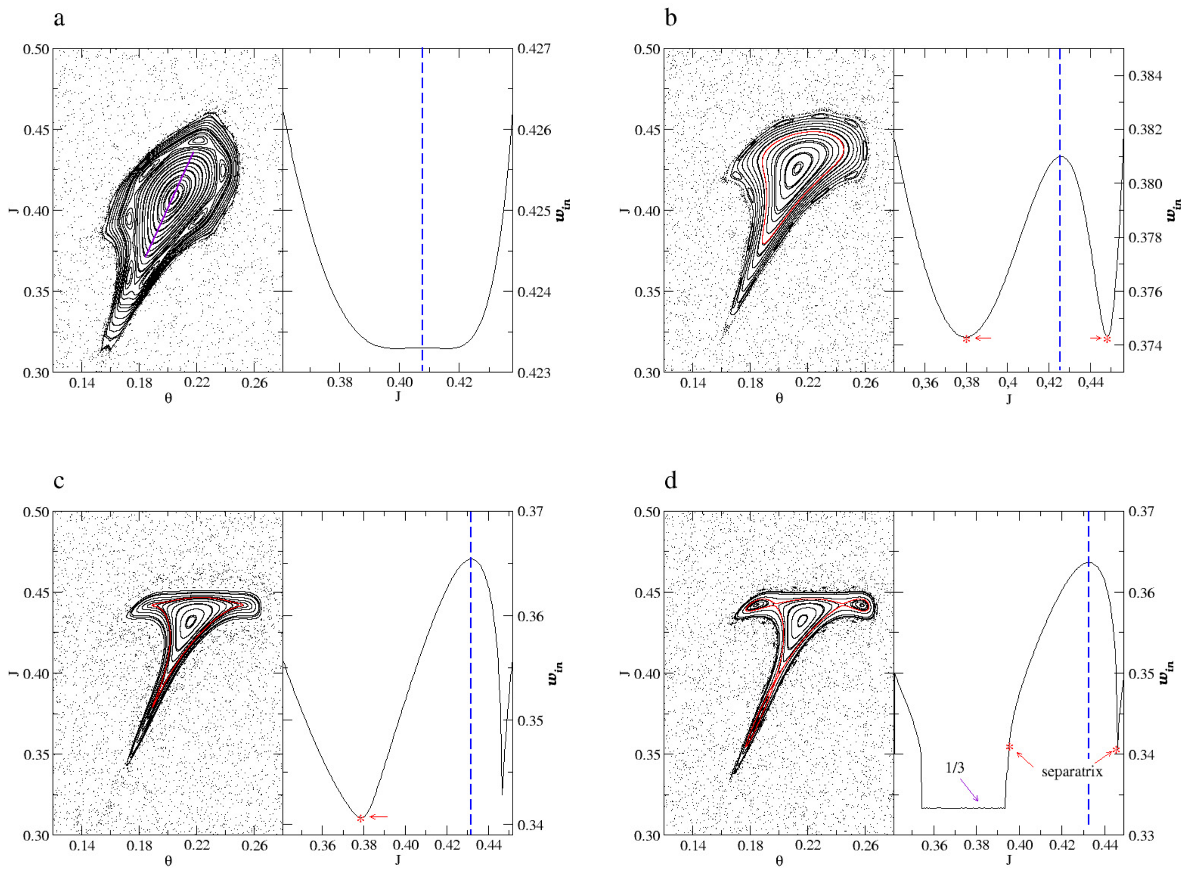


Figura 4.2: Ilha estável do MPT (left) com seus números de rotação internos relacionados (right). Em (a), com K=5.35 o perfil é monotônico. Na Figura (b) K= 5.50 e (c) com K=5.554, observa-se a presença a presença do toro SS. Na Figura (d) K=5.56, mostramos a criação da órbita periódica de período - 3.

Neste capítulo, nós estudamos o MPT para altos regimes perturbativos (grandes valores de K). O espaço de fases estudado consiste de duas ilhas principais imersas no mar de caos, porém, para estudar o número de rotação interno, seguimos apenas uma das ilhas.

4.3.1 Bifurcação tripla

A figura 4.2 mostra a evolução de uma das ilhas durante o intervalo $K = 5.35$ e $K = 5.56$. Na diagonal $J = 2\theta$ (curva tracejada na figura 4.2 (a)), foram colocadas as condições iniciais para o cálculo do número de rotação interno. Na Figura 4.2 (a) o perfil do número de rotação é monotônico, característico de sistemas *twist*. Ao aumentarmos o valor para $K = 5.50$, observamos o surgimento de dois novos vales como indica a figura 4.2 (b). Um ponto de mínimo no perfil de rotação sugere a presença de um toro sem *twist* no local. A presença do toro sem *shear* secundário, não é aceita nas teorias dos mapas *twist*, o que significa, por exemplo, que a condição *twist* (2.19) não vale nessa região do espaço de fases.

A figura 4.2 (c) mostra a diminuição do valor do número de rotação interno. Quando o perfil de rotação alcança o valor $\omega_{in} = 1/3$, existe uma bifurcação tripla dentro da ilha principal como mostra a figura 4.2 (d) com $K = 5.56$.

No intervalo onde o toro sem *shear* existe, deve existir infinitos valores racionais do número de rotação. Quando um toro invariante do tipo sem *shear* cruza um número de rotação racional, há bifurcações típicas de sistemas não-*twist*, como o processo de reconexão apresentado na subseção 3.2.2. Na próxima seção, descrevemos um processo de reconexão local devido à existência do toro sem *shear* secundário.

4.3.2 Reconexão local

Entre as figuras 4.2 (a) e (b), o número de rotação interno do toro sem *shear* secundário, identificado anteriormente no MPT, passou pelo número racional $\frac{4}{10}$. Embora existam muitos valores racionais no mesmo intervalo, esse valor é o racional de mais baixa ordem no intervalo considerado e portanto, estará mais visível no espaço de fases. Nas proximidades do valor $\omega = \frac{4}{10}$, pode haver bifurcações não-*twist*, como mostraremos a seguir.

Quando $K = 5.428313$ (figura 4.3 (a)), existe um pequeno intervalo ao redor do ponto elíptico no qual o toro sem *shear* sofre novas torções. Na figura 4.3 (b), com o parâmetro de não-linearidade ligeiramente modificado para $K = 5.428320$, existe uma bifurcação centro-sela $\frac{4}{10}$. Logo depois, surge uma nova bifurcação centro-sela $\frac{4}{10}$, formando quatro órbitas periódicas $\frac{4}{10}$, sendo duas estáveis (elípticas) e duas instáveis (hiperbólicas) como observamos na figura 4.3 (c) com $K = 5.428330$. Devemos ressaltar que o espaço de fases apresenta dez órbitas periódicas que formam uma cadeia de ilhas após quatro voltas ao redor do ponto elíptico central, portanto, o número de rotação é escrito como $\frac{4}{10}$ e não simplesmente $\frac{2}{5}$.

Na figura 4.3 (d) com $K = 5.428340$, a variedade estável e instável das duas órbitas instáveis $\frac{4}{10}$ sofrem uma reconexão. Finalmente, as figuras 4.3 (e) e (f) mostram o desacoplamento das correntes de ilhas.

Em particular, o cenário descrito acima (figura 4.3) é típico dos processos de reconexão de período ímpar que ocorrem, globalmente, em sistemas não *twist*. Como visto na subseção 3.2.2, o perfil do número de rotação para o cenário de período - ímpar é caracterizado pelo surgimento de uma curva sem *shear* exterior em adição àquela já existente [WAFM05]. Isto significa que na figura 4.3 (a), o pico principal verificado na figura 4.2 gera outras duas curvas sem *shear* exteriores para dar origem às duas cadeias de ilhas $\frac{4}{10}$. Ressaltamos que mesmo analisando a aplicação de outros parâmetros em cadeias de diferentes períodos, o cenário ímpar foi o único presente. Esse cenário também foi verificado em [DMS99] e [dWW88] para o mapa de Henón, logo podemos conjecturar que na presença de uma sem *shear* secundária, qualquer valor racional q/p realizam processos de reconexão do tipo ímpar, caracterizado por cadeias de ilhas dimerizadas.

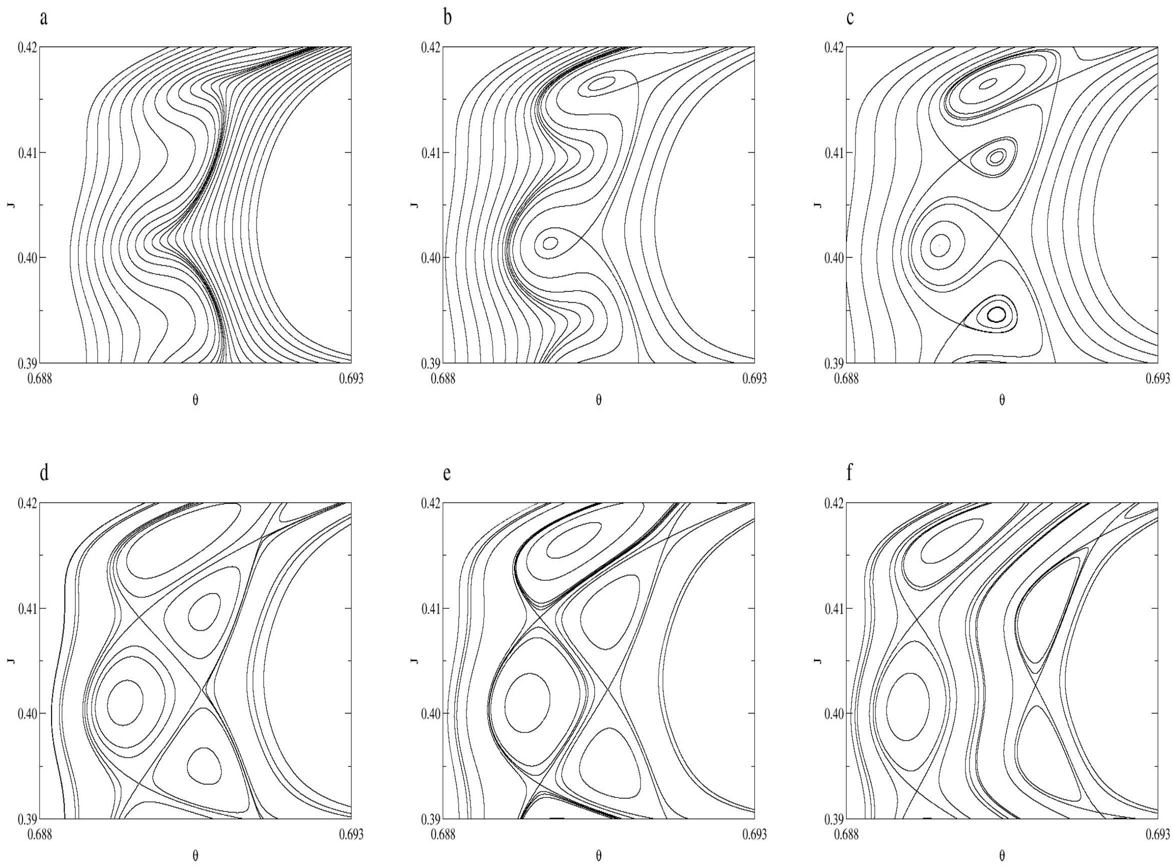


Figura 4.3: Processo de reconexão do toro sem *shear* próximo a um ponto elíptico do MPT. A sequência de bifurcações é: (a) torção, K=5.428313; (b) centro-sela $\frac{4}{10}$, K=5.428320; (c) nova centro-sela $\frac{4}{10}$, K=5.428330; (d) processo de reconexão, K=5.428340; (e) K=5.428343 and (f) K=5.428352 desacoplamento.

O cenário descrito acima é típico de sistemas não-*twist*. Entretanto, nós estamos estudando um mapa *twist* cujas propriedades globais estão relacionadas aos teoremas que consideram a hipótese da não-degenerescência das frequências, ou seja, a validade da condição *twist* (2.19). De fato, isso não significa que precisamos reavaliar as teorias para mapas *twist*, mas sabemos que ao menos localmente, para alguns intervalos dos parâmetros, existe a possibilidade de romper alguns comportamentos.

4.3.3 Bifurcação quádrupla

Além do caso da bifurcação não-*twist* que conduz a uma bifurcação tripla, nós encontramos o surgimento de um novo toro sem *shear* secundário ao redor de uma bifurcação quádrupla (veja figura 4.4 (a) - (c)). Neste caso, a bifurcação quádrupla acontece antes da bifurcação tripla do ponto elíptico e até onde sabemos, representa uma novidade diante das previsões analíticas [DMS99] embora muitos cogitassem sobre o assunto [dWW88, Moe90].

A figura 4.4 (c), para $K = 5.074$, mostra a estrutura de uma ilha cujo ponto elíptico passou por uma bifurcação quádrupla e é formada por dois pares independentes contendo duas órbitas periódicas estáveis. Para ilustrar como essa bifurcação acontece, nós apresentamos o perfil do número de rotação interno na figura 4.4 (d) para valores entre $K = 5.0650$ e $K = 5.714$. Para calcular os perfis foi escolhido um conjunto de condições iniciais dispostos sobre a linha de simetria $2J = -\frac{K}{2\pi} sin(2\pi\theta)$ que cruza um dos pares de ilhas (veja linha tracejada em vermelho na figura 4.4 (c)).

No primeiro perfil de rotação, $K = 5.0650$, observamos o nascimento de duas saliências, caracterizadas por um ponto de máximo e um de mínimo que correspondem, portanto, a duas diferentes curvas sem *shear* secundárias. Consequentemente, como indicado na figura 4.4 (d), o mesmo valor do número de rotação pode repetir em até três vezes. Para $K = 5.0714$, o ponto de mínimo alcança o valor racional $\omega_{in} = 1/2$ gerando dois pontos fixos estáveis, enquanto o ponto de máximo ainda existe e não bifurca em nenhum valor racional de baixa ordem.

A bifurcação quádrupla, remanescente de uma bifurcação não-*twist* de um dos dois toros sem *shear* presentes, não era prevista pela literatura. Além disso, a sua identificação deixa em aberto a possibilidade de encontrarmos essas bifurcações atípicas para diferentes bifurcações.

A presença de mais de uma curva sem *shear* foi estudada na Ref. [WAFM05] para o mapa padrão não *twist*. O surgimento de duas ou mais curvas sem *shear* levam a cenários de reconexões que diferem dos cenários par e ímpar apresentados em 3.2.2. Infelizmente, devido à alta ordem dos racionais presentes no intervalo onde as curvas sem *shear* existem, nós, ao menos por enquanto, não fomos capazes de observar o processo de reconexão ligado a este tipo de bifurcação.

4.4 Exemplo 3: bilhar anular

Bilhares são sistemas dinâmicos cujo domínio (geometria) bi-dimensional limita o movimento de uma partícula puntiforme. Consideremos que tal partícula sofra colisões elásticas com a fronteira. Assim, como a energia é conservada, o movimento é completamente determinado pela sequência de pontos nos quais a partícula atinge a fronteira. O mapa obtido preserva a área do espaço de fases nas coordenadas de Birkhoff $(\theta, sin\alpha)$, onde a posição da colisão com a fronteira é definida pelo tamanho do arco θ e a direção do movimento pelo ângulo α entre a tangente da fronteira e a trajetória.

Neste exemplo, nós definimos fronteiras compostas por dois círculos circunscritos, sendo um de raio $R = 1$ e o outro de raio r com $(r < R)$, dispostos de acordo com um parâmetro, d, que mede a excentricidade entre ambos os centros. A este sistema chamamos bilhar anular [BBdCM93], onde uma partícula desenvolve um movimento livre na parte anular (veja esquema do bilhar anular apresentado na figura 4.5). As trajetórias são classificadas em dois grupos: aquelas que não cruzam o raio $a = r + d$ e, portanto, coli-

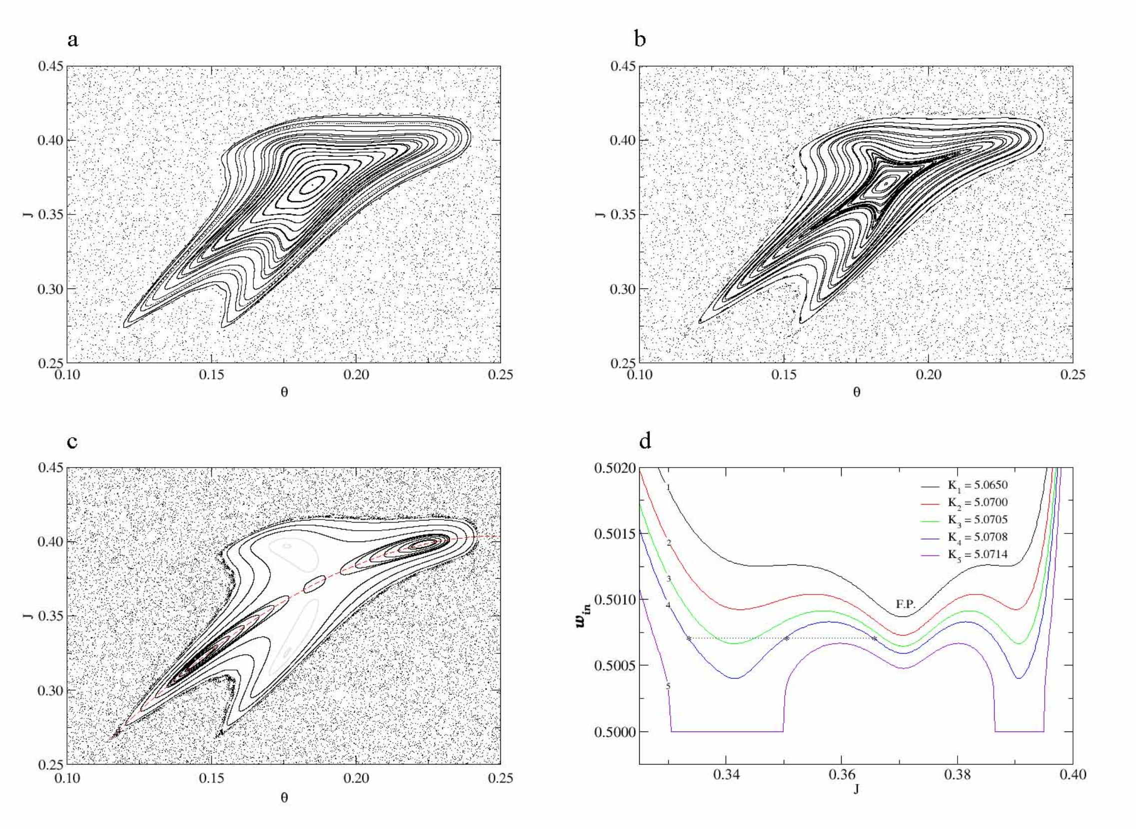


Figura 4.4: As figuras de (a) - (c) enfatizam o nascimento de uma órbita de período - 4. (a) $K = 5.065$, (b) $K = 5.071$ e (c) $K = 5.074$. A linha pontilhada na figura (c) indica a simetria $2J = -\frac{K}{2\pi} sin(2\pi\theta)$ usada para dispor as condições iniciais do cálculo do número de rotação interno, ω_{in}. (d) Perfis do número de rotação interno para diferentes valores de K próximos a bifurcação quádrupla, caracterizada pela presença de duas curvas sem *shear*. A linha pontilhada na curva 4 indica o mesmo valor do número de rotação para três toros diferentes.

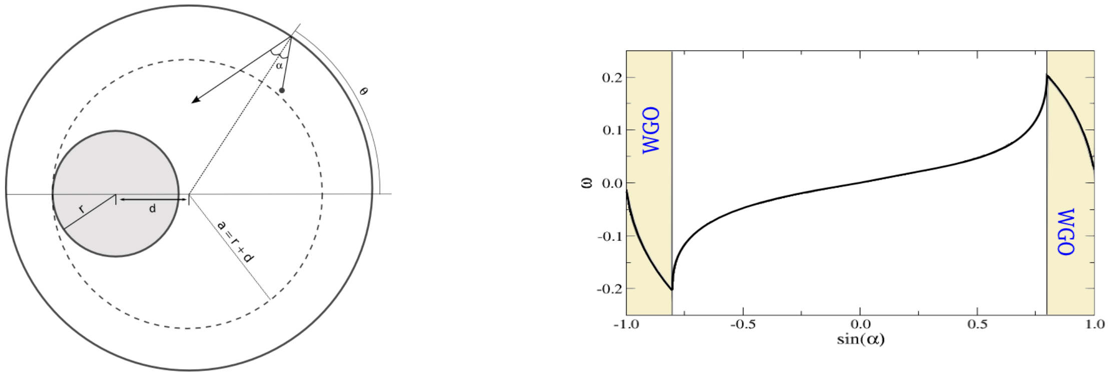


Figura 4.5: Esquema do bilhar anular (esquerda) e o número de rotação de suas trajetórias para o caso concêntrico, $d = 0$ (direita).

dem apenas com a fronteira externa, permanecendo na componente integrável do sistema chamada também por *whispering gallery orbits* (WGOs), e aquelas que eventualmente colidem com o círculo espalhador (círculo interno) por satisfazer a condição de tangência: $|sen(\alpha) - dsen(\theta - \alpha)| \leq r$.

Quando $d = 0$, o espaço de fases do bilhar anular é completamente preenchido por curvas invariantes que representam as trajetória periódicas e quase-periódicas. Pelo número de rotação (figura 4.5) de um conjunto de condições iniciais, dadas a partir de $\theta = 0$ e $\alpha \in [-\pi/2; \pi/2]$, é possível perceber que no caso concêntrico suas trajetórias desenvolvem um movimento cujo perfil de rotação pode ser desmembrado em dois casos monotônicos. Isso ocorre porque as WGOs (parte sombreada na figura 4.5) possuem um movimento a parte do movimento das trajetórias que atravessam o círculo imaginário $a = r + d$, portanto, os extremos que dividem as duas regiões na figura 4.5 não são pontos sem *shear*, pois estes locais são descontínuos (não-diferenciáveis).

Para $d \neq 0$, surgem trajetórias caóticas na região do espaço de fases $|sin\alpha| < r + d$, ou seja, a região preenchida pelas WGOs pode ser diminuída, mas nunca eliminada pela expansão do mar caótico que surge na região interna do espaço de fases.

Conforme aumentamos a excentricidade o caos expande-se tornando o espaço de fases composto por órbitas caóticas, e também regiões regulares representada pelas: (i) WGOs, (ii) ilhas KAM e (iii) MUPOs do inglês *marginally unstable periodic orbits* (órbitas periódicas marginalmente instáveis) definidas por órbitas periódicas submersas no mar de caos (veja um exemplo de MUPO (1,1) na figura 4.6 e as referências [Alt07, AFM$^+$08]). Na figura 4.6, mostramos um espaço de fases típico do bilhar para $d = 0.5$ e $r = 0.3$. Perceba que a parte caótica está limitada entre $|sin\alpha| < 0.8$ e o espaço de fases é do tipo misto com todas as características que discutimos anteriormente.

Ao acompanharmos a evolução das ilhas KAM formada no espaço de fases do bilhar anular nós identificamos no modelo as bifurcações não-*twist* de período três e quatro devido à existência de um toro (ou dois no caso da bifurcação quádrupla) sem *shear* localizado, como aqueles estudados nas seções anteriores. Contudo, nós ainda encontramos

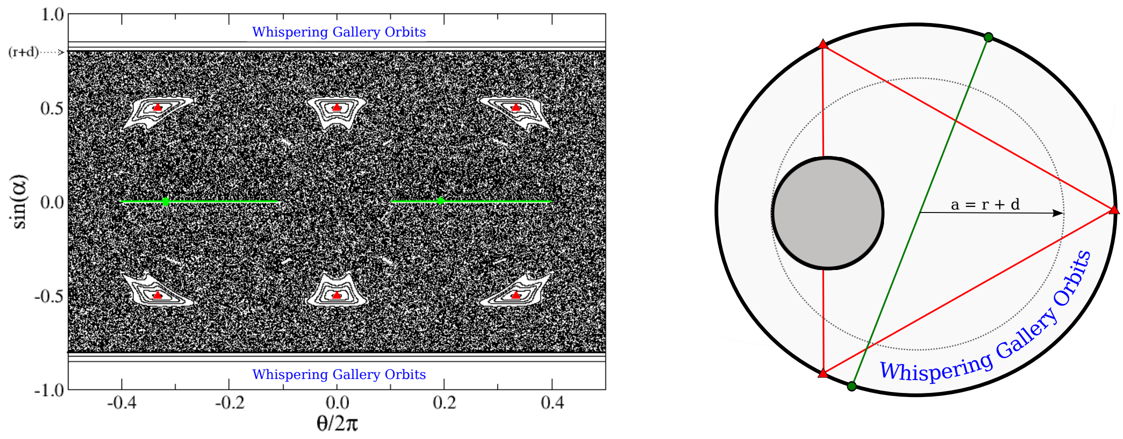


Figura 4.6: Espaço de fases do bilhar anular com $d = 0.5$ e $r = 0.3$. As WGOs estão indicadas nos extremos e um exemplo de MUPO (1,1) pode ser identificada ao centro.

uma bifurcação não-*twist* local de período - 5 que será discutida a seguir.

4.4.1 Bifurcação quíntupla

Uma investigação cuidadosa sobre o número de rotação interno em uma das ilhas pertencentes ao espaço de fases do bilhar anular, apresentou uma nova bifurcação causada pela presença de um toro sem *shear* local cujo período resultante da sua bifurcação é mais alto do que aqueles registrados na literatura e estudados nesta tese até o momento. Neste caso particular, encontramos uma bifurcação de período - 5 com perfil de rotação interno semelhante ao caso de período - 3, ou seja, apenas uma curva sem *shear*. Na figura 4.7 (a) observamos o nascimento de um ponto de máximo no perfil de rotação caracterizando a presença de um toro sem *shear* no local. Tal toro sem *shear* acaba por bifurcar em uma órbita de período - 5 assim que passa pelo número de rotação $\omega_{in} = 0.2$, como mostra a figura 4.7 (b).

A existência de bifurcações ditas não-*twist* de períodos superiores a quatro aumenta a discussão sobre os motivos ou condições para que isto ocorra. A principal suspeita paira sobre o número de parâmetros essenciais ao modelo. Um estudo sobre as formas normais feitas em [DMS99] mostra que os parâmetros do modelo podem ser usados para anular os coeficientes de Birkhoff e consequentemente induzir a presença de toros sem *shear*. No caso do bilhar anular, os parâmetro principais são a excentricidade d, que introduz caos ao sistema e o raio do círculo interno r que, juntos, jogam um papel fundamental para a topologia do espaço de fases. Contudo, cabe ressaltar que o MPNT, também apresenta dois parâmetros principais, a e b, mas não encontramos a bifurcação quíntupla do tipo não-*twist*, ou seja, além da quantidade de parâmetros, pode haver outros motivos para o nascimento dos toros secundários sem *shear* próximos à bifurcações de períodos superiores

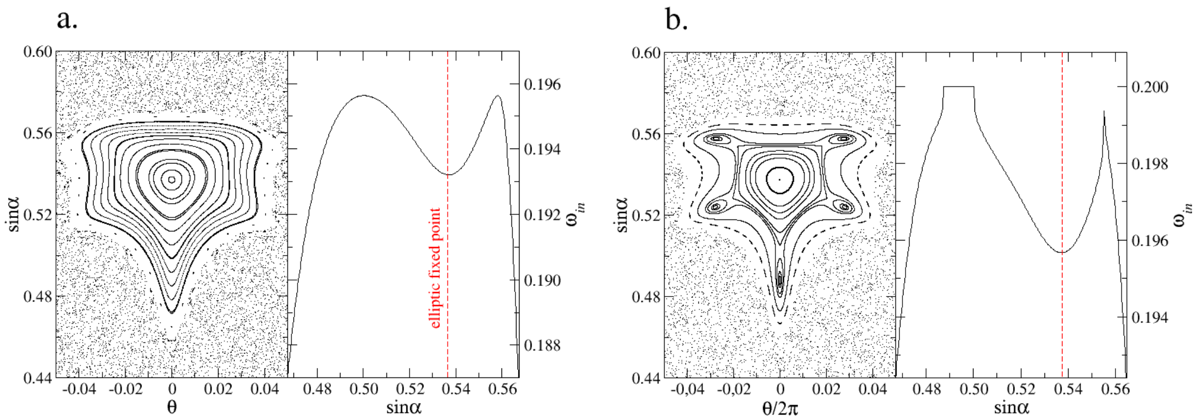


Figura 4.7: Bifurcação não-*twist* de período - 5 de uma ilha KAM do espaço de fases do bilhar anular.

a quatro.

4.4.2 Variações das bifurcações não-*twist*

O estudo das bifurcações locais do tipo não-*twist* em sistemas hamiltonianos apresenta também a possibilidade de encontrarmos as variações de todas as bifurcações que estudamos até o momento. Consideremos o racional m/n onde m representa o número de cadeias em torno do ponto elíptico pertencente a uma órbita de período - n de uma ilha regular, esse racional pode ter diversas formações com o mesmo valor porém, em termos do espaço de fases, isso não significa que teremos a mesma topologia. Por exemplo, se tivermos o valor $\omega_{in} = 0.33\bar{3}$ para o número de rotação interno, podemos ter uma cadeia de ilhas de período três (1/3), mas podemos encontrar também uma órbita de período - 6 formada por duas cadeias distintas de período - 3, ou seja, 2/6. Na figura 4.8 nós apresentamos um exemplo de uma órbita de período - 8 formada pela presença de um toro sem *shear* no espaço de fases do bilhar anular. Podemos perceber que apesar da bifurcação apresentar oito ilhas, elas se dividem em duas cadeias distintas de período - 4. Logo, o valor apresentado pelo número de rotação interno, nesse caso $\omega_{in} = 0.25$, corresponde à 2/8, ou seja, duas cadeias formando uma órbita de período - 8. Embora este caso represente uma bifurcação criada por duas cadeias de órbitas de período - 4, a evolução do perfil de rotação não é o mesmo apresentado por uma bifurcação quádrupla do tipo não-*twist* como estudamos na seção anterior pois, não se constatou a presença de duas curvas sem *shear*, característica aparentemente padrão para a bifurcação quádrupla.

Os procedimentos numéricos usados tanto para medir a rotação global (2.24) quanto para a rotação interna (4.3), de fato, não são capazes de diferenciar as variações das bifurcações, por exemplo, entre 1/4 e 2/8 independente da forma como acontece a bifurcação. Na verdade a própria teoria sobre as bifurcações não distinguem tais variações

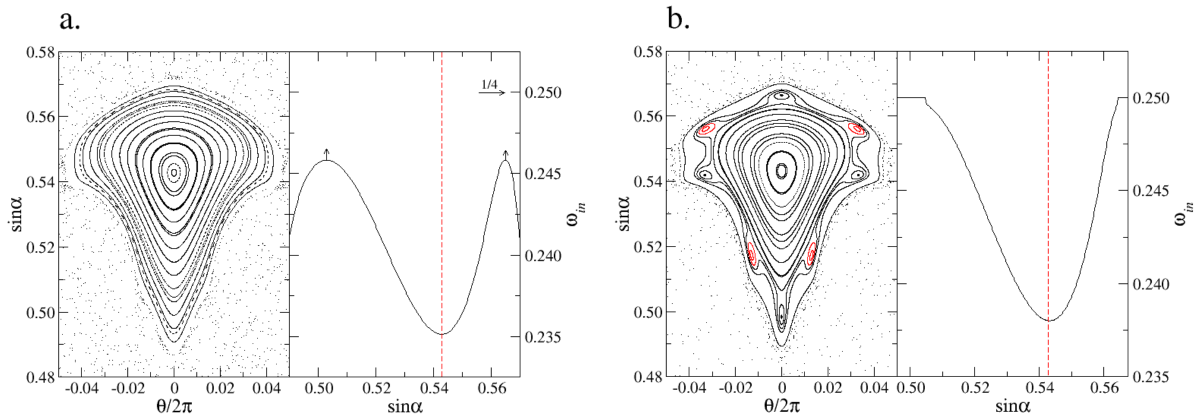


Figura 4.8: Variação de uma bifurcação quádrupla no espaço de fases do bilhar anular. Em (a) temos $d = 0.5490$ e em (b) temos $d = 0.5495$. Em ambos os casos mantemos $r + d = 0.8$.

e um estudo complementar neste sentido pode ser interessante.

4.5 Discussões gerais

Estudamos neste capítulo, através de procedimentos numéricos, a presença dos chamados fenômenos não-*twist* em sistemas hamiltonianos em geral. Vimos que algumas bifurcações que ocorrem dentro das ilhas de regularidades podem não proceder da forma prevista pelo teorema de Poincaré-Birkhoff. Essas novas bifurcações são geradas na presença de um toro sem *shear* local que pode ser identificado pela presença de um ponto de máximo ou mínimo no número de rotação interno. Diante dos exemplos de tais bifurcações estudadas nesta tese e de outros presentes na literatura, cabe o seguinte questionamento: são os fenômenos não-*twist* intrínsecos a qualquer sistema Hamiltoniano? Tudo indica que sim. Sempre restrita às ilhas regulares (ilhas KAM), a presença de um comportamento não-*twist* é esperado [DMS99, AC12]. Outro fato curioso, e que parece corroborar com esta resposta, é que se um mapa $\mathbf{T}$ é *twist* o mapa $\mathbf{T}^2 = \mathbf{T} \circ \mathbf{T}$, ou seja a aplicação do mapa nele mesmo não é, necessariamente, *twist*. Isso pode sugerir que apenas secundariamente (ou em ordem superiores) podemos observar os fenômenos não-*twist* em sistemas *twist*. Cabe ressaltar porém, que os teoremas que adotam a monotonicidade das frequências $(\partial\omega_0/\partial J{=}0)$, como o teorema KAM, não estão errados pois tal condição foi relacionada aos sistemas quase-integráveis.

Capítulo 5

Mapeamento dos campos magnéticos em tokamaks

Neste capítulo, utilizaremos um mapa simplético para linhas de campo magnético em tokamaks, sob a influência de correntes externas de um limitador ergódico. A seção 5.1 apresenta, brevemente, o tokamak e sua geometria. Na seção subsequente, apresentamos o mapa simplético que descreve campos magnéticos em tokamaks com limitadores ergódicos (seção 5.2). As bifurcações na presença de um toro sem *shear*, estudadas no capítulo 4, também foram diagnosticadas no presente modelo na seção 5.2.1. A influência de tais bifurcações no transporte das trajetórias no modelo é apresentada na subseção 5.2.2. Por fim, devido à liberdade apresentada pelo modelo quanto a escolha de um perfil que administra a rotação dos toros, nós estudamos na seção 5.3 tanto um perfil não-monotônico quanto um perfil monotônico com um ponto de inflexão e suas propriedades no espaço de fases.

5.1 O tokamak

Tokamaks[1] são máquinas toroidais nas quais se estabelecem intensos campos magnéticos para o confinamento do plasma. A geometria toroidal é a forma mais simples de se obter um sistema fechado, pela ação de campos magnéticos produzidos por espiras ao redor de uma câmara de vácuo, de forma que as linhas de força fechem-se em si mesmas. No equilíbrio, o campo magnético possui uma componente na direção poloidal (θ) e outra na direção toroidal (Φ). O campo magnético toroidal é gerado por bobinas externas à câmara enquanto o campo poloidal é uma consequência da densidade de corrente do próprio plasma. Dessa forma, o campo magnético resultante formam linhas de campo que se propagam de maneira helicoidal pelo toroide.

[1]A palavra tokamak vem do russo “tok”, “kamera” e “magnit” que significam “corrente”, “câmara” e “magnético”, respectivamente.

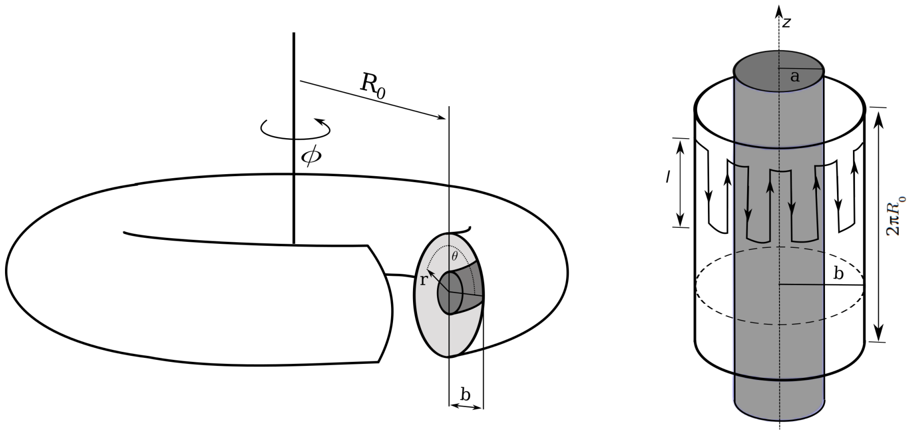


Figura 5.1: A esquerda temos um esquema do tokamak e alguns parâmetros característicos. A figura à direita representa a aproximação cilíndrica realizada para grande razão de aspecto $R_0/b \gg 1$. As setas enfatizam as correntes opostas de um limitador ergódico de tamanho l.

O confinamento magnético de plasmas em tokamaks é uma opção promissora que visa a possibilidade de se construir reatores de fusão termonuclear controlada para geração de energia elétrica [HP02]. Recentemente, este projeto recebeu um grande impulso com o início da construção, por um consórcio de países, do tokamak ITER [2], em Cadarache (França).

A geometria da câmara do tokamak, esquematizada na figura 5.1, é caracterizada pelo seu raio maior R_0 e o raio menor b. Costuma-se definir uma razão de aspecto como sendo R_0/b. Para tokamaks com grande razão de aspecto, $R_0/b \gg 1$, é comum desprezar os efeitos toroidais e adotar uma aproximação cilíndrica de periodicidade $2\pi R_0$ (figura 5.1 à direita). Nessa aproximação, o campo magnético toroidal de equilíbrio é uniforme e, portanto, o efeito da curvatura toroidal pode ser tratado de forma perturbativa ou ser desconsiderado. Nas simulações realizadas neste trabalho, nós utilizamos valores de parâmetros relacionados a um tokamak pequeno e de grande razão de aspecto:

Tabela 5.1: Valores dos parâmetros para um tokamak pequeno e de grande razão de aspecto.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Raio maior	R_0	0.30 m
Raio menor	b	0.11 m
Raio do plasma	a	0.08 m
Campo Toroidal	B_0	0.5 T

Para o sucesso dos tokamaks existem algumas dificuldades a serem superadas. Entre elas destacam-se o surgimento de instabilidades no plasma e o transporte anômalo de partículas que saem do plasma confinado e se dirigem para a parede do tokamak. São, justamente, nesses problemas onde os modelos de sistemas hamiltonianos, que são propostos

[2]ITER em latim significa *"o caminho"*

para descrever as linhas de campos na borda do plasma, possuem maior relevância.

5.1.1 Limitador magnético ergódico (LME)

A ideia do limitador magnético ergódico (LME) surgiu no final dos anos 70 [KL77, EF78]. O objetivo do LME é criar uma região de campo caótico, na periferia da coluna de plasma, auxiliando no controle da interação entre o plasma e a parede do tokamak. O LME consiste em N anéis de largura l envolvendo "poloidalmente" o tokamak. Cada anel deve possuir m pares de condutores, orientados na direção toroidal e cada par carregando uma corrente I_h em sentidos opostos. Assim, os LMEs são configurações em que correntes externas adicionais perturbam a borda do plasma.

Na geometria cilíndrica adotada (ver figura 5.1 à direita), os pares de correntes opostas do LME aparecem paralelas ao eixo z, de modo que, o campo perturbador gerado é essencialmente radial [PCV03].

5.2 Mapeamento simplético twist

O primeiro tratamento teórico dispensado a dinâmica do LME foi realizado em [MT84] por Martin e Taylor. O sistema que descrevia o comportamento das linhas de campo era obtido por dois mapas acoplados que simulavam a ação de um limitador de apenas um anel e sem qualquer efeito de curvatura toroidal.

O mapa que descreve os campos magnéticos em tokamaks com LME que utilizaremos neste capítulo, foi desenvolvido em [UC00] e é, também, composto por dois mapas: *(i)* O mapa de equilíbrio $\mathbf{F}_1$ e *(ii)* O mapa com perturbação $\mathbf{F}_2$. A forma de obtenção para os mapas apresentados a seguir está detalhada no apêndice A.

O mapa de equilíbrio é dado por:

$$\mathbf{F}_1 : \begin{cases} r_{n+1} = \frac{r_n}{1-a_1 sin\theta} \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{2\pi}{q_{eq}(r_{n+1})} + a_1 cos\theta_n \end{cases} \tag{5.1}$$

onde, q_{eq} é o fator de segurança e a_1 é a correção para o efeito da curvatura toroidal.

O fator de segurança é uma denominação usada pela literatura em Física de Plasmas para medir a helicidade média das linhas de campo sobre uma superfície magnética, ou seja, a evolução média das linhas de campo na direção toroidal com relação a evolução na direção poloidal. No nosso mapa o fator de segurança corresponde ao inverso do número de rotação.

O perfil monotônico do fator de segurança é dado por:

$$q_{eq}(r) = \begin{cases} q_a \frac{r^2}{a^2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right\}^{-1} & (0 \leq r \leq a) \\ q_a \frac{r^2}{a^2} & (a \leq r \leq b) \end{cases} \tag{5.2}$$

onde a é o raio do plasma e b é o raio menor do tokamak. Os valores dos parâmetros γ e q_a são escolhidos adequadamente para reproduzir, ou ao menos assemelhar-se com os perfis experimentais.

O mapa de perturbação é definido por:

$$\mathbf{F}_2 : \begin{cases} r_{n+1} = r^*_{n+1} + \frac{mC\epsilon b}{m-1} \left(\frac{r^*_{n+1}}{b} \right)^{m-1} sin(m\theta_{n+1}) \\ \theta^*_{n+1} = \theta_{n+1} - C\epsilon \left(\frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m-2} cos(m\theta_{n+1}) \end{cases} \tag{5.3}$$

onde $C = 2mla^2/R_0 q_a b^2$ é constante, $\epsilon = I_h/I_p$ representa a perturbação devido à corrente do limitador magnético ergódico (I_h) e a corrente de plasma (I_p). e m é o número de pares de aneis no limitador de largura l.

Logo, o mapeamento que descreve as linhas de campo magnéticos em tokamaks com limitadores ergódicos pode ser apresentado como a convolução entre dois mapas: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \circ \mathbf{F}_2$, o qual chamaremos mapa *twist* de Ullmann (MTU) [UC00]. Perceba que a equação para r^*_{n+1} no mapa de perturbação $\mathbf{F}_2$ é transcendental e portanto, r^*_{n+1} não pode ser isolado. Consequentemente, para cada iteração do mapa F temos que encontrar as soluções para r^*_{n+1} através de métodos numéricos como, por exemplo, o método de Newton.

As principais vantagens do mapa descrito acima, sob outros mapas com perturbações ressonantes [CPUV96, VC92] são: a simpleticidade do mapa (que foi garantido ao ser deduzido a partir de uma função geratriz. Veja dedução no apêndice A), a parametrização ligada, diretamente, aos valores experimentais e a liberdade de ajuste do perfil de equilíbrio do fator de segurança. Uma das aplicações desse mapa é estudar a instabilidade na borda do plasma e, como podemos observar na figura 5.2, os efeitos do mapa de perturbação $\mathbf{F}_2$ são inseridos, justamente, de tal forma que o centro permaneça regular, mesmo sob fortes perturbações.

Na figura 5.2 mostramos os espaços de fases do MTU em coordenadas polares bem como na forma normalizada: $y = 1 - r/b$ e $x = \theta/2\pi$. Perceba que pela forma normalizada a parede do tokamak fica definida em $y = 0$. Pela figura 5.2 (a) observa-se uma excentricidade dos toros KAM descritos pelo mapa de equilíbrio, ou seja, o eixo das linhas magnéticas está deslocado do eixo geométrico da câmara. Essa característica descrita pelo mapa é uma consequência da geometria toroidal e denominada deslocamento (*shift*) de Shafranov. Pela figura 5.2 é possível analisar os efeitos causados pela escolha

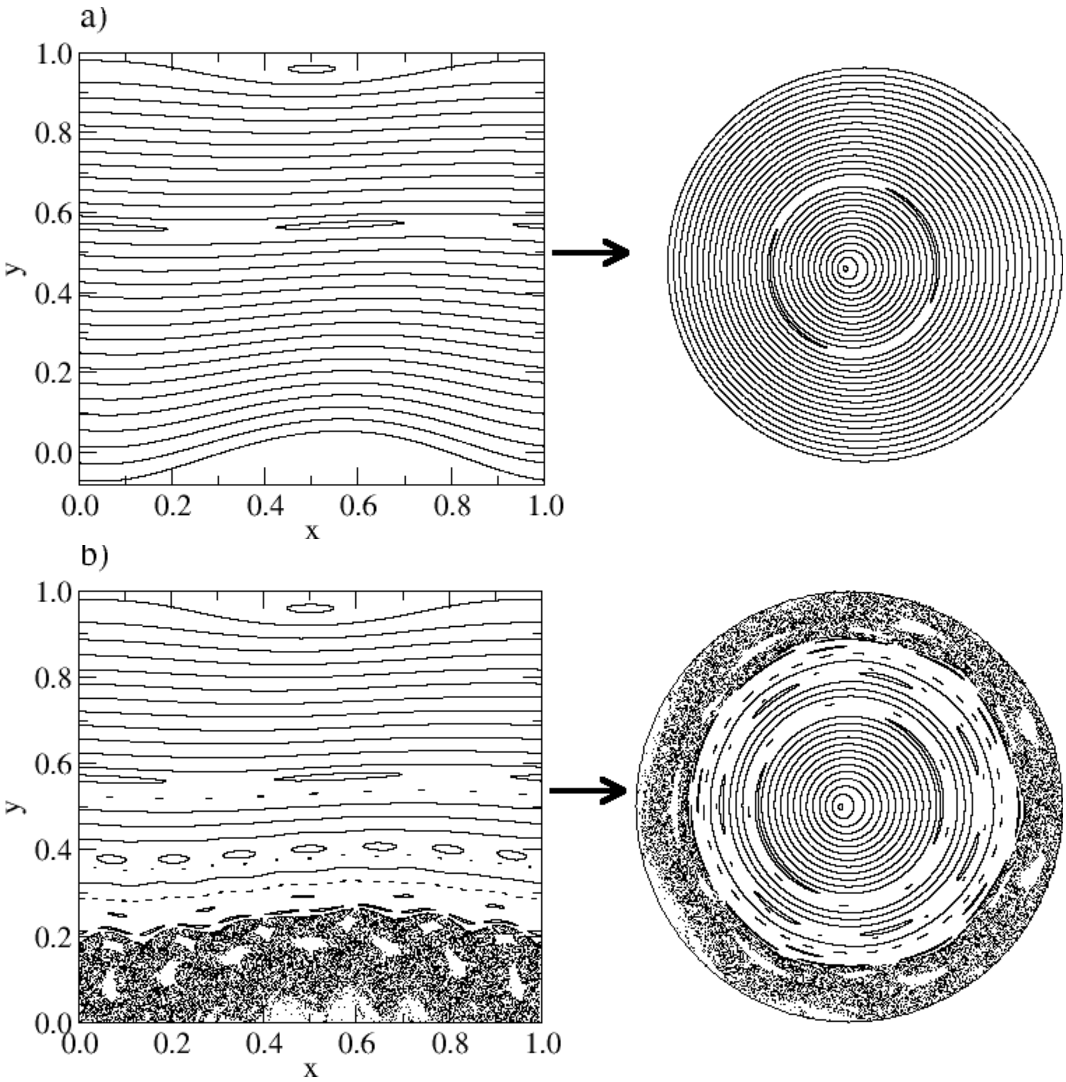


Figura 5.2: Espaço de fases retangular - polar. (a) situação de equilíbrio $\epsilon = 0$, enfatizando o deslocamento de Shafranov. Em (b) temos a aplicação de perturbação, $\epsilon = 0.08$, gerando caos na borda. Em ambas as figuras usamos $m = 7$ e $q_a = 5$.

dos parâmetros q_a e γ para o ajuste do perfil do fator de segurança. No caso da figura 5.2 nós utilizamos $q_a = 5$ e $\gamma = 4$ o que nos leva a $q(r = 0) \equiv q(y = 1) = q_a/(\gamma + 1) = 1$, ou seja, próximo ao centro do plasma existe uma ressonância principal de período - 1. Note também que a configuração de equilíbrio, figura 5.2 (a) com $\epsilon = 0$, já apresenta duas pequenas ilhas menores próximo a $y = 0.6$. Isso ocorre devido ao mapa de equilíbrio $\mathbf{F}_1$ apresentar o termo de correção toroidal, a_1, que pode ser interpretado como um componente pertubativo. Ao adicionarmos uma perturbação $\epsilon = 0.08$, figura 5.2 (b), observamos a formação de órbitas caóticas próxima à borda em $y = 0$. Para este valor de perturbação com $m = 7$ percebemos que as ressonâncias 7 e 6 ainda resistem enquanto outras superfícies magnéticas ou toros de diferentes ressonâncias já foram destruídos. Devido a escolha $m = 7$ para o número de pares da espiras do limitador, os efeitos da perturbação atua principalmente na ressonância onde $q_{eq} = 7$, ou seja, próximo à borda da câmara.

Com o aumento da perturbação a camada caótica tende a se espalhar, porém, o centro das linhas de campo não se alteram, significativamente, como podemos perceber pela figura 5.2 (b).

5.2.1 Ilhas secundárias não-*twist*

Como vimos no capítulo 4, os fenômenos ditos não-*twist* como, por exemplo, a presença de uma curva sem *shear* e a ocorrência de reconexões, não são exclusividades de sistemas não-*twist*, isto é, de sistemas que não satisfazem a condição *twist* (equação (2.23)). Ao contrário do que se esperava, esses fenômenos devem aparecer em regiões localizadas do espaço de fases de qualquer sistema hamiltoniano.

No MTU algumas alterações de parâmetros levam ao surgimento de pequenas ilhas imersas no mar de caos próximo a borda do sistema. Os pontos elípticos dessas ilhas, inevitavelmente, podem bifurcar em órbitas de período três ou quatro podendo apresentar os perfis locais não monotônicos, segundo os resultados obtidos no capítulo anterior. Na figura 5.3 (a) mostramos o espaço de fases do MTU para o conjunto de parâmetros $\epsilon = 0.113$, $q_a = 5$ e $m = 7$. Na figura 5.3 (b), temos uma ampliação de uma das ilhas próximas a se bifurcar em órbitas de período - 3. Para confirmar o surgimento de uma curva sem *shear* secundária próxima à bifurcação tripla, nós aplicamos o número de rotação interno (4.3) sob a figura 5.3 (b) e obtemos o perfil de rotação indicado na figura 5.3 (c). O perfil da figura 5.3 (c) é não monotônico devido à presença de um toro sem *shear* secundário dentro da ilha que segue até $\omega_{in} = 1/3$ quando, através de uma bifurcação centro-sela, gera uma órbita de período - 3. Logo após a bifurcação tripla, a curva sem *shear* deixa de existir e o perfil local da ilha volta a ser monotônico como discutimos no capítulo 4.

Devido às inúmeras cadeias de ilhas que se formam no espaço de fases do MTU as bifurcações advindas de curvas sem *shear* secundárias podem ocorrer em, praticamente, qualquer intervalo de ϵ. No próximo exemplo, o conjunto de parâmetros do sistema resultou em um espaço de fases cuja cadeia de ilhas de período - 5 é a única remanescente na camada caótica próximo à borda, $y = 0$. Além disso, através de um ajuste fino do parâmetro de perturbação ϵ é possível observar que cada ilha da cadeia mencionada sofre uma bifurcação quádrupla como mostra a figura 5.4.

A evolução dos perfis do número de rotação interno para a bifurcação identificada na figura 5.4 está organizada na figura 5.5. Para $\epsilon = 0.185$, figura 5.5 (a) o perfil do número de rotação é monotônico. No entanto, aumentando o valor da perturbação para $\epsilon = 0.187$ é suficiente para observarmos a formação de um ponto de máximo e outro de mínimo no mesmo perfil, indicando a presença de dois toros sem *shear*. A figura 5.5 (c) indica um crescimento do ponto de máximo em relação ao centro elíptico e ao próprio ponto de mínimo. Consequentemente, quando o ponto de máximo atinge o valor racional

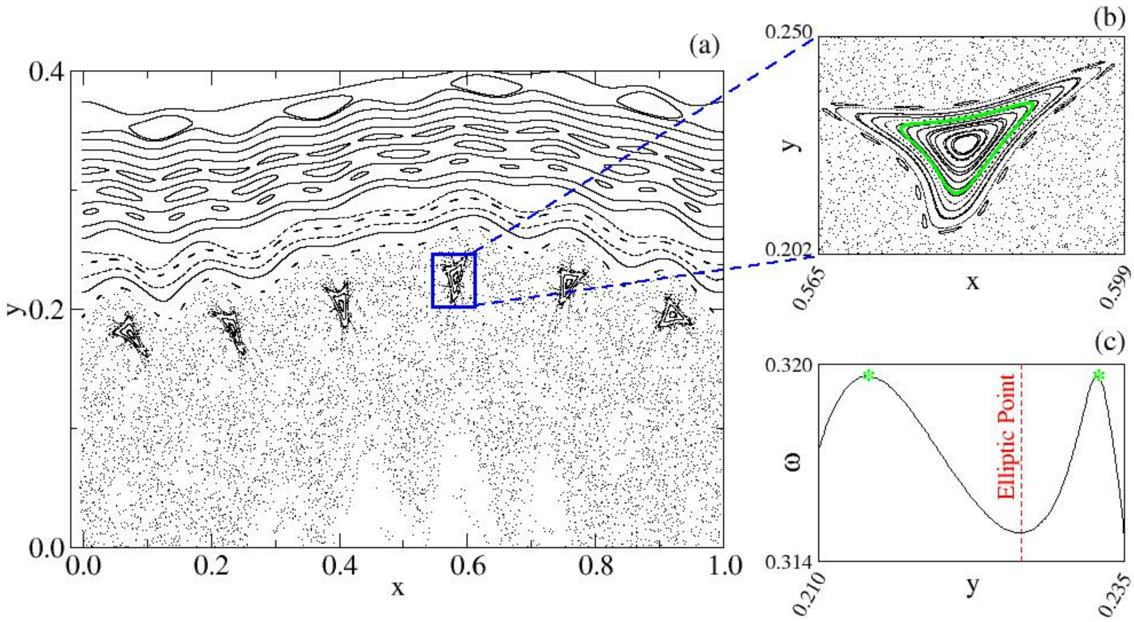


Figura 5.3: (a) Espaço de fases do MTU com $\epsilon = 0.113$; (b) Ampliação de uma das ilhas contidas em (a). (c) Perfil do número de rotação local de (b), indicando um ponto de máximo próximo de uma bifurcação tripla.

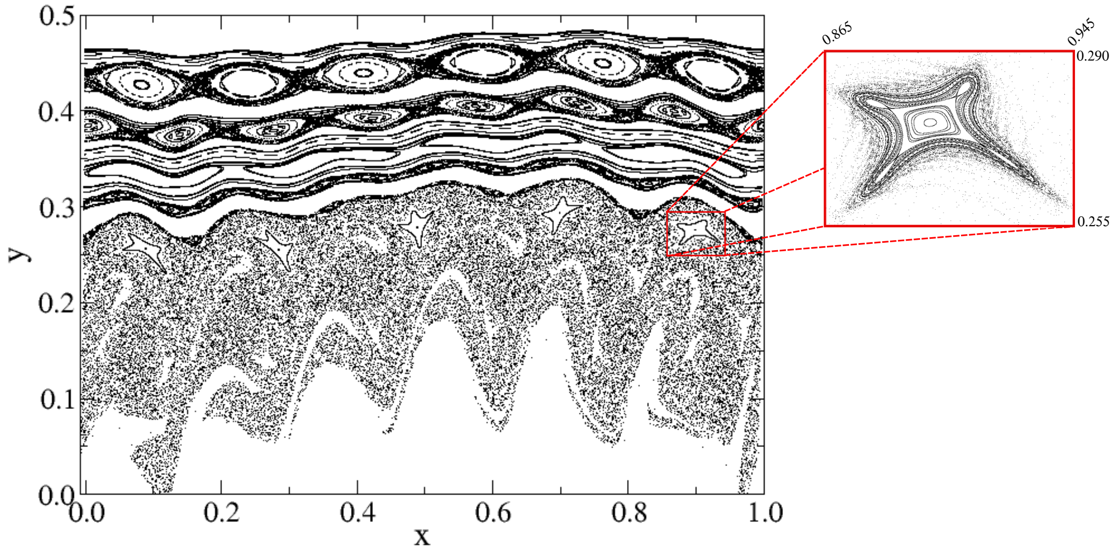


Figura 5.4: Espaço de fases do MTU com $\epsilon = 0.189$ e $m = 6$. O quadro vermelho enfatiza a bifurcação quádrupla.

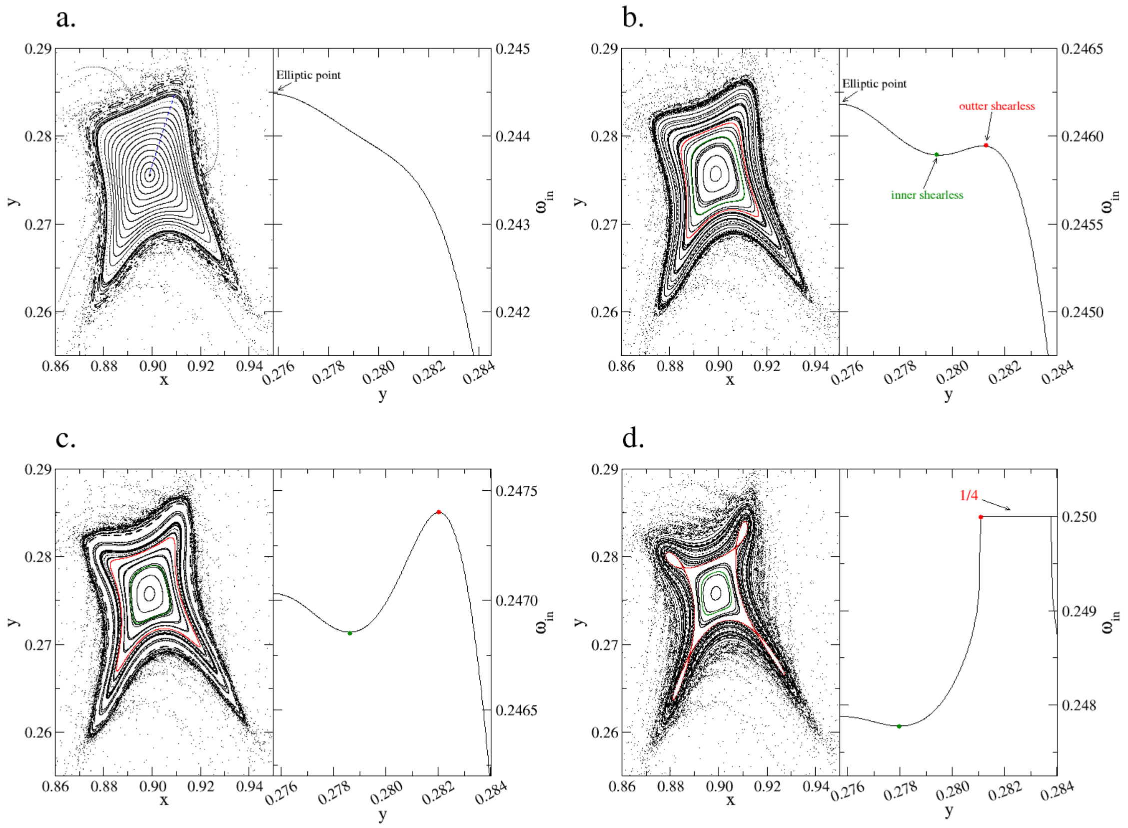


Figura 5.5: Bifurcação quádrupla no MTU. (a) $\epsilon = 0.185$; (b) $\epsilon = 0.187$; (c) $\epsilon = 0.188$; (d) $\epsilon = 0.189$.

$\omega_{in} = 1/4$, para $\epsilon = 0.189$, surgem quatro novos pontos estáveis enquanto o ponto de mínimo colide com o ponto elíptico central.

A presença de um toro sem *shear* secundário em mapas do tipo *twist*, digamos, bem mais complexos, representa um suporte significativo aos estudos realizados em [DMS99, dWW88, Moe90] e endossadas nesta tese pelo capítulo 4. Podemos afirmar também, através dos exemplos estudados, que os perfis das bifurcações geradas por curvas sem *shear* seguem o mesmo padrão de: *(i)* uma curva sem *shear* para a bifurcação 1/3 e *(ii)* duas curvas sem *shear* para a bifurcação 1/4.

5.2.2 Aprisionamento e transporte

O problema de transporte no MTU está ligado à colisão (escape) das trajetórias caóticas na borda do sistema $y = 0$. Esse comportamento, reproduzido pelo MTU, deriva do escape de partículas confinadas em tokamaks rumo à parede da máquina, ocasionando instabilidade e contaminação do plasma. Portanto, os estudos sobre o transporte, através de sistemas dinâmicos, é de suma importância, podendo auxiliar na compreensão de alguns fenômenos observados experimentalmente.

A região caótica próxima da borda $y = 0$ propicia o escape de trajetórias e uma vez que alcançam o valor $y = 0$ o processo numérico deve ser finalizado. Em analogia com o tokamak, quanto maior a região caótica, maior o escape de partículas advindas do plasma. A princípio, a região caótica não precisa interceptar a região do plasma, pois alguns experimentos indicam também uma densidade de plasma próxima a borda da câmara e embora essa densidade seja muito menor em comparação com o centro do plasma, ela possui considerável influência na estabilidade do experimento [ENG+95].

A fim de investigar a dependência das propriedades de transporte com relação as condições iniciais e aos parâmetro de perturbação, ϵ, tomados próximo ao valor da bifurcação de período - 4, nós computamos o tempo de escape médio das trajetórias seguindo o seguinte procedimento numérico. Para um certo valor de ϵ, nós testamos um grande número de condições iniciais (2×10^6) igualmente distribuídos pelo espaço de fases de mesmo tamanho da figura 5.5. Cada condição inicial é iterada até que a trajetória correspondente cruze a fronteira de referência $y = 0$. O tempo de escape médio, indicado na figura 5.6, mostra uma forte dependência sobre ϵ com inúmeros picos no tempo de escape que estão relacionados às bifurcações. O pico mais alto, situado em $\epsilon = 0.18995$, corresponde à bifurcação de ordem mais baixa $(\frac{1}{4})$ durante o intervalo estudado $\epsilon \in [0.180 : 0.200]$ e representa o limite para a existência do toro sem *shear* secundário identificado na figura 5.5. Tal valor diferenciado dos demais indica algum tipo de mecanismo de aprisionamento que diminui o transporte. Para ilustrar o escape nós mostramos na figura 5.7 os detalhes finos sob as condições iniciais para dois valores diferentes de ϵ: um deles corresponde ao tempo de escape curto (linha tracejada azul marcada como a. na figura 5.6) e o segundo ao tempo de escape mais longo (linha tracejada vermelha marcada como b. na figura 5.6). Cada condição inicial da grade de 1000×1000 foi iterada 3×10^6 e separada por uma escala logarítmica de cores como mostra a figura 5.7. Da figura 5.7 nós verificamos que condições iniciais dadas dentro da ilha, evidentemente, não escapam e são identificadas pela cor vermelha, no entanto, trajetórias adjacentes a esta região podem gastar longos períodos de tempo para alcançar a fronteira $y = 0$. Comparando a figura 5.7 (a) e (b) fica claro que ambas são compostas, principalmente, de trajetórias cujo tempo de escape são curtos ou medianos. Contudo, a figura 5.7 (b) apresenta quantidades razoáveis de condições iniciais que demoram $\approx \times 10^6$ (cor laranja na palheta de cores) ao redor da ilha. Este fenômeno é conhecido como aprisionamento e indica uma estadia de longo prazo por parte de algumas trajetórias que desenvolvem um movimento quase regular ao redor da ilha. Esta nova região de aprisionamento, causada pela quebra da separatriz de uma bifurcação não *twist* secundária, interfere, substancialmente, no tempo médio de escape e, por consequência, no transporte global do sistema (veja mais sobre aprisionamento em [Zas02a]).

Uma distribuição estatística para os tempos de escape no espaço de fases pode ser usada para caracterizar tal processo de aprisionamento. Neste caso, nós calculamos a fração de escape (FE) para um grande número de condições iniciais entre a fronteira

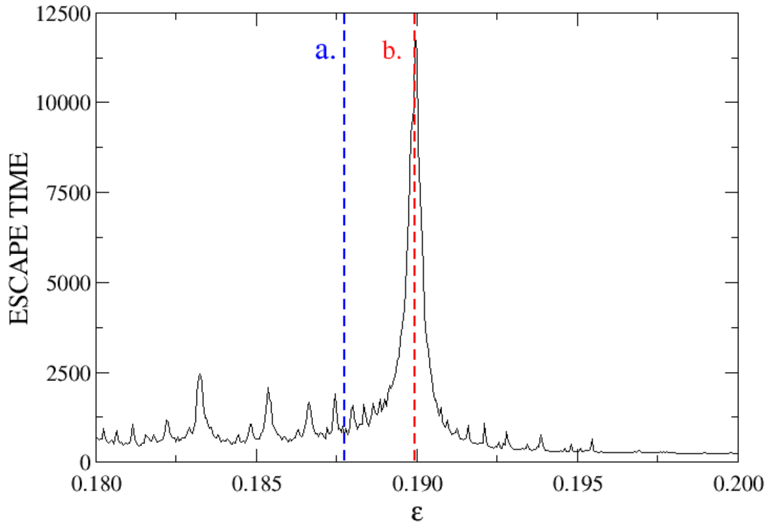


Figura 5.6: Tempo de escape médio em função da perturbação ϵ, calculada para uma grade de condições iniciais fornecidas sob o espaço de fases estudado na figura 5.5.

$y = 0$ e a cadeia de ilhas. Nós escolhemos esta região para as condições iniciais a fim de compreender se a cadeia de ilha em estudo é capaz de capturar trajetórias longe delas a tal ponto que aquela nova região de aprisionamento faça realmente diferença no transporte global do sistema. A FE é definido como:

$$\rho_{esc}(\tau) = \frac{N_n}{N_T}, \tag{5.4}$$

onde N_n é o número de condições iniciais que cruzam a fronteira $y = 0$ com número de iterações (tempo) $n \geq \tau$ e N_T é o número total de condições iniciais que realmente cruzam a fronteira. De fato, a equação (5.4) é uma função de distribuição acumulativa que decresce a partir de $\rho(0) = 1$. A figura 5.8 mostra a FE para ambos os casos $\epsilon = 0.18775$ e $\epsilon = 0.18995$.

A FE para $\epsilon = 0.18775$ e $\epsilon = 0.18995$ possuem o mesmo decaimento exponencial para $\tau < 10^3$. Como o decaimento exponencial está ligado à aleatoriedade (sem efeitos de aprisionamento) da camada caótica nós concluímos que a extensão do mar de caos nos dois casos são bastante similares no que se refere a tempos curtos. Quando $\tau > 10^3$ a FE decai como uma lei de potência do tipo: $\rho_{esc}(\tau) \approx \tau^{-\gamma}$, cujo expoente γ obtido foi de $\gamma = 1.5(1)$. Cabe lembrar que o decaimento da FE por uma lei de potência indica a presença de aprisionamentos no espaço de fases (sub-seção 2.4.1). Entre $10^3 < \tau < 10^5$ as FEs para $\epsilon = 0.18775$ e $\epsilon = 0.18995$ apresentam o mesmo decaimento, embora com valores para $\rho(\tau)$ ligeiramente diferentes. No entanto, para longos períodos de tempo, $\tau > 10^5$, a

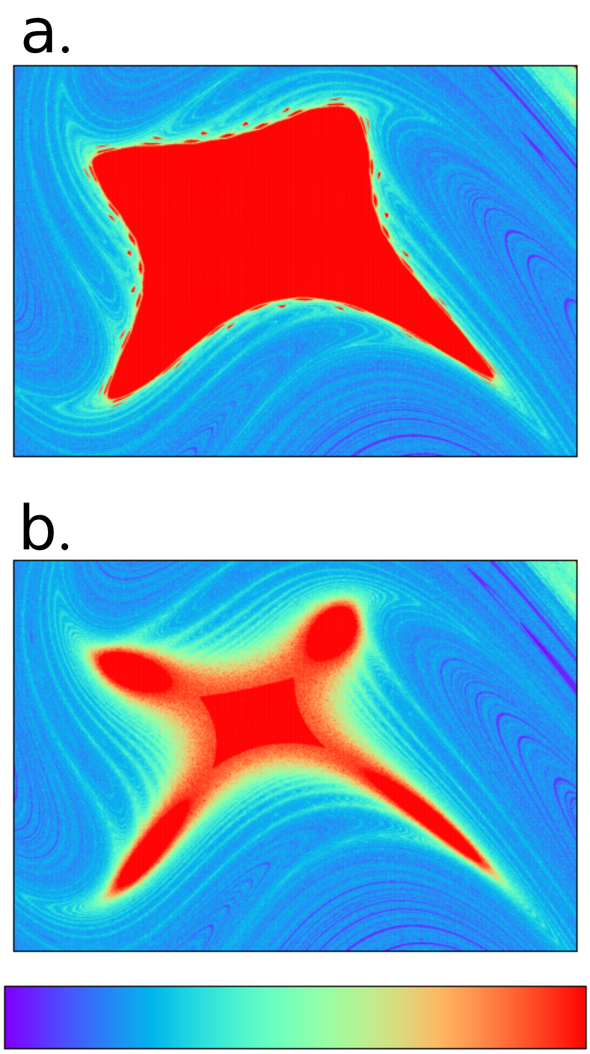


Figura 5.7: Espaço de fases fino detalhando o tempo de escape das condições iniciais com (a) $\epsilon = 0.18775$ e (b) $\epsilon = 0.18995$. A escala de cores logarítmica representa desde tempos curtos de escape (1 iteração, azul escuro) até trajetórias que não escapam (3×10^6, vermelho).

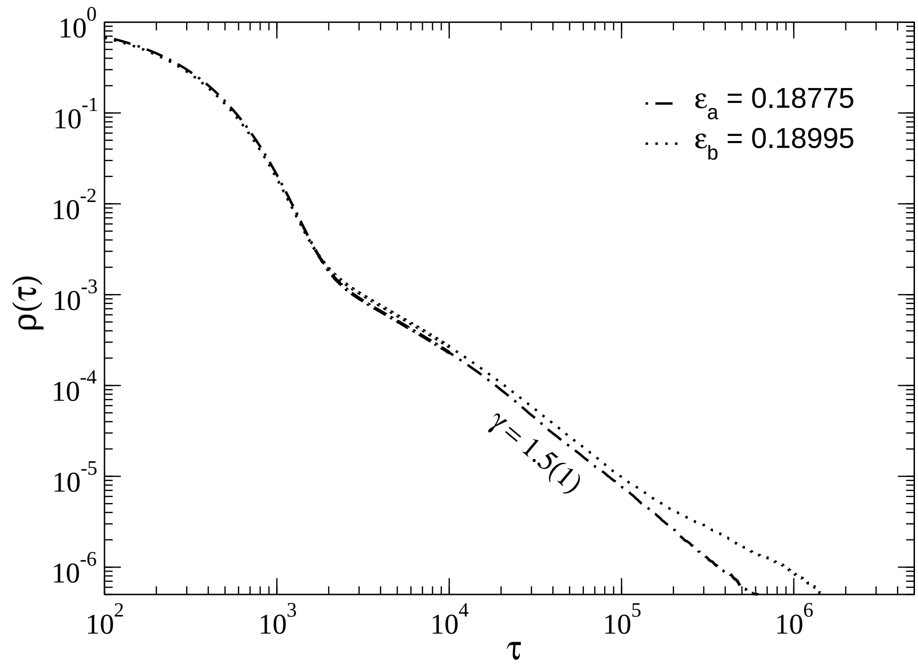


Figura 5.8: Fração de escape (FE) para um grande número de condições iniciais com $\epsilon_a = 0.18775$ e $\epsilon_b = 0.18995$.

FE indica um comportamento diferente entre eles e de acordo com a figura 5.8 a cadeia de ilhas que permanece durante a perturbação, $\epsilon = 0.18995$, captura uma certa quantidade de condições iniciais a mais do que o caso $\epsilon = 0.18775$, o que pode ser constatado pela diferença na cauda da distribuição. Outra interpretação para a diferença entre as caudas é que a probabilidade de se encontrar tempos de escapes superiores a $T = 10^5$ e maior para o caso ϵ_b do que para ϵ_a.

Assim, concluímos que qualquer que seja a curva sem *shear* secundária que apareça no espaço de fases, ela deve ser seguida por uma redução no transporte se o parâmetro de controle ϵ for apropriadamente alterado. É preciso salientar que o efeito de aprisionamento enfatizado não é um fenômeno relacionado com o toro sem *shear* secundário, mas uma consequência de sua existência.

5.3 Modificações no fator de segurança

A melhora no confinamento do plasma em tokamaks é um assunto recorrente e importante para o êxito na construção de um reator de fusão. Neste sentido, a compreensão e o estudo do perfil do fator de segurança possui um papel fundamental, como apontam recentes pesquisas experimentais e teóricas sobre o assunto. O grande trunfo em se modificar o perfil de segurança está no fato de podermos gerar as chamadas barreiras de transporte (BT), ou seja, estruturas capazes de diminuir ou até mesmo impedir a transição (transporte) entre regiões acessíveis. Em termos experimentais, o que se busca é uma diminuição ou uma interferência completa no transporte de partículas provenientes do interior do plasma [Wol03, Cha04].

Diferentes procedimentos podem ser adotados ao perfil de segurança para a obtenção de BTs em tokamaks. Em [EFF+02], Eriksson *et al* demonstraram que o perfil do fator de segurança pode ser usado como único controle para se obter BTs. Neste caso os autores utilizaram perfis de segurança não-monotônicos. Outros resultados mostram também que um achatamento no perfil crescente do fator de segurança pode ser suficiente para a formação de BTs [CFG+04].

Como discutido anteriormente, o mapa simplético apresentado nesse capítulo possui liberdade para escolha do perfil do fator de segurança, o que nos possibilita optar por diferentes perfis a fim de investigar seus efeitos na topologia do espaço de fases e principalmente as mudanças nas propriedades do transporte das linhas de campo magnéticas. Em 5.3.1 utilizamos um perfil não-monotônico para o fator de segurança, gerando em determinada região do espaço de fases os fenômenos não-*twist* estudados no capítulo 3. A subseção 5.3.2 é dedicada ao estudo de um perfil monotônico com um ponto de inflexão próximo ao raio do plasma ($r = a$). Esse tipo de perfil [CF12] tem-se mostrado eficiente para a obtenção de uma barreira mais resistente às perturbações, o que constitui em uma melhora sobre o ponto de vista do isolamento da interação entre o plasma e a fronteira.

5.3.1 Perfil não-monotônico

A seguir, definimos uma expressão para o fator de segurança de equilíbrio, q_{eq}, que descreve perfis de equilíbrio não-monotônicos condizentes aos usados em experimentos[3] com tokamaks [OC95].

$$q_{eq}(r) = \begin{cases} q_a \frac{r^2}{a^2} \left\{ 1 - \left(1 + \beta' \frac{r^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\mu+1} \right\}^{-1} & (0 \le r \le a) \\ q_a \frac{r^2}{a^2} & (a \le r \le b) \end{cases} \tag{5.5}$$

onde $\beta' = \beta(\mu+1)/(\beta+\mu+2)$. Na figura 5.9 temos o perfil não-monotônico do fator de segurança (onde usamos: $q_a = 3.9$, $\beta = 2$ e $\mu = 1$) em comparação com o perfil monotônico descrito na seção anterior.

Plasmas com fator de segurança não-monotônico são denominados plasmas de cisalhamento reverso. Perceba pela figura 5.9 que ao contrário do perfil monotônico, o perfil não monotônico não possui menor valor para o fator de segurança no centro do plasma, e sim em uma posição radial entre o eixo magnético e a borda do plasma. No caso apresentado

[3]Perfis não monotônicos podem ser gerados através de métodos não indutivos de aquecimento do plasma, como por exemplo, através de injeção de partículas neutras.

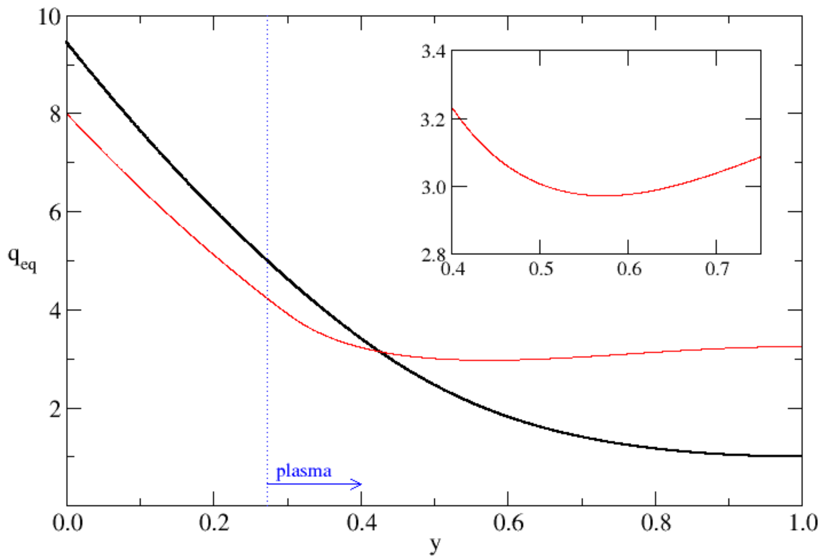


Figura 5.9: Perfis de equilíbrio do fator de segurança monotônico com $q_a = 5$ e $\gamma = 4$ (preto) e não-monotônico com $q_a = 3.9$, $\beta = 2$ e $\mu = 1$ (vermelho). O quadro interno ressalta a existência do ponto de mínimo próximo a $y = 0.5$.

na figura 5.9 o ponto de mínimo, que também é o menor valor do fator de segurança, está em torno de $y = 0.5$ (dentro do raio do plasma).

Com o perfil de equilíbrio não-monotônico, definimos o mapa não-*twist* de Ullmann (MNTU). Na figura 5.10 mostramos o espaço de fases do MNTU para $m = 3$ e o conjunto de parâmetros definido pela tabela 5.1. Pela figura 5.10 (a) percebe-se que uma ligeira perturbação, $\epsilon = 0.05$, é suficiente para gerar os dois modos ressonantes de período - 3 que estão separados por curvas invariantes, incluindo a curva sem *shear* (curva vermelha). Conforme a perturbação aumenta as separatrizes das ilhas unem-se em um processo de reconexão (figura 5.10 (b) para $\epsilon = 0.0635$). Para $\epsilon = 0.1$ (figura 5.10 (c)) as duas cadeias de ilhas de período - 3 estão separadas por novas separatrizes homoclínicas. Na figura 5.10 (d) com $\epsilon = 0.3$, vemos que os pontos elípticos e hiperbólicos da cadeia de baixo colidiram restando somente as três ilhas superiores. Para estes valores de parâmetros a curva sem *shear* ainda persiste no espaço de fases, agindo como uma barreira no sentido em que as condições iniciadas acima dela não conseguem ultrapassá-la e alcançar a borda $y = 0$ em referência à parede externa do tokamak.

Localmente, o MNTU possui propriedades equivalentes ao MPNT. Uma barreira sem *shear* é formada no espaço de fases devido à existência de um ponto de mínimo no perfil do fator de segurança o que garante a ocorrência de processos de reconexão. Contudo, como relatado da literatura [dSRP+06, PCVM07, MdCCR11, PSK+05], algumas diferenças como, uma maior área caótica abaixo da barreira que acima dela e a presença de curvas

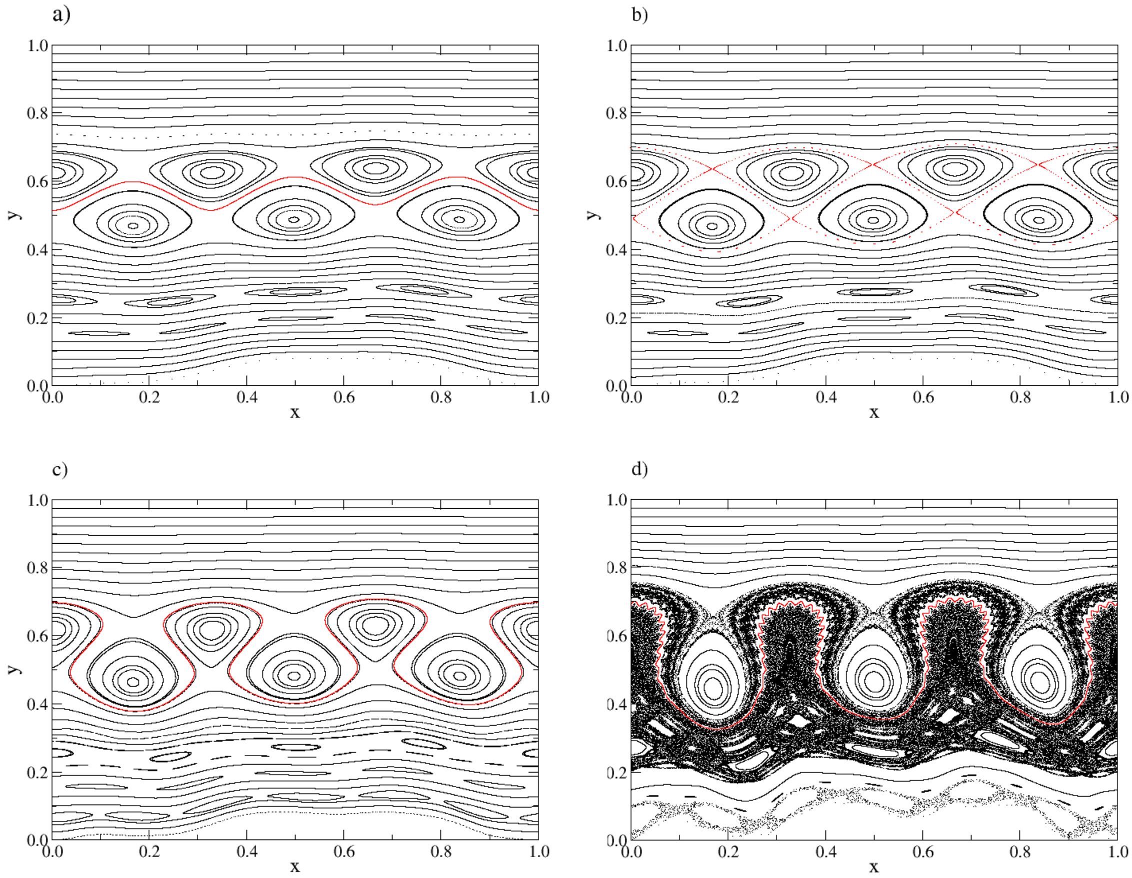


Figura 5.10: Espaços de fases do MNTU destacando o processo de reconexão e a *robustes* da barreira sem *shear*.(a) Para $\epsilon = 0.05$ vemos duas cadeias de ilhas de período - 3; (b) $\epsilon = 0.0635$ - processo de reconexão; (c) Em $\epsilon = 0.1$ separação em outras diferentes cadeias de ilhas de período - 3 formada por separatrizes homoclínicas; (d) Colisão entre o ponto elíptico e o hiperbólico, $\epsilon = 0.3$. A curva sem *shear* estão indicadas em vermelho em todos os espaços de fases.

invariantes fora da região da barreira, o que é possível devido à natureza localizada da perturbação, constituem em diferenças relevantes que merecem ser melhor exploradas.

Começaremos analisando a robustez da curva sem *shear* no MNTU. Para tanto, devemos observar o comportamento de um espaço de parâmetros constituído pela perturbação ϵ e pela constante C. A constante C foi escolhida como parâmetro relevante, pois constitui-se de parâmetros relacionados à geometria do tokamak (a, b e R_0), do limitador: (m e l), e de um parâmetro característico para o perfil de equilíbrio que define o fator de segurança na borda do plasma, q_a. Em todos os casos analisados a seguir nós mantivemos o valor $q_a = 3.9$ para que o perfil de equilíbrio fosse mantido bem como o perfil das ressonâncias no espaço de fases.

Existe algumas formas de estudar a ruptura da barreira sem *shear*. A mais usual, constitui em escolhermos um conjunto de condições iniciais acima da curva sem *shear* e iterá-las até que alguma dessas condições iniciais alcançassem um ponto abaixo dela. Esse tipo de procedimento numérico exige muito tempo e esforço computacional, além de ser vulnerável aos fenômenos de aprisionamento que podem passar a impressão de que a barreira esteja robusta, quando na verdade ela está rompida e apenas age como uma barreira parcial. A fim de contornar o problema, nós iremos adaptar o teorema de Slater para o MNTU. Como vimos no capítulo 3 (subseção 3.2.3) o teorema de Slater define que dado um intervalo sobre uma curva invariante irão existir no máximo três diferentes tempos de recorrência para esse mesmo intervalo, sendo que, em caso de três tempos de recorrência, o maior deles será a soma dos outros dois ($\Gamma_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2$). Nós vimos no capítulo 3 que o método é bem preciso e funcionou muito bem para o mapa padrão não-*twist* MPNT. Contudo, o MPNT possui simetrias que nos auxiliam encontrar, analiticamente, pontos indicadores (**PI**s) que sempre pertencem à curva sem *shear* o que facilita muito o procedimento numérico para determinar a quebra da curva sem *shear*. Infelizmente, os modelos que descrevem campos magnéticos em tokamaks, como o MNTU apresentado neste capítulo, não apresentam tais simetrias devido à correção toroidal introduzida. Apesar de não haver a possibilidade de obtermos **PI**s para o MNTU nós apresentamos uma adaptação para o teorema de Slater a fim de estudarmos se há ou não alguma barreira no espaço.

Utilizando o teorema de Slater em sistemas não simétricos

O método descrito a seguir, pode servir como base para análises sobre a existência de curvas invariantes no espaço de fases de sistemas não simétricos. Embora pensado para resolver o caso do MNTU, as idéias podem ser re-adaptadas para outros sistemas. Como estamos, particularmente, interessados em investigar a existência da curva sem *shear*, vamos iniciar o processo focalizando a região que ela ocupa no espaço de fases.

1○ Passo: Determinar uma região pela qual a curva sem *shear* sempre passa.

No caso do MNTU, isso pode ser realizado se mantivermos constante os valores de m e q_a. Assim, se compararmos algumas curvas sem *shear*, obtidas com boa precisão para diversos valores de ϵ, perceberemos que existe uma região (um retângulo seria o ideal) por onde a suposta curva sem *shear* sempre passa. O tamanho dessa região de estudo não é importante, mas é imprescindível que a curva sem *shear* entre por uma das arestas dessa região e saia pela aresta oposta, cruzando a região apenas uma vez. Embora pareça complicado, a obtenção dessa região é relativamente simples.

2○ Passo: Distribuir níveis (linhas) de condições inicias (**CI**s) dentro da região definida pelo primeiro passo.

Nesse caso, as linhas de **CI**s devem ser perpendiculares à direção da curva sem *shear*. Mas por que se utilizar de uma grade de condições iniciais e não apenas uma linha delas? O motivo de escolhermos uma grade de condições iniciais, deve-se ao fato de que o teorema de Slater não faz distinção entre uma curva invariante global, que atravessa o espaço de fases, de uma curva invariante pertencente à uma ilha regular. Ou seja, se escolhessemos um linha de **CI**s e em algum ponto ela cruzasse com uma ilha , o método concluiria pela existência de uma curva invariante sem detalhar o tipo, o que pode gerar incontáveis erros de interpretação. Utilizando uma grade de **CI**s divididas em diversos níveis (linhas), nós chegamos a conclusão sobre a presença de uma curva invariante se todos os níveis (linhas) de **CI**s apresentarem as recorrências Γ_1, Γ_2 ou $\Gamma_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2$ (teorema de Slater). Caso alguns dos níveis não apresente nenhuma recorrência ou possua números de recorrência superior a três o espaço de fases é considerado aberto, ou seja, não há qualquer curva invariante global impedindo o transporte.

Perceba que o método é conclusivo em apontar a existência de uma curva invariante sem ser específico sobre a a curva sem *shear*.

Através do procedimento descrito acima nós obtemos o espaço de parâmetros, $\epsilon \times C$, mostrado na figura 5.11. Os pontos marcados na cor vermelha indicam a presença de curvas invariantes (onde a suposta curva sem *shear* deve estar localizada) intactas enquanto o espaço em branco relata a quebra de todas as invariantes globais. Apesar dos erros numéricos que possam ter acontecido devido à escolha da região de recorrência e da grade de condições iniciais, a figura 5.11 está bem representativa. O ponto mais interessante sobre o espaço de parâmetros apresentado na figura 5.11 diz respeito a perda e a retomada da estabilidade das curvas invariantes durante diversos pares (ϵ, C) do espaço. A perda da estabilidade das invariantes, ou melhor, a sua quebra repentina, pode ser constatada pelos conjuntos de parâmetros (ϵ, C) que formam estreitas linhas brancas no meio da região, predominantemente, vermelha. O caso reverso também ocorre e a em alguns momentos, a curva sem *shear*, que já estava quebrada, adquire certa estabilidade e passa a se reestruturar, como indica o conjunto de parâmetros (ϵ, C) formando uma linha vermelha na região branca. Tal comportamento sobre a estabilidade da curva sem *shear* no espaço parâmetros parece ser comportamento característico de sistemas não-*twist*, visto que o mapa padrão não-*twist* (MPNT) também apresenta esse fenômeno.

Em termos dos experimentos de confinamento do plasma em tokamaks, a figura 5.11 aponta para a possibilidade de que ligeiras flutuações na corrente de plasma (lembrando que ϵ é a razão entre a corrente do limitador e a corrente de plasma) pode destruir ou, dependendo do caso, restruturar barreiras imposta pelo perfil não monotônico do fator de segurança.

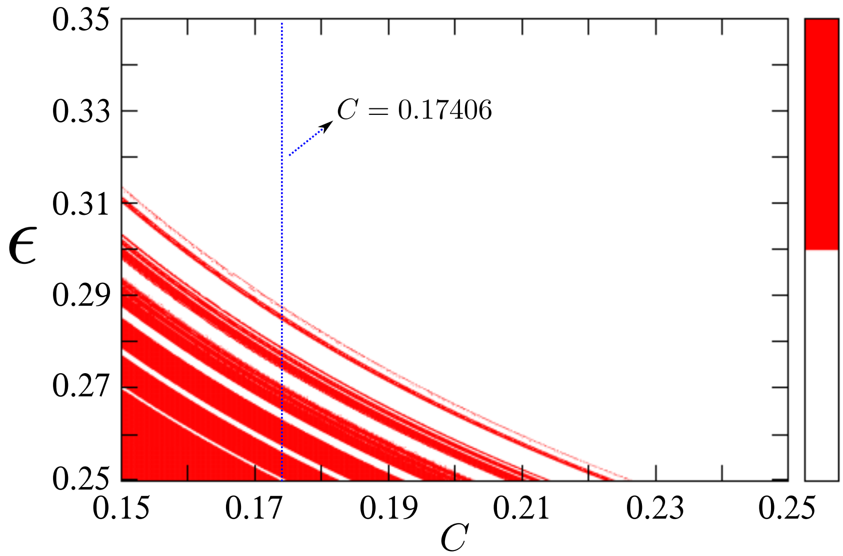


Figura 5.11: Espaço de parâmetros do MNTU realizado a partir do teorema de Slater. A região vermelha indica a presença de uma curva sem *shear*. A linha pontilhada em azul em $C = 0.17406$ serve como guia para os espaços de fases apresentados ma figura 5.12.

A fim de confirmar os resultados obtidos para o espaço de parâmetros, nós mostramos na figura 5.12 dois espaço de fases com $m = 3$, $q_a = 3.9$, $C = 0.174060$ e com o parâmetro de perturbação ϵ: (a) $\epsilon = 0.25$ (região branca no espaço de parâmetros) e (b) $\epsilon = 0.251$ (região vermelha no espaço de parâmetros). Para $\epsilon = 0.250$, figura 5.12 (a), o espaço de fases do MNTU não possui barreira entre as ressonância de período - 3, fato que pode ser corroborado pela ampliação da figura (quadro azul ao lado da figura). Contudo, uma flutuação no parâmetro de perturbação, $\epsilon = 0.251$ pode restruturar algumas curvas invariantes, inclusive a curva sem *shear*, que passam a dividir o espaço entre a ressonância de período - 3, novamente. Ou seja, mesmo aumentando a perturbação do sistema pode-se estabilizar algumas regiões do espaço de fases. Esse caso pode ser observado pela figura 5.12 (b) e a ampliação no quadro azul à direita onde a curva sem *shear* está identificada em vermelho. Perceba que, se continuássemos aumentando, gradualmente, o parâmetro ϵ, a região que contém a curva sem *shear* alternaria entre a presença de curvas invariantes e a não presença delas até que para um certo valor de ϵ tal alternância não ocorre mais e a curva sem *shear* não volta a aparecer no espaço de fases.

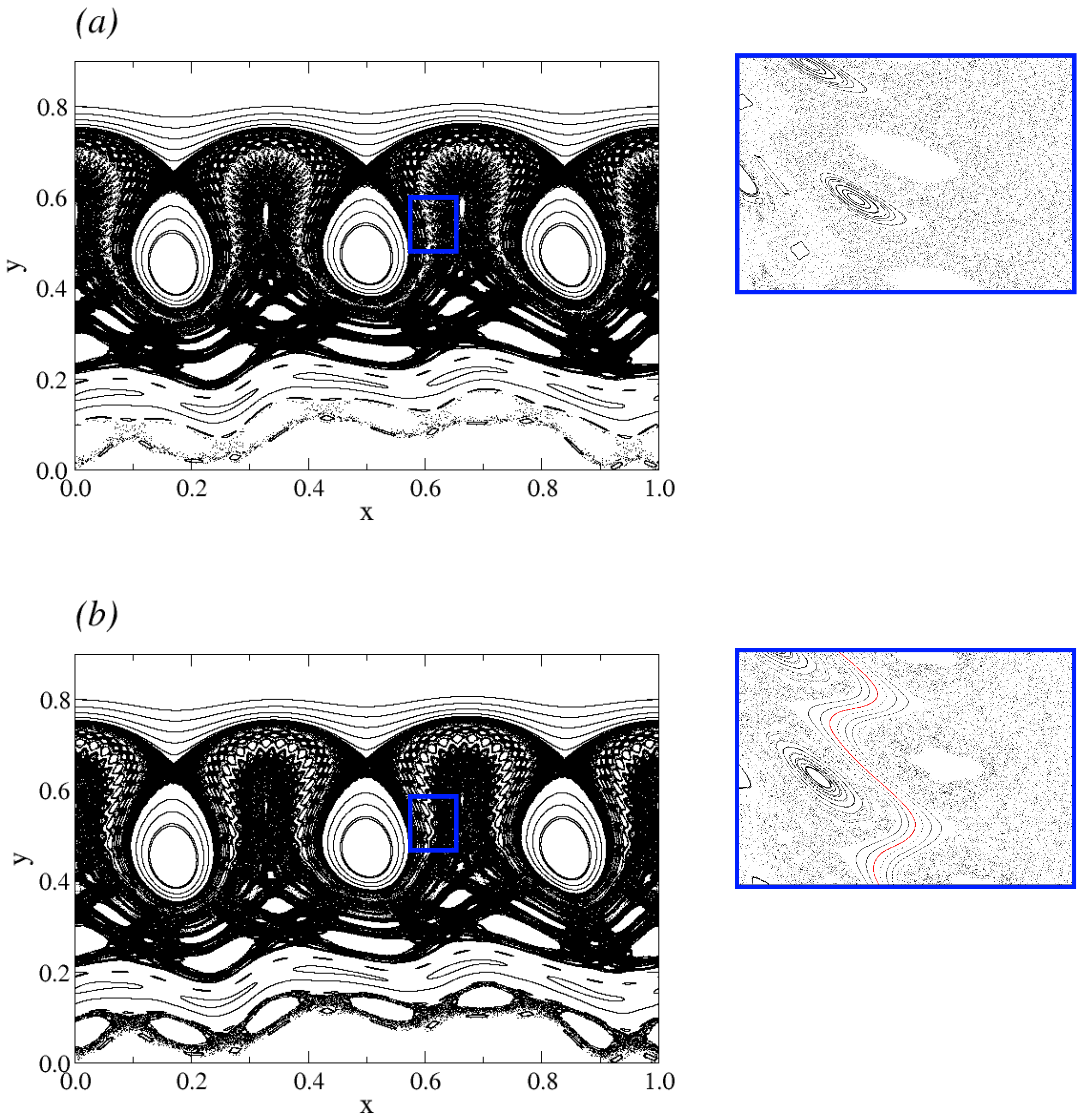


Figura 5.12: Espaço de fases do MNTU com $m = 3$, $q_a = 3.9$ e $C = 0.174060$. Os casos acima ressaltam a formação de uma barreira (incluindo uma curva sem *shear*) conforme uma flutuação da perturbação de (a) $\epsilon = 0.250$ (sem barreira) para (b) $\epsilon = 0.251$ (com barreira).

5.3.2 Perfil monotônico com ponto de inflexão

Vamos adotar um método para construir barreiras de transporte através de uma modificação local do perfil do fator de segurança sem alterar sua monotonicidade. Em [CF12] é apresentado um procedimento matemático para modificar o fator de segurança monotônico a fim de produzir uma barreira de transporte. Um fator de segurança local, $q_l(r)$, deve depender de três valores de r sendo $r_1 < r_0 < r_2$ onde, r_1 e r_2 são os limites locais e r_0 o local para o ponto de inflexão. As seguintes regras devem ser garantidas:

- $q_l(r)$ coincide com $q(r)$ nos intervalos $[0; r_1]$ e $[r_2; 1]$.
- $q_l(r)$ é contínua e derivável em r_1 e r_2
- a derivada em r_0 é nula, ou seja, r_0 será o ponto de inflexão

Para satisfazer os critérios acima, o fator de segurança monotônico da equação (5.2) pode ser modificado em:

$$q_{eq}(r) = \begin{cases} q_a \frac{r^2}{a^2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^5 \right\}^{-1} & (0 \leq r \leq r_1) \\ q_0 - c_1(r - r_0)^7 - c_2(r - r_0)^5 - c_3(r - r_0)^3 & (r_1 \leq r \leq r_2) \\ q_a \frac{r^2}{a^2} & (r_2 \leq r \leq b) \end{cases} \tag{5.6}$$

onde os coeficientes q_0, c_1, c_2 e c_3 são obtidos pela continuidade e pelas derivadas no ponto $r_1 = 0.099(y = 0.1)$ e $r_2 = 0.077(y = 0.3)$. Fazendo $r_0 = 0.0824$ obtemos os valores:

Tabela 5.2: Valores obtidos para o fator de segurança com ponto de inflexão.

coeficientes	Valores obtidos
q_0	4.86273801470208
c_1	-4.708151268056796$\times 10^{12}$
c_2	4.901420139867871 $\times 10^{9}$
c_3	-1.6039982849970104 $\times 10^{6}$

Na figura 5.13 mostramos o perfil do fator de segurança com a modificação local em comparação com o perfil monotônico dado pela equação (5.2). Perceba que o ponto de inflexão $y_0 = 1 - r_0/b$, onde $r_0 = 0.0824$ foi escolhido antes da borda entre o plasma e a fronteira externa na intenção de se criar uma barreira que modifique a interação plasma-fronteira.

Como já discutido pelas seções anteriores, a escolha do número m, que define o número de pares de espiras do limitador, está diretamente relacionado com as ressonâncias que aparecem no espaço de fases devido ao perfil do fator de segurança. Logo, a escolha de m, quando utilizamos o perfil de segurança modificado localmente, deve exercer um papel

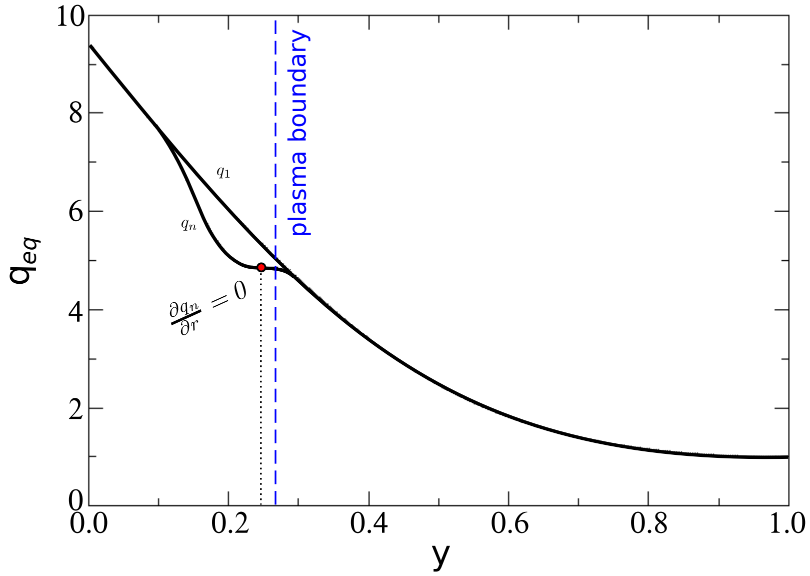


Figura 5.13: Fator de segurança q_n com um ponto de inflexão em comparação com um fator de segurança q_1.

fundamental na formação de estruturas no espaço de fases. Na figura 5.14 mostramos três escolhas diferentes de m, considerando uma perturbação $\epsilon = 0.2$. Para $m = 4$, figura 5.14 (a), percebe-se um conjunto de toros invariantes bem delimitado próximo ao raio do plasma ($r \approx 0.2727$). Esses toros invariantes possuem dimensão $D = 2$ assim como o próprio espaço de fases e, portanto, formam uma barreira de transporte, pois separam definitivamente duas regiões caóticas do espaço de fases. Ao escolhermos $m = 5$, figura 5.14 (b), não observamos nenhuma estrutura que desempenhe o papel de uma barreira nos moldes da anterior. Neste caso, observamos um extenso mar de caos conectado à ressonância de período - 4, a única cadeia de ilhas visível na escala adotada. Na figura 5.14 (c), apesar de não observarmos duas regiões extensas separadas por toros invariantes como na figura 5.14 (a) temos uma redução considerável da região caótica próxima à fronteira ($y = 0$) quando a comparamos à figura 5.14 (b). Isso significa que a perturbação não foi suficiente para romper as novas curvas invariantes geradas pelo perfil local embora outras curvas dentro do raio de plasma já tenham entrado em ressonância causando pequenas regiões caóticas ao redor do ponto hiperbólico.

Pela análise dos casos apresentados pela figura 5.14, concluímos que para a formação de uma barreira efetiva no espaço de fases, a escolha do número de espiras m para o caso do perfil de segurança modificado localmente, deve ser feita de tal maneira que o número da ressonância m não esteja nem tão perto nem longe de $q(r_0)$, ou seja, do valor de q_{eq} no ponto de inflexão.

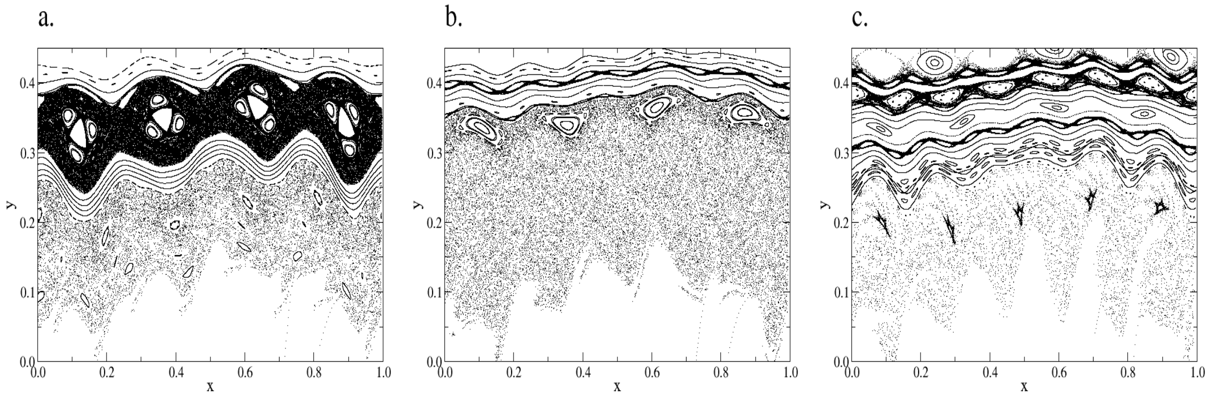
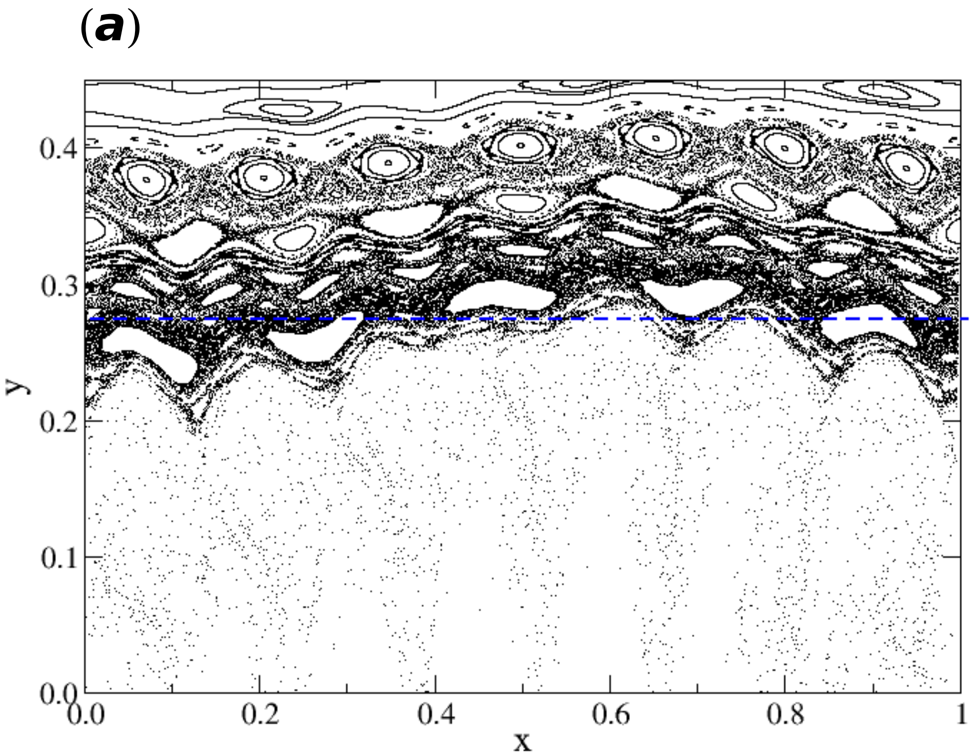


Figura 5.14: Espaço de fases para diferentes números de ressonâncias m do mapa simplético de Ullmann com perfil do fator de segurança dado pela equação 5.6. (a) m=4; (b) m=5; (c) m=6. Em todos os casos usamos $\epsilon = 0.2$.

Uma vez constatado a influência de m na topologia do espaço de fases, vamos comparar a topologia de um sistema com perfil de fator de segurança monotônico *puro* com a de um sistema cujo perfil esteja modificado localmente, como mostrado na figura 5.13. Para tanto, escolhemos um valor de perturbação, relativamente alto: $\epsilon = 0.2$ e $m = 7$ para que o foco da perturbação esteja na ressonância de período - 7 e, consequentemente, tal perturbação passa a agir com maior influência na região compreendida entre a borda do plasma e a fronteira (y=0). Na figura 5.15 (a) vemos o espaço de fases cujo perfil do fator de segurança do modelo é monotônico; nele percebemos que a perturbação, ϵ, fornecida foi alta o suficiente para destruir todos os toros invariantes entre a fronteira da câmara, $y = 0$, e a borda do plasma $y \approx 0.27$[27], logo, não há nenhuma barreira que impeça o transporte das trajetórias da parte interna do plasma sentido à fronteira externa. Quando adicionamos o ponto de inflexão ao fator de segurança temos o espaço de fases apresentado na figura 5.15 (b). Neste caso, percebemos que, embora a pertubação tenha destruído grande parte dos toros próximos à $y = 0$ bem como uma boa parte dos toros na região $y < a$ (dentro do plasma), alguns toros ainda sobrevivem. Estes toros sobreviventes situam-se, justamente, entre a borda do plasma e a fronteira externa funcionando como uma barreira ao transporte, no sentido em que as trajetórias confinadas na região $y < a$ não conseguem atingir a parede do tokamak.

Para estudar os efeitos dos perfis para os casos q_1 e q_n quanto ao escape das trajetórias, nós dividimos o intervalo $y \in [0, 0.34]$ e $x \in [0, 2\pi]$ em uma grade de 1000×1000 condições iniciais. Cada condição inicial foi iterada até a colisão com a fronteira, $y = 0$. O limite máximo de iterações fornecido foi de 10^7 e as trajetórias que chegaram neste limite foram consideradas como pertencentes à regiões regulares que nunca escapavam. Os diferentes tempos de escape foram colocados em uma escala logarítmica de cores resultando em um espaço de fases semelhante aos da figura 5.15 com uma dimensão a mais representada



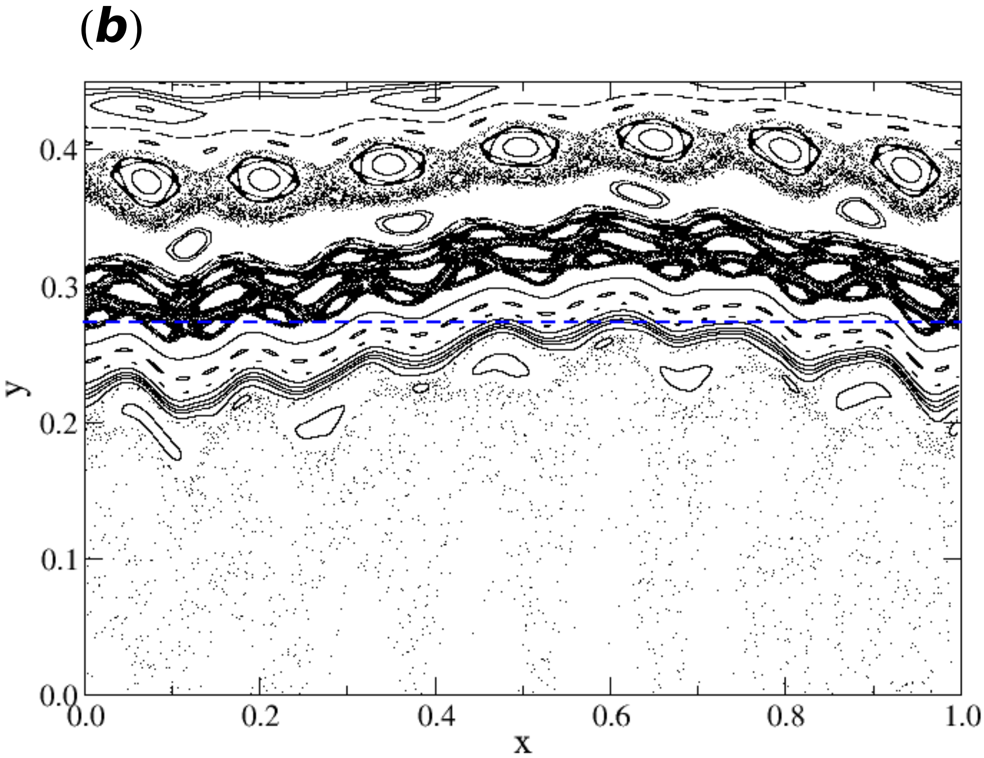


Figura 5.15: Espaço de fases das linhas de campo magnéticas com $\epsilon = 0.2$ e fator de segurança (a) monotônico puro (equação 5.2) e (b) monotônico com ponto de inflexão 5.6. A linha tracejada em azul marca o limite do raio do plasma.

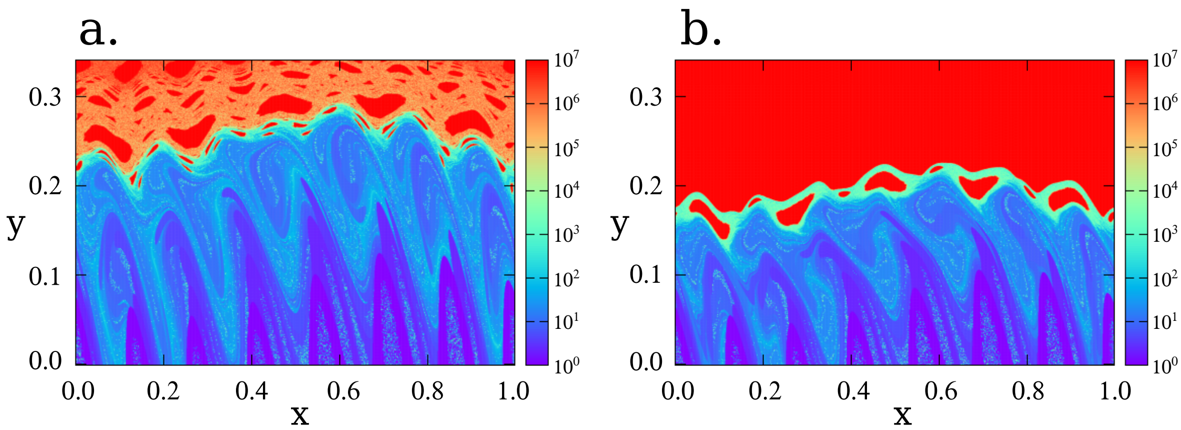


Figura 5.16: Espaço de fases da figura 5.15 com uma terceira dimensão representada pela projeção dos tempos de escape em uma escala de cores logarítmica. Em ambos os casos temos $\epsilon = 0.2$.

pela projeção dos tempos de escape em uma escala de cores no espaço bi-dimensional. O número de iterações que cada condição inicial leva para atingir a fronteira está relacionado com o número de voltas toroidais que cada linha de campo realiza, dessa forma, esse tipo de estudo pode ser encontrado na literatura também com o nome de comprimento de conexão, ou seja, o número de voltas toroidais que cada linha de campo realiza antes de chocar-se contra a parede. Os resultados para o mapa de Ullmann considerando os dois diferentes perfis de rotação estão mostrados na figura 5.16 (a) para o caso q_1 e em (b) para o caso q_n.

É notável os efeitos causados pela imposição de uma barreira no sistema. Como consequência imediata, a barreira causou um isolamento efetivo ao transporte das trajetórias situadas na parte de cima do espaço de fases que se referem às linhas de campo com $r < a$, como podemos observar na figura 5.16 (b). O caso ilustrado na figura 5.16 (a), apresentando o perfil monotônico q_1, não possui tais barreiras e, portanto, as trajetórias da parte de cima do espaço de fases podem atingir a fronteira da câmara, muito embora demorem uma quantidade significativa de iterações para fazê-la. Outro fato relevante na alteração do perfil do fator de segurança é a mudança das propriedades de escape na região próxima à fronteira $y = 0$. Note que além de alterar a extensão da camada caótica, existiram mudanças estruturais (topológicas) com relação às regiões de escape.

As condições iniciais próximas à fronteira constituem-se em uma região de escape rápido, consequência direta da perturbação causada pelo número de espiras, m (ressonância), e pela corrente do limitador I_h que atuam na borda do sistema. A grande maioria das condições iniciais dadas nessa região escapam logo nas primeiras 10 iterações do mapa, como podemos observar no histograma apresentado na figura 5.17 tanto para o caso com o perfil monotônico (figura 5.17 (a)) quanto para o caso com inflexão (figura 5.17

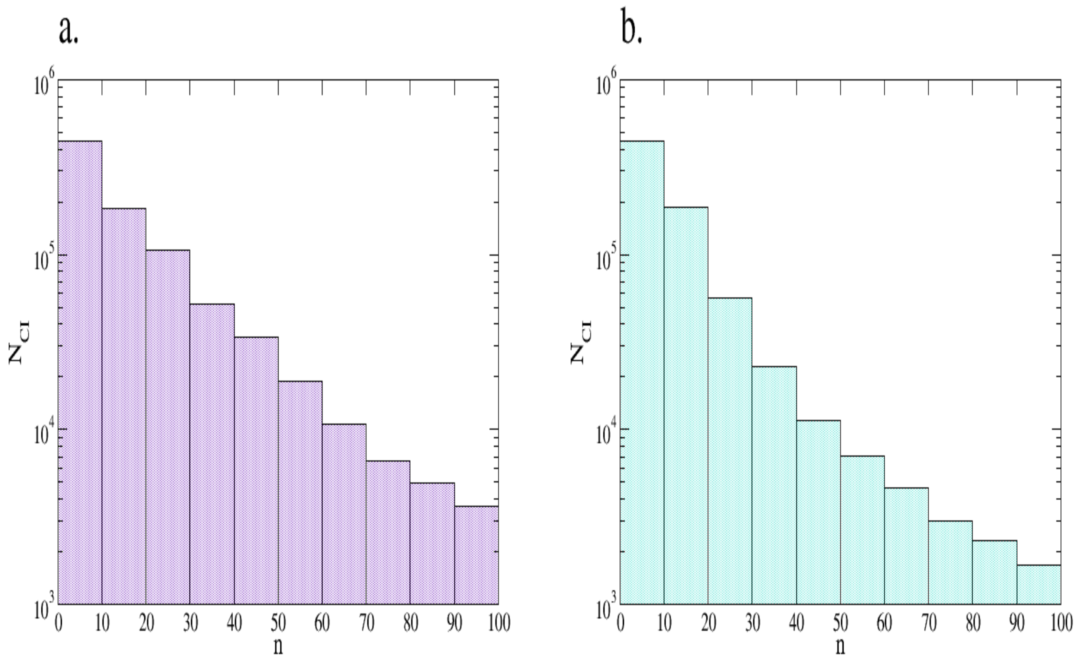


Figura 5.17: Histograma para o escape das condições iniciais com $0 < n < 100$.

(b)) em referência aos casos mostrados pela figura 5.16 (a) e (b), respectivamente. Em ambos os casos da figura 5.17 a quantidade de trajetórias que escapam depois das 10 primeiras iterações decai rapidamente, no entanto, o caso do perfil de rotação puramente monotônico, figura 5.17 (a), apresenta uma quantidade de trajetórias ligeiramente superior durante o restante do intervalo $10 < n < 100$ devido, principalmente, à extensão da sua região caótica.

Calculamos o padrão de escape (comprimento de conexão) seguindo as divisões do número de iterações definidos pelo histograma da figura 5.17. Associamos uma cor para cada intervalo de escape e obtivemos o padrão mostrado na figura 5.18. A escala entre $1 - 100$ está subdividida em intervalos de 10 iterações sendo que as condições iniciais com $n > 100$ receberam a mesma cor, vermelho escuro.

A figura 5.18 indica que a região próxima à borda do sistema é quase que em sua totalidade preenchida por trajetórias cujo escape é muito rápido, entre $1 < n < 100$, em ambos os casos. É possível ainda notar duas modificações importantes: (i) a região de escape rápido na figura 5.18 (a) (em referência ao perfil monotônico) extende-se próximo à borda do plasma, atingindo-a ao redor da região $(x, y_{plasma}) = (0.6, 0.2727)$, fato que não ocorre na figura 5.18 (b) devido à existência de uma barreira interna imposta por uma mudança local do perfil do fator de segurança; (ii) Ao compararmos as respectivas ampliações de uma mesma região verificamos uma mudança expressiva no padrão do escape das trajetórias. Em especial, pode-se notar pela ampliação da figura 5.18 (a)

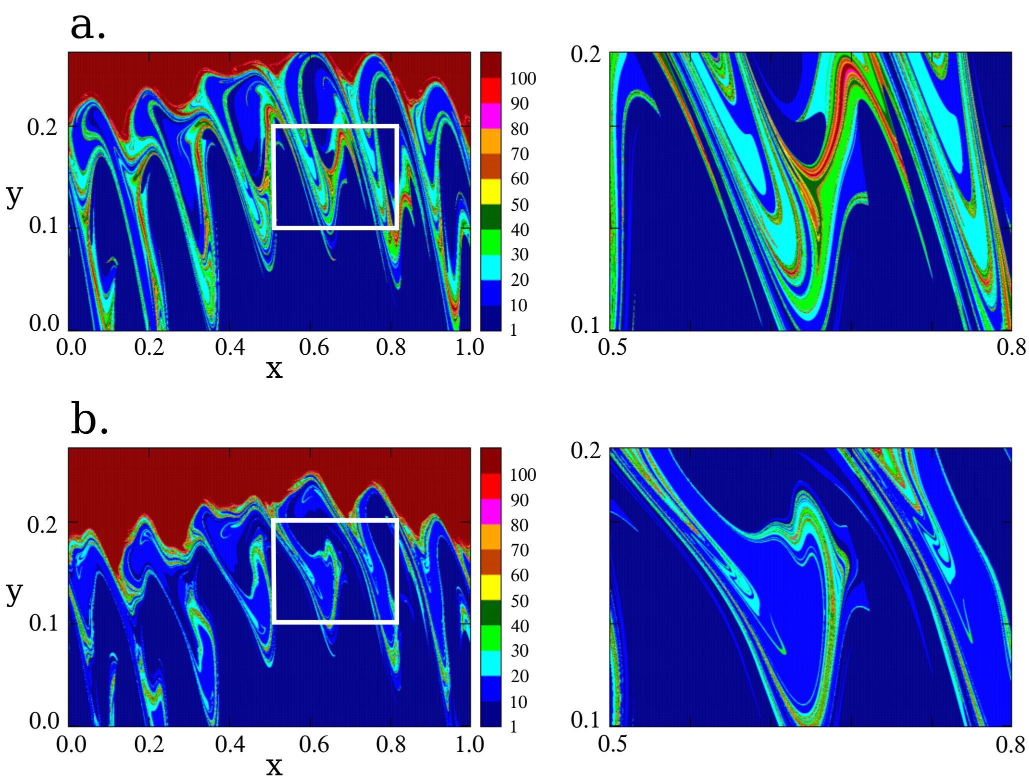


Figura 5.18: Padrão de escape para região próxima à borda do sistema em referências as figuras 5.16 (a) e (b), respectivamente.

a existência de uma região estreita que contém trajetórias que demoram acima de 100 iterações para que colidam com a parede. A figura 5.18 (b) apresenta tal região, porém, bem mais fina e, visualmente, não é possível constatar trajetórias que levam mais do que 100 iterações para atingir a parede. Este fato indica que a modificação local do perfil do fator de segurança não somente isolou as trajetórias correspondentes ao raio do plasma como também provocou uma mudança estrutural na região próxima à borda propiciando um escape mais rápido das trajetórias nesssa região.

Finalmente, para caracterizar o transporte das linhas de campo rumo à parede do tokamak, nós estudamos a fração de escape (FE) (equação 2.30) para um conjunto de 10^8 condições iniciais fornecidas sobre a mesma área da figura 5.18 à direita (ampliação) e iteradas 2×10^6 vezes. A FE nos dará uma perspectiva de como as condições iniciais escapam e se existe alguma forma de aprisionamento em algum dos casos. O resultado é mostrado pela figura 5.19 onde, o caso a. refere-se à figura 5.18 (a) e o caso b. à figura 5.18 (b). Pela figura 5.19, percebe-se que ambos os casos decaem, aparentemente, como uma lei de potência. No entanto, devido às intensas flutuações nós podemos supor apenas um expoente característico, γ, entre 1 e 2. Para tempos curtos, $\tau < 100$, os dois casos decaem rapidamente, restando poucas condições iniciais depois de 100 iterações do mapa. Entre $10^3 < \tau < 3 \times 10^3$ o caso b., em referência ao perfil com ponto de inflexão, decai mais

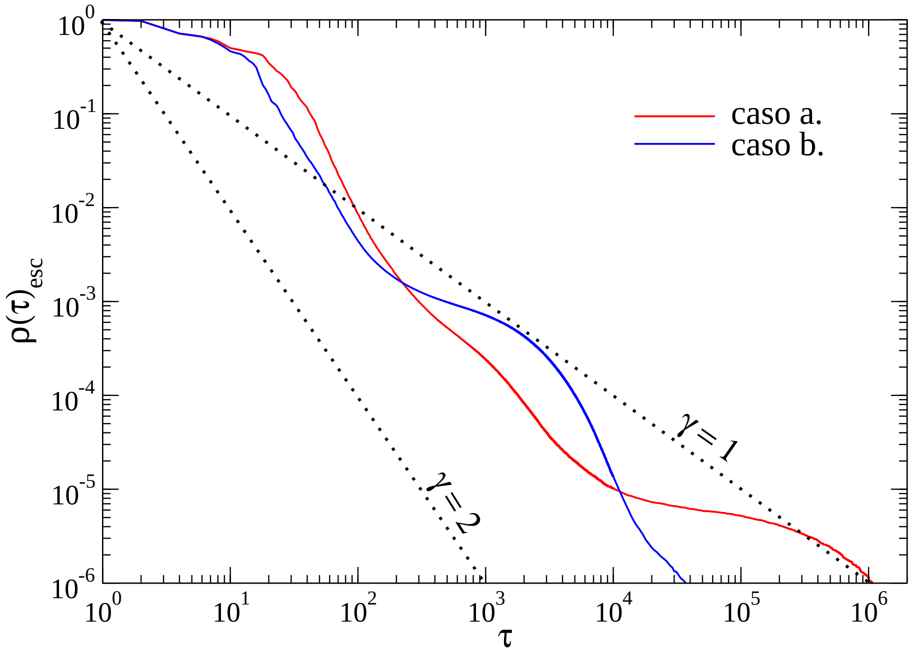


Figura 5.19: Fração de escape para um conjunto de condições iniciais fornecidos sob a área da figura 5.18 à direita. O caso a. refere-se ao perfil monotônico e o caso b. ao perfil com ponto de inflexão local.

lentamente, ou seja, a probabilidade de se encontrar condições iniciais com tempos de escape dentro desse limite é maior para o caso b. do que para o caso a.. Contudo, para $\tau > 10^4$ temos uma inversão e o caso a. passa a dominar o limite para longos tempos de escape. Isso significa que o espaço de fases da figura 5.18 (a) possui uma estrutura capaz de aprisionar as condições iniciais por longos períodos de tempo.

A ocorrência de tempos longos ($\tau > 10^5$) para o caso a. da figura 5.19 (curva vermelha) em referência ao perfil monotônico, está relacionado ao fato do espaço de fases correspondente (figura 5.16 (a)) não possuir curvas invariantes que impeçam as trajetórias de penetrar em direção ao núcleo do plasma. Assim, algumas das condições iniciais próximas à fronteira $y = 0$ seguem em direção ao plasma e permanecem lá durante muitas iterações até finalmente escaparem. Esse fato é inibido pelo caso b., devido a existência de uma barreira.

Em termos experimentais, o fato de observarmos uma quantidade de trajetórias que seguem rumo ao núcleo do plasma e depois chocam-se com a fronteira, possui consideráveis consequências. Sendo o núcleo do plasma uma região de temperaturas elevadas, as partículas que, por aproximação seguirem as linhas de campo rumo ao núcleo do plasma devem armazenar mais energia e caso venham a se chocar com a fronteira, podem diminuir a eficiência do confinamento ou até mesmo danificar a câmara do tokamak.

Capítulo 6

Conclusões

As propriedades dinâmicas de fenômenos não-*twist* foram apresentadas nesta tese através de observações topológicas no espaço de fases e aproximações numéricas. Nesta perspectiva, indica-se que a topologia não-*twist* pode ocorrer, mesmo que localmente, na maioria dos sistemas hamiltonianos.

No capítulo 3, a topologia atípica do espaço de fases de um sistema padrão não-*twist* foi revisada. Um sistema não-*twist* é caracterizado pelo perfil não-monotônico do número de rotação e, portanto, assegura a existência de no mínimo uma curva sem *shear*. A curva sem *shear* é um toro invariante irracional, cujo número de rotação é um ponto de máximo ou de mínimo no perfil de rotação do sistema. Ao redor da curva sem *shear* acontecem bifurcações tipicamente não-*twist*, como os processos de reconexão (subseção 3.2.2). Com a variação dos parâmetros do sistema o toro sem *shear* pode ser destruído e, no caso do mapa padrão não *twist*, o transporte na direção y do espaço de fases estende-se de $-\infty$ até ∞. Através da interpretação do teorema de Slater [Sla67], nós aplicamos um método numérico para encontrar o limite da existência ou não da curva sem *shear* no espaço dos parâmetros (a, b). Nosso resultado condiz com os resultados apresentados na literatura com a utilização de outros métodos como: o método de Greene usado em [WAFM05] e o método de iterar condições iniciais até que alguma delas ultrapasse a região da curva sem *shear* [SA98]. Enfatizamos que apesar do método numérico com base no teorema de Slater ser computacionalmente mais eficiente, ele não permite a obtenção do valor exato da quebra da curva sem *shear* de modo tão refinado quanto o método de Greene [Gre79]. No entanto, o nosso resultado apontou regiões do espaço de parâmetros onde a separatriz, unificada pelo processo de reconexão de período - par, se quebra antes dos toros vizinhos, fato que não pôde ser observado pelos demais métodos. Enfatizamos que o espaço de fases para os valores de parâmetros desse caso, mostra que a curva sem *shear* está realmente quebrada o que confirma nosso resultado.

Até recentemente, a presença de um toro sem *shear* era apenas creditado aos mapas não-*twist*. No entanto, tem-se mostrado [DMS99, dWW88, Moe90] que um toro sem *twist*, como os toros sem *shear*, podem emergir em ressonâncias secundárias de qualquer mapa na vizinhança de uma bifurcação tripla do ponto elíptico. No capítulo 4, nós introduzimos o cálculo do número de rotação interno como um diagnóstico numérico para encontrar esses toros sem *shear* secundários. Com esse procedimento, nós encontramos não apenas o concomitante toro sem *shear* próximo à uma bifurcação tripla, mas também outros dois toros na vizinhança de uma bifurcação quádrupla. Para tanto, nós investigamos dois sistemas: *(i)* mapa padrão não-*twist* (MPNT) e *(ii)* mapa padrão-*twist* (MPT).

Comparando os exemplos apresentados aqui e na Ref. [DMS99], nós constatamos que em todos os casos a curva sem *shear* secundária aparece quando as ilhas regulares remanescentes têm um tamanho reduzido e o parâmetro de perturbação é alto, portanto, os sistemas estão muito distantes do caso integrável e eventualmente, o mapa perturbado pode não ser útil para descrever a dinâmica do sistema considerado. Mesmo assim, muitas propriedades interessantes são descritas para altos valores de parâmetros como por exemplo, os estudos relacionados aos modos acelerados no mapa padrão-*twist* e a ruptura da barreira sem *shear* em sistemas não-*twist* como estudado no capítulo 3.

Diante desta nova perspectiva, buscamos trabalhar com um modelo de particular interesse físico. O mapa que modela as linhas de campos magnéticos sob a influência de um limitador ergódico em um tokamak foi introduzido no capítulo 5. Esse mapa, chamado mapa de Ullmann, possui fatores importantes que o diferencia dos antecessores, como: *(i)* ser simplético, *(ii)* possuir parâmetros ligados diretamente ao próprio tokamak e *(iii)* a liberdade de escolha do perfil do fator de segurança. Nossas simulações iniciais sobre o mapa de Ullmann com perfil monotônico do fator de segurança indicou a presença de ilhas secundárias envoltas por um mar caótico que apresentavam um toro sem *shear* em seu interior (seção 5.2). Como previsto, a verificação do toro sem *shear*, de maneira localizada no espaço de fases, está ligada à proximidade de uma bifurcação tripla do ponto elíptico. No mesmo contexto, identificamos o cenário da bifurcação quádrupla na presença de duas curvas sem *shear*, assim como aquelas apresentadas no capítulo 3 para o mapa padrão *twist*.

A partir de um conjunto de parâmetros próximos da bifurcação quádrupla, nós desenvolvemos um estudo sobre o escape de trajetórias na presença das curvas sem *shear* secundárias. Assim, concluimos que qualquer que seja a curva sem *shear* secundária que apareça no espaço de fases, ela não deve exercer influência direta no transporte, mas através de alterações nos parâmetros, espera-se que essa mesma curva, ao se bifurcar, entre em contato com o mar de caos, levando a uma redução considerável e atípica com relação ao escape de trajetórias (transporte). Portanto, o efeito de aprisionamento enfatizado não é um fenômeno relacionado com o toro sem *shear* secundário, mas uma consequência de sua existência. Pelo o que constatamos na literatura [ECVD97, JCL+09], juntamente com resultados obtidos por esta tese, presume-se que as bifurcações de baixa ordem, por exemplo: 1/5, 1/4, 1/3 e 1/2, ao romper sua separatriz, formam pequenos vãos (cantoros) e, portanto, são capazes de aprisionar as órbitas por um período longo de tempo, alterando, significativamente, o transporte no espaço de fases.

6.1 Resumo dos principais resultados

Buscamos compreender e analisar os fenômenos relacionado aos sistemas hamiltonianos não-*twist*. Para tanto, o nosso estudo focou-se no mapa padrão não-*twist* que entre as diversas propriedades, destacamos:

- A não monotonicidade do perfil do número de rotação que sugere a presença de no mínimo um toro cujo número de rotação é um máximo ou um mínimo no referido perfil. Tal toro é conhecido como curva (toro) sem *shear* e é muitas vezes caracterizado pela sua robustes, ou seja, é quase sempre o último toro a se romper. Dissemos quase sempre, pois encontramos alguns conjuntos de parâmetros para os quais a curva sem *shear* estava quebrada, antes mesmo das curvas invariantes vizinhas. Esse caso precisa ser melhor explorado.

- Quando o número de rotação de uma curva sem *shear* passa por um valor racional, tem-se uma colisão ou o nascimento de órbitas de mesmo período. Esse processo envolve uma bifurcação atípica conhecida como reconexão, cujos cenários estão relacionados com o período par ou ímpar da corrente de ilhas.

- Ainda para o mapa não-*twist*, estudamos a quebra da curva sem *shear* conforme variamos os parâmetros do sistema. O método numérico, baseado no teorema de Slater (ver seção 3.2.3), para o estudo da quebra da curva sem *shear* conforme a variação dos parâmetros, mostrou-se eficiente e condiz com os resultados conhecidos na literatura. Porém, o método aponta para a existência de regiões onde, durante o processo de reconexão a curva sem *shear* se quebra primeiro do que os toros vizinhos, fato este não identificado anteriormente.

Seguindo as previsões estabelecidas na Ref. [DMS99], nós direcionamos nossos estudos para procurar se os fenômenos atribuídos aos mapas não-*twist*, poderiam, de alguma forma, aparecer em mapas *twist* (capítulo 4 e referências [DMS99, dWW88, Moe90]). Os resultados a seguir foram publicados em [AC12].

- A adequação de um método numérico através do perfil espacial do número de rotação interno, ω_{in}, para medir a rotação de regiões regulares (ilhas) com relação ao centro elíptico (equação 4.3).

- Através do método citado acima e das referências supracitadas, observamos que as curvas sem *shear* aparecem sempre próximas à bifurcação tripla do ponto elíptico, tornando o perfil de rotação dos toros, não-monotônico, o que não era previsto.

- Os toros sem *shear* também podem aparecer próximos às bifurcações quádruplas. O método do número de rotação interno, nos permitiu encontrar nas proximidades desta bifurcação, não apenas uma mas, duas curvas sem *shear*. Nesse cenário, uma das curvas dá origem às ilhas de período - 4 enquanto a outra, converge para o ponto elíptico sem bifurcar.

- As curvas sem *shear*, caracterizadas em regiões locais do espaço de fases, funcionam como no caso da estrutura global e, portanto, também apresentam processos de reconexão quando passam por um valor racional do número de rotação interno. No entanto, até o presente momento, nós só encontramos o cenário descrito para sistema não-*twist* de período ímpar, independente da periodicidade do número interno.

Os resultados do capítulo 5 estão relacionados à descrição simplética dos campos magnéticos em um tokamak com limitador ergódico. Os detalhes do mapeamento podem ser acompanhados no apêndice A. A liberdade sobre o perfil do fator de segurança resulta, basicamente, em dois tipos de modelos, o qual chamamos de mapa *twist* de Ullmann (MTU), para o caso de perfis monotônicos e mapa não-*twist* de Ullmann (MNTU) no caso de perfis degenerados. Sobre este modelo concluímos:

- Devido ao número significativo de parâmetros, foi possível identificar incontáveis bifurcações geradas por toros secundários não-*twist* próximas à borda do sistema. A presença local de uma curva sem *shear* no MTU com perfil do fator de segurança monotônico, fez parte de um estudo sobre barreiras sem *shear* em plasmas e foi publicado em [CVA+12].

- O surgimento da curva sem *shear* local não afeta, diretamente, o transporte global das linhas de campo magnéticas. No entanto, sua ruptura próxima ao limite com o mar de caos faz com que a vizinhança da ilha regular torne-se uma região mais propícia para aprisionar trajetórias por longos períodos de tempo. A diferença entre o aprisionamento causado no caso de uma curva sem *shear* local rompida em comparação com outros casos é notável (ver figura 5.6), fato esse corroborado pela distribuição estatística dos tempos de escape, no qual o caso com a curva sem *shear* apresentou quantidades de escapes superiores a 5×10^5 iterações do mapa.

- As modificações do fator de segurança possuem um papel fundamental no transporte das linhas de campos em tokamaks. Em especial, perfis não - monotônicos ou apenas com um ponto de inflexão, podem ser ajustados para se obter barreiras de transporte com o intúito de diminuir a interação do plasma confinado com a parede da câmara do tokamak.

- No caso do perfil não-monotônico, obtivemos um espaço de parâmetros (ϵ, C), onde ϵ é a perturbação do sistema dada pela razão entre a corrente do limitador e a corrente do plasma e C é uma constante relacionada com a geometria física de um tokamak. O espaço de parâmetros obtido (ver figura 5.11) indica que pequenas flutuações na corrente de plasma pode fazer com que uma barreira apareça ou desapareça do espaço de fases.

- A utilização de um perfil com um ponto de inflexão localizado mostrou-se interessante pois, além de gerar uma barreira no espaço de fases, o perfil modificado acabou alterando também as linhas de campo próxima à fronteira, aumentando o escape de trajetórias de tempos curtos.

6.2 Questões em aberto

Uma lista das questões em aberto ou possíveis extensões levantadas durante a tese pode ser verificada abaixo:

- Um estudo sobre a estabilidade da curva sem *shear* durante o processo de reconexão precisa ser melhor explorado. O método numérico baseado no teorema de Slater sugere que alguns conjuntos de parâmetros fazem com que a curva sem *shear* se rompa antes mesmo das curvas invariantes vizinhas (seção 3.2.3).

- Obter uma relação entre os parâmetros fundamentais do sistema e as bifurcações secundárias não-*twist* presentes, genericamente, em sistemas hamiltonianos.

- Seria interessante investigar o comportamento dos fenômenos não-*twist* e principalmente os fenômenos não-*twist* locais em sistemas hamiltonianos multidimensionais. Basicamente, há poucos resultados teóricos e numéricos sobre o assunto. Aproveitando o ensejo, o método do teorema de Slater poderia ser avaliado para esses sistemas multidimensionais.

- Sobre o ponto de vista de aplicações em Física de Plasmas, cabe investigar se as bifurcações que surgem dos toros secundários não *twist* podem ser identificados pelo perfil experimental do fator de segurança de um tokamak. Dados experimentais sobre transporte que comprovem a atuação de um provável aprisionamento causado por pequenas ilhas magnéticas seriam muito bem vindos.

- Embora na subseção 5.3.1 nós avaliamos apenas flutuações na corrente de plasma I_p, sabe-se que o fator de segurança na borda do plasma q_a, também sofre algumas ligeiras modificações e, portanto, um espaço de parâmetros mais realista aos problemas enfrentado, experimentalmente, seria dado pelo espaço $\epsilon \times q_a$.

Apêndice A

Descrição simplética das linhas de campo magnéticas

Basicamente, para se obter energia de uma reação de fusão é necessário criar um plasma de elementos leves à altas temperaturas ($\approx 10^9 K$). A utilização de campos magnéticos em vasos de geometria toroidal, como os *stelerators* e *tokamaks*, têm-se mostrado promissor para o confinamento e manutenção de um plasma ionizado. O confinamento magnético é usado, pois partículas carregadas na presença de um campo magnético rotacionam sobre um eixo de giro que, em primeira aproximação, segue as linhas de campo magnéticas.

As linhas de campo magnéticas na câmara formam superfícies fechadas de maneira que se tomarmos um deslocamento $\overrightarrow{dl}$ ao longo da linha de campo temos no equilíbrio:

$$\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{dl} = 0 \tag{A.1}$$

Considerando tokamaks de grande razão de aspecto, ou seja: $R_0/b >> 1$, de forma que uma aproximação cilíndrica seja adequada a equação A.1 pode ser escrita como:

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{R_0 d\phi}{B_\phi}. \tag{A.2}$$

A fim de obter um mapa de retorno devemos, então, escolher uma seção de Poincaré *z=const* para que as coordenadas (r_n, θ_n) denotem as coordenadas sobre a seção no instante n, ou seja, as coordenadas da n-ésima interseção de uma dada linha de campo com a seção de Poincaré. Perceba que, neste caso, a variável ϕ desempenha um papel de tempo canônico ao longo da qual calculamos a evolução da linha de campo no passo $\phi + 2\pi$.

Em tokamaks, uma corrente toroidal de plasma é induzida, originando um campo magnético poloidal, B_θ , e bobinas montadas sobre a câmara produzem um campo magnético toroidal, B_ϕ^0. A soma destes campos constitui a configuração magnética de equilíbrio helicoidal $\mathbf{B}_0(r) = (B_r^0 = 0, B_\theta^0(r), B_\phi^0(r))$.

De A.2 obtemos que as equações das linhas de campo são:

$$\frac{dr}{d\phi} = 0 \tag{A.3}$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{R_0 B_\theta(r)}{r B_\phi^0} \tag{A.4}$$

que ao serem integradas ao longo de uma volta toroidal obtêm-se:

$$r_{n+1} = r_n \tag{A.5}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{2\pi R_0}{B_\phi^0} \frac{B_\theta^0(r)}{r} \tag{A.6}$$

ou seja, neste caso as linhas de campo magnéticas estão situadas sobre superfícies de raio constante.

Para melhorar o modelo podemos adotar correções toroidais devido à geometria da câmara de confinamento. Além disso, como as linhas de campo magnéticas descrevem um sistema hamiltoniano, devemos nos certificar que sua discretização mantenha a forma simplética (equação 2.6). Em [UC00] foi discutido que tal mapeamento deveria cumprir os seguintes critérios:

- quando $\frac{r}{R_0} \to 0$ as expressões devem se reduzir ao mapeamento cilíndrico A.5 e A.6
- os perfis dos campos magnéticos poloidais e fator de segurança devem ser satisfatórios e condizentes com as observações experimentais.
- ele deve ser derivável de uma função geratriz, o que garante a simpleticidade do modelo.

Uma função geratriz proposta para cumprir tais exigências pode ser:

$$G_{tor}(r_{n+1}, \theta_{n+1}) = \theta_n r_{n+1} + 2\pi \int_0^{r_{n+1}} \frac{d\zeta}{q(\zeta)} + a_1 \frac{r_{n+1}}{R_0} cos\theta_n \tag{A.7}$$

Nesta expressão, os dois primeiros termos do lado direito formam uma função geratriz para o mapeamento cilíndrico A.5, onde $q(\zeta)$ é o perfil do fator de segurança quando $\frac{r}{R_0} \to 0$. O coeficiente a_1 é ajustado para satisfazer as propriedades impostas pelo segundo item.

Através das relações:

$$r_n = \frac{\partial G_{tor}(r_{n+1}, \theta_{n+1})}{\partial \theta_n} \tag{A.8}$$

$$\theta_{n+1} = \frac{\partial G_{tor}(r_{n+1}, \theta_{n+1})}{\partial r_{n+1}} \tag{A.9}$$

obtemos o mapa:

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{1 - a_1 sin\theta} \tag{A.10}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{2\pi}{q_{eq}(r_{n+1})} + a_1 cos\theta_n. \tag{A.11}$$

Como já discutimos no capítulo 5, a seção de Poincaré do mapa de equilíbrio definido pelas equações acima, gera um ligeiro deslocamento entre o eixo magnético e o eixo geométrico. Tal deslocamento é observado também pelas soluções numéricas da equação de Grad-Shafranov e é chamada de *shift de Shafranov*.

Para apresentarmos o mapa de perturbação, induzido pelo limitador ergódico, supomos que o mesmo seja suficientemente estreito em relação à dimensão toroidal ao ponto que podemos considerá-lo como uma perturbação impulsiva. Logo, partimos de uma forma aproximada dos campos magnéticos perturbativos dados por [VC92]:

$$B_r^1(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 l m I_h}{\pi b}(\frac{r}{b})^{m-1} sin(m\theta) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\phi - 2\pi j) \tag{A.12}$$

$$B_\theta^1(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 l m I_h}{\pi b}(\frac{r}{b})^{m-1} cos(m\theta) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\phi - 2\pi j) \tag{A.13}$$

onde δ representa a função delta de Dirac. Usando as relações definidas em A.2 temos:

$$r_{n+1} = r_n - \frac{\mu_0 l m I_h}{\pi b B_0}(\frac{r_n}{b})^{m-1} sin(m\theta) \tag{A.14}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{\mu_0 l m I_h}{\pi b^2 B_0}(\frac{r_n}{b})^{m-2} cos(m\theta) \tag{A.15}$$

Embora reproduza com razoável fidelidade as posições radiais e as larguras das cadeias de ilhas magnéticas criadas por ressonâncias geradas pelo limitador ergódico, este mapeamento ainda não é adequado pois apresenta pequena dissipação e portanto não simplético. Para solucionar este problema, fazemos o seguinte. Como o limitador ergódico atua na iteração entre a borda do plasma e a parede da câmara, fazendo $r \rightarrow$b no mapa acima vemos que de forma geral $\| \frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{r_{n+1} - r_n} \| >> 1$, ou seja, a perturbação angular é muito mais relevante do que a perturbação radial. Assim, nos atemos a equação angular cuja função geratriz pode ser obtida pela integração da relação: $\theta_{n+1} = \frac{\partial G_{pert}}{\partial r_{n+1}}$, que nos leva a:

$$G_{pert}(r_{n+1}, \theta_{n+1}) = r_{n+1}\theta_n - \frac{Cb}{m-1}(\frac{r_{n+1}}{b})^{m-1} cos(m\theta) \tag{A.16}$$

onde $C = \frac{\mu_0 m I_h l}{B\pi b^2}$

Finalmente, das relações de função geratriz obtemos o mapa:

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n+1} + \frac{mCb}{m-1}(\frac{r_{n+1}}{b})^{m-1} sin(m\theta_n) && \text{(A.17)} \\ \theta_{n+1} &= \theta_n - C(\frac{r_{n+1}}{b})^{m-2} cos(m\theta_n). && \text{(A.18)} \end{aligned}$$

Assim, o mapa completo que descreve as linhas de campo magnéticas de um tokamak com um limitador ergódico é dado pelas equações equações A.17 e A.18 dados (r, θ) adevindos das equações A.10 e A.11.

Referências Bibliográficas

[AA89] V. I. Arnold and A. Avez, *Ergodic problems of classical mechanics*, Addison-Wesley Pub. Co., New York, 1989.

[AC12] C. Vieira Abud and I. L. Caldas, *Secondary nontwist phenomena in area-preserving maps*, Chaos **22** (2012), 033142.

[AdlLP05] A. Apte, R. de la Llave, and N. Petrov, *Regularity of critical invariant circles of the standard nontwist map*, Nonlinearity **18** (2005), 1173.

[AFM+08] E. G. Altmann, T. Friedrich, A. E. Motter, H. Kantz, and A. Richter, *Prevalence of marginally unstable periodic orbits in chaotic billiards*, Phys. Rev. E **77** (2008), 016205.

[Alt07] E. G. Altmann, *Intermitent chaos in hamiltonian dybamical systems*, tese de doutorado, Universität Wuppertal, Dresden, 2007.

[APT13] E. G. Altmann, J. S. E. Portela, and T. Tél, *Leaking chaotic systems*, Rev. of Mod. Phys. **85** (2013), 870.

[Aub78] S. Aubry, *Invariant spectra of dynamical systems*, Solitons and Condensed Matter Physics, Springer-Verlag, New York, 1978.

[AWM03] A. Apte, A. Wurm, and P. J. Morrison, *Renormalization and destruction of* $1/\gamma^2$ *tori in the standard nontwist map*, Chaos **13** (2003), 421.

[Bal98] R. Balescu, *Hamiltonian nontwist maps for magnetic field lines with locally reversed shear in toroidal geometry*, Phys. Rev. E **58** (1998), 3781.

[BBdCM93] O. Bohigas, D. Boosé, R. Egydio de Carvalho, and V. Marvulle, *Quantum tunneling and chaotic dynamics*, Nuclear Physics A **560** (1993), no. 1, 197.

[Bir35] G. D. Birkhoff, *Nouvelles recherches sur les systemes dynamiques*, Memoriae Point. Acad. Sci. Novi Lyncaei **1** (1935), 85–216.

[Boo04] A. H. Boozer, *Physics of magnetically confined plasmas*, Rev. Mod. Phys. **76** (2004), 1071.

[CF12] D. Constantinescu and M. C. Firpo, *Modifying locally the safety profile to improve the confinement of magnetic field lines in tokamak plasmas*, Nucl. Fusion **52** (2012), 054006.

[CFG+04] J. W. Connor, T. Fukuda, X. Garbet, C. Gormezano, V. Mukhovatov, and M. Wakatani, *A review of inetrnal transport barrier physics for steady-state operation of tokamaks*, Nucl. Fusion **44** (2004), no. R1, 49.

[CH08] G. Contopoulos and M. Harsoula, *Stickiness in chaos*, Int. J. of Bif. and Chaos **18** (2008), no. 10, 2929.

[Cha04] C. D. Challis, *The use of internal transport barriers in tokamak plasmas*, Plasma Phys. Control. Fusion **46** (2004), B23–B40.

[Chi79] B. V. Chirikov, *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*, Phys. Rep. **52** (1979), 263.

[Con71] G. Contopoulos, *Orbits in highly perturbed systems*, The Astronomical Journal **16** (1971), 147.

[CPUV96] I. L. Caldas, J.M. Pereira, K. Ullmann, and R. L. Viana, *Magnetic field line mapping for a tokamak with ergodic limiters*, Chaos, Sol. and fractals **7** (1996), no. 7, 991.

[CVA+02] I. L. Caldas, R. L. Viana, M. S. T. Araujo, A. Vannucci, E. C. da Silva, K. Ullmann, and M. V. A. P. Heller, *Control of chaotic magnetic fields in tokamaks*, Braz. J. Phys. **32** (2002), no. 4, 980.

[CVA+12] I L Caldas, R L Viana, C V Abud, J C D Fonseca, Z O Guimarães Filho, T Kroetz, F A Marcus, A B Schelin, J D Szezech Jr, D L Toufen, S Benkadda, S R Lopes, P J Morrison, M Roberto, K Gentle, Yu Kuznetsov, and I C Nascimento, *Shearless transport barriers in magnetically confined plasmas*, Plasma Phys. Control. Fusion **54** (2012), 124035.

[CVJ+12] I. L. Caldas, R. L. Viana, J. D. Szezech Jr., J. S. E. Portela, J. Fonseca, M. Roberto, C. G. L. Martins, and E. J. da Silva, *Nontwist symplectic maps in tokamaks*, Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **17** (2012), 2021.

[dA88] A. M. Ozorio de Almeida, *Hamiltonian systems: Chaos and quantization*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[dCdA92] R. Egydio de Carvalho and A. M. Ozorio de Almeida, *Integrable apprximation to the overlap of resonances*, Phys. Lett. A **162** (1992), 457.

[dCNGM96] D. del Castilho Negrete, J. M. Greene, and P. J. Morrison, *Area preserving nontwist maps: periodic orbits and transition to chaos*, Physica D **91** (1996), 1–23.

[dCNGM97] ———, *Renormalization and transition to chaos in area presrving nontwist maps*, Physica D **100** (1997), 311.

[dCNM92] D. del Castilho Negrete and P. J. Morrison, *Hamiltonian chaos and transport in quasigeostrophic flows*, Prigogine I, American Institute of Physics, New York, 1992.

[dCNM93] ———, *Chaotic transport by rossby waves in shear flow*, Phys. Fluids A **5** (1993), 948.

[DdlL00] A. Delshams and R. de la Llave, *Kam theory and a partial justification of greene's criterion for non-twist maps*, SIAM J. Math. Anal. **31** (2000), 1235.

[DI05] H. R. Dullin and A. V. Ivarov, *Another look at the saddle-centre bifurcation: Vanishing twist*, Physica D **211** (2005), 47–56.

[DMS99] H. R. Dullin, J. D. Meiss, and D. Sterling, *Generic twistless bifurcations*, Nonlinearity **13** (1999), 203.

[dSRP+06] Elton C. da Silva, Marisa Roberto, Jefferson S. E. Portela, Iberê L. Caldas, and Ricardo L. Viana, *Escaping and transport barrier due to ergodic magnetic limiters in tokamaks with reversed magnetic shear*, Nucl. Fusion **46** (2006), S192.

[dWW88] J. P. Van der Weele and T. K. Walkering, *The birth of twin poincaré-birkhoff chains near 1:3 ressonance*, Physica A **153** (1988), 283–294.

[ECVD97] C. Efthymiopoulos, G. Contopoulos, N. Voglis, and R. Dvorak, *Stickiness and cantori*, J. Phys. A **30** (1997), 8167.

[EF78] W. Engelhardt and W. Feneberg, *Influence of an ergodic magnetic limiter on the impurity content in a tokamak*, J. Nucl. Mater. **76,77** (1978), 518.

[EFF+02] L. G. Eriksson, C. Fourment, V. Fuchs, X. Litaudon, C. D. Challis, F. Crisanti, B. Esposito, X. Garbet, C. Giroud, N. Hawkes, P. Maget, D. Mazon, and G. Tresset, *Discharges in the jet tokamak where the safety factor profile is identified as the critical factor for triggering internal transport barriers*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002), 145001.

[EMW+04] T. E. Evans, R. A. Moyer, J. G. Watkins, T. H. Osborne, P. R. Thomas, M. Becoulet, J. A. Boedo, E. J. Doyle, M. E. Fenstermacher, K. H. Finken, R. J. Groebner, M. Groth, J. H. Harris, G. L. Jackson, R. J. La Haye, C. J. Lasnier, S. Masuzaki, N. Ohyabu, D. G. Pretty, H. Reimerdes, T. L. Rhodes, D. L. Rudakov, M. J. Schaffer, M. R. Wade, G. Wang, W. P. West, and L. Zeng4, *Suppression of large edge localized modes in high confinement diii-d plasmas with a stochastic magnetic boundary*, Phys. Rev. Lett. **92** (2004), 235003.

[ENG+95] M. Endler, H. Niedermeyer, L. Giannone, E. Kolzhauer, A. Rudyj, G. Theimer, and N. Tsois, *Measurements and modelling of eletrostatic fluctuations in the scrape-off layer os asdex*, Nucl. Fusion **35** (1995), no. 11, 1307.

[FM06] A. Fasano and S. Marmi, *Analytical mechanics*, Oxford University Press Inc., New York, 2006.

[FWAM06] K. Fuchss, A. Wurm, A. Apte, and P.J. Morrison, *Breakup of shearless meanders and "outer" tori in the standard nontwist map*, Chaos **16** (2006), 033120.

[Gre79] J. Greene, *A method for determining a stochastic transition*, J. Math. Phys. **20** (1979), 1183.

[HH64] M. Hénon and C. Heiles, *The aplicability of the third integral of motion: some numerical experiments*, The astronomical Journal **69** (1964), no. 1, 73.

[HH84] J. E. Howard and S. M Hohs, *Stochasticity and reconnection in hamiltonian systems*, Phys. Rev. A **29** (1984), 418.

[HH95] J. E. Howard and J. Humpheys, *Nonmonotonic twist maps*, Physica D **80** (1995), 256.

[Hor99] W. Horton, *Drift waves and transport*, Rev. Mod. Phys. **71** (1999), 735.

[HP02] R. Hazeltine and S. C. Prager, *New physics in fusion plasma confinement*, Physics Today **30** (2002), no. July.

[HPK+98] W. Horton, H. B. Park, J. M. Kwon, D. Strozzi, P. J. Morrison, and D. I. Choi, *Drift wave test particle transport in reversed shear profile*, Phys. Plasmas **5** (1998), 3910.

[JAF04] M. W. Jakubowski, S. S. Abdullaev, and K. H. Finken, *Modelling of the magnetic field structures and first measurements of heat fluxes for textorded operation*, Nucl. Fusion **44** (2004), S1.

[JCL+09] J. D. Szezech Jr., I. L. Caldas, S. R. Lopes, R. L. Viana, and P. J. Morrison, *Transport properties in nontwist area-preserving maps*, Chaos **19** (2009), 043108.

[JCLV12] J. D. Szezech Jr., I. L. Caldas, S. R. Lopes, and P. J. Morrison R. L. Viana, *Effective transport barriers in nontwist systems*, Phys. Rev. E **86** (2012), 036206.

[JSA+06] M. W. Jakubowski, O. Schmitz, S. S. Abdullaev, S. Brezinsek, K. H. Finken, M. Lehnen A. Kramer-Flecken, U. Samm, K. H. Spatschek, B. Unterberg, and R. C. Wolf, *Change of the magnetic-field topology by an ergodic divertor and the effect on the plasma structure and transport*, Phys. Rev. Lett. **96** (2006), 35004.

[KL77] F. Karger and K. Lackner, *Resonant helical divertor*, Physics Letters **61** (1977), no. 6, 385.

[Kyn68] W. T. Kyner, *Rigorous and formal stability of orbits about an oblate planet*, Mem. Am. Math. Soc. **81** (1968), 1.

[LL91] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and stochastic motion*, vol. 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1991.

[MdCCR11] C. G. L. Martins, R. Egydio de Carvalho, I. L. Caldas, and M. Roberto, *Plasma confinement in tokamaks with robust torus*, Physica A **390** (2011), 9.

[Mei92] J. D. Meiss, *Symplectic maps, variational principles, and transport*, Rev. Mod. Phys. **64** (1992), 795.

[Moe90] R. Moeckel, *Generic bifurcations of the twist coefficient*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **10** (1990), 185–195.

[Mor98] P. J. Morrison, *Hamiltonian description of the ideal fluid*, Rev. Mod. Phys. **70** (1998), 467.

[MT84] T. J. Martin and J. B. Taylor, *Ergodic behaviour in a magnetic limiter*, Plasma Phys. Control. Fusion **26** (1984), 321.

[OC95] G. A. Oda and I. L. Caldas, *Dimerized island chains in tokamaks*, Chaos, Sol. and Fractals **5** (1995), 15–23.

[Ott02] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[PCV03] J. S. E. Portela, I. L. Caldas, and R. L. Viana, *Chaotic magnetic field lines in tokamaks with ergodic limiter*, Physica A **317** (2003), 411–431.

[PCVM07] J. S. E. Portela, I. L. Caldas, R. L. Viana, and P. J. Morrison, *Diffusive transport through a nontwist barrier in tokamaks*, Int. J. of Bif. and Chaos **17** (2007), 1589–1598.

[Per79] I. C. Percival, *Variational principle for invariant tori and cantori*, Nonlinear Dynamicas and Beam-Beam Interaction, Amer. Inst. Physics, New York, 1979.

[Pet01] E. Petrisor, *Nontwist area preserving maps with reversing symmetry group*, Int. J. Bif. and Chaos **11** (2001), no. 2, 497.

[Poi92] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste*, Gauthier-Villars, Paris, 1892.

[PSK+05] C. J. A. Pires, E. A. O. Saettone, M. Y. Kucinski, A. Vannucci, and R. L. Viana, *Magnetic field structure in the tcabr tokamak due to ergodic limiters with a non-uniform current distribution: theoretical and experimental results*, Plasma Phys. Control. Fusion **47** (2005), 1609.

[SA97] S. Shinohara and Y. Aizawa, *The breakup condition of shearless kam curves in the quadratic map*, Prog. of Theor. Physics. **97** (1997), 379.

[SA98] ______, *Indicators of reconnection processes and transition to global chaos in nontwist maps*, Prog. of Theor. Physics. **100** (1998), no. 2, 219.

[Sla67] N. Slater, *Gaps and steps for the sequence $n\theta$ mod 1*, Proc. Camb. Phil. Soc. **63** (1967), 1115.

[UC00] K. Ullmann and I. L. Caldas, *A symplectic mapping for the ergodic magnetic limiter and its dynamical analysis*, Chaos, Solitons and Fractals **11** (2000), 2129–2140.

[VC92] R. L. Viana and I. L. Caldas, *Peripheral stochasticity in tokamaks - the martin taylor model revised*, Zeitschrift fur Naturforschung **47** (1992), 941.

[WAFM05] A. Wurm, A. Apte, K. Fuchss, and P. J. Morrison, *Meanders and reconnection–collision sequences in the standard nontwist map*, Chaos **15** (2005), 023108.

[WAM04] A. Wurm, A. Apte, and P. J. Morrison, *On reconnection phenomena in the standard twist map*, Braz. J. Phys. **34** (2004), 1700.

[WF69] G. H. Walker and J. Ford, *Amplitude instability and ergodic behavior for conservative nonlinear oscillator systems*, Physical Review **188** (1969), no. 1, 416.

[Wol03] R. C. Wolf, *Internal transport barriers in tokamak plasmas*, Plasma Phys. Control. Fusion **45** (2003), R1–R91.

[Zas02a] G. M. Zaslavsky, *Chaos, fractinal kinetics, and anomalous transport*, Phys. Rep. **371** (2002), 461.

[Zas02b] ———, *Dynamical traps*, Physica D **168-169** (2002), 292.