

Buscando e Determinando Órbitas Homoclínicas e Heteroclínicas num Sistema Linear por Partes

Rene O. Medrano-T., Murilo S. Batista e Iberê L. Caldas



Instituto de Física, Universidade de São Paulo



Motivação

- Órbitas homo(hetero)clínicas podem estar associadas a mudanças de comportamento na dinâmica do sistema.
- Num sistema tridimensional, a existência dessas órbitas, associadas a uma relação dos autovalores do ponto fixo, implicam na existência de ferraduras de Smale, que são manifestações de um sistema caótico (Teorema de Shilnikov)

Objetivo

- Apresentar um método geral de busca e determinação de órbitas homo(hetero)clínicas, no fluxo, para um sistema tridimensional linear por partes.
- Mostrar a relação de um tipo de órbita homoclínica com a mudança de comportamento de um tipo de atrator caótico (Rössler) para outro (Double Scroll).

O Circuito de Chua

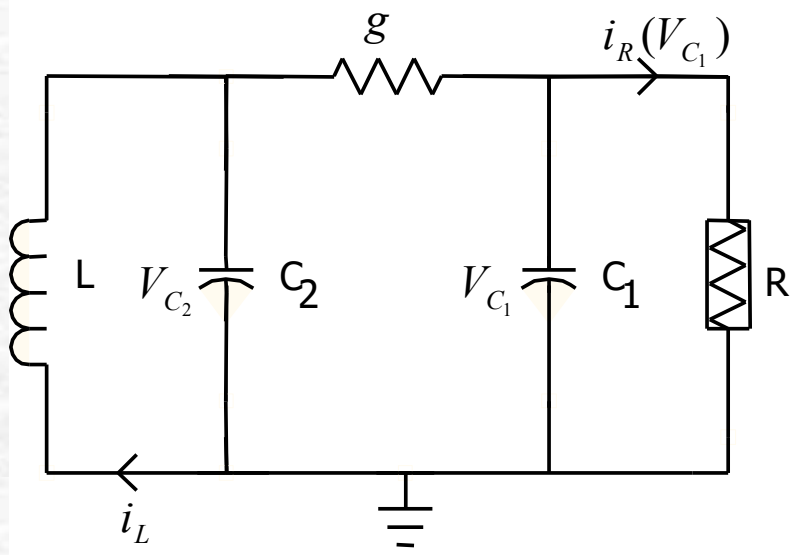


Fig.1. Circuito de Chua. R é a resistência não linear.

Aplicando a lei de Kirchhoff ao circuito:

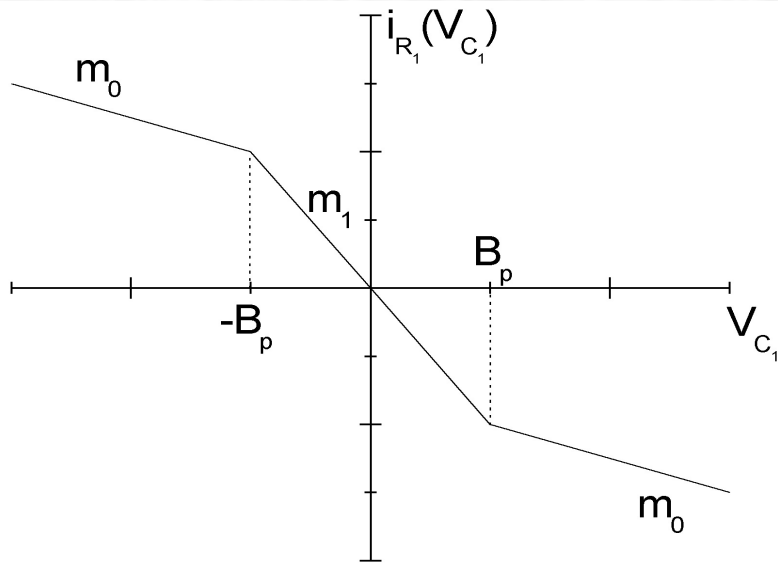
$$C_1 \dot{V}_{C_1} = g(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_R(V_{C_1})$$

$$C_2 \dot{V}_{C_2} = g(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L$$

$$L \dot{i}_L = -V_{C_2}$$

Simetria ímpar: $f(x) = -f(-x)$

Resistência Linear por Partes



Função da curva característica da resistência linear por partes:

$$i_R(V_{C_1}) = \begin{cases} m_0 V_{C_1} + (m_1 - m_0) B_p, & V_{C_1} \geq B_p \\ m_1 V_{C_1}, & |V_{C_1}| \leq B_p \\ m_0 V_{C_1} - (m_1 - m_0) B_p, & V_{C_1} \leq -B_p \end{cases}$$

Fig. 2. Curva característica da resistência linear por partes.

Sistema Adimensional

Mudança de
variáveis:

$$\begin{aligned} x &= \frac{V_{C_1}}{B_p}, & y &= \frac{V_{C_2}}{B_p} & e & z = \frac{i_L}{gB_p} \\ \alpha &= \frac{C_2}{C_1}, & \beta &= \frac{C_2}{g^2 L}, & \tau &= \frac{g}{C_2} t, \\ a &= \frac{m_1}{g} & e & b = \frac{m_0}{g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 \dot{V}_{C_1} &= g(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_R(V_{C_1}) \\ C_2 \dot{V}_{C_2} &= g(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L \\ L \dot{i}_L &= -V_{C_2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha[y - x - k(x)] \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y \end{aligned}$$

$$i_R(V_{C_1}) = \begin{cases} m_0 V_{C_1} + (m_1 - m_0) B_p, & V_{C_1} \geq B_p \\ m_1 V_{C_1}, & |V_{C_1}| \leq B_p \\ m_0 V_{C_1} - (m_1 - m_0) B_p, & V_{C_1} \leq -B_p \end{cases}$$



$$k(x) = \begin{cases} bx + (a - b), & x \geq 1 \\ ax, & |x| \leq 1 \\ bx - (a - b), & x \leq -1 \end{cases}$$

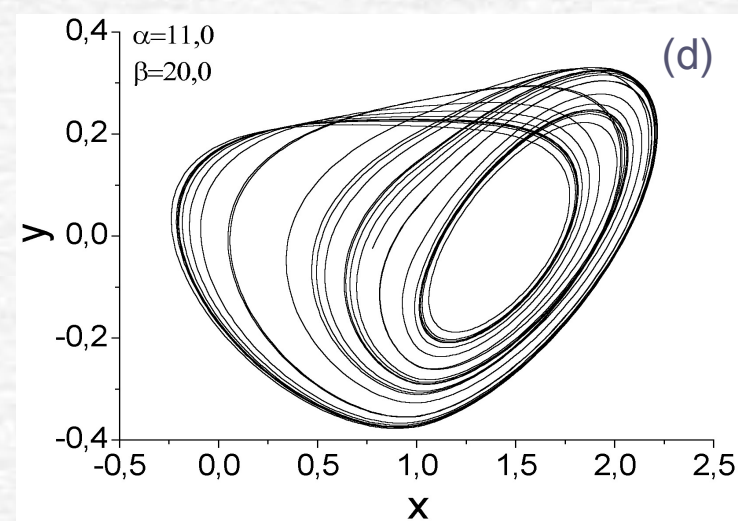
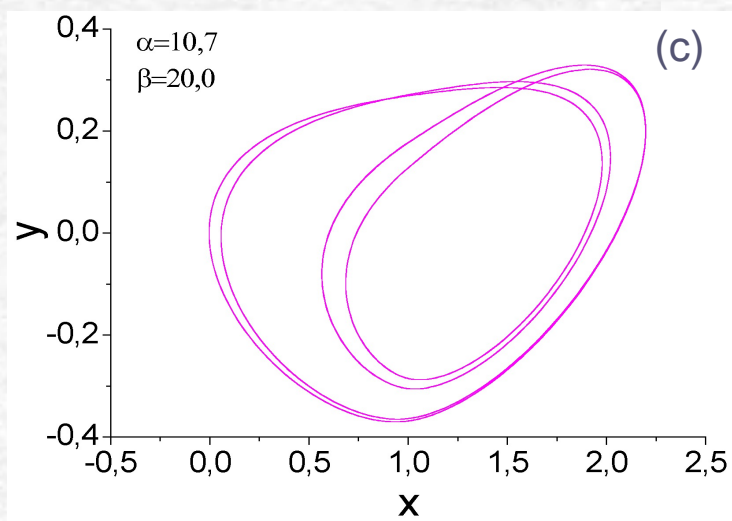
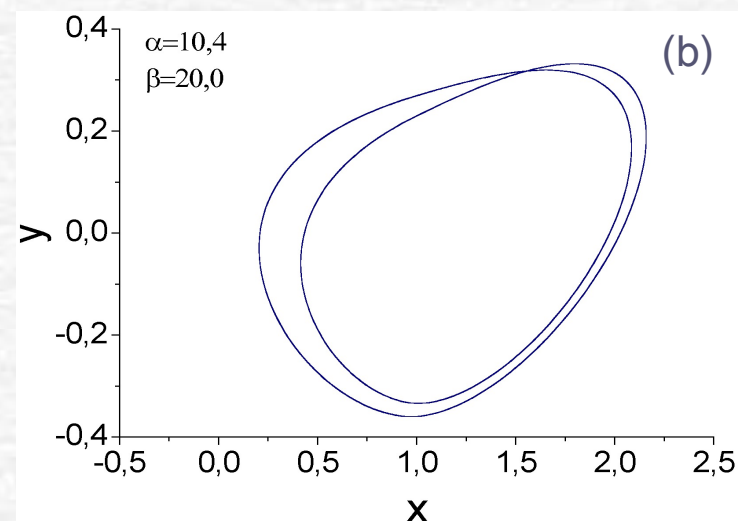
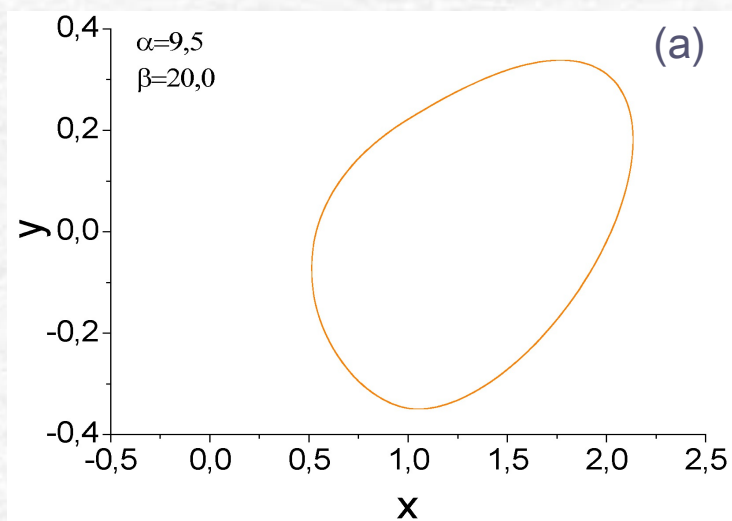


Fig. 4. Atratores: (a) Período 1, (b) Período 2, (c) Período 3, (d) Rössler.

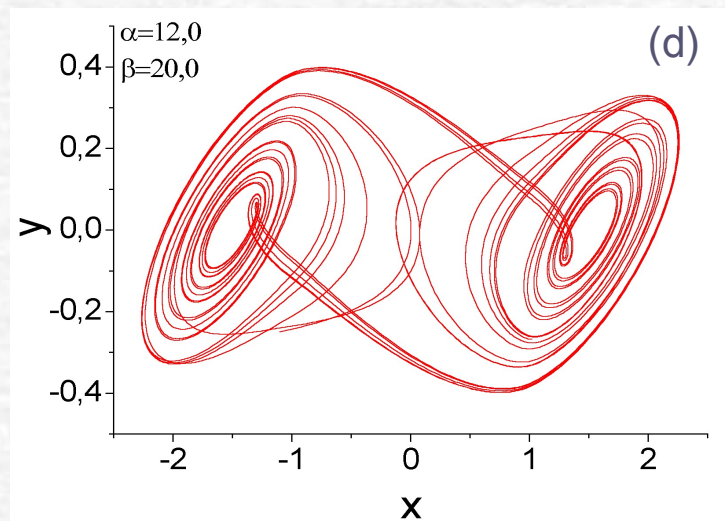
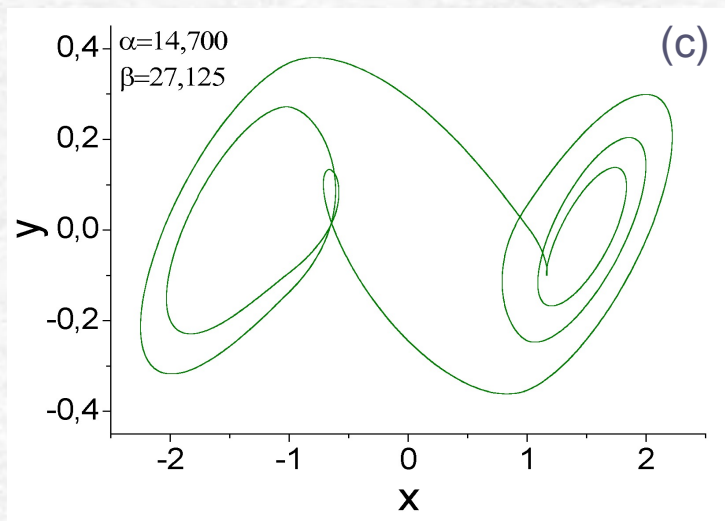
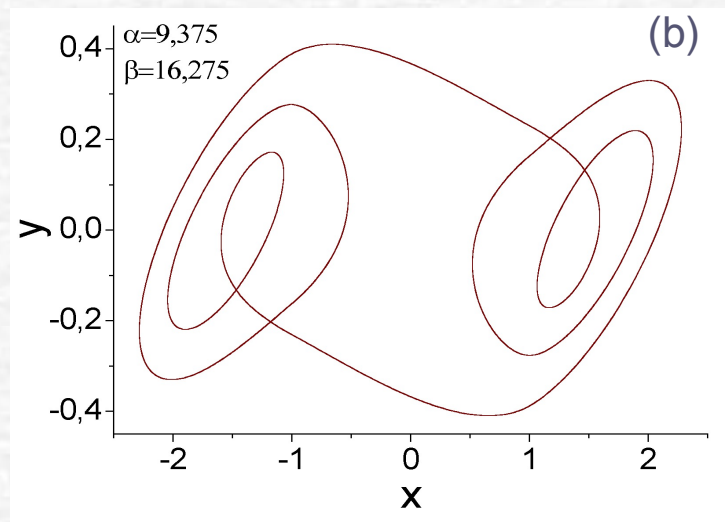
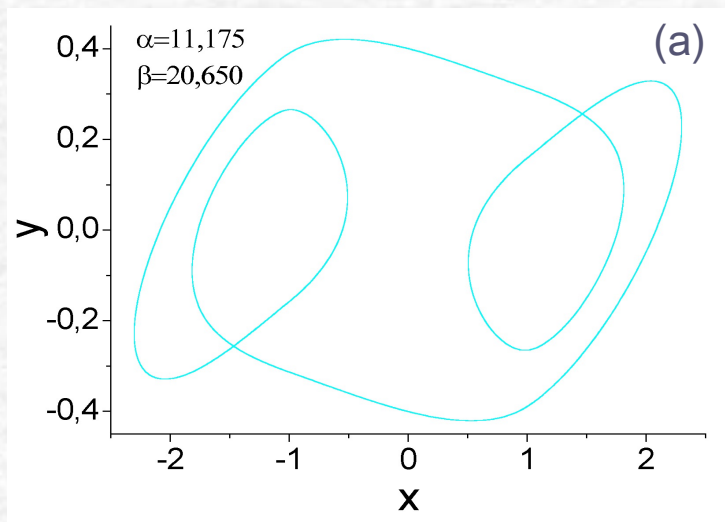


Fig. 5. Atratores: (a) Período 4, (b) Período 5, (c) Período 6 e (d) Double Scroll.

Pontos Fixos

O sistema apresenta três pontos fixos dados pela condição

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$$

$$P_+(k, 0, -k), \quad P_0(0, 0, 0) \quad \text{e} \quad P_-(-k, 0, k)$$

onde: $k = \frac{b-a}{b+1} = 1,5$, com $a = -\frac{8}{7}$ e $b = -\frac{5}{7}$

P_+ = ponto fixo no domínio $D_+ = \{(x, y, z) \mid x \geq 1\}$,

P_0 = ponto fixo no domínio $D_0 = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1\}$,

P_- = ponto fixo no domínio $D_- = \{(x, y, z) \mid x \leq -1\}$.

Variedade Estável: Conjunto de pontos que convergem para o ponto fixo num tempo $+\infty$.

Variedade Instável: Conjunto de pontos que convergem para o ponto fixo num tempo $-\infty$.

Autovalores e Auto Vetores

Jacobiana do Sistema:

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha(1+\gamma) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{cases} b, & |x| \geq 1 \\ a, & |x| \leq 1 \end{cases}$$

As soluções de $\lambda^3 + [\alpha(1+\gamma)+1]\lambda^2 + (\alpha\gamma + \beta)\lambda + \alpha\beta(1+\gamma) = 0$ levam aos

Autovalores: $\lambda_1 = \text{Real}, \quad \lambda_{2,3} = \lambda_R \pm i\lambda_I \quad \text{com} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_R} < 0$

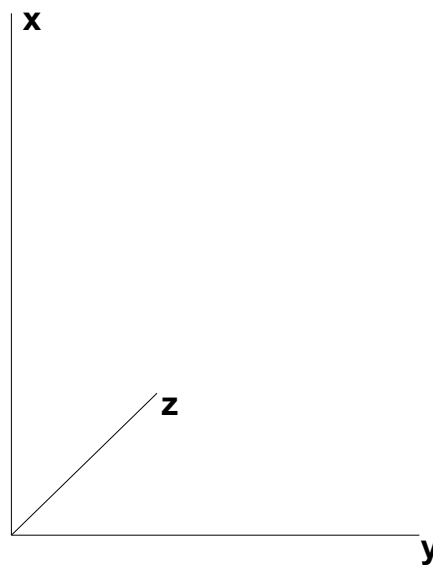
Auto vetores: $\vec{v}_1 = \text{Real}, \quad \vec{v}_{2,3} = \vec{v}_R \pm \vec{v}_I$

Solução de um sistema linear de equações diferenciais:

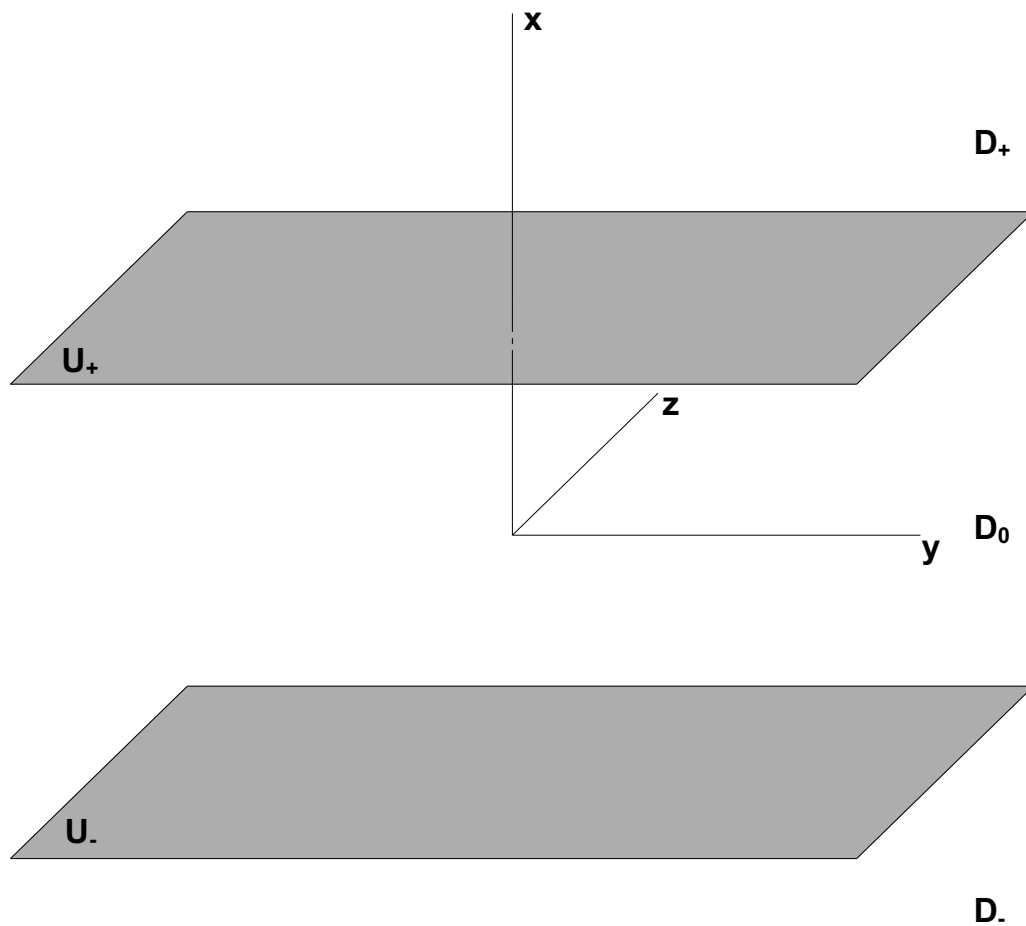
$$\vec{x} = C_1 e^{\lambda_1 \tau} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 \tau} \vec{v}_2 + C_3 e^{\lambda_3 \tau} \vec{v}_3$$

$$\vec{x} = C_1 e^{\lambda_1 \tau} \vec{v}_1 + (C'_2 \cos(\lambda_I \tau) + C'_3 \sin(\lambda_I \tau)) e^{\lambda_R \tau} \vec{v}_R + (C'_3 \cos(\lambda_I \tau) - C'_2 \sin(\lambda_I \tau)) e^{\lambda_R \tau} \vec{v}_I$$

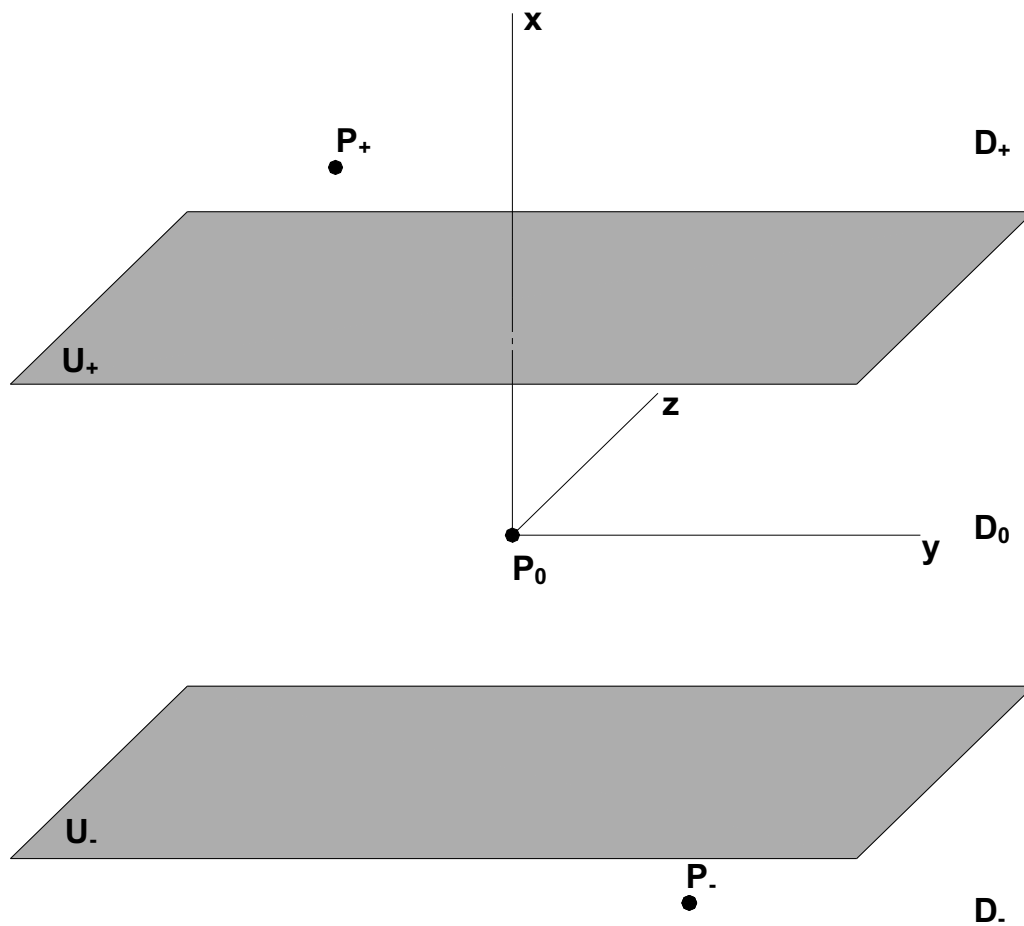
Subespaços



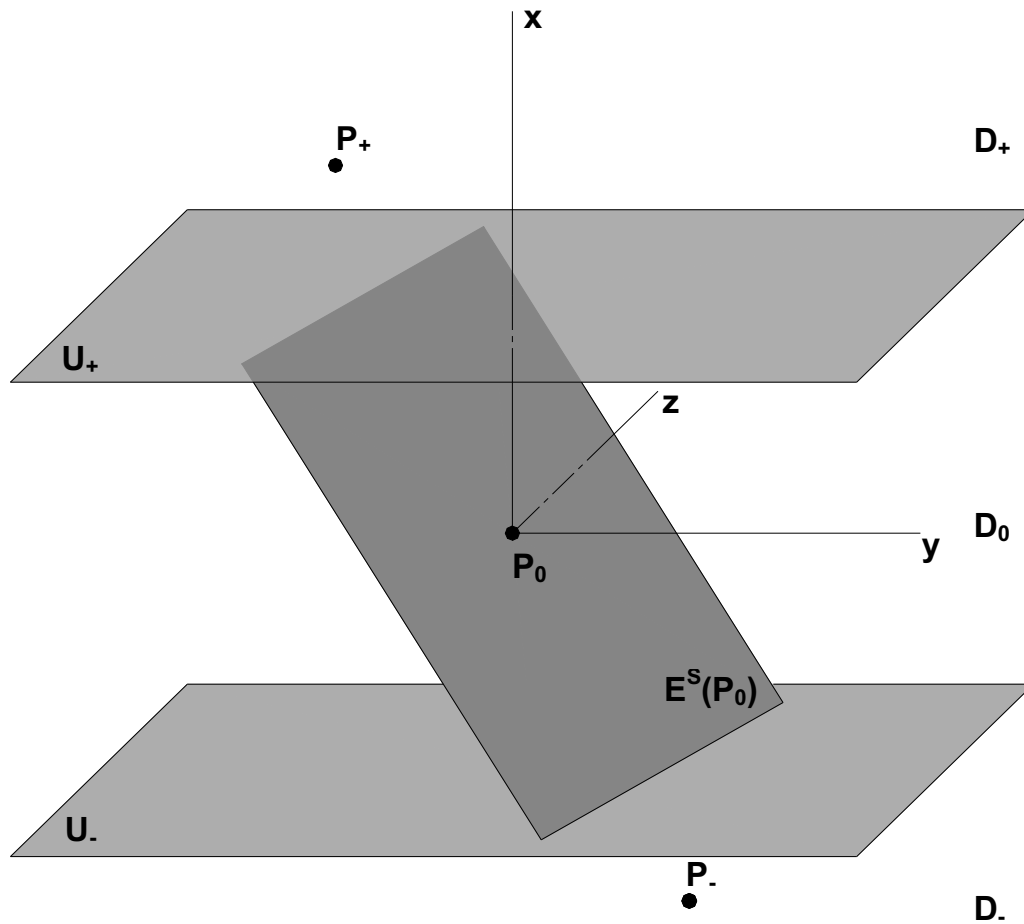
Subespaços



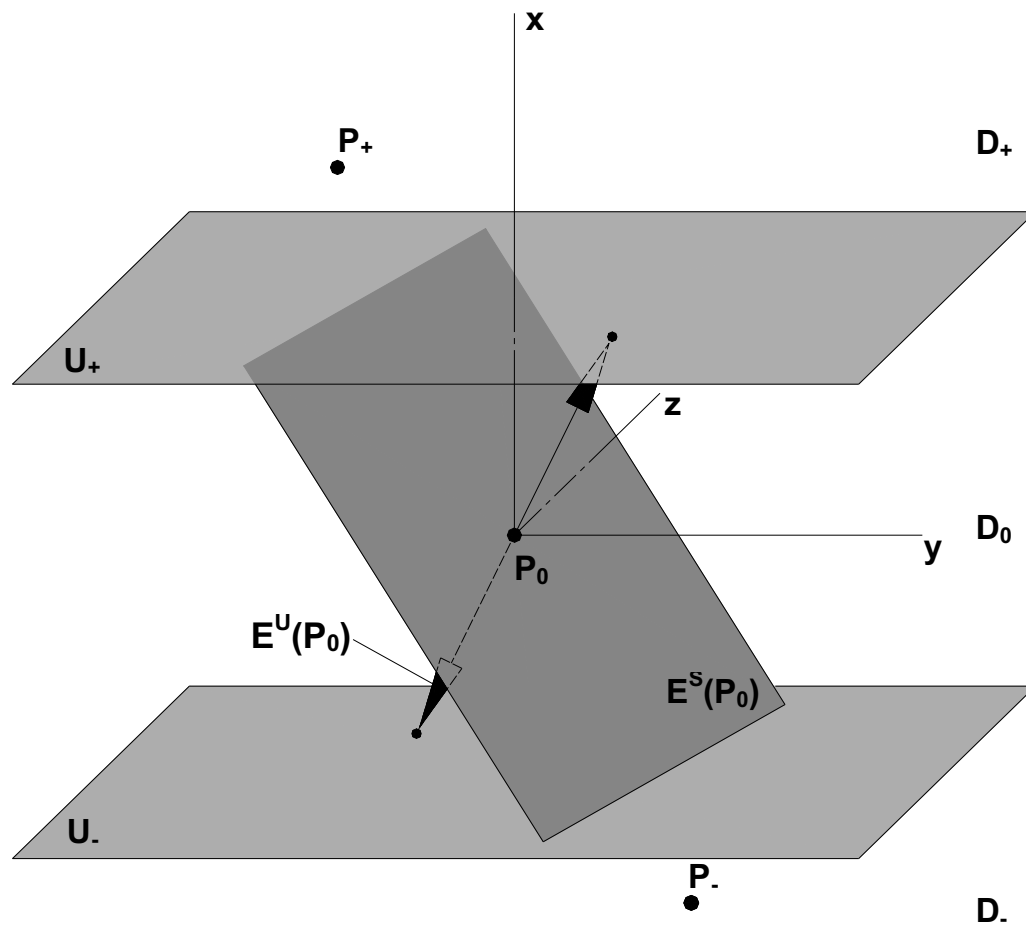
Subespaços



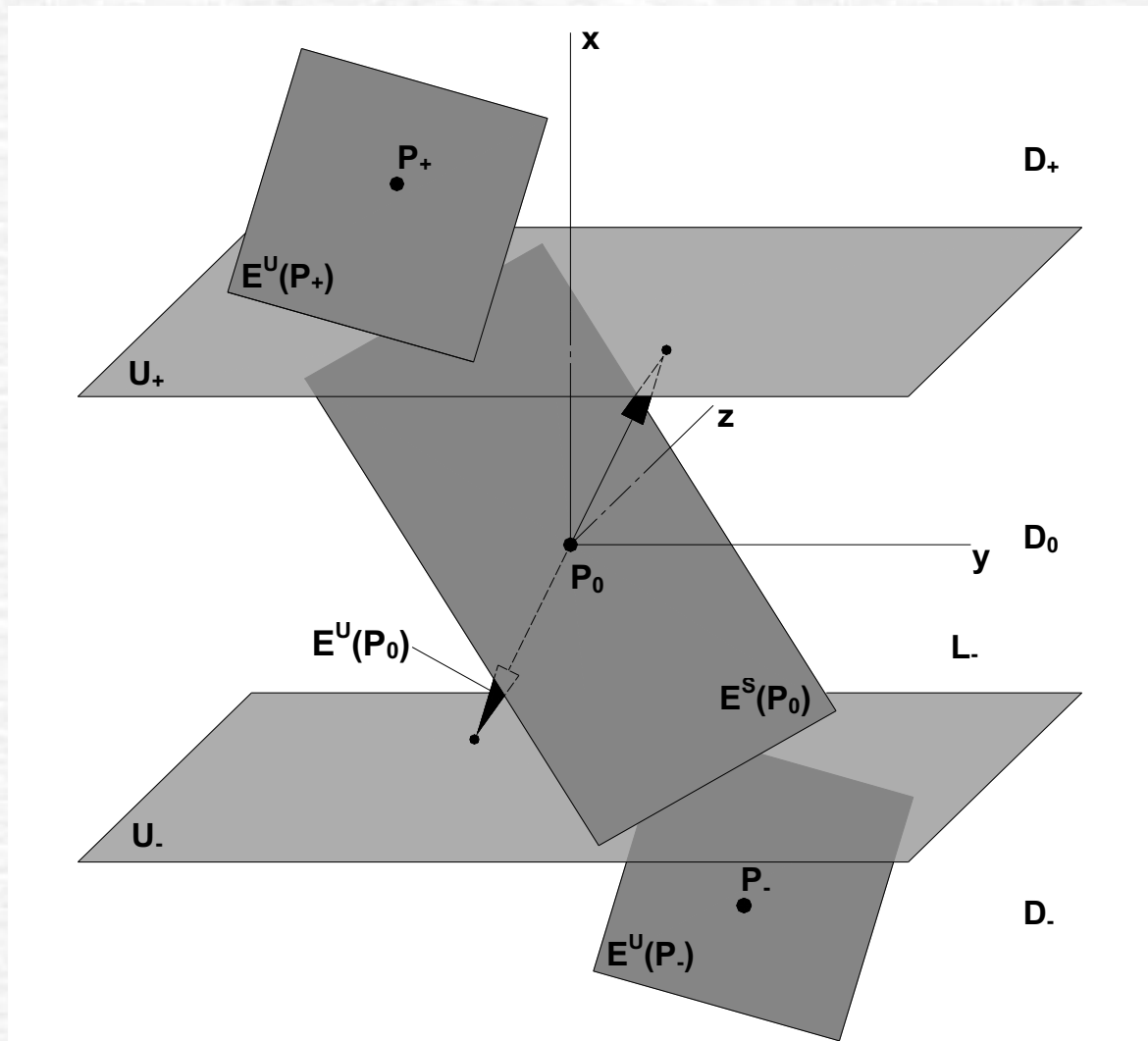
Subespaços



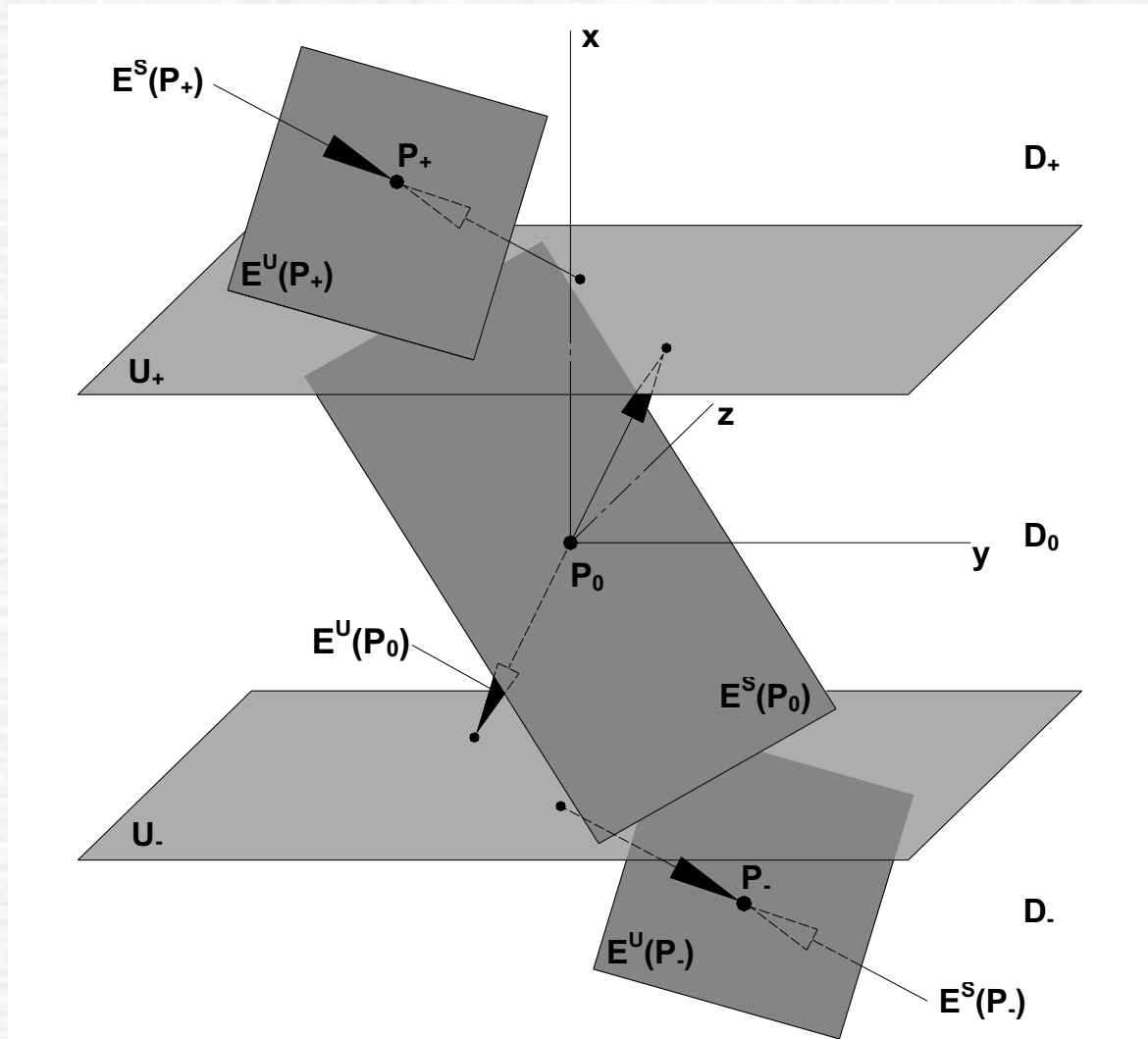
Subespaços



Subespaços



Subespaços



Subespaços

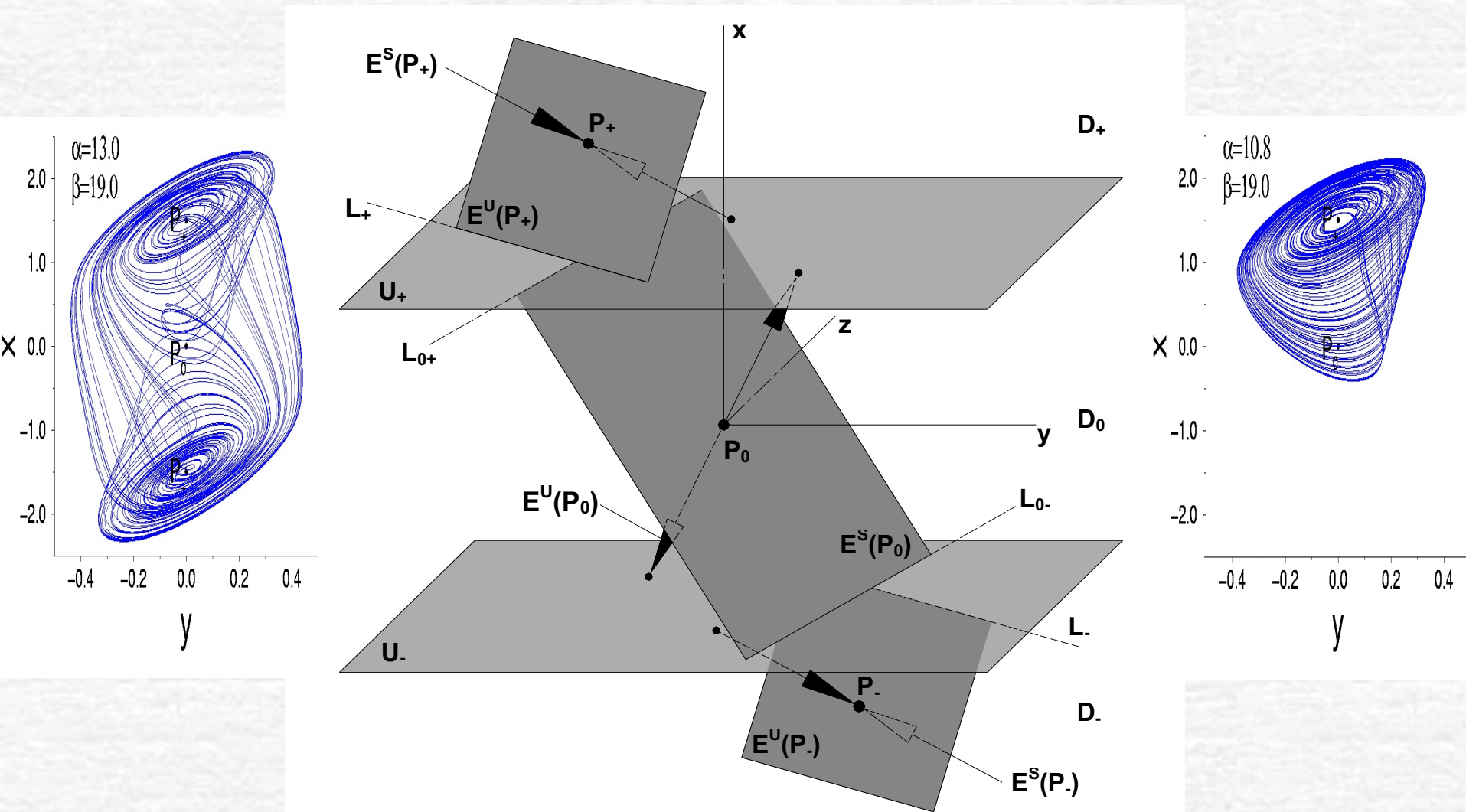


Fig. 6. Subespaços, estável e instável, dos pontos fixos P_0 , P_+ e P_- .

Variedades

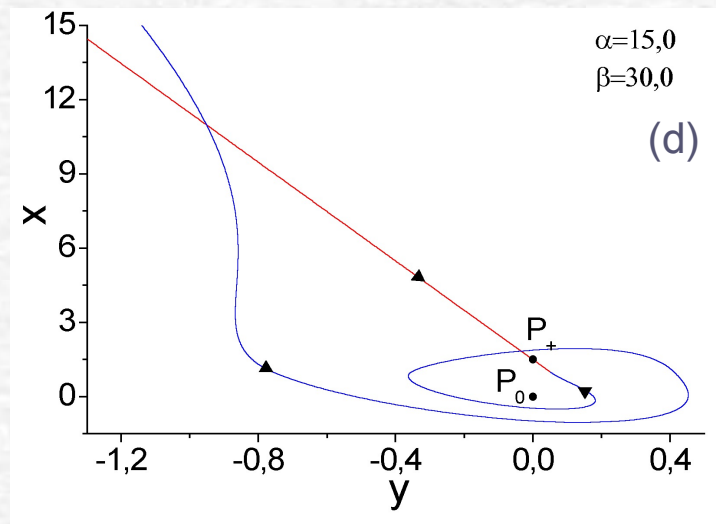
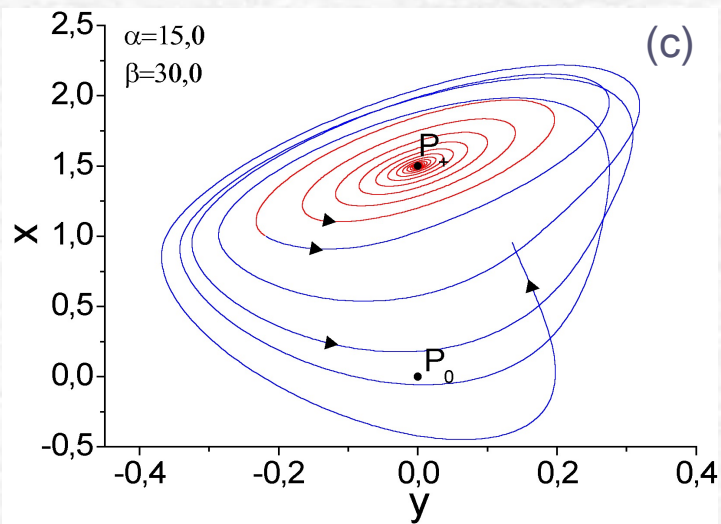
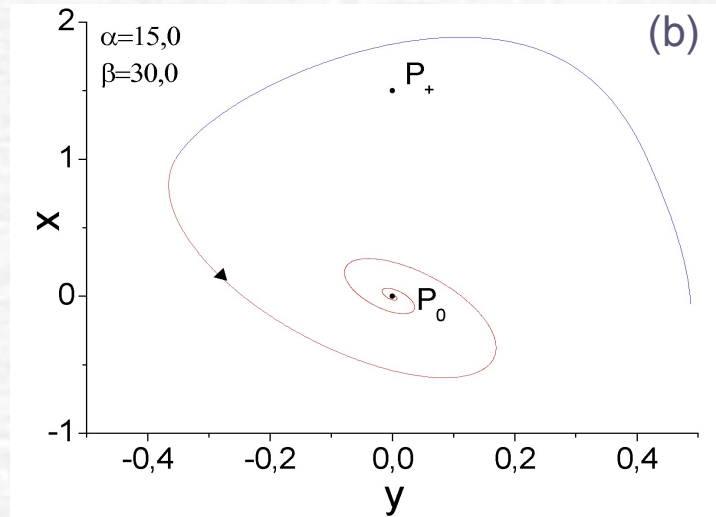
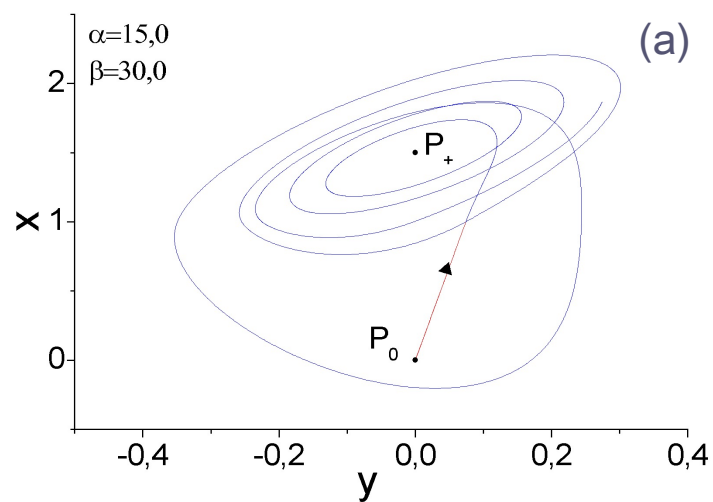
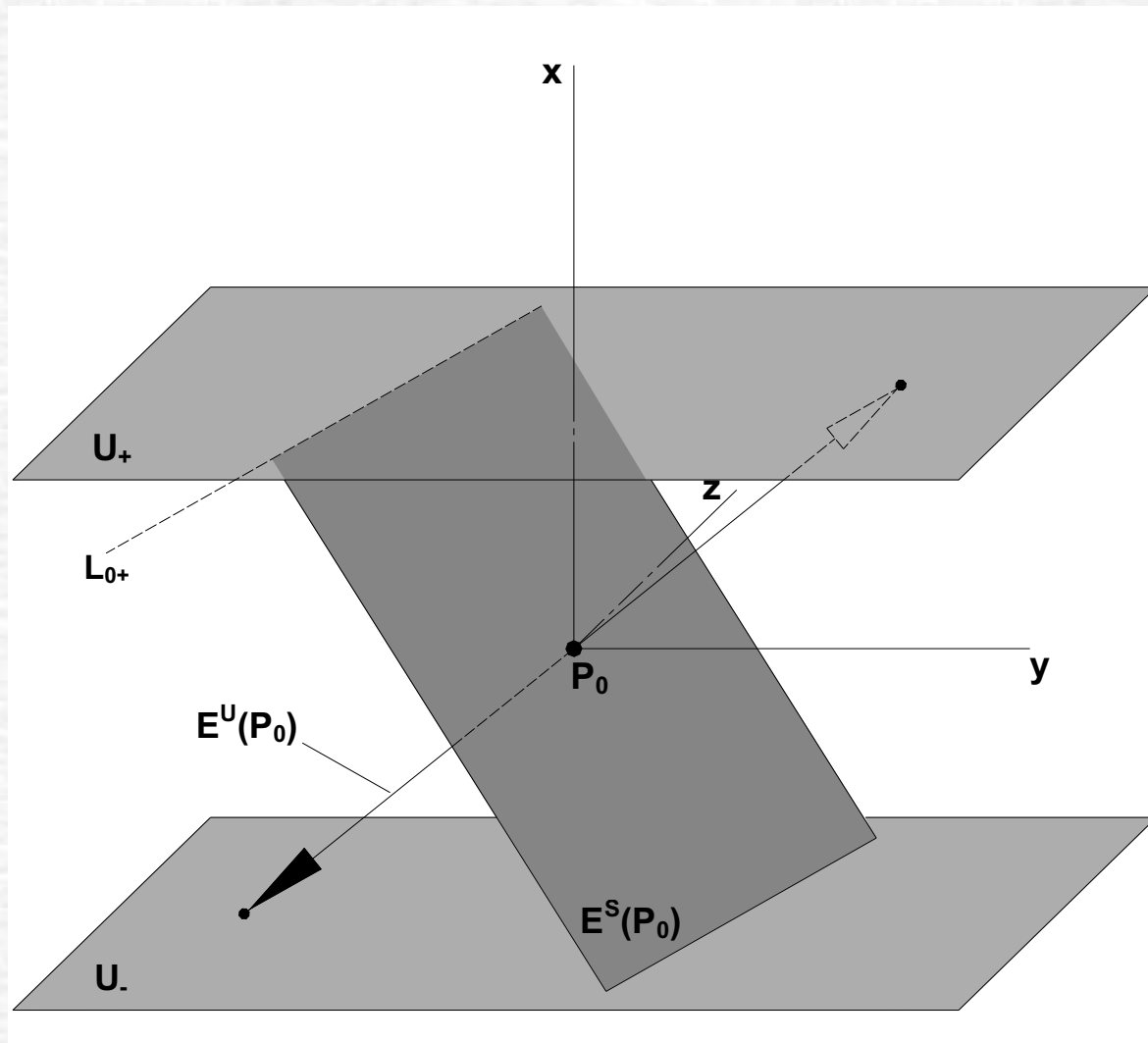
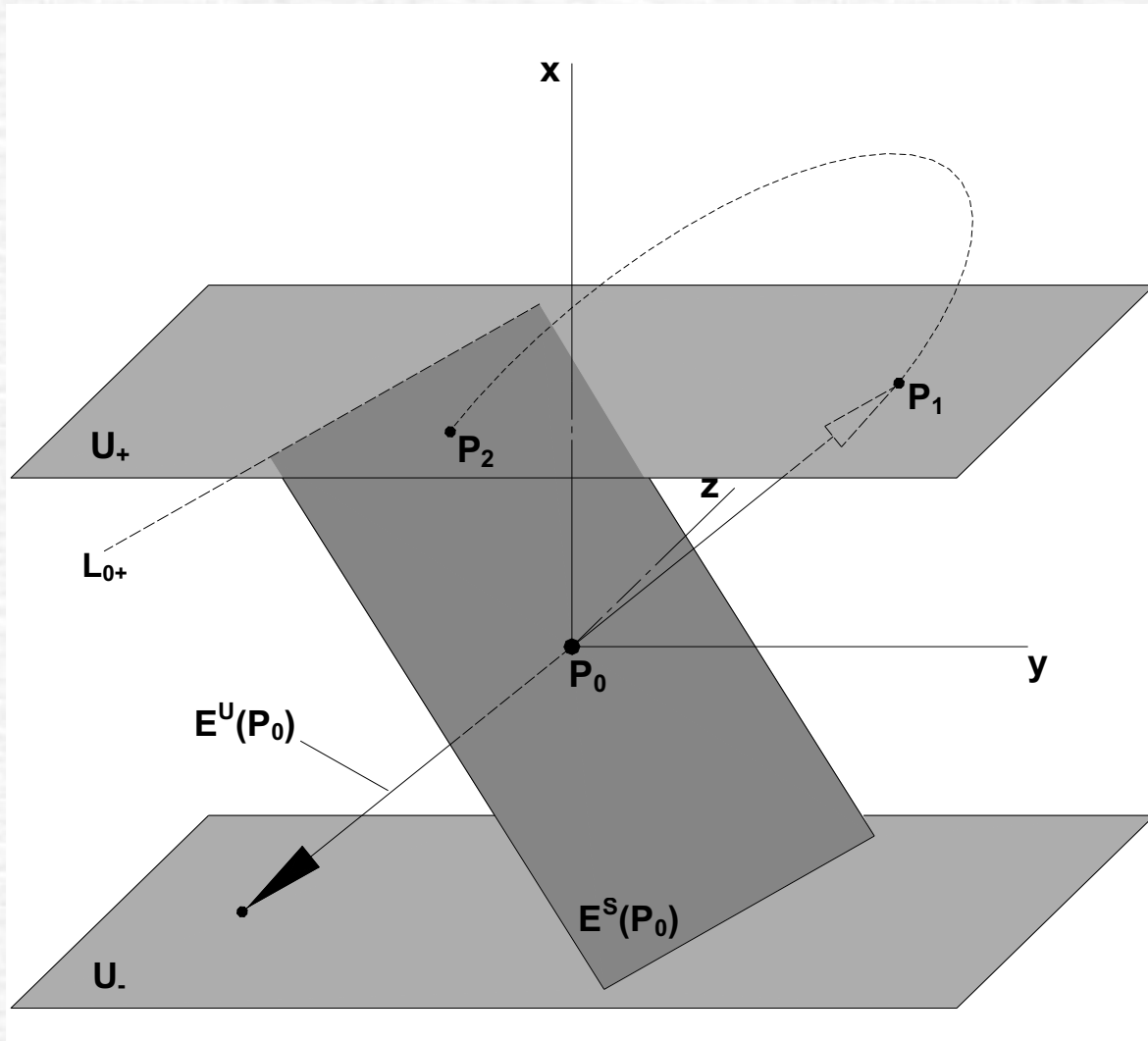


Fig. 7. Variedades estáveis em (a) e (c) e instáveis em (b) e (d), de P_0 e P_+ , respectivamente

Órbitas Homoclínicas



Órbitas Homoclínicas



Órbitas Homoclínicas

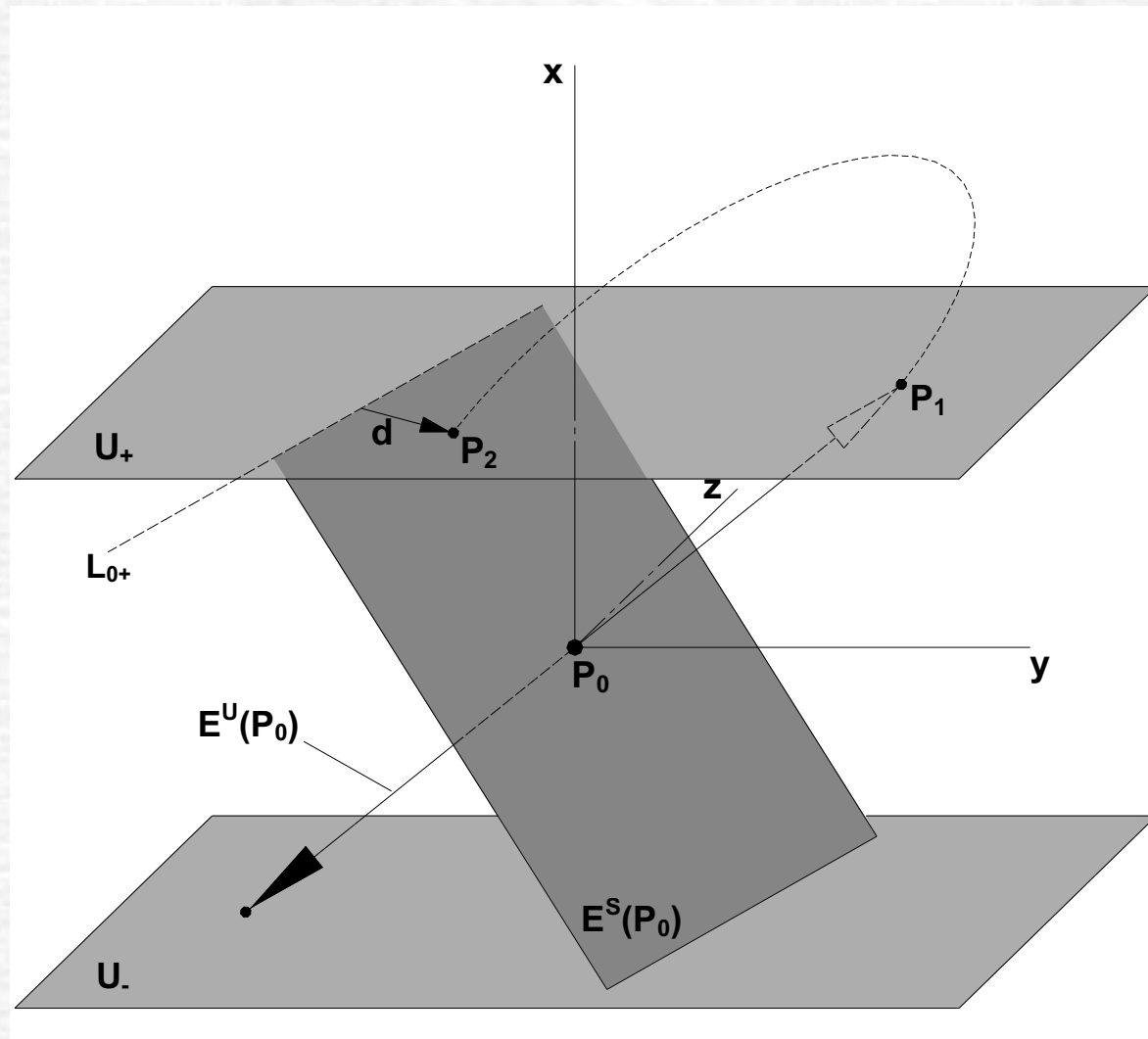


Fig. 9. Diagrama de uma possível trajetória da variedade instável. P_1 e P_2 são pontos no plano U_+ e d é a menor distância entre P_2 e L_{0+} .

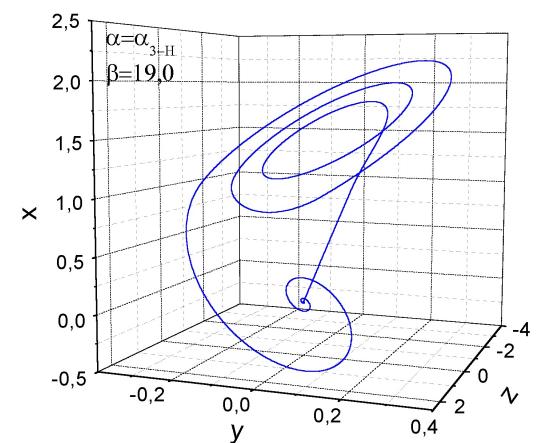
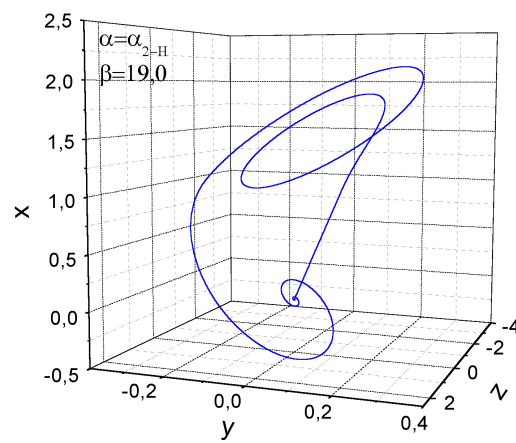
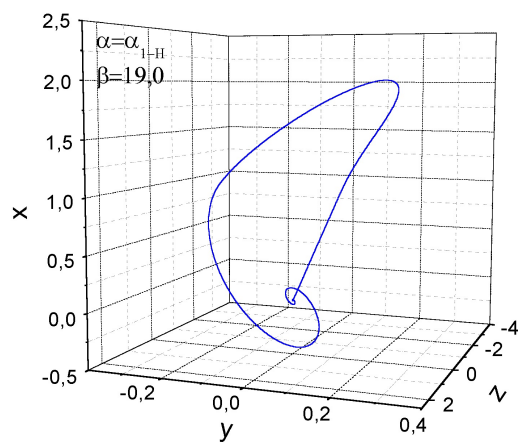
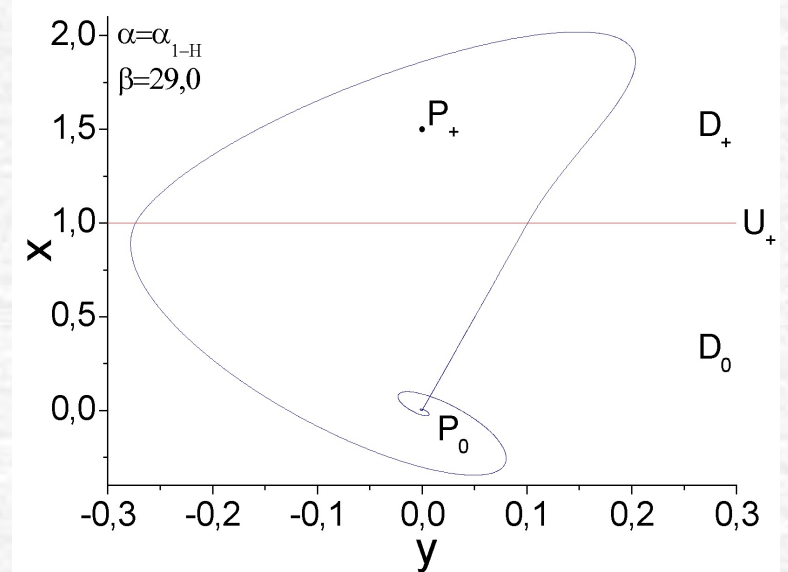
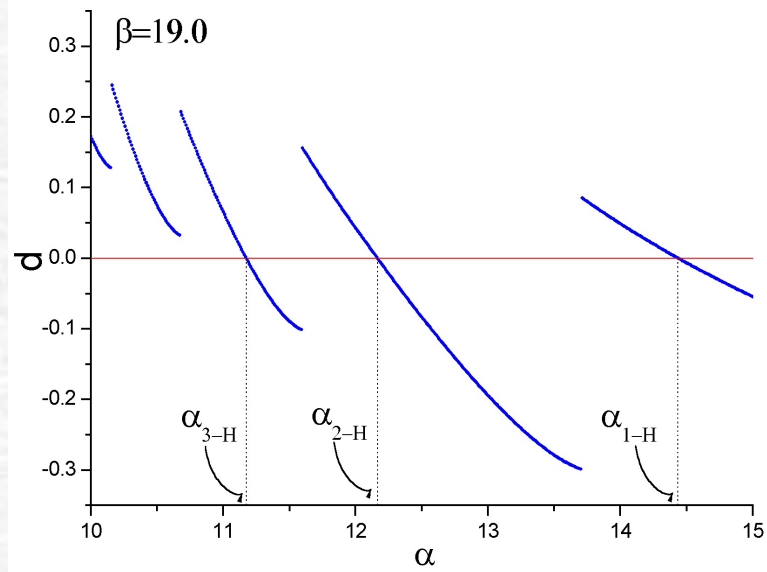


Fig. 10. $\alpha_{1-H} = 14,43746643008159$, $\alpha_{2-H} = 12,165457244219103$ e $\alpha_{3-H} = 11,174540527682883$.

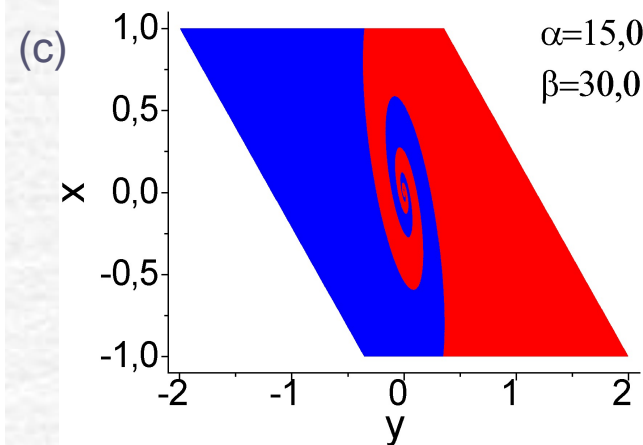
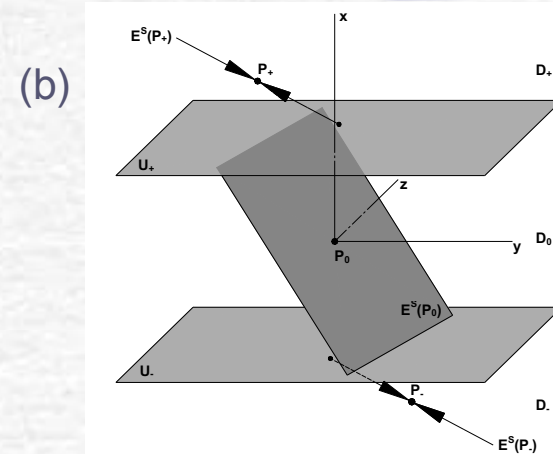
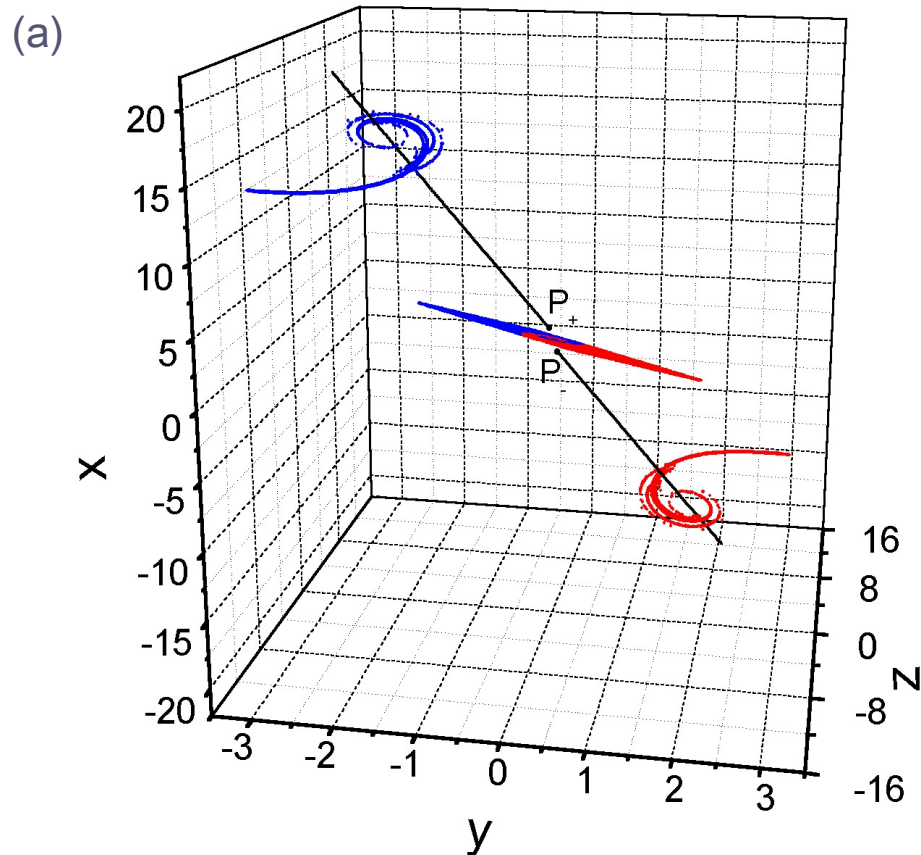


Fig. 8. (a) Em preto: subespaço $E^s(P_{+/-})$. Nos extremos: condições iniciais em azul (vermelho) que convergem para a região azul (vermelha) no subespaço $E^s(P_0)$, ampliado em (c). (b) Subespaços estáveis.

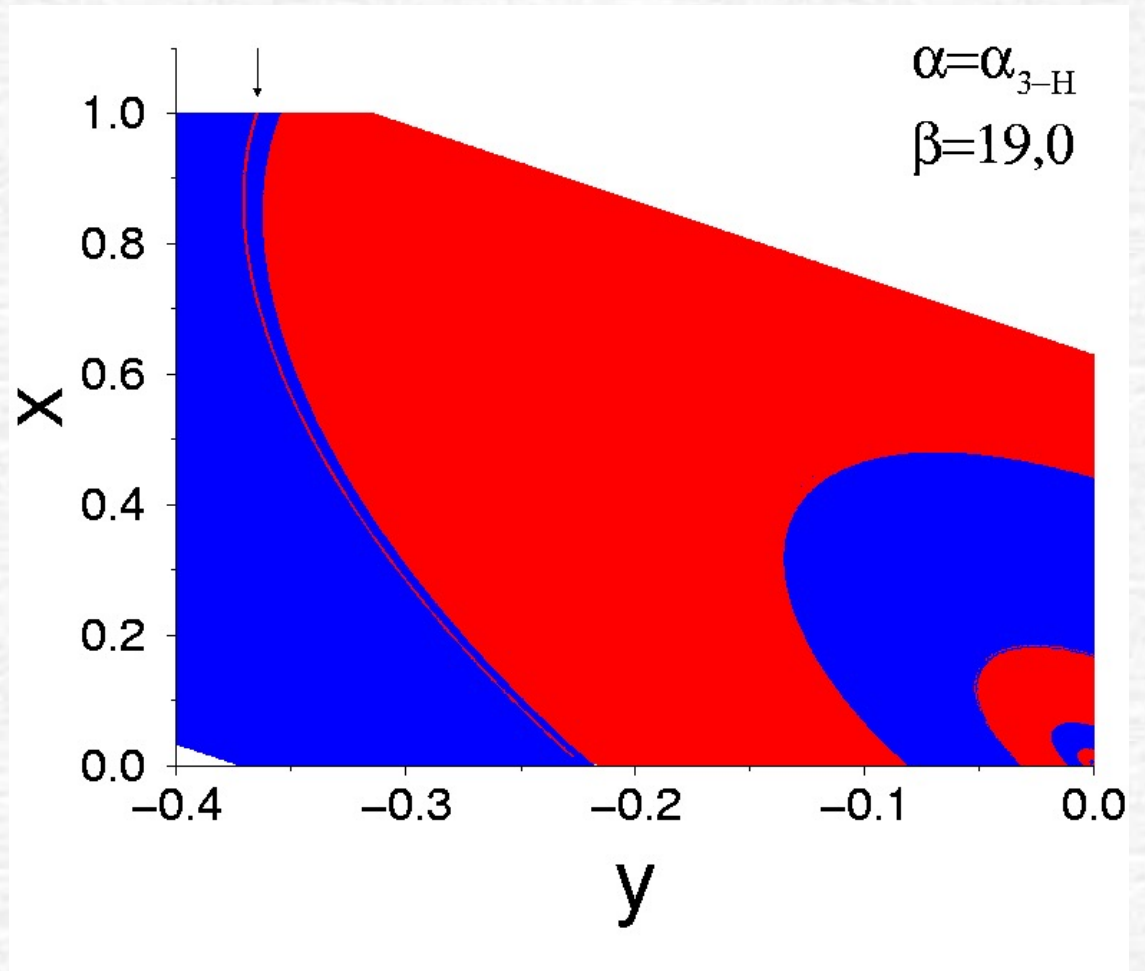
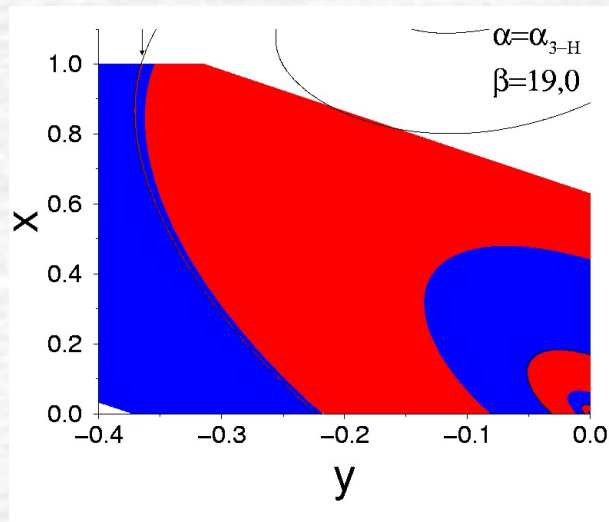
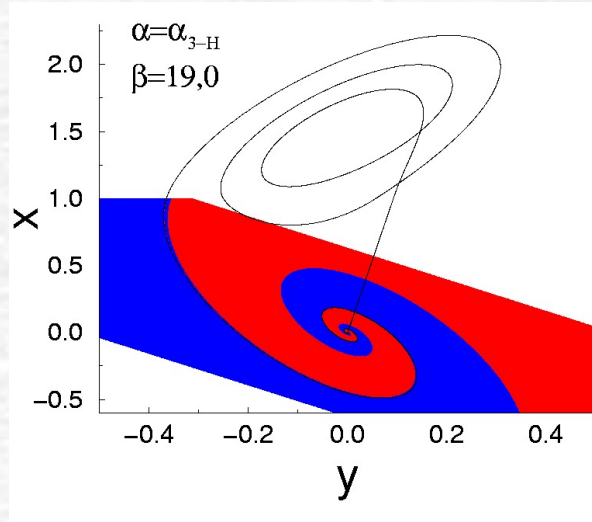


Fig. 11. Fronteira por onde passa a órbita homoclínica.

Atratores do Sistema

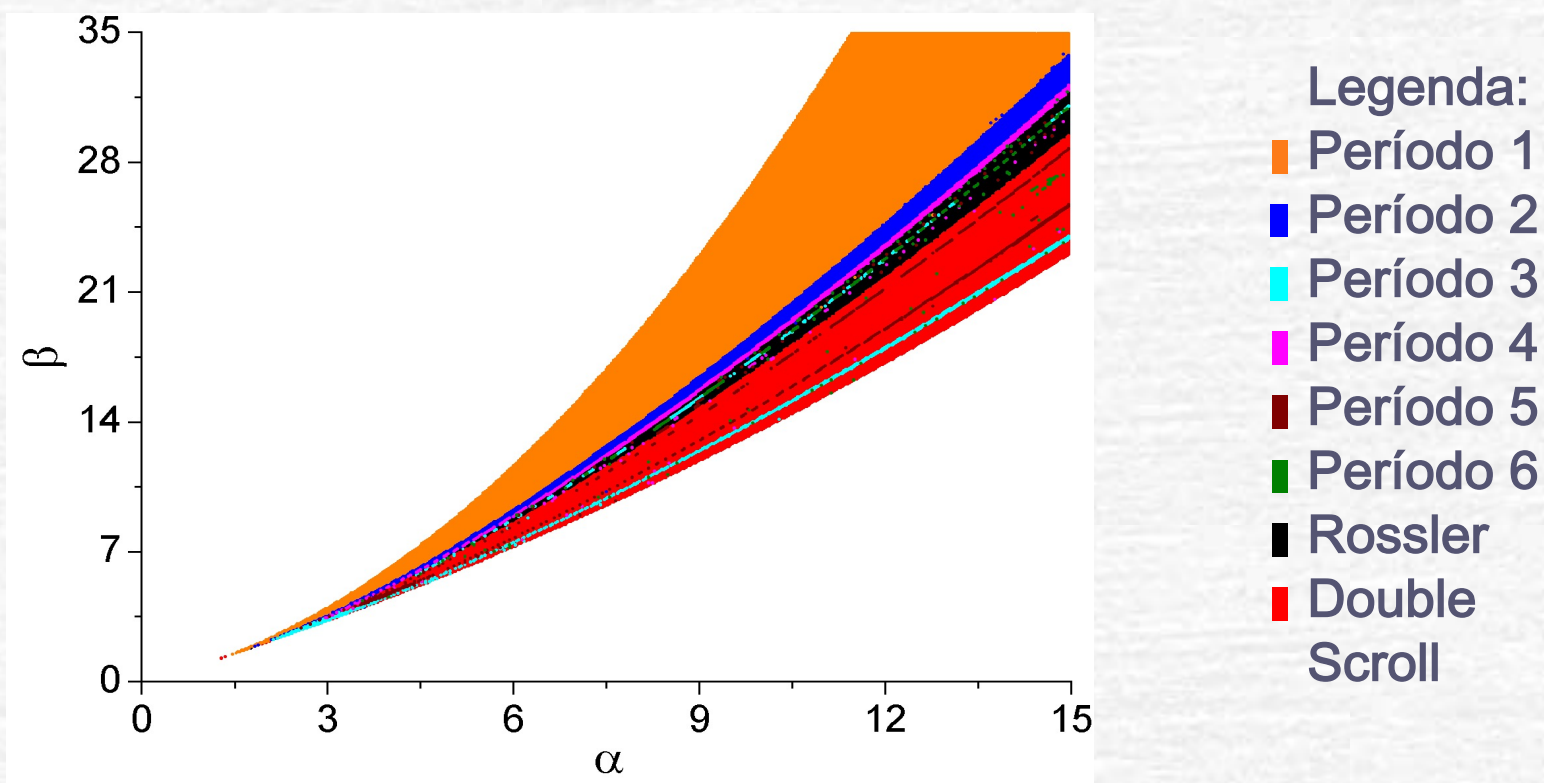


Fig. 3. Atratores no espaço dos parâmetros.

Órbitas Homoclínicas no Espaço dos Parâmetros

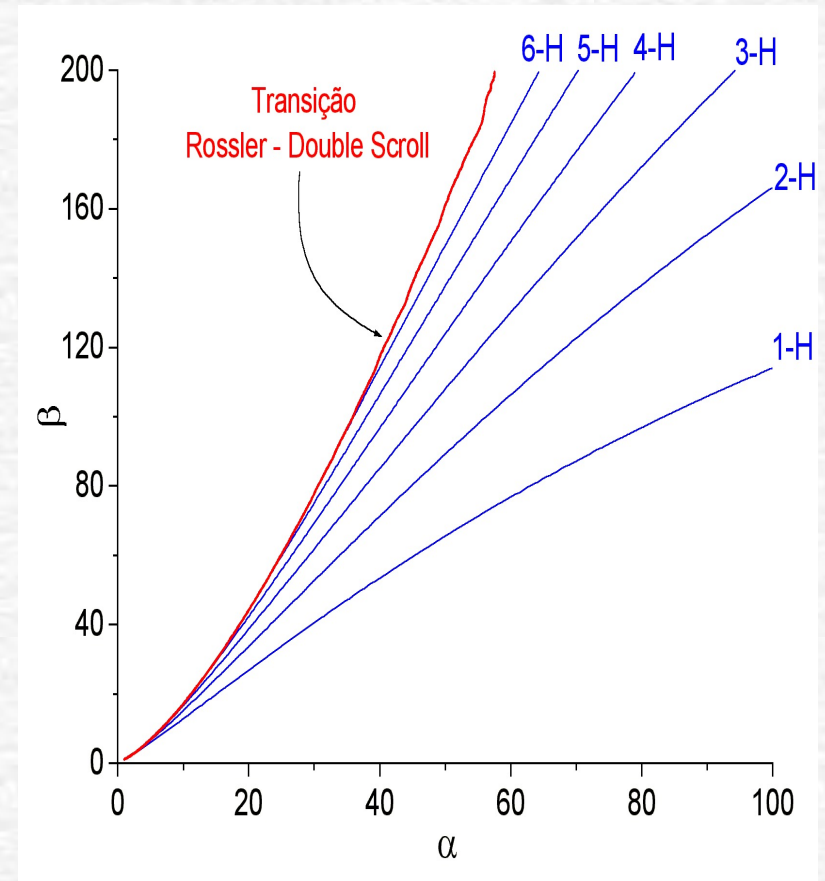
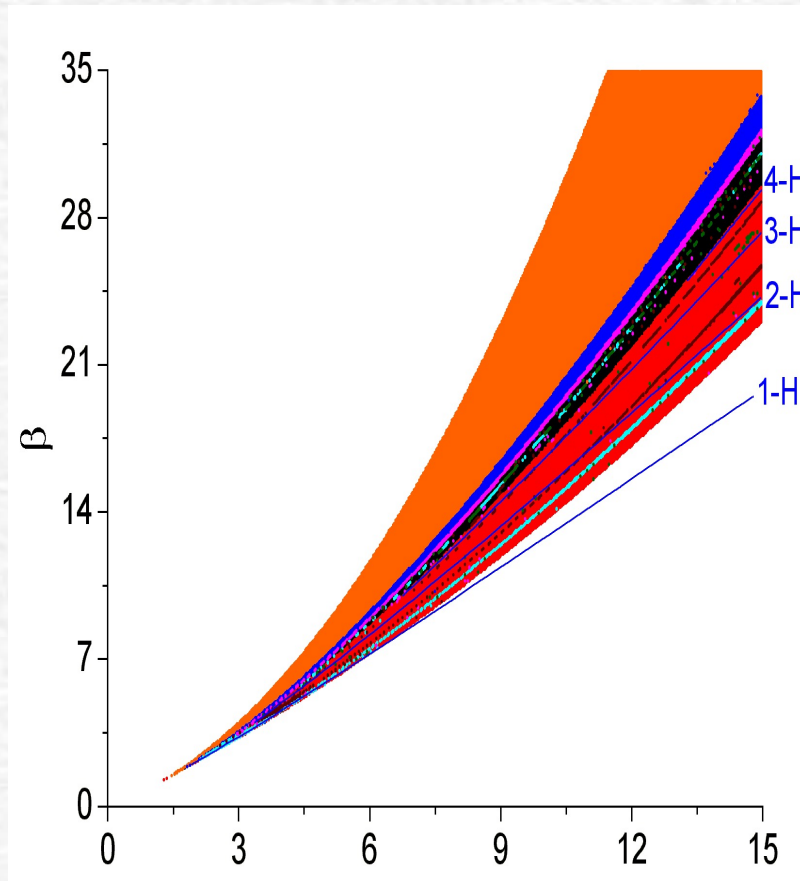
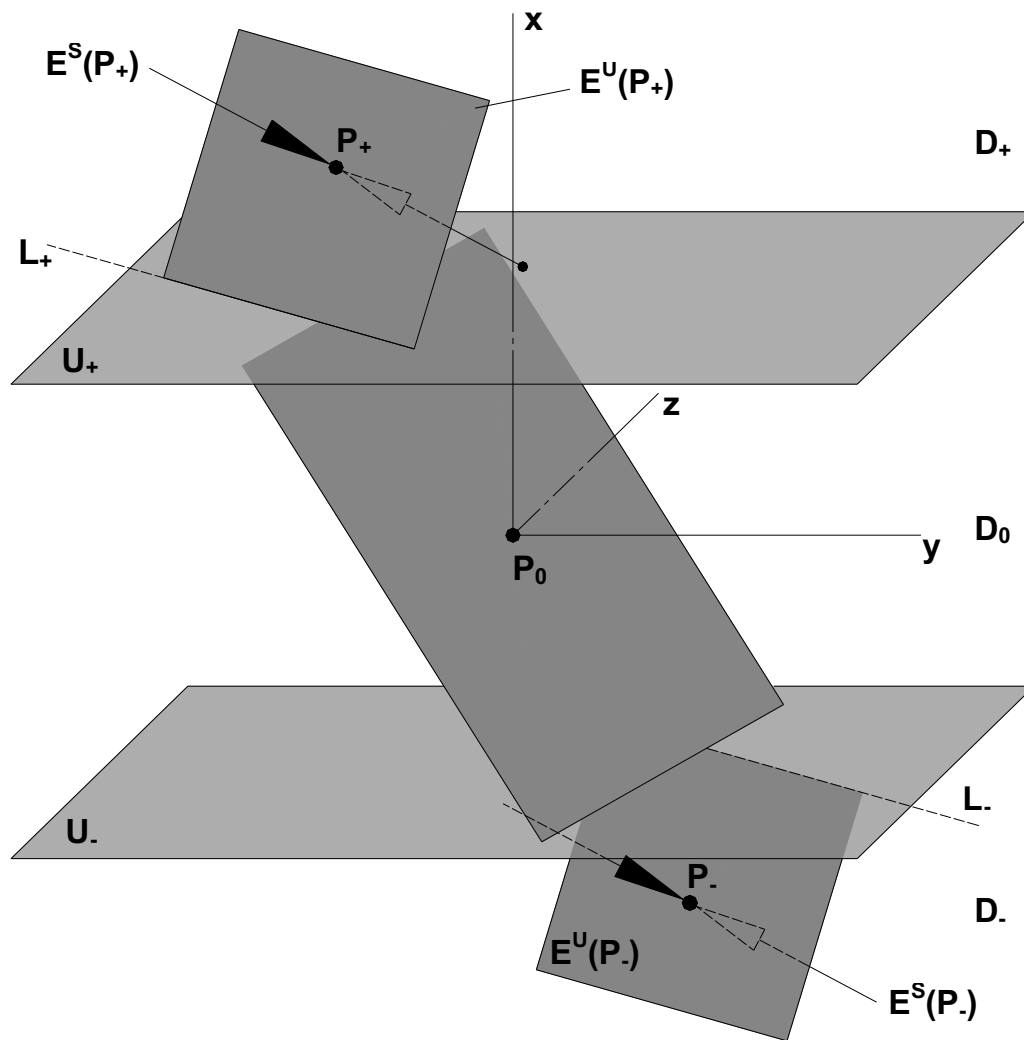
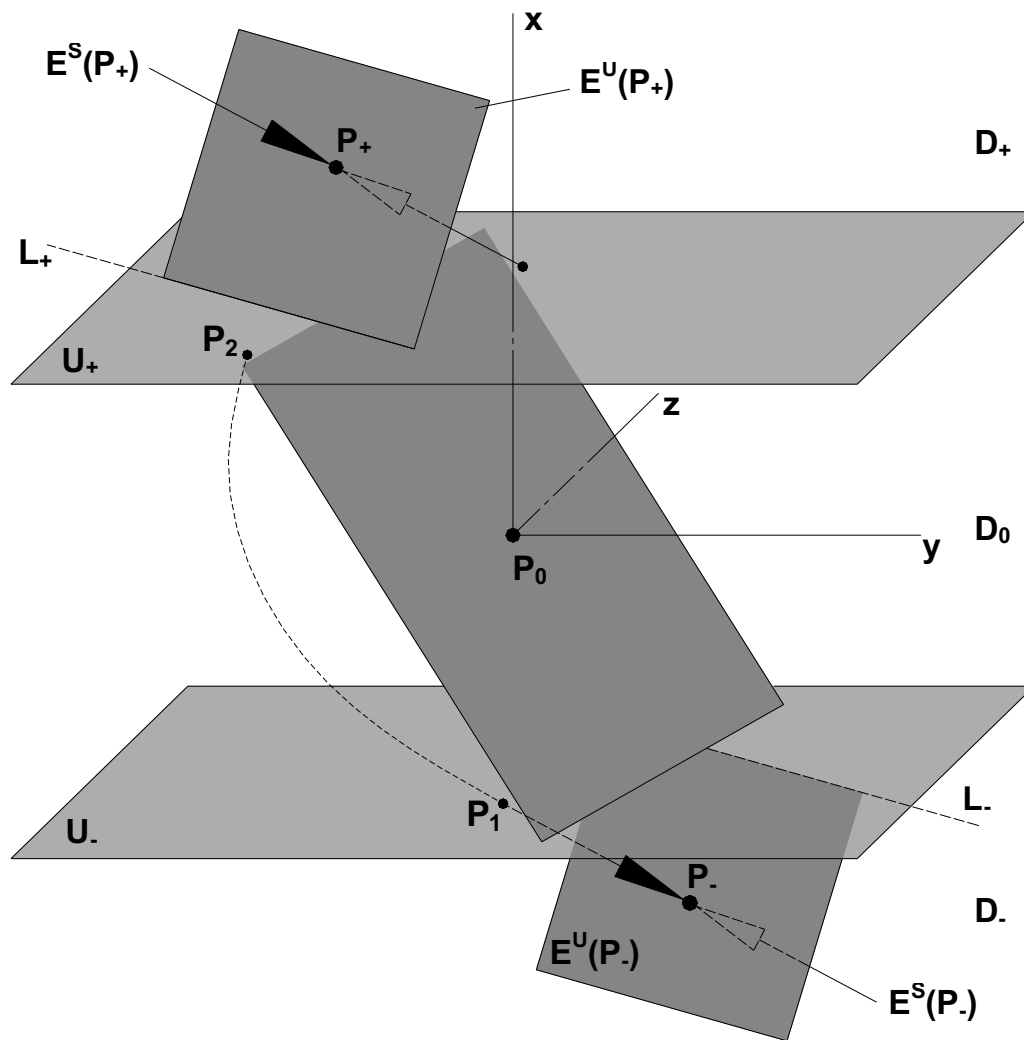


Fig. 16. Órbita homoclínicas no espaço dos parâmetros.

Órbitas Heteroclínicas



Órbitas Heteroclínicas



Órbitas Heteroclínicas

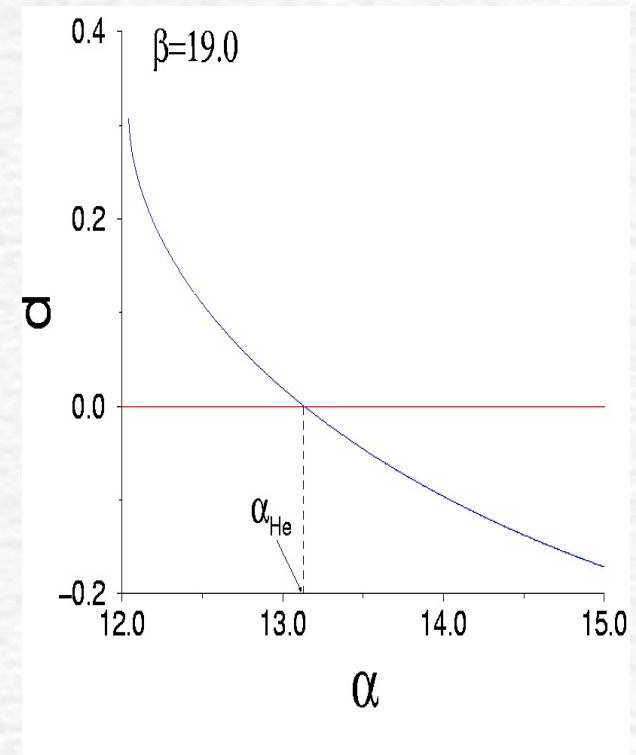
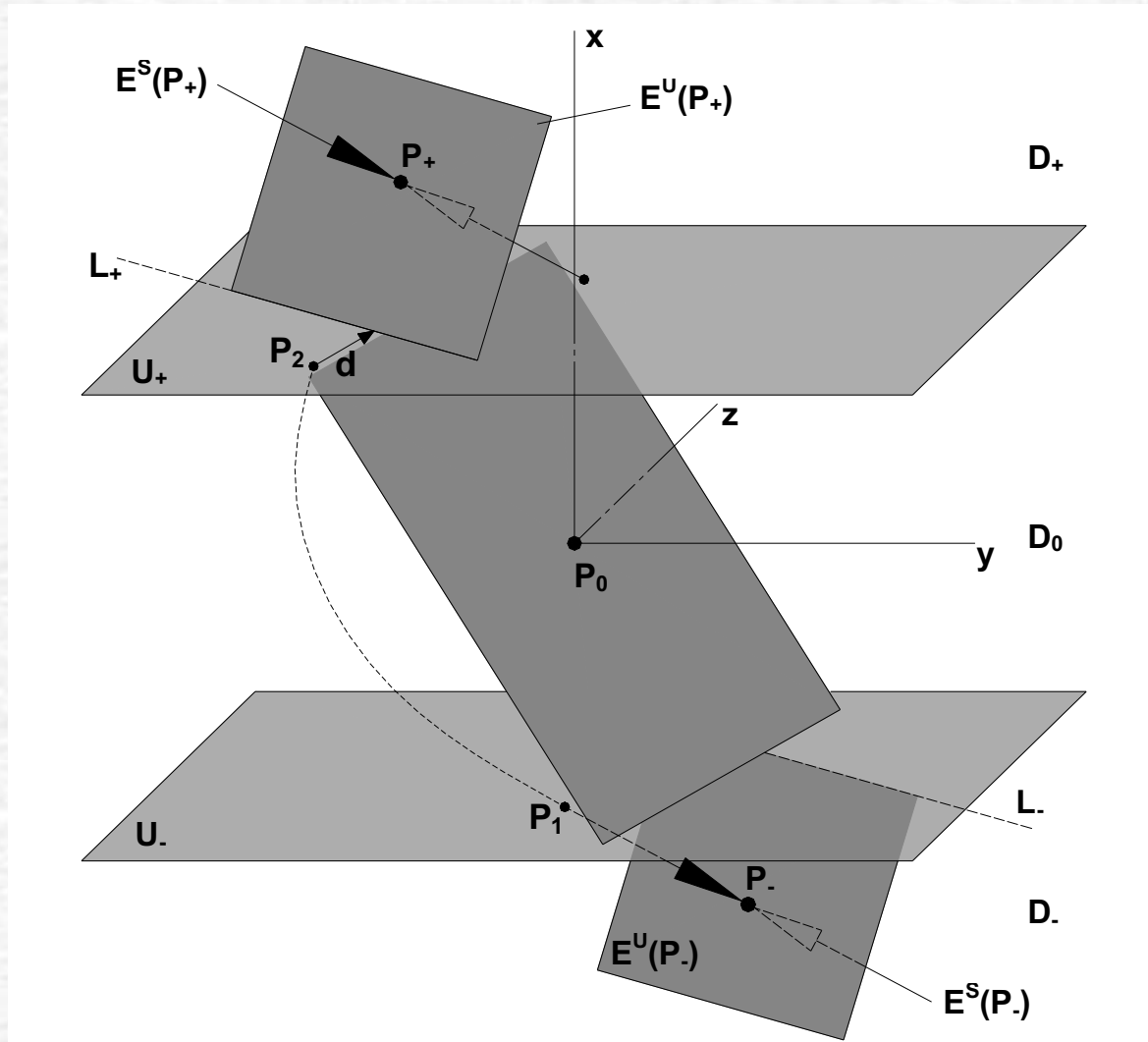
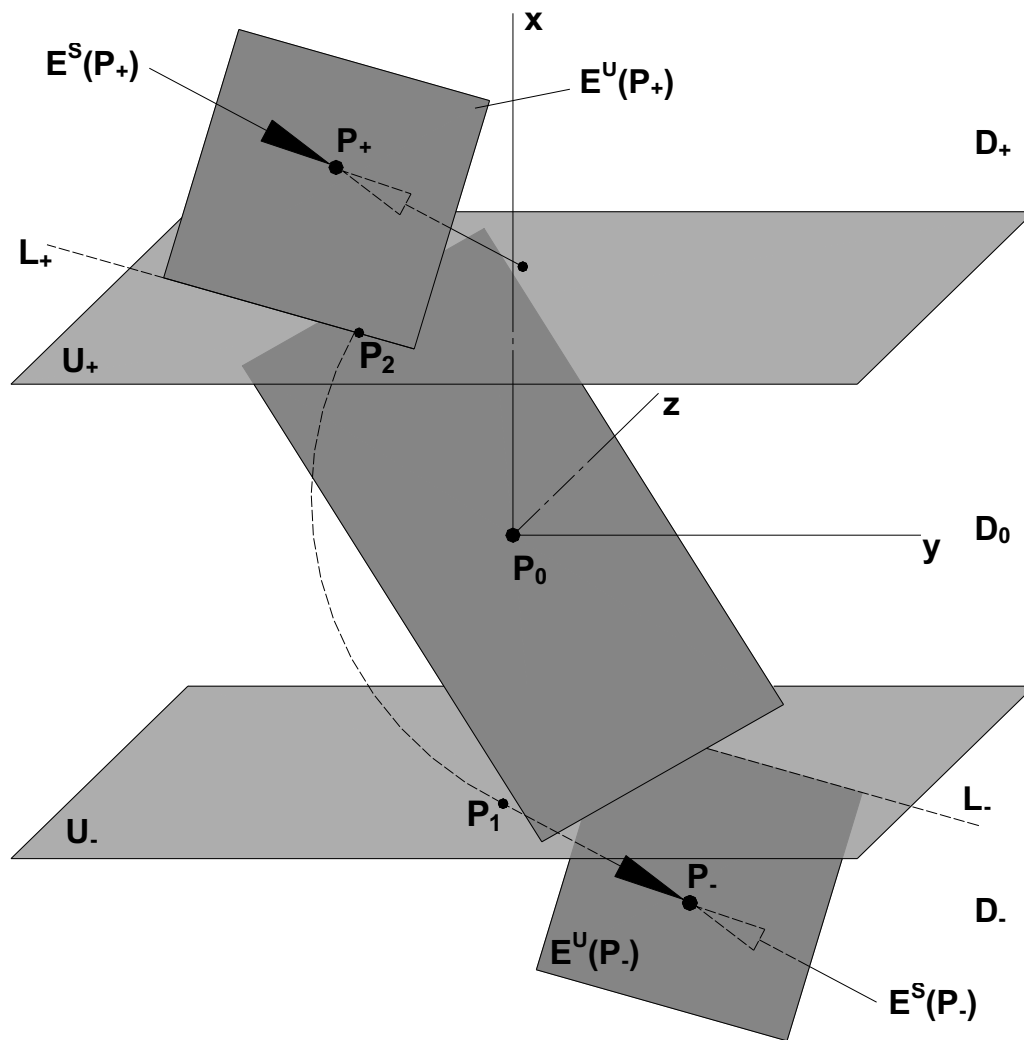
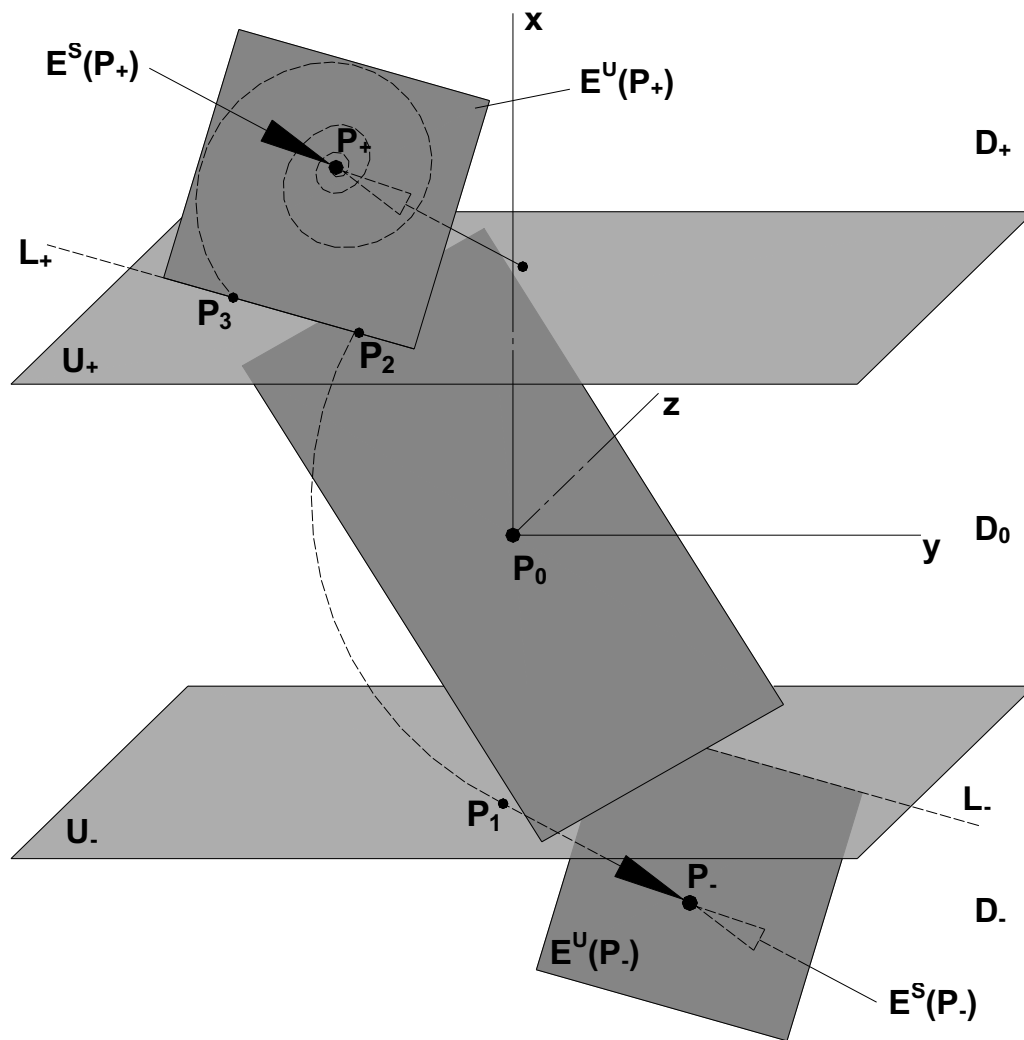


Fig. 12. Diagrama de uma possível trajetória da variedade estável de P_- a partir de P_2 , no plano U_+ , atravessando o plano U_- em P_1 . A menor distância entre P_2 e L_+ é dada por d .

Órbitas Heteroclínicas



Órbitas Heteroclínicas



Órbitas Heteroclínicas

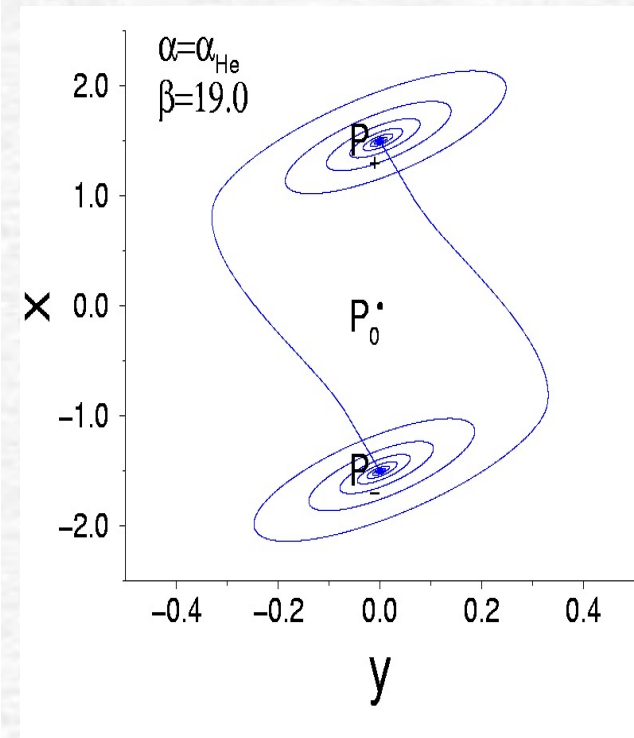
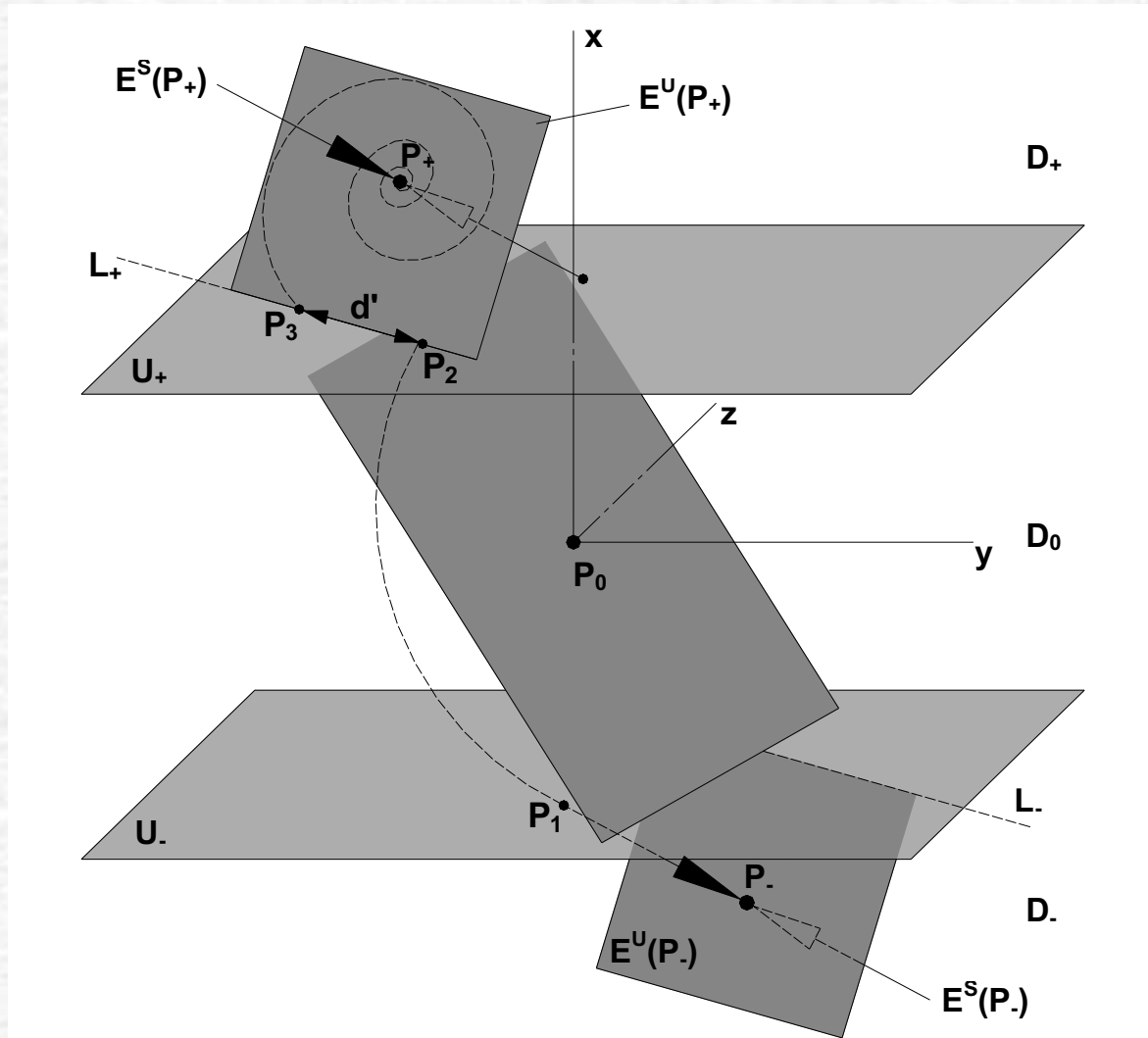


Fig. 13. Diagrama de uma possível trajetória da variedade instável de P_+ até o ponto P_3 na reta L_+ . A distância entre P_2 e P_3 , em L_+ , é dada por d' .

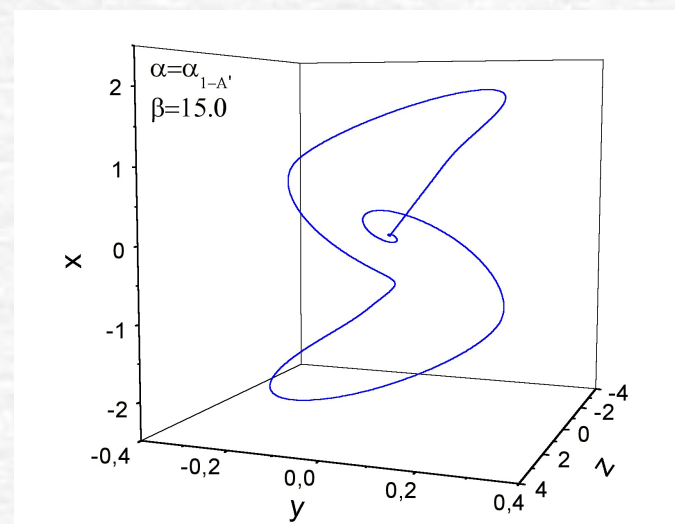
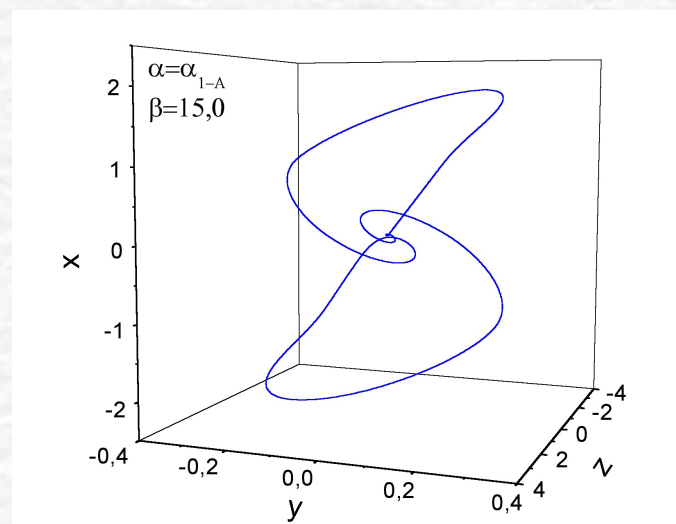
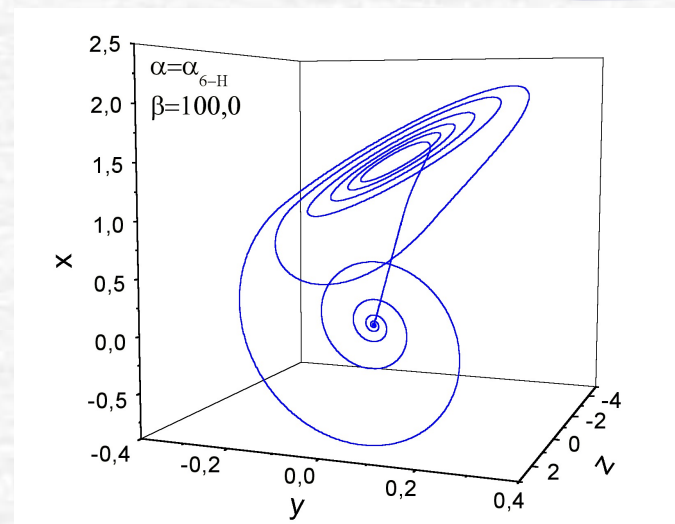
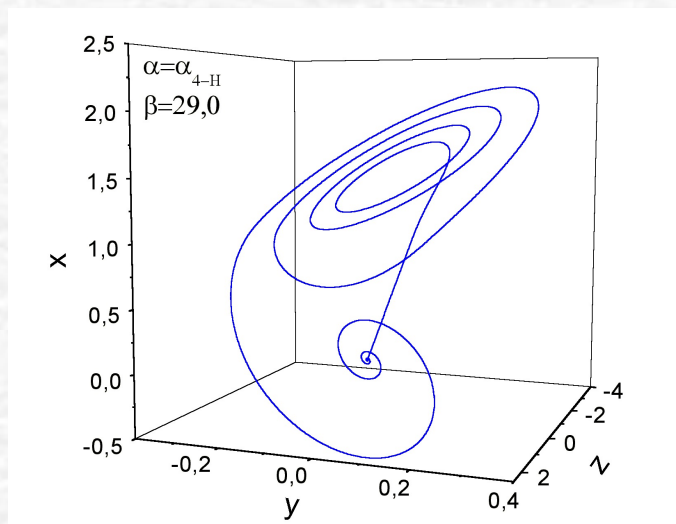


Fig. 14. Órbitas homoclínicas das famílias 4-H, 6-H, Γ e Γ' .

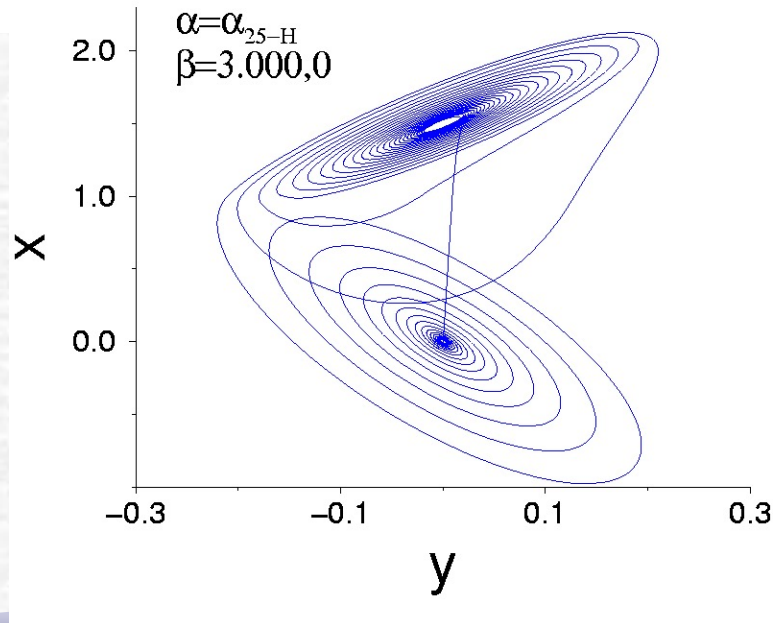
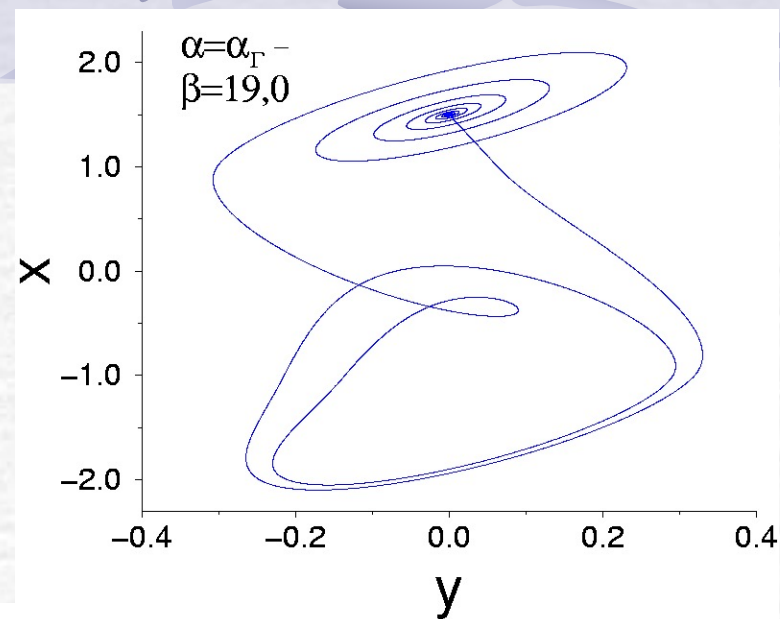
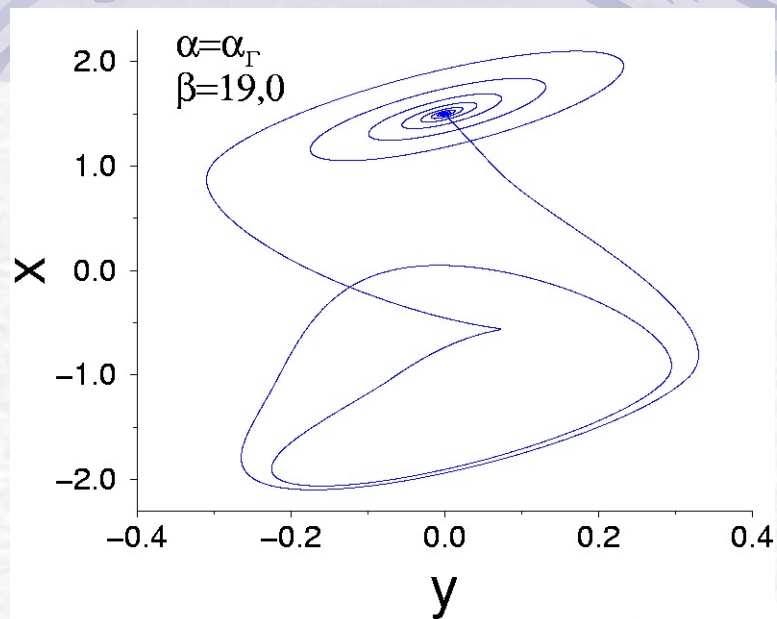


Fig. 15. Órbitas homoclínicas das famílias Γ , Γ' e 25-H.

Conclusões

- O método de busca de órbitas homo(hetero)clínicas apresentado é eficiente para sistemas lineares por partes tridimensionais.
- As variedades estáveis têm origem em duas regiões opostas e bem definidas no infinito.
- A evolução dessas regiões definem uma fronteira no subespaço estável do ponto fixo P_0 através da qual aparecem trajetórias não triviais cuja origem não se encontra no infinito.
- Se os parâmetros são tais que exista a órbita homoclínica, essa órbita pertence a uma dessas fronteiras.
- As famílias de órbitas homoclínicas n-H se apresentam numa curva contínua no espaço dos parâmetros e estão associadas à transição dos atratores caóticos Rössler e Double Scroll.
- Para valores elevados dos parâmetros, existe uma acumulação de órbitas homoclínicas, da família n-H, na fronteira entre os atratores tipo Rössler e Double Scroll.