

Perturbações Cosmológicas

Condições iniciais e BAO.

Alessandro Marins
alessandro.marins@usp.br

Departamento de Física Matemática
Universidade de São Paulo

Julho/2019

Introdução

O primeiro passo a ser dado aqui é o de termos condições iniciais para resolver as equações de Boltzmann-Einstein. Para isto, por motivos que ficarão claros no transcorrer dos slides, farei a decomposição das anisotropias das temperaturas dos fótons e dos neutrinos, assim como da polarização dos fótons, em multipolos.

Equações de Boltzmann-Einstein

$$\Theta' + ik\mu\Theta + \Phi' + ik\mu\Psi = -\tau' \left(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2} \mathcal{P}_2(\mu) \Pi \right),$$

$$\Theta^{P'} + ik\mu\Theta^P = \tau' \left(\Theta^P - \frac{1}{2} (1 - \mathcal{P}_2(\mu)) \Pi \right)$$

$$\delta_c' + ikv_c = -3\Phi',$$

$$v_c' + \mathcal{H}v_c = -ik\Psi,$$

$$\delta_b' + ikv_b = -3\Phi',$$

$$v_b' + \mathcal{H}v_b = -ik\Psi + \frac{\tau'}{\mathcal{R}} (3i\Theta_1 + v_b),$$

$$\mathcal{N}' + ik\mu\mathcal{N} = -\Phi' - ik\mu\Psi$$

$$k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = 4\pi Ga^2 (\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0}),$$

$$k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi Ga^2 \Theta_{r,2\rho_r}.$$

Com,

$$\Theta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \Theta_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad \text{OBS: omitirei o \u00edndice } k \text{ de } \Theta_k$$

$$\Theta_\ell(k, \eta) = \frac{1}{(-i)^\ell} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_\ell(\mu) \Theta(k, \eta, \mu)$$

$$\Theta(k, \eta, \mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-i)^\ell \Theta_\ell(k, \eta) \mathcal{P}_\ell(\mu)$$

$$\tau = \int_{\eta}^{\eta_0} d\tilde{\eta} n_e \sigma_T a$$

$$\mathcal{R} = \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}$$

$$\mu = \hat{k} \cdot \hat{p}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} = \frac{da}{dt} = aH$$

Observação

É comum omitirmos o subscript " k " das quantidades no espaço de Fourier, ficando subentendido que estas estão no mesmo espaço pela presença de fatores k na expressão.

Um mínimo de polinômios de Legendre

Polinômios de Legendre formam um conjunto ortonormal completo, e por isso, uma função arbitrária $\psi(x)$, quadrado integrável no intervalo $[-1, 1]$, pode ser decomposta em polinômios de Legendre,

$$\psi(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \psi_{\ell} \mathcal{P}_{\ell}(x)$$

$$\mathcal{P}_{\ell}(x) = \frac{1}{2^{\ell} \ell!} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} (x^2 - 1)^{\ell}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

Um mínimo de polinômios de Legendre

Polinômios de Legendre formam um conjunto ortonormal completo, e por isso, uma função arbitrária $\psi(x)$, quadrado integrável no intervalo $[-1, 1]$, pode ser decomposta em polinômios de Legendre,

$$\psi(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \psi_{\ell} \mathcal{P}_{\ell}(x)$$

$$\mathcal{P}_{\ell}(x) = \frac{1}{2^{\ell} \ell!} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} (x^2 - 1)^{\ell}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{P}_0(x) = 1, \quad \mathcal{P}_1(x) = x \quad \mathcal{P}_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$\mathcal{P}_3(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3) \dots$$

Um mínimo de polinômios de Legendre

Polinômios de Legendre possuem relações de ortogonalidade e recorrência úteis para a derivação das relações que desejamos,

$$\int_{-1}^1 dx \mathcal{P}_n(x) \mathcal{P}_m(x) = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$
$$\mu \mathcal{P}_\ell(x) = \frac{\ell+1}{2\ell+1} \mathcal{P}_{\ell+1}(x) + \frac{\ell}{2\ell+1} \mathcal{P}_{\ell-1}(x)$$

Um mínimo de polinômios de Legendre

Nos será útil sabermos decompor as anisotropias em polinômios de Legendre

$$\psi(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \psi_{\ell} \mathcal{P}_{\ell}(x)$$
$$\psi_{\ell} = \frac{2\ell + 1}{2} \int_{-1}^1 dx \mathcal{P}_{\ell}(x) \psi(x)$$

Um mínimo de polinômios de Legendre

Primeiro, tomemos a equação de Θ , lembrando que $\mathcal{P}_0(\mu) = 1$ e $\mathcal{P}_1(\mu) = \mu$,

$$\Theta' + ik\mu\Theta + \Phi' + ik\Psi = -\tau' \left(\Theta_0 - \Theta + \mu\nu_b - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2(\mu)\Pi \right)$$

Um mínimo de polinômios de Legendre

Primeiro, tomemos a equação de Θ , lembrando que $\mathcal{P}_0(\mu) = 1$ e $\mathcal{P}_1(\mu) = \mu$,

$$\Theta' + ik\mu\Theta + \Phi' + ik\Psi = -\tau' \left(\Theta_0 - \Theta + \mu\nu_b - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2(\mu)\Pi \right)$$

Pelas relações de ortogonalidade e pelos campos perturbativos (Φ, Ψ) não dependerem de μ , encontramos quatro relações: para $\ell = 0$, $\ell = 1$, $\ell = 2$ e $\ell > 2$ ao integrarmos a equação acima por

$$\frac{1}{(-i)^\ell} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_\ell(\mu) (\dots)$$

Equações hierárquicas de Boltzmann

Obtemos

$$\Theta'_0 = -k\Theta_1 - \Phi'$$

$$\Theta'_1 = -\frac{2}{3}k\Theta_2 + \frac{1}{3}k\Theta_0 + \frac{1}{3}k\Psi + \tau' \left(\Theta_1 + \frac{v_b}{3i} \right)$$

$$\Theta'_2 = -\frac{2}{5}k\Theta_3 + \frac{2}{5}k\Theta_1 + \tau' \left(\Theta_2 - \frac{\Pi}{10} \right)$$

$$\Theta'_\ell = -\frac{\ell+1}{2\ell+1}k\Theta_{\ell+1} + \frac{\ell}{2\ell+1}k\Theta_{\ell-1} + \tau'\Theta_\ell; \quad \ell > 2$$

Equações hierárquicas de Boltzmann

De modo similar, podemos obter para a polarização dos fótons e da temperatura dos neutrinos.

$$\Theta_0^{P'} = -k\Theta_1^P + \tau' \left(\Theta_0^P - \frac{\Pi}{2} \right)$$

$$\Theta_1^{P'} = -\frac{2}{3}k\Theta_2^P + \frac{1}{3}k\Theta_0^P + \tau'\Theta_1^P$$

$$\Theta_2^{P'} = -\frac{2}{3}k\Theta_3^P + \frac{2}{5}k\Theta_1^P + \tau' \left(\Theta_2^P - \frac{\Pi}{10} \right)$$

$$\Theta_\ell^{P'} = \frac{\ell}{2\ell+1}k\Theta_{\ell-1}^P + \tau'\Theta_\ell^P; \quad \ell > 2$$

$$\mathcal{N}'_0 = -k\mathcal{N}_1 - \Phi'$$

$$\mathcal{N}'_1 = -\frac{2}{3}k\mathcal{N}_2 - \frac{1}{3}k\mathcal{N}_0 + \frac{1}{3}k\Psi$$

$$\mathcal{N}'_\ell = -\frac{\ell+1}{2\ell+1}k\mathcal{N}_{\ell+1} + \frac{\ell}{2\ell+1}k\mathcal{N}_{\ell-1}; \quad \ell > 1$$

Condições iniciais

- ▶ Para resolver as equações de Boltzmann-Einstein precisamos de condições iniciais, e a busca por tais condições leva a um novo cenário da física: **Teoria da Inflação**.

Condições iniciais

- ▶ Para resolver as equações de Boltzmann-Einstein precisamos de condições iniciais, e a busca por tais condições leva a um novo cenário da física: **Teoria da Inflação**.
- ▶ A Inflação foi introduzida para tentar explicar como regiões que nunca tiverem contato causal têm, basicamente, a mesma temperatura.

Condições iniciais

- ▶ Para resolver as equações de Boltzmann-Einstein precisamos de condições iniciais, e a busca por tais condições leva a um novo cenário da física: **Teoria da Inflação**.
- ▶ A Inflação foi introduzida para tentar explicar como regiões que nunca tiveram contato causal têm, basicamente, a mesma temperatura.
- ▶ Logo se percebeu que o mesmo mecanismo que explicava essa uniformidade na temperatura conseguia explicar a origem das perturbações no Universo.

Condições iniciais

- ▶ Para resolver as equações de Boltzmann-Einstein precisamos de condições iniciais, e a busca por tais condições leva a um novo cenário da física: **Teoria da Inflação**.
- ▶ A Inflação foi introduzida para tentar explicar como regiões que nunca tiveram contato causal têm, basicamente, a mesma temperatura.
- ▶ Logo se percebeu que o mesmo mecanismo que explicava essa uniformidade na temperatura conseguia explicar a origem das perturbações no Universo.
- ▶ Porém, devemos ter em mente que não é tão certo que a inflação é o mecanismo que gera as perturbações primordiais.

Condições iniciais

- ▶ Para resolver as equações de Boltzmann-Einstein precisamos de condições iniciais, e a busca por tais condições leva a um novo cenário da física: **Teoria da Inflação**.
- ▶ A Inflação foi introduzida para tentar explicar como regiões que nunca tiveram contato causal têm, basicamente, a mesma temperatura.
- ▶ Logo se percebeu que o mesmo mecanismo que explicava essa uniformidade na temperatura conseguia explicar a origem das perturbações no Universo.
- ▶ Porém, devemos ter em mente que não é tão certo que a inflação é o mecanismo que gera as perturbações primordiais.
- ▶ Contudo, é a teoria que melhor descreve as observações e ajusta os dados observacionais.

Condições iniciais

Queremos analisar um período tão primordial tal que o tamanho do comprimento de onda das perturbações, ($\lambda = 2\pi k^{-1}$), é muito maior do que o tamanho do horizonte de partículas (região de contato causal), no período da radiação ($\eta = \mathcal{H}^{-1}$).

Condições iniciais

Queremos analisar um período tão primordial tal que o tamanho do comprimento de onda das perturbações, ($\lambda = 2\pi k^{-1}$), é muito maior do que o tamanho do horizonte de partículas (região de contato causal), no período da radiação ($\eta = \mathcal{H}^{-1}$).

Sendo o Horizonte de partículas

$$\chi_P(\eta) = \int_0^t \frac{d\tilde{t}}{a(\tilde{t})} = \int_0^\eta d\tilde{\eta} = \eta$$

Condições iniciais

Neste período há um domínio da radiação e então $\rho \approx \rho_r$. Podemos usar a equação de Friedmann para obter \mathcal{H} em termos de η .

$$H^2 = \mathcal{H}^2 a^{-2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \approx \frac{8\pi G}{3} \rho_r = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_{0,r} \right) a^{-4}$$

$$\mathcal{H} = \left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \right)^2 = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_{0,r} \right) a^{-2}$$

$$\frac{da}{d\eta} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_{0,r}}$$

$$\Rightarrow a(\eta) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_{0,r}} \eta$$

$$\therefore \mathcal{H} = \frac{a'}{a} = \frac{1}{\eta} \quad (\text{Domínio da Radiação})$$

Condições iniciais

Para obter informações de resultados das equações de Boltzmann-Einstein tomamos certos limites de escalas.

- ▶ **Superhorizonte:** $k \ll \mathcal{H}$ ou $k\eta \ll 1$;
- ▶ **Região de cruzamento:** $k \sim \mathcal{H}$ ou $k\eta \sim 1$;
- ▶ **Subhorizonte:** $k \gg \mathcal{H}$ ou $k\eta \gg 1$.

Condições iniciais

Para obter informações de resultados das equações de Boltzmann-Einstein tomamos certos limites de escalas.

- ▶ **Superhorizonte:** $k \ll \mathcal{H}$ ou $k\eta \ll 1$;
- ▶ **Região de cruzamento:** $k \sim \mathcal{H}$ ou $k\eta \sim 1$;
- ▶ **Subhorizonte:** $k \gg \mathcal{H}$ ou $k\eta \gg 1$.

Os valores das condições iniciais são fornecidos quando $k\eta \ll 1$, chamados de **modos primordiais**, para as escalas de interesse hoje. Relações de superhorizonte são relações de escalas muito maiores que o raio de Hubble comóvel.

Condições iniciais

Para obter informações de resultados das equações de Boltzmann-Einstein tomamos certos limites de escalas.

- ▶ **Superhorizonte:** $k \ll \mathcal{H}$ ou $k\eta \ll 1$;
- ▶ **Região de cruzamento:** $k \sim \mathcal{H}$ ou $k\eta \sim 1$;
- ▶ **Subhorizonte:** $k \gg \mathcal{H}$ ou $k\eta \gg 1$.

Os valores das condições iniciais são fornecidos quando $k\eta \ll 1$, chamados de **modos primordiais**, para as escalas de interesse hoje. Relações de superhorizonte são relações de escalas muito maiores que o raio de Hubble comóvel.

Escalas que satisfazem $k\eta \ll 1$, são escalas que estão fora do raio de Hubble comóvel, o que significa que elas são grandes o suficiente para que sejam afetadas por processos causais.

Condições iniciais

Logo, estamos em um período tão primordial que o raio de Hubble comóvel é muito pequeno, pequeno a tal ponto que todas as escalas de interesse estejam fora dele e não sofram efeitos causais.

Condições iniciais

Logo, estamos em um período tão primordial que o raio de Hubble comóvel é muito pequeno, pequeno a tal ponto que todas as escalas de interesse estejam fora dele e não sofram efeitos causais.

Com isso, podemos tomar tal limite nas equações de Boltzmann-Einstein. Ainda, uma vez que $k\eta \ll 1$, expandimos os campos em torno de $k\eta = 0$,

Condições iniciais

Logo, estamos em um período tão primordial que o raio de Hubble comóvel é muito pequeno, pequeno a tal ponto que todas as escalas de interesse estejam fora dele e não sofram efeitos causais.

Com isso, podemos tomar tal limite nas equações de Boltzmann-Einstein. Ainda, uma vez que $k\eta \ll 1$, expandimos os campos em torno de $k\eta = 0$,

$$\Theta_\ell = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_\ell^{(n)} (k\eta)^n$$

$$\mathcal{N}_\ell = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_\ell^{(n)} (k\eta)^n$$

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n)} (k\eta)^n$$

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi^{(n)} (k\eta)^n$$

$$v_b = \sum_{n=0}^{\infty} v_b^{(n)} (k\eta)^n$$

$$v_c = \sum_{n=0}^{\infty} v_c^{(n)} (k\eta)^n$$

Condições iniciais

Tomemos a equação do monopolo da anisotropia da temperatura dos fótons, Θ_0 :

$$\Theta'_0 = -k\Theta_1 - \Phi'$$

Condições iniciais

Tomemos a equação do monopolo da anisotropia da temperatura dos fótons, Θ_0 :

$$\Theta_0' = -k\Theta_1 - \Phi'$$

Expandindo em torno de $k\eta = 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{\eta} \Theta_0^{(n)} + k\Theta_1^{(n)} + \frac{n}{\eta} \Phi^{(n)} \right) (k\eta)^n = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n\Theta_0^{(n)} + k\eta\Theta_1^{(n)} + n\Phi^{(n)} \right) \frac{(k\eta)^n}{\eta} = 0$$

Condições iniciais

Tomemos a equação do monopolo da anisotropia da temperatura dos fótons, Θ_0 :

$$\Theta'_0 = -k\Theta_1 - \Phi'$$

Expandindo em torno de $k\eta = 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{\eta} \Theta_0^{(n)} + k\Theta_1^{(n)} + \frac{n}{\eta} \Phi^{(n)} \right) (k\eta)^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n\Theta_0^{(n)} + k\eta\Theta_1^{(n)} + n\Phi^{(n)} \right) \frac{(k\eta)^n}{\eta} = 0$$

Veja que Θ_1 é uma ordem de $k\eta$ maior que o monopolo e o potencial, então, subdominante. Por isso, podemos descartá-lo. O que nos leva à:

$$-\Phi' = \Theta'_0 = \frac{1}{4}\delta_\gamma$$

Condições iniciais

É preciso que levemos em conta também o comportamento da profundidade ótica, τ , neste período. τ' representa a taxa de interação elétrons-fótons.

Condições iniciais

É preciso que levemos em conta também o comportamento da profundidade ótica, τ , neste período. τ' representa a taxa de interação elétrons-fótons.

$$-\tau' = n_e \sigma_T a \sim (a^{-3})(a^0)(a^1) = a^{-2} \sim \eta^{-2}$$

Condições iniciais

É preciso que levemos em conta também o comportamento da profundidade ótica, τ , neste período. τ' representa a taxa de interação elétrons-fótons.

$$-\tau' = n_e \sigma_T a \sim (a^{-3})(a^0)(a^1) = a^{-2} \sim \eta^{-2}$$

Ou seja, para $\eta \rightarrow 0$ a taxa de interação tende ao infinito. Por isso, devemos tomar os termos juntos ao τ' como sendo nulos.

Condições iniciais

É preciso que levemos em conta também o comportamento da profundidade ótica, τ , neste período. τ' representa a taxa de interação elétrons-fótons.

$$-\tau' = n_e \sigma_T a \sim (a^{-3})(a^0)(a^1) = a^{-2} \sim \eta^{-2}$$

Ou seja, para $\eta \rightarrow 0$ a taxa de interação tende ao infinito. Por isso, devemos tomar os termos juntos ao τ' como sendo nulos.

Se tomarmos, p.ex., a equação do dipolo, Θ_1 , num período não tão inicial, um pouco depois das condições iniciais,

$$\begin{aligned} \Theta_1' &= -\frac{2}{3}k\Theta_2 + \frac{1}{3}k\Theta_0 + \frac{1}{3}k\Psi + \tau' \left(\Theta_1 + \frac{v_b}{3i} \right) \\ \therefore v_b &= -3i\Theta_1 = v_\gamma \end{aligned}$$

Condições iniciais

Podemos mostrar que,

$$\begin{cases} \Theta'_0 = -\Phi', \\ \mathcal{N}'_0 = -\Phi', \\ \delta'_b = -3\Phi', \\ \delta'_c = -3\Phi'. \end{cases} \implies \begin{cases} \Theta_0 = -\Phi + A_\gamma, \\ \mathcal{N}_0 = -\Phi + A_\nu, \\ \delta_b = -3\Phi + A_b, \\ \delta_c = -3\Phi + A_c. \end{cases} \implies \begin{cases} \Theta_0 = -\Phi + A_\gamma, \\ \mathcal{N}_0 = -\Theta_0 + S_\nu, \\ \delta_b = -3\Theta_0 + S_b, \\ \delta_c = -3\Theta_0 + S_c. \end{cases}$$

Com $A_\gamma(k)$, $S_\nu(k)$, $S_b(k)$ e $S_c(k)$ constantes no tempo.

Condições iniciais

Podemos mostrar que,

$$\begin{cases} \Theta'_0 = -\Phi', \\ \mathcal{N}'_0 = -\Phi', \\ \delta'_b = -3\Phi', \\ \delta'_c = -3\Phi'. \end{cases} \implies \begin{cases} \Theta_0 = -\Phi + A_\gamma, \\ \mathcal{N}_0 = -\Phi + A_\nu, \\ \delta_b = -3\Phi + A_b, \\ \delta_c = -3\Phi + A_c. \end{cases} \implies \begin{cases} \Theta_0 = -\Phi + A_\gamma, \\ \mathcal{N}_0 = -\Theta_0 + S_\nu, \\ \delta_b = -3\Theta_0 + S_b, \\ \delta_c = -3\Theta_0 + S_c. \end{cases}$$

Com $A_\gamma(k)$, $S_\nu(k)$, $S_b(k)$ e $S_c(k)$ constantes no tempo.

Chamamos $S_{ij} = \frac{\delta_i}{1+\omega_i} - \frac{\delta_j}{1+\omega_j}$, perturbações da entropia. Definimos as expressões acima em relação aos fótons, $S_i = \frac{\delta_i}{1+\omega_i} - \frac{3}{4}\delta_\gamma$.

Condições iniciais

$$S_i = \frac{\delta_i}{1 + \omega_i} - \frac{3}{4}\delta_\gamma$$

Aqui adotarei que os modos são adiabáticos, ou seja, $S_i = 0, \forall i$.

Condições iniciais

$$S_i = \frac{\delta_i}{1 + \omega_i} - \frac{3}{4}\delta_\gamma$$

Aqui adotarei que os modos são adiabáticos, ou seja, $S_i = 0$, $\forall i$.

O que nos leva a relação:

$$\frac{1}{3}\delta_b = \frac{1}{3}\delta_c = \Theta_0 = \mathcal{N}_0 = A_\gamma - \Phi.$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

Tomemos a equação do termo (00) da equação de Einstein perturbada, e analisemo-na no limite $k\eta \ll 1$,

$$k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2 (\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0})$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

Tomemos a equação do termo (00) da equação de Einstein perturbada, e analisemo-na no limite $k\eta \ll 1$,

$$\begin{aligned}k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) &= 4\pi G a^2 (\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0}) \\3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) &\approx 4\pi G a^2 (\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0})\end{aligned}$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

Tomemos a equação do termo (00) da equação de Einstein perturbada, e analisemo-na no limite $k\eta \ll 1$,

$$\begin{aligned}k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) &= 4\pi G a^2 (\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0}) \\3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) &\approx 4\pi G a^2 (\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0})\end{aligned}$$

Usando a equação de Friedmann: $4\pi G a^2 = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{H}^2}{\rho}$.

Condições iniciais - Equações de Einstein

Tomemos a equação do termo (00) da equação de Einstein perturbada, e analisemo-na no limite $k\eta \ll 1$,

$$\begin{aligned}k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) &= 4\pi G a^2 (\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0}) \\3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) &\approx 4\pi G a^2 (\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0})\end{aligned}$$

Usando a equação de Friedmann: $4\pi G a^2 = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{H}^2}{\rho}$.

$$3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) \approx \frac{3\mathcal{H}^2}{2\rho} (\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0}) = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \left(\frac{\rho_m}{\rho} \delta_m + 4 \frac{\rho_r}{\rho} \Theta_{r,0} \right)$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

Tomemos a equação do termo (00) da equação de Einstein perturbada, e analisemo-na no limite $k\eta \ll 1$,

$$\begin{aligned} k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) &= 4\pi G a^2 (\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0}) \\ 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) &\approx 4\pi G a^2 (\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0}) \end{aligned}$$

Usando a equação de Friedmann: $4\pi G a^2 = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{H}^2}{\rho}$.

$$\begin{aligned} 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) &\approx \frac{3\mathcal{H}^2}{2\rho} (\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0}) = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \left(\frac{\rho_m}{\rho} \delta_m + 4 \frac{\rho_r}{\rho} \Theta_{r,0} \right) \\ \Phi' - \mathcal{H}\Psi &= \frac{1}{2} \mathcal{H} (f_b \delta_b + f_c \delta_c + f_\nu \delta_\nu + f_\gamma \delta_\gamma); \quad f_i \doteq \frac{\rho_i}{\rho} \\ \eta\Phi' - \Psi &= \frac{1}{2} (f_b \delta_b + f_c \delta_c + f_\nu \delta_\nu + f_\gamma \delta_\gamma) \end{aligned}$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

$$\eta\Phi' - \Psi = \frac{1}{2}(f_b\delta_b + f_c\delta_c + f_\nu\delta_\nu + f_\gamma\delta_\gamma)$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

$$\begin{aligned}\eta\Phi' - \Psi &= \frac{1}{2} (f_b\delta_b + f_c\delta_c + f_\nu\delta_\nu + f_\gamma\delta_\gamma) \\ &= 2 \left(\frac{\delta_b}{4} f_b + \frac{\delta_c}{4} f_c + \frac{\delta_\nu}{4} f_\nu + \frac{\delta_\gamma}{4} f_\gamma \right)\end{aligned}$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

$$\begin{aligned}\eta\Phi' - \Psi &= \frac{1}{2} (f_b\delta_b + f_c\delta_c + f_\nu\delta_\nu + f_\gamma\delta_\gamma) \\ &= 2 \left(\frac{\delta_b}{4} f_b + \frac{\delta_c}{4} f_c + \frac{\delta_\nu}{4} f_\nu + \frac{\delta_\gamma}{4} f_\gamma \right) \\ \therefore \eta\Phi' + 2\Phi - \Psi &\approx 2 \left(\frac{1}{4} f_b A_b + \frac{1}{4} f_c A_c + f_\nu A_\nu + f_\gamma A_\gamma \right)\end{aligned}$$

Em que uso a aproximação: $\frac{3}{4}f_b + \frac{3}{4}f_c + f_\nu + f_\gamma \approx f_\nu + f_\gamma \approx 1$

Condições iniciais - Equações de Einstein

Já a equação (ij), no dado limite de escala,

$$\begin{aligned}k^2(\Phi + \Psi) &= -32\pi G a^2 \rho_r \Theta_{r,2} \\ &= -32\pi G a^2 (\rho_\nu \mathcal{N}_2 + \rho_\gamma \Theta_2) \\ &= -12\mathcal{H}^2 (f_\nu \mathcal{N}_2 + f_\gamma \Theta_2) \\ &= -\frac{12}{\eta^2} (f_\nu \mathcal{N}_2 + (1 - f_\nu) \Theta_2)\end{aligned}$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

Já a equação (ij), no dado limite de escala,

$$\begin{aligned}
 k^2 (\Phi + \Psi) &= -32\pi G a^2 \rho_r \Theta_{r,2} \\
 &= -32\pi G a^2 (\rho_\nu \mathcal{N}_2 + \rho_\gamma \Theta_2). \\
 &= -12\mathcal{H}^2 (f_\nu \mathcal{N}_2 + f_\gamma \Theta_2) \\
 &= -\frac{12}{\eta^2} (f_\nu \mathcal{N}_2 + (1 - f_\nu) \Theta_2)
 \end{aligned}$$

É possível demonstrarmos que, devido ao forte acoplamento do período, $\Theta_2 \approx 0$. Para isso basta os termos junto ao τ' tanto nos multipolos da polarização quanto da temperatura e resolver o sistema que aparece. O que resultará em $\Theta_2 = \Theta_0^P = \Theta_2^P = 0$

Condições iniciais - Equações de Einstein

$$(k\eta)^2 (\Phi + \Psi) = -12 (f_\nu \mathcal{N}_2 + (1 - f_\nu) \Theta_2) \approx -12 f_\nu \mathcal{N}_2$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

$$(k\eta)^2 (\Phi + \Psi) = -12(f_\nu \mathcal{N}_2 + (1 - f_\nu)\Theta_2) \approx -12f_\nu \mathcal{N}_2$$

OBS:

$$\begin{cases} \rho_\nu = N_{\text{eff}} \frac{7\pi^2}{120} T_\nu^2 \\ \rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T_\gamma^2 \end{cases} \implies f_\nu \approx \frac{\rho_\nu}{\rho_\nu + \rho_\gamma} = \frac{0.2271 N_{\text{eff}}}{0.2271 N_{\text{eff}} + 1}$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

$$(k\eta)^2 (\Phi + \Psi) = -12 (f_\nu \mathcal{N}_2 + (1 - f_\nu) \Theta_2) \approx -12 f_\nu \mathcal{N}_2$$

OBS:

$$\begin{cases} \rho_\nu = N_{\text{eff}} \frac{7\pi^2}{120} T_\nu^2 \\ \rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T_\gamma^2 \end{cases} \implies f_\nu \approx \frac{\rho_\nu}{\rho_\nu + \rho_\gamma} = \frac{0.2271 N_{\text{eff}}}{0.2271 N_{\text{eff}} + 1}$$

Para $N_{\text{eff}} = 3.046$, $f_\nu = 0.4089$.

Condições iniciais - Equações de Einstein

$$\begin{cases} \eta\Phi' + 2\Phi - \Psi \approx 2 \left(\frac{1}{4}f_b A_b + \frac{1}{4}f_c A_c + f_\nu A_\nu + f_\gamma A_\gamma \right), \\ (k\eta)^2 (\Phi + \Psi) = -12f_\nu \mathcal{N}_2. \end{cases}$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

$$\begin{cases} \eta\Phi' + 2\Phi - \Psi \approx 2 \left(\frac{1}{4}f_b A_b + \frac{1}{4}f_c A_c + f_\nu A_\nu + f_\gamma A_\gamma \right), \\ (k\eta)^2 (\Phi + \Psi) = -12f_\nu \mathcal{N}_2. \end{cases}$$

Derivando a primeira equação até duas vezes, obtemos:

$$\begin{cases} \eta\Phi'' + 3\Phi' - \Psi' = 0, \\ \Phi''' + 4\Phi' - \Psi'' = 0, \end{cases}$$

Que são expressões que relacionam a primeira e segunda derivadas de Ψ com o potencial Φ .

Condições iniciais - Equações de Einstein

E usando a última equação proveniente das eqs. de Einstein,

$$\eta\Phi' + 2\Phi - \Psi \approx 2 \left(\frac{1}{4}f_b A_b + \frac{1}{4}f_c A_c + f_\nu A_\nu + f_\gamma A_\gamma \right),$$

derivando três vezes e usando os multipolos da anisotropia do neutrino (com $\mathcal{N}_\ell = 0$, $\ell > 2$), chegamos a expressão

$$\eta^2(\Phi''' + \Psi''') + 6\eta(\Phi'' + \Psi'') + 6(\Phi' + \Psi') + \frac{8}{5}f_\nu(\Psi' - \Phi') = 0$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

Sistema proveniente das equações de Einstein

$$\begin{cases} \eta^2(\Phi''' + \Psi''') + 6\eta(\Phi'' + \Psi'') + 6(\Phi' + \Psi') + \frac{8}{5}f_\nu(\Psi' - \Phi') = 0, \\ \eta\Phi'' + 3\Phi' - \Psi' = 0, \\ \Phi''' + 4\Phi' - \Psi'' = 0, \end{cases}$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

$$\eta^2(\Phi''' + \Psi''') + 6\eta(\Phi'' + \Psi'') + 6(\Phi' + \Psi') + \frac{8}{5}f_\nu(\Psi' - \Phi') = 0$$

Assumindo que os modos são adiabáticos,

$$\begin{cases} S_\nu = A_\nu - A_\gamma = 0 \\ S_b = A_b - A_\gamma = 0 \\ S_c = A_c - A_\gamma = 0 \end{cases}$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

$$\eta^2(\Phi''' + \Psi''') + 6\eta(\Phi'' + \Psi'') + 6(\Phi' + \Psi') + \frac{8}{5}f_\nu(\Psi' - \Phi') = 0$$

Assumindo que os modos são adiabáticos,

$$\begin{cases} S_\nu = A_\nu - A_\gamma = 0 \\ S_b = A_b - A_\gamma = 0 \\ S_c = A_c - A_\gamma = 0 \end{cases}$$

e ao derivar a equação mais uma vez, obtemos

$$\eta^3\Phi'''' + 12\eta^2\Phi''' + 4\left(9 + \frac{2}{5}f_\nu\right)\eta\Phi'' + 8\left(3 + \frac{2}{5}f_\nu\right)\Phi' = 0$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

$$\eta^3 \Phi'''' + 12\eta^2 \Phi'''' + 4 \left(9 + \frac{2}{5} f_\nu \right) \eta \Phi'' + 8 \left(3 + \frac{2}{5} f_\nu \right) \Phi' = 0$$

Vide que $\Phi = cte.$ é uma solução. As outras três soluções desta equação são soluções que decrescem, e não são do nosso interesse.

Condições iniciais - Equações de Einstein

$$\eta^3 \Phi'''' + 12\eta^2 \Phi'''' + 4 \left(9 + \frac{2}{5} f_\nu \right) \eta \Phi'' + 8 \left(3 + \frac{2}{5} f_\nu \right) \Phi' = 0$$

Vide que $\Phi = cte.$ é uma solução. As outras três soluções desta equação são soluções que decrescem, e não são do nosso interesse.

$$\Phi \propto \eta^{-\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{32f_\nu}{5}}}, \quad \Phi \propto \frac{1}{\eta},$$

são as outras soluções.

Condições iniciais - Equações de Einstein

Retomando a equação

$$\begin{aligned}\eta\Phi' + 2\Phi - \Psi &\approx 2\left(\frac{1}{4}f_b A_b + \frac{1}{4}f_c A_c + f_\nu A_\nu + f_\gamma A_\gamma\right) \\ &\approx 2(f_\nu + f_\gamma) A_\nu \approx 2A_\nu,\end{aligned}$$

para $\Phi = cte$,

$$2\Phi - \Psi = 2A_\nu$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

E voltando à outra equação de Einstein, com o fato de $\Phi = cte$.

$$(k\eta)^2 (\Phi + \Psi) = -12f_\nu \mathcal{N}_2$$

Condições iniciais - Equações de Einstein

E voltando à outra equação de Einstein, com o fato de $\Phi = cte.$

$$(k\eta)^2 (\Phi + \Psi) = -12f_\nu \mathcal{N}_2$$

e derivando duas vezes,

$$\Phi + \Psi = -\frac{4}{5}f_\nu (\Psi - \Phi + A_\nu)$$

Condições iniciais

Combinando as equações,

$$\begin{cases} 2\Phi - \Psi = 2A_\nu \\ \Phi + \Psi = -\frac{4}{5}f_\nu (\Psi - \Phi + A_\nu) \end{cases}$$

Condições iniciais

Combinando as equações,

$$\begin{cases} 2\Phi - \Psi = 2A_\nu \\ \Phi + \Psi = -\frac{4}{5}f_\nu (\Psi - \Phi + A_\nu) \end{cases}$$

obtemos, por fim:

$$\therefore \Phi = - \left(1 + \frac{2}{5}f_\nu \right) \Psi$$

Condições iniciais

Combinando as equações,

$$\begin{cases} 2\Phi - \Psi = 2A_\nu \\ \Phi + \Psi = -\frac{4}{5}f_\nu (\Psi - \Phi + A_\nu) \end{cases}$$

obtemos, por fim:

$$\therefore \Phi = - \left(1 + \frac{2}{5}f_\nu \right) \Psi$$

e por essas relações também é possível obter,

$$\therefore \Phi = 2A_\nu \left(\frac{5 + 2f_\nu}{15 + 4f_\nu} \right) \doteq \Phi_P \quad \text{(Perturbação primordial)}$$

Condições iniciais

$$\Phi_P(k) = \Phi(k, \eta_{ini})$$

são as amplitudes das flutuações no valor deste potencial que implicarão no que chamamos de espectro de potência primordial, e desde que consigamos contabilizar as influências sobre as escalas k no período da transição entre matéria e radiação, que afetam de forma distinta diferentes escalas, e como essas perturbações evoluem no tempo, podemos prever como essas flutuações são observadas.

Oscilações acústicas de bárions - BAO

- ▶ As condições expostas na anteriormente nos possibilita resolver as equações de Boltzmann-Einstein e conhecer como as inhomogeneidades na matéria e as anisotropias na radiação evoluem;

Oscilações acústicas de bárions - BAO

- ▶ As condições expostas na anteriormente nos possibilita resolver as equações de Boltzmann-Einstein e conhecer como as inhomogeneidades na matéria e as anisotropias na radiação evoluem;
- ▶ Os fótons estão fortemente acoplados aos bárions via espalhamento Compton e enquanto existir acoplamento, não há possibilidade de átomos serem formados em quantidades significativas, tão pouco de matéria se aglomerar para formar estruturas.

Oscilações acústicas de bárions - BAO

- ▶ As condições expostas na anteriormente nos possibilita resolver as equações de Boltzmann-Einstein e conhecer como as inhomogeneidades na matéria e as anisotropias na radiação evoluem;
- ▶ Os fótons estão fortemente acoplados aos bárions via espalhamento Compton e enquanto existir acoplamento, não há possibilidade de átomos serem formados em quantidades significativas, tão pouco de matéria se aglomerar para formar estruturas.
- ▶ É preciso que este regime de forte acoplamento cesse e os átomos possam ser formados e possam cair nos poços potenciais formados pela matéria escura.

Oscilações acústicas de bárions - BAO

- ▶ É necessário que surjam regiões de sobredensidade para que cada vez mais matéria seja atraída, e um dos mecanismos que amplificam estas diferenças de densidade se deve a disputa entre a atração gravitacional imposta pela matéria e a pressão da radiação que força contra a aglomeração.

Oscilações acústicas de bárions - BAO

- ▶ É necessário que surjam regiões de sobredensidade para que cada vez mais matéria seja atraída, e um dos mecanismos que amplificam estas diferenças de densidade se deve a disputa entre a atração gravitacional imposta pela matéria e a pressão da radiação que força contra a aglomeração.
- ▶ No caso da pressão ser baixa frente à força gravitacional, a sobredensidade aumenta exponencialmente; mas se for alta, a sobredensidade oscila.

Oscilações acústicas de bárions - BAO

- ▶ É necessário que surjam regiões de sobredensidade para que cada vez mais matéria seja atraída, e um dos mecanismos que amplificam estas diferenças de densidade se deve a disputa entre a atração gravitacional imposta pela matéria e a pressão da radiação que força contra a aglomeração.
- ▶ No caso da pressão ser baixa frente à força gravitacional, a sobredensidade aumenta exponencialmente; mas se for alta, a sobredensidade oscila.
- ▶ Se este carácter oscilatório de fato existiu, possivelmente ele gerou ondas sonoras que se propagaram por este plasma de bárions e fótons.

Oscilações acústicas de bárions - BAO

- ▶ Considerando uma única perturbação de densidade esférica no fluido ela irá se propagar para fora (em relação ao centro da perturbação) com velocidade sonora $c_s = c/\sqrt{3(1 + \mathcal{R}(z))}$.

Oscilações acústicas de bárions - BAO

- ▶ Considerando uma única perturbação de densidade esférica no fluido ela irá se propagar para fora (em relação ao centro da perturbação) com velocidade sonora $c_s = c/\sqrt{3(1 + \mathcal{R}(z))}$.
- ▶ Após os fótons e bárions desacoplarem, esta onda sonora "congelaria" e deixaria tal característica na distribuição de matéria no Universo através de um excesso de densidade na escala do horizonte sonoro,

$$r_s = \int_{z_{\text{drag}}}^{\infty} dz \frac{c_s(z)}{H(z)}$$

Oscilações acústicas de bárions - BAO

- ▶ Considerando uma única perturbação de densidade esférica no fluido ela irá se propagar para fora (em relação ao centro da perturbação) com velocidade sonora $c_s = c/\sqrt{3(1 + \mathcal{R}(z))}$.
- ▶ Após os fótons e bárions desacoplarem, esta onda sonora "congelaria" e deixaria tal característica na distribuição de matéria no Universo através de um excesso de densidade na escala do horizonte sonoro,

$$r_s = \int_{z_{drag}}^{\infty} dz \frac{c_s(z)}{H(z)}$$

- ▶ z_{drag} é o redshift em que cessa o arrasto dos bárions devido ao efeito Compton.

BAO

Já não estamos num período tão primordial, então, os dipolos já passam a ter influência, ou seja, os campos de velocidade deste plasma não são mais nulos. Tomemos as equações do monopolo e do dipolo da anisotropia da temperatura dos fótons.

$$\begin{cases} \Theta'_0 = -k\Theta_1 - \Phi' \\ \Theta'_1 = -\frac{2}{3}k\Theta_2 + \frac{1}{3}k\Theta_0 + \frac{1}{3}k\Psi + \tau' \left(\Theta_1 + \frac{v_b}{3i} \right) \end{cases}$$

BAO

Já não estamos num período tão primordial, então, os dipolos já passam a ter influência, ou seja, os campos de velocidade deste plasma não são mais nulos. Tomemos as equações do monopolo e do dipolo da anisotropia da temperatura dos fótons.

$$\begin{cases} \Theta'_0 = -k\Theta_1 - \Phi' \\ \Theta'_1 = -\frac{2}{3}k\Theta_2 + \frac{1}{3}k\Theta_0 + \frac{1}{3}k\Psi + \tau' \left(\Theta_1 + \frac{v_b}{3i} \right) \end{cases}$$

Pelo forte acoplamento entre elétrons e fótons, temos que eles têm basicamente o mesmo campo de velocidade. Então,

$$v_b \approx -3i\Theta_1.$$

BAO

Combinando,

$$\begin{cases} v_b \approx -3i\Theta_1 \\ v_b' + \mathcal{H}v_b = -ik\Psi + \frac{\tau'}{\mathcal{R}}(3i\Theta_1 + v_b) \end{cases}$$

BAO

Combinando,

$$\begin{cases} v_b \approx -3i\Theta_1 \\ v_b' + \mathcal{H}v_b = -ik\Psi + \frac{\tau'}{\mathcal{R}}(3i\Theta_1 + v_b) \end{cases}$$

$$v_b = -3i\Theta_1 - 3i\frac{\mathcal{R}}{\tau'} \left(\Theta_1' + \mathcal{H}\Theta_1 - \frac{k}{3}\Psi \right)$$

BAO

Combinando,

$$\begin{cases} v_b \approx -3i\Theta_1 \\ v_b' + \mathcal{H}v_b = -ik\Psi + \frac{\tau'}{\mathcal{R}}(3i\Theta_1 + v_b) \end{cases}$$

$$v_b = -3i\Theta_1 - 3i\frac{\mathcal{R}}{\tau'} \left(\Theta_1' + \mathcal{H}\Theta_1 - \frac{k}{3}\Psi \right)$$

e usando esta na equação do dipolo

$$\begin{aligned} \Theta_1' - \frac{k}{3}(\Theta_0 + \Psi) &= \tau' \left[\Theta_1 - \frac{i}{3} \left(-3i\Theta_1 - 3i\frac{\mathcal{R}}{\tau'} \left(\Theta_1' + \mathcal{H}\Theta_1 - \frac{k}{3}\Psi \right) \right) \right] \\ &= \tau'\Theta_1 - \tau'\Theta_1 - \mathcal{R}\Theta_1' - \mathcal{R}\mathcal{H}\Theta_1 + \frac{k}{3}\mathcal{R}\Psi \\ &= -\mathcal{R}\Theta_1' - \mathcal{R}\mathcal{H}\Theta_1 + \frac{k}{3}\mathcal{R}\Psi. \end{aligned}$$

BAO

$$\Theta_1' - \frac{k}{3}(\Theta_0 + \Psi) = -\mathcal{R}\Theta_1' - \mathcal{R}\mathcal{H}\Theta_1 + \frac{k}{3}\mathcal{R}\Psi.$$

Usando a equação da derivado do monopolo na equação acima, obtemos

$$\begin{cases} \Theta_0'' + \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\Theta_0' + (c_s k)^2 \Theta_0 = F(\eta, k), \\ F(\eta, k) \doteq -(c_s k)^2 \Psi - \Phi'' - \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\Phi' - (c_s k)^2 \Phi. \end{cases}$$

BAO

E, uma vez que em condições iniciais adiabáticas temos $3\Theta_0 = \delta_b$,

$$\begin{cases} \delta_b'' + \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\delta_b' + (c_s k)^2 \delta_b = 3F(\eta, k), \\ F(\eta, k) = -(c_s k)^2 \Psi - \Phi'' - \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\Phi'. \end{cases}$$

BAO

E, uma vez que em condições iniciais adiabáticas temos $3\Theta_0 = \delta_b$,

$$\begin{cases} \delta_b'' + \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\delta_b' + (c_s k)^2 \delta_b = 3F(\eta, k), \\ F(\eta, k) = -(c_s k)^2 \Psi - \Phi'' - \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\Phi'. \end{cases}$$

$(c_s k)^2 \delta_b$: no espaço real é o termo $-c_s^2 \nabla^2 \delta_b$, que se deve a pressão dos fótons;

BAO

E, uma vez que em condições iniciais adiabáticas temos $3\Theta_0 = \delta_b$,

$$\begin{cases} \delta_b'' + \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\delta_b' + (c_s k)^2 \delta_b = 3F(\eta, k), \\ F(\eta, k) = -(c_s k)^2 \Psi - \Phi'' - \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\Phi'. \end{cases}$$

$(c_s k)^2 \delta_b$: no espaço real é o termo $-c_s^2 \nabla^2 \delta_b$, que se deve a pressão dos fótons;

$\frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}$: é um termo de amortecimento, um termo de fricção que só tem influência próximo ao desacoplamento;

BAO

E, uma vez que em condições iniciais adiabáticas temos $3\Theta_0 = \delta_b$,

$$\begin{cases} \delta_b'' + \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\delta_b' + (c_s k)^2 \delta_b = 3F(\eta, k), \\ F(\eta, k) = -(c_s k)^2 \Psi - \Phi'' - \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\Phi'. \end{cases}$$

$(c_s k)^2 \delta_b$: no espaço real é o termo $-c_s^2 \nabla^2 \delta_b$, que se deve a pressão dos fótons;

$\frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}$: é um termo de amortecimento, um termo de fricção que só tem influência próximo ao desacoplamento;

$(c_s k)^2 \Psi$: no espaço real é o termo $c_s^2 \nabla^2 \Psi$, que contém a informação da influência gravitacional.

BAO

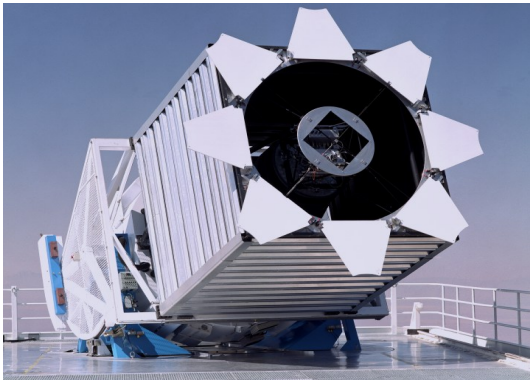
Sendo o termo de fricção relevante próximo ao desacoplamento, se observarmos um período anterior, temos que

$$\delta_b'' + (c_s k)^2 \delta_b \approx 3F(\eta, k),$$

Ou seja, é a equação de um oscilador harmonico forçado. Se estamos mais próximo ao desacoplamento, o quadrupolo Θ_2 passa a ter influência o que leva à amortecimentos nas oscilações.

Detecção das Oscilações Acústicas de Bárions

Em 2005 foi detectado as **oscilações acústicas de bárions** (BAO), pelo SDSS, que se apresentam como um pico na função de distribuição da matéria, no caso, através da distribuição de galáxias vermelhas.



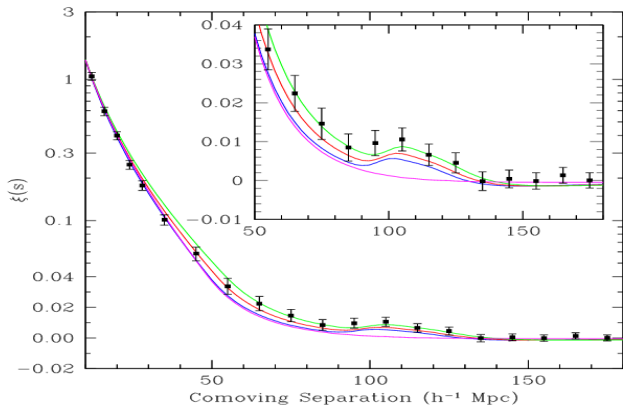


Figura 2: Função de correlação para 46748 galáxias vermelhas luminosas medidas pelo SDSS, cobrindo uma região de $0.72 h^{-3} \text{ Gpc}^3$ sobre 3816 deg^2 , entre os redshifts de 0.16 e 0.47. Fonte: Eisenstein, D. et al. 2005.

Desacoplamento e o BAO

Depois de cessar a influência Compton as oscilações "congelam" e a distância viajada pela onda sonora também (*drag epoch*, z_{drag}), e o horizonte sonoro na *drag epoch* é, como vimos anteriormente,

$$r_s \equiv r(z_{drag}) = \int_{z_{drag}}^{\infty} dz' \frac{c_s(z')}{H(z')},$$

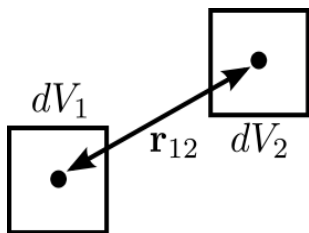
em que temos a velocidade sonora, c_s , é definida como

$$c_s(z) \doteq \left[3 \left(1 + \frac{3\rho_b(z)}{4\rho_\gamma(z)} \right) \right]^{-1/2}.$$

Desacoplamento e o BAO

Dados do Planck de 2018 fornecem $r_s = 147.21 \pm 0.23$ Mpc. Que se tomarmos $h = H(t_0)/100 = 0.6766$, $r_s \approx 99 h^{-1}$ Mpc. Este período, segundo os mesmos dados ocorreu à $z_{drag} = 1060$. Já o desacoplamento em $z_{dec} = 1089$.

Função de correlação e espectro de potência



Definimos a função de correlação como sendo

$$\xi(\mathbf{r}_{12}) \doteq \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{r}_{12}) \rangle,$$

em que \mathbf{x}_1 e $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{r}_{12}$ são duas posições espaciais no Universo.

Assim, o que o SDSS observou é que há um pico (suave) de correlação para separações (comóveis) da ordem de $100 h^{-1} \text{Mpc}$.

Função de correlação e espectro de potência

Definimos a transformada de Fourier da função de correlação, como sendo o **espectro de potência**

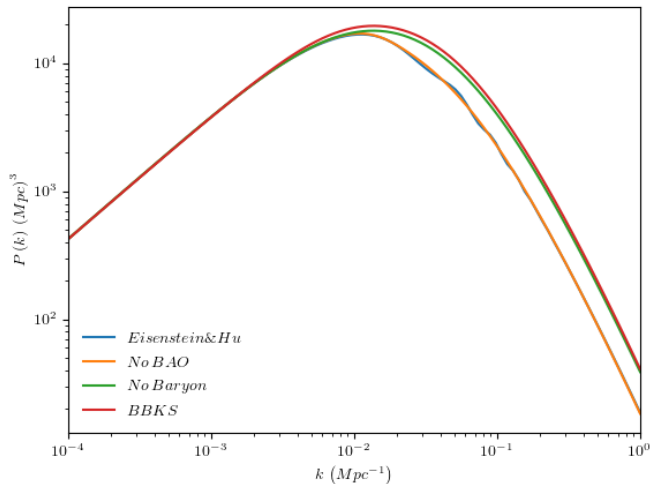
$$P(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x} \xi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

Assumo a homogeneidade e isotropia estatística dos campos de densidade, e com isso,

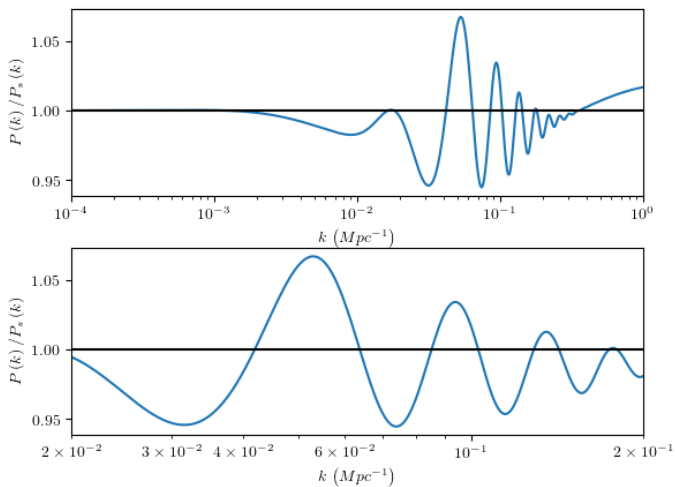
$$P(\mathbf{k}) = P(k), \quad \xi(\mathbf{r}) = \xi(r).$$

A transformada de um pico, será algo oscilatório no espaço- k , por isso, **oscilações acústicas de bárions (BAO)**.

Espectro de Potência da matéria



BAO



Bibliografia

- ▶ Modern Cosmology - Dodelson
- ▶ Lecture Notes in Cosmology - _Oliver F. Piattella
- ▶ Dark Energy (Theory and Observations) - Luca Amendola, Shinji Tsujikawa
- ▶ TASI Lectures on Primordial Cosmology - Daniel Baumann
- ▶ The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure - D. H. Lyth, A.R. Liddle
- ▶ <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/43/43134/tde-18102018-191432/pt-br.php>